

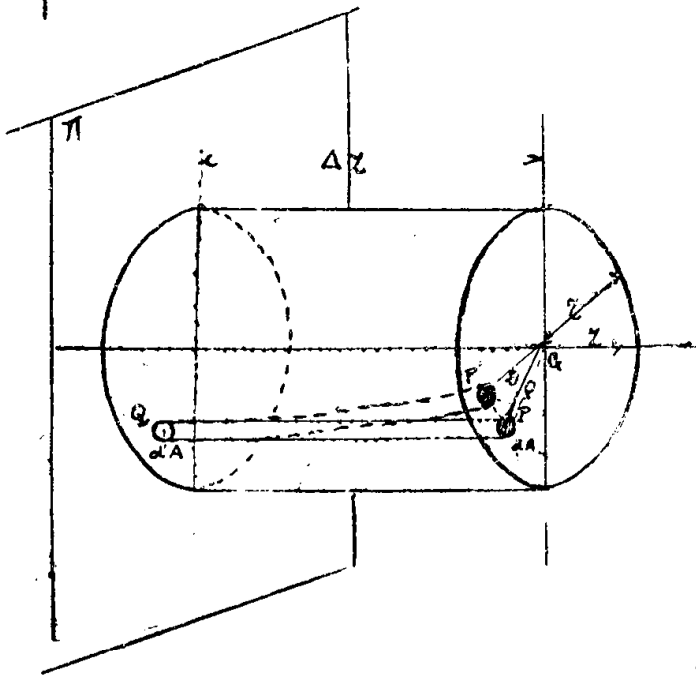
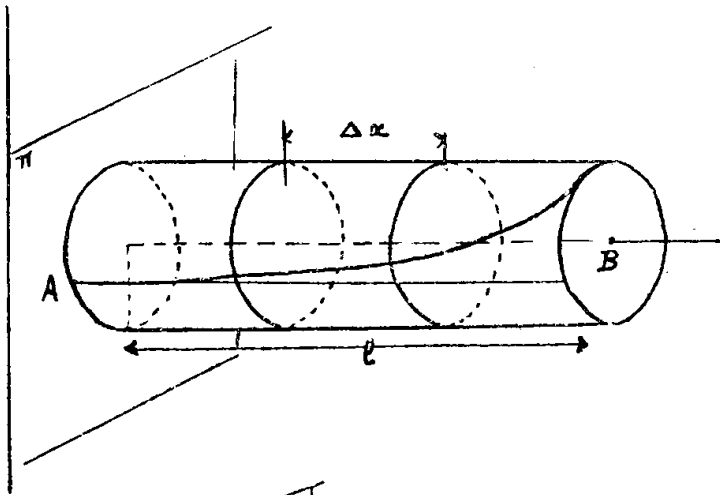
- §. 4 -

Torsione semplice

(terzo caso particolare)

Consideriamo un cilindro circolare retto di asse x ; ad esso immaginiamo di attribuire la particolare deformazione che qui descriviamo: Due sezioni trasversali qualsiasi S ed S' alla distanza Δx subiscono una rota-

zione relativa rigida eguale e $d\alpha$ (essendo α costante) intorno all'asse x così che le fibre inizialmente parallele all'asse del cilindro si dispongono secondo eliche cilindriche di eguale passo.



Consideriamo il tratto Δx di cilindro in cui la sezione A sia incastrata, la fibra QP parallela all'asse x prima della deformazione abbia per base, sulla sezione B , l'elemento

superficiale dA ; per la descritta deformazione, mentre l'estremo Q della fibra considerata è fisso, l'estremo P si sposta nel piano della sezione B descrivendo l'arco PP' di centro G . Sia ρ la distanza $GP = GP'$ e ϑ l'angolo di cui la sezione B ha ruotato intorno a x .

L'estremo P della fibra QP ha subito la descritta deformazione per effetto di una forza tangenziale $\tau_z dA$ diretta normalmente al raggio GP , (τ_z rappresenta la tensione tangenziale unitaria). Per la descritta deformazione è $\varepsilon_z = 0$ e perciò $\sigma_z = 0$ {secondo la (63) del Cap. VI. §. 1}.

Lo scorrimento subito dal punto P è dato da:

$$\gamma = \frac{PP'}{\Delta z} \quad \text{dove } PP' = \rho \vartheta.$$

Come si rileva dalle (50) del Cap. III, sarà

$$\tau_z = G\gamma = G \frac{PP'}{\Delta z} = G \frac{\rho \vartheta}{\Delta z} \quad (135)$$

Le componenti di τ_z sugli assi x ed y baricentrici giacenti nella sezione trasversale sono τ_{xz} e τ_{yz} .

Calcoliamo le caratteristiche della sollecitazione:

N_x, M_x ed M_y sono nulle per essere $\sigma_z = 0$

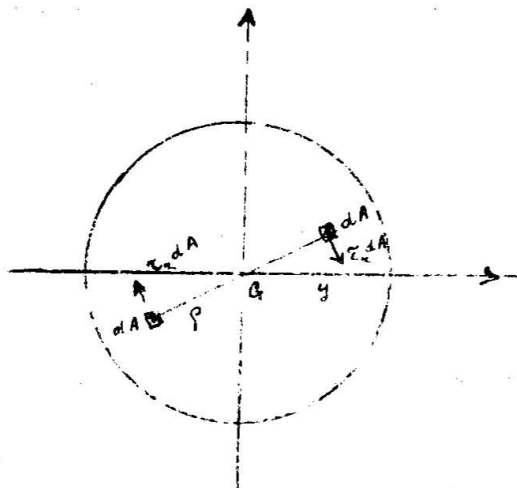
$$T_x = \int \tau_{xz} dA = 0$$

come risulta subito considerando due elementi dA simmetrici rispetto al baricentro G : essi sono sollecitati da due forze τdA entrambe normali alla congiungente il centro di dA con G , esse forze danno luogo sull'asse x a due forze di eguali intensità e versi opposti; lo stesso può ripetersi per tutte le coppie di elementi simmetrici a G , risulta quindi $T_x = 0$.

analogamente si ricava $T_y = 0$.
 Rimane a considerare M_x (Vedi
 Cap. VI. § 1).

$$M_x = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dA = \int_A \tau_x \rho dA =$$

$$= \frac{G \vartheta}{\Delta x} \int \rho^2 dA = \frac{G \vartheta}{\Delta x} I_p \quad (136)$$



dove con I_p si è indicato il momento di inerzia polare della sezione rispetto al baricentro G .

Dalla (136) si ricava

$$\vartheta = \frac{M_x \Delta x}{G I_p} \quad (137)$$

che è la formula di elasticità per la sollecitazione di torsione semplice.

Ricordando l'osservazione fatta a Cap. VI. § 1°, si trae che la descritta deformazione è quella che corrisponde all'azione delle forze esterne quando queste abbiano come risultante nella base libera $x = l$ (e quindi in ogni sezione trasversale, vedi Cap. VI § 1°) una coppia di momento M_x .

La formula di resistenza per la torsione semplice si ottiene ponendo nella (135) il valore di $\frac{\vartheta}{\Delta x}$ ricavato dalla (136):

$$\tau_x = G \frac{\rho \vartheta}{\Delta x} = \frac{M_x}{I_p} \rho \quad (138)$$

Essendo M_x e I_p costanti per tutte le sezioni, τ_x , in ogni sezione, dipende unicamente da ρ . Per la fibra media (detta asse di torsione) $\tau_x = 0$ come del resto deve essere

restando essa immobile nella deformazione del solido.

Considerando fibre sempre più lontane dall'asse τ_x cresce e raggiunge il suo massimo valore alla periferia.

Chiamando r il raggio della sezione del cilindro si avrà:

$$\tau_{x \max} = \frac{M_x}{I_p} r \quad (139)$$

ricordando il valore di I_p sarà:

$$\tau_{x \max} = \frac{16 M_x}{\pi d^3} \quad (140)$$

dove d è il diametro della sezione.

*

* *

Equazione di stabilità.

Si è visto (Cap. III) che ogni scorrimento è accompagnato da una dilatazione principale positiva e da una dilatazione principale negativa inclinate di 45° rispetto alle direzioni ortogonali secondo cui avviene lo scorrimento (Si ricordi che l'esistenza della τ_x nel piano della sezione importa l'esistenza di una tensione tangenziale uguale a τ_x su elementi normali alla sezione trasversale, cioè giacenti in piani passanti per l'asse x . (V. Cap. II). Ivi si è visto che le tensioni principali sono proprio uguali a τ , e le dilatazioni principali sono:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{m+1}{E m} \tau_x$$

Possiamo dunque ricavare le tensioni principali ideali (V. Cap. VI).

$$E \varepsilon_1 = -E \varepsilon_2 = \frac{m+1}{m} \tau_x$$

che, per la stabilità, occorre che non superino mai, in valore assoluto, il minore dei carichi di sicurezza rispettivamente a trazione ed a compressione.

Indicando con $\epsilon_{x \max}$ il massimo valore di ϵ_x (V. (139)) si dovrà avere:

$$k \geq \frac{m+1}{m} \epsilon_{x \max} \quad (140)$$

Può essere utile introdurre un valore limite per $\epsilon_{x \max}$, valore che si dice di solito con t e si chiama carico di sicurezza alla tensione tangenziale (o anche carico di sicurezza al taglio) tale valore secondo la (140) è:

$$t = \frac{m}{m+1} k \quad (141)$$

nella pratica, ponendo $m=4$ si ricava $t = \frac{4}{5} k$.

Con ciò la precedente equazione di stabilità può esprimersi anche:

$$t = \epsilon_{x \max} \quad (142)$$

Esempio.

Calcolare il diametro di un albero di acciaio capace di trasmettere una potenza motrice di 100 cavalli, compiendo 100 giri al minuto primo, imponendo la condizione che la sua deformazione di torsione sia minore di 20' sessagesimali per metro.

Detto M_z il momento torcente espresso in kgm ; esso comunica all'albero un lavoro $M_z 2\pi$ per ogni giro, e per 100 giri, cioè in un minuto primo $M_z 2\pi \times 100$; in un minuto secondo esso comunica un lavoro di

100 cavalli, dunque

$$\frac{M_z 2\pi \times 100}{60 \times 75} = 100 \quad \text{da cui } M_z = 721000 \text{ Kgmm.}$$

Detta ϑ la misura ciclometrica dell'angolo di $20'$ si ha:

$$\vartheta = \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{20}{60} = 0.00578$$

questa rappresenta la massima deformazione angolare di torsione dell'albero per ml: quindi per un mm:

$$\vartheta = 0,00000578$$

Dalla formula di elasticità (137) si ottiene:

$$\vartheta = \frac{M_z 1 \text{ mm}}{G I_p}$$

da cui, sostituendo i valori di ϑ ed M_z : e ponendo

$$G = \frac{2}{5} E = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad \left(G = \frac{m}{2(m+1)} E \right)$$

$$I_p = \frac{721000}{8000 \times 0,00000578}$$

d'altra parte

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0.1 d^4 \quad \text{quindi}$$

$$0.1 d^4 = \frac{721000}{8000 \times 0,00000578}$$

da cui $d^4 = 157000000$

$$d = 111 \text{ mm.}$$

applicando la (140) possiamo verificare se la sollecitazione massima è minore del carico di sicurezza al taglio:

$$\bar{\tau}_{\text{max}} = \frac{16 \times 721000}{8.14 \times 1367631} = \frac{1150000}{426000} = 2,62 \text{ Kg/mm}^2.$$

Lavoro di deformazione.

Applicando il Teorema di Clapeyron, il lavoro di deformazione è:

$$\frac{M_x \vartheta}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_x \Delta x}{G I_p} \quad (143)$$

infatti M_x , compie lavoro per effetto della rotazione ϑ data dalla (137).

Corona circolare.

La teoria della torsione svolta per la sezione circolare piena vale anche per la sezione circolare anulare; indicando in tal caso con D il diametro del circolo maggiore e con d quello del circolo minore sarà:

$$\vartheta = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_x l}{G} \quad (144)$$

la sollecitazione massima sarà:

$$\tau_{x \max} = 16 \frac{M_x D}{\pi (D^4 - d^4)} \quad (145)$$

Sezione rettangolare.

Qualora invece di considerare un solido a sezione circolare (o ad a corona circolare) si prendesse in esame un solido di sezione diversa per es. rettangolare si constatarebbe, anche sperimentalmente, che il principio della conservazione delle sezioni piane non è più verificato.

In tal caso gli estremi delle diverse fibre inizialmente parallele all'asse del solido, dopo la deformazione, non si troverebbero su una parte ed altre dall'altra di essa;

si intruisce quindi che la distribuzione delle forze elastiche in S è ben diversa da quella che si è vista nel caso della sezione trasversale circolare, in cui è verificato il principio della conservazione delle sezioni piane.

Per eseguire i laboriosi sviluppi necessari riportando i risultati per la sezione rettangolare che si presenta spesso nelle applicazioni di cemento armato.

La tensione tangenziale è massima in corrispondenza dei punti di mezzo dei lati più lunghi.

Per i calcoli pratici, quando non si tratti di un rettangolo molto allungato ($\frac{a}{b} \leq 5$) si ha una buona approssimazione applicando la formula

$$\tau_{zmax} = \frac{9}{16} \frac{M_z}{ab^2} \quad (146)$$

che vale anche per il quadrato, per il quale $a = b$.

Per un rettangolo molto allungato la τ_{zmax} è i $\frac{2}{3}$ del valore (146) l'angolo di torsione è dato da

$$\vartheta = \alpha \frac{M_z l}{4 \frac{I_x I_y}{I_x + I_y} G} \quad (147)$$

in cui I_x ed I_y sono i momenti di inerzia principali ed α un coefficiente numerico che per il quadrato è 1,2 e per il rettangolo varia da 1,2 a 1,5 per le sezioni molto allungate.

Per il rettangolo si ha

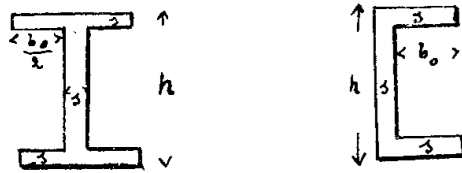
$$\vartheta = 3\alpha \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_z l}{G} \quad (148)$$

Sezioni a doppio T e a I.

Per una sezione a doppio T o a I si può ritenere con buona approssimazione

$$\bar{\epsilon}_{zmax} = \frac{g}{2} \frac{M_x}{s^2(h+2b_0)} \quad (149)$$

che è applicabile se $s > 0.2h$ e se b non è molto maggiore di s .



Sezioni a croce o a L.

Per una sezione a croce o a L

The image shows two diagrams of cross-sections. The left diagram is a cross-section with a vertical stem of height h and thickness s , and a horizontal flange of thickness s and width b . The right diagram is an L-section with a vertical stem of height h and thickness s , and a horizontal flange of thickness s and width b .

$$\bar{\epsilon}_{zmax} = \frac{g}{2} \frac{M_x}{s^2(b_0+h-s)} \quad (150)$$