

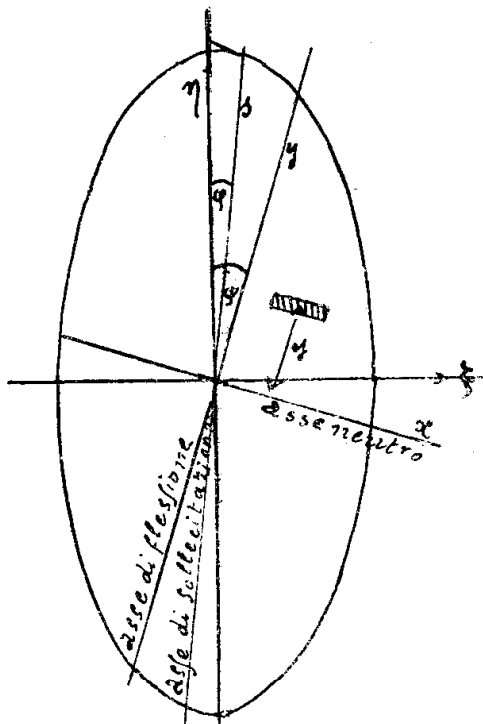
Flessione deviata.

L'ipotesi fatta a pag. 98, Cap. VI § 1 che gli assi x ed y siano quelli principali di inerzia per la sezione trasversale del cilindro non è necessaria per la posizione iniziale del problema di Saint-Venant, noi rimuoviamo ora tale ipotesi ed immaginiamo che x ed y , per essere baricentrici, non siano assi principali di inerzia della sezione trasversale.

Consideriamo quindi una deformazione del solido elastico per la quale ogni sezione trasversale ruoti intorno all'asse x appartenente al suo piano, l'asse del solido si dispiega secondo un arco di cerchio nel piano normale all'asse x e contiene l'asse x del solido elastico così che la traccia y di questo piano sulla sezione trasversale del solido (detta asse di flessione) risulterà normale all'asse neutro. La descrizione e l'analisi della deformazione svolta nel caso precedente valgono quindi anche per questo caso: infatti in essi non abbiamo utilizzato l'ipotesi che x ed y fossero assi principali di inerzia, ciò non accade invece quando si vadano ad analizzare gli sforzi interni del solido elastico.

Nella sezione trasversale siano ξ e η gli assi principali di inerzia, l'asse neutro sia x e l'asse di flessione y , indichiamo con ν l'angolo che l'asse y forma con η .

Le fibre come quella tratteggiata in figura, alla di-



staura y dall'asse neutro subisce, per le stesse ragioni addotte nel caso precedente, una dilatazione positiva o negativa

$$\varepsilon_z = \pm \frac{y}{r}$$

Sarà dunque

$$\sigma_z = \pm E \frac{y}{r} \quad (112)$$

anche in questo caso risulteranno nulle le τ_{zx} e le τ_{zy} .

Passando a determinare le caratteristiche della sollecitazione diver-

se da zero troveremo ancora $N_z = \int \sigma_z dA = \frac{E}{r} \int_A y dA = 0$ perché l'asse x è baricentrico, $T_x = T_y = M_z = 0$ perché le τ_{zx} e τ_{zy} sono nulle. Sono diverse da zero,

$$M_x = \int \sigma_z y dA = \frac{E}{r} \int y^2 dA = \frac{EI_x}{r} \quad (113)$$

$$M_y = \int \sigma_z x dA = \frac{E}{r} \int xy dA = \frac{E}{r} I_{xy} \quad (114)$$

avendo noi indicato con I_{xy} il momento centrifugo della sezione trasversale rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione.

I momenti M_x ed M_y danno luogo ad un momento flettente totale (V. Cap. VI. §. 1)

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Questo momento è staticamente equivalente ad una coppia che si può immaginare agente in un piano passante per z detto piano di sollecitazione; chiameremo

asse di sollecitazione la traccia di tale piano su quello della sezione retta.

In questo caso l'asse di sollecitazione non coincide più (come nel caso precedente) con il piano contenente la linea elastica (piano di flessione) cioè asse di flessione ed asse di sollecitazione non coincidono e la flessione si dice appunto deviata perchè il piano della linea elastica è deviato rispetto a quello di sollecitazione contenente la coppia flettente esterna.

È facile stabilire la relazione fra asse di sollecitazione ed asse neutro. Si è visto che la tensione normale

$\sigma_z = \frac{E}{z} y$ è proporzionale alla distanza y dall'asse neutro perciò le forze interne normali elementari agenti sugli elementi di area dA , espresse da $\sigma_z dA$ sono proporzionali ai momenti statici degli elementi dA rispetto all'asse neutro.

La risultante di tali forze (trattandosi di forze parallele) è applicata nel baricentro dei momenti statici rispetto all'asse neutro detto centro relativo di x rispetto all'area della sezione, che risulta essere l'antipodo di x rispetto all'ellisse centrale della sezione retta.

Poichè x è baricentro il centro relativo è il punto all'infinito del diametro dell'ellisse di inerzia coniugato di x rispetto alla stessa ellisse.

Quanto precede dimostra che la risultante di dette forze è infinitamente piccola e lontana, cioè è una coppia, come già sapevamo, ed in oltre che l'asse di

sollecitazione s è coniugato dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale della sezione stessa.

La tensione normale σ_z come mostrano la (112) e la (113) è data da:

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} y \quad (114)$$

dove M_x non è tutto il momento esterno, ma della coppia M_f la proiezione sul piano di flessione xy , ed I_x il momento di inerzia rispetto all'asse neutro x .

La (114) si può trasformare introducendo il momento flettente totale M_f : indichiamo con y_s la distanza di un punto generico della sezione dall'asse x misurata nella direzione dell'asse s di sollecitazione (coniugato di x) indichiamo con I_{xs} il momento di inerzia della sezione rispetto allo stesso asse neutro valutato misurando le distanze degli elementi pure nella direzione s ; allora, come è noto dalla statica grafica, si potrà scrivere:

$$\sigma_z = -\frac{M_f}{I_{xs}} y_s \quad (115)$$

È preferibile però introdurre nel calcolo i momenti principali di inerzia della sezione.

Indichiamo con φ l'angolo acuto compreso tra l'asse di sollecitazione s e l'asse principale η (si ricordi che ψ è l'angolo compreso tra asse di flessione y e lo stesso asse η).

Scrivendo le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno agli assi ξ , η tra le forze esterne ed interne, tenendo presente la (112), avremo

$$M_{\xi} = M_f \cos \varphi = \frac{E}{2} \int_A y \eta dA$$

$$M_{\eta} = M_f \sin \varphi = \frac{E}{2} \int_A y \xi dA \quad (116)$$

Si ha pure evidentemente:

$$y = \eta \cos \psi + \xi \sin \psi$$

Sostituendo questo valore nelle (115), si ha:

$$M_f \cos \varphi = \frac{E}{2} \int \eta^2 dA + \frac{E}{2} \sin \psi \int \xi \eta dA = \frac{E}{2} \cos \psi I_{\xi}^2$$

$$M_f \sin \varphi = \frac{E}{2} \cos \psi \int \xi \eta dA + \frac{E}{2} \sin \psi \int \xi^2 dA = \frac{E}{2} \sin \psi I_{\eta} \quad (117)$$

avendo posto $I_{\xi}^2 = \int_A \eta^2 dA$; $I_{\eta} = \int \xi^2 dA$ ed essendo

$$\int \eta \xi dA = 0$$

Dividendo la seconda delle (116) per la prima si ha:

$$\tan \varphi \cot \psi = \frac{I_{\eta}}{I_{\xi}^2} = \frac{\rho_{\eta}^2}{\rho_{\xi}^2} \quad (118)$$

dove con ρ_{ξ} e ρ_{η} si sono indicati i raggi di inerzia rispetto agli assi principali ξ ed η , ossia i semiassi dell'ellisse centrale di inerzia.

La (118) conferma che l'asse neutro e l'asse di sollecitazione sono coniugati rispetto all'ellisse centrale di inerzia. (*) (Vedi N. pag. seguente).

Dalle (116) risulta quadrando e sommando:

$$\frac{1}{2} = \frac{M_f}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I_{\xi}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I_{\eta}^2}} \quad (119)$$

ed essendo $\sigma_z = \frac{E}{2} y = \frac{E}{2} (\eta \cos \psi + \xi \sin \psi)$

per le (116) si trova infine

$$\sigma_z = \frac{M_f \cos \varphi}{I_{\xi}} \eta + \frac{M_f \sin \varphi}{I_{\eta}} \xi \quad (120)$$

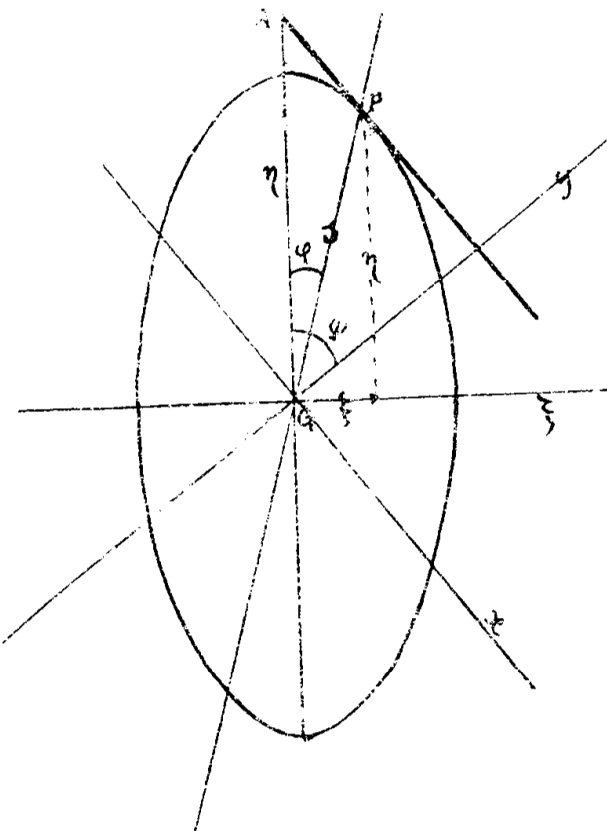
a questa formula si giunge anche scomponendo il momento complessivo M_f in $M_f \cos \varphi$ ed $M_f \sin \varphi$ producenti ciascuno una flessione retta (vedi caso precedente) applicando a ciascuno di essi la (104) ed utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti (V. Cap. III).

Equazione di stabilità - Moduli di resistenza e relativo diagramma polare.

Poiché la sola componente speciale di tensione è la σ_x , essa è la sola tensione principale, la ϵ_x è la corrispondente dilatazione principale, e quindi la stessa $E\epsilon_x$ è la sola tensione principale ideale.

Perciò in questo caso l'equazione di stabilità si dovrà

(*) L'equazione dell'ellisse centrale di inerzia riferita agli assi principali è:



$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1$$

Differenziando abbiamo:

$$\frac{2\xi d\xi}{\rho_\eta^2} + \frac{2\eta d\eta}{\rho_\xi^2} = 0$$

da cui

$$\frac{\rho_\eta^2}{\rho_\xi^2} = -\frac{\xi}{\eta} \frac{d\xi}{d\eta}$$

dove

$$\frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tg} \varphi \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \operatorname{tg} \widehat{PAG} = \operatorname{ctg} \varphi$$

scrivere equagliando ai rispettivi carichi di sicurezza i valori massimo e minimo (massimo negativo) della σ_z stessa.

Dalla (115) risulta chiaramente che per un dato asse di sollecitazione, e per un dato valore del momento flettente totale M_f , i valori numericamente massimi di σ_z si hanno per i valori pure numericamente massimi di y_s , ossia nei punti del contorno della sezione più lontani dall'asse neutro (punti di contatto delle ^{tangenti} parallele all'asse neutro e da questo più lontane). Siano y'_s ed y''_s i valori assoluti di tali distanze massime, rispettivamente dalla parte delle y positive e y negative: allora indicando con σ'_z e σ''_z i valori numerici massimi della σ_z rispettivamente a tensione ed a compressione avremo:

$$\sigma'_z = \frac{M_f}{I_{x_3}} y'_s$$
$$\sigma''_z = \frac{M_f}{I_{x_3}} y''_s$$

(121)

Se poi, al solito, K' e K'' sono i due carichi di sicurezza del materiale, rispettivamente a trazione ed a compressione, per la stabilità dovranno essere verificate entrambe le disuguaglianze seguenti:

$$\sigma'_z \leq K'$$
$$\sigma''_z \leq K''$$

(122)

Possiamo porre (confronta Cap. VI §.2 pg. 127)

$$W'_{x_3} = \frac{I_{x_3}}{y'_s}$$
$$W''_{x_3} = \frac{I_{x_3}}{y''_s}$$

(123)

e con ciò le (121) divengono:

$$\sigma'_z = \frac{M_f}{W'_{x_3}}$$

$$\sigma''_z = \frac{M_f}{W''_{x_3}}$$

(124)

Le grandezze W' e W'' così introdotte si chiamano moduli di resistenza della sezione; essi sono riferiti al dato asse di sollecitazione e al corrispondente asse neutro, nel senso che per ogni asse di sollecitazione si hanno due valori dei detti moduli di resistenza.

Il minore dei due prodotti:

$$k' W'_{x_3} \quad \text{e} \quad k'' W''_{x_3}$$

rappresenta, secondo le (122) e (124), il momento flettente massimo che, secondo il dato asse di sollecitazione, la sezione può sopportare con tutta sicurezza; perciò esso si dice pure il momento resistente della data sezione, col dato materiale, secondo il rispettivo asse di sollecitazione, e per il dato verso del momento flettente; giacchè è ben chiaro che se il verso di questo momento cambia, allora come momento resistente si deve assumere il minore dei due prodotti:

$$k'' W'_{x_3} \quad \text{e} \quad k' W''_{x_3}$$

Se il materiale di cui è costituito il solido ha un solo carico di sicurezza a trazione come a compressione

$k' = k'' = k$, allora come modulo di resistenza della sezione relativamente al dato asse di sollecitazione si deve assumere il minore dei due moduli di resistenza sopra indicati, il quale è quello che corrisponde all'ing-

gione dei due valori y'_s ed y''_s .

Tale modulo di resistenza si può allora indicare con W'_{x_s} .

Vediamo ora come si possa trovare un diagramma polare dei moduli di resistenza relativi ai vari assi di sollecitazione.

Dalla statica grafica è noto che, se ρ_{x_s} è il semidiametro dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione disteso sull'asse di sollecitazione s , allora si ha:

$$I_{x_s} = A \rho_{x_s}^2$$

essendo al solito A l'area della sezione.

Ciò posto, le (123) si possono scrivere:

$$W'_{x_s} = A \frac{\rho_{x_s}^2}{y'_s}$$

$$W''_{x_s} = A \frac{\rho_{x_s}^2}{y''_s}$$

Ora, sempre dalla statica grafica, si sa che le lunghezze:

$$n' = \frac{\rho_{x_s}^2}{y'_s}$$

e

$$n'' = \frac{\rho_{x_s}^2}{y''_s}$$

sono i due raggi vettori, distesi sull'asse di sollecitazione s del nocciolo centrale della sezione, e contati dal baricentro della sezione. Orbene, i moduli di resistenza si possono quindi esprimere come segue:

$$W'_{x_s} = A n'$$

$$W''_{x_s} = A n''$$

(125)

e ciò prova che il nocciolo centrale della sezione è il diagramma polare dei moduli di resistenza della sezione stessa relativi ai vari assi di sollecitazione s .

La scala del diagramma risulta dalla stessa (125)

Se occorre per ciascun asse di sollecitazione un unico modulo di resistenza W_{es} , come si è detto poco sopra, allora esso è uguale all'area A della sezione moltiplicata per il minore dei due raggi vettori del nocciolo centrale della sezione, distesi sul detto asse di sollecitazione. Per ciò in tal caso per avere il diagramma polare del modulo di resistenza W basta considerare il nocciolo diviso in due parti da un asse qualsiasi baricentrico, e poi rotare nel piano della sezione ed intorno al baricentro, di un angolo eguale a π , una delle due parti suddette del nocciolo.

Allora l'area interna comune alla parte del nocciolo lasciata fissa, ed alla parte rotata, staacea su di un asse di sollecitazione generico (passante per il baricentro) un segmento che, moltiplicato per l'area della sezione, ci dà il modulo di resistenza relativo al dato asse di sollecitazione.

Questa costituisce una proprietà molto notevole ed utile del nocciolo centrale.

Tra l'altro essa ci fornisce il modo di determinare l'asse di sollecitazione a cui corrisponde il massimo modulo di resistenza; esso è quell'asse che contiene il massimo raggio vettore del diagramma polare ora

descritto.

Esso in generale non coincide con nessuno dei due assi principali di inerzia della sezione; però, per molte delle sezioni più comuni nelle applicazioni, tale asse coincide con l'asse maggiore dell'ellisse centrale della sezione. Notiamo che i moduli di resistenza ^{dati} della (126) sono termini del terzo ordine ossia risultano dal prodotto di tre lunghezze.

Anche la (120) permette di scrivere l'equazione di stabilità imponendo la condizione che il massimo valore di σ_x , che si verifica nei punti di coordinate ξ' ed η' più distanti dall'asse neutro, sia minore del carico di sicurezza K .

Limitiamoci al caso in cui K sia lo stesso per la compressione e la tensione avremo:

$$K \geq M_f \cos \varphi \frac{\eta'}{I_\xi} + M_f \sin \varphi \frac{\xi'}{I_\eta} \quad (126)$$

In molti casi della pratica il contorno della sezione è poligonale ottenibile come somma o differenza di rettangoli a lati rispettivamente paralleli (sezioni di ferri sagomati) allora spesso si ha che un vertice del contorno poligonale è più lontano da qualsiasi asse neutro, e quindi il più lontano da ciascuno degli assi principali di inerzia, in tal caso, e solo in esso, sono noti a priori ξ' e η' e quindi i moduli di resistenza rispetto agli assi principali sono espressi da:

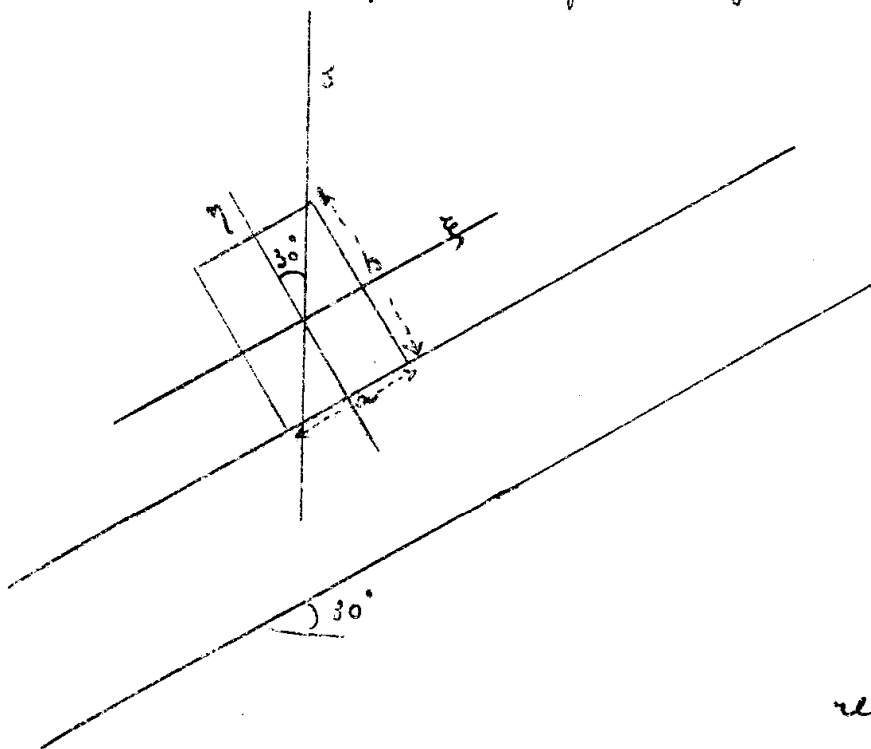
$$W_{\xi'} = \frac{I_\xi}{\eta'} \quad W_{\eta'} = \frac{I_\eta}{\xi'}$$

Allora la (126) si scriverà:

$$k \geq M_f \left(\frac{\cos \varphi}{W_F} + \frac{\sin \varphi}{W_\eta} \right) \quad (127)$$

Esercizio.

Sono sottoposti a flessione deviata gli arcarecci delle tettoie, per i quali le forze agenti sono verticali (pesi)



mentre per la loro forma e per le loro condizioni di posa gli assi principali di inerzia della sezione sono obliqui rispetto alla verticale. Calcoliamo quindi la sezione di un arco.

recci di castagno la cui base è inclinata

all'orizzonte di 30° ed il cui asse di sollecitazione è baricentrico e verticale. Il momento flettente sollecitante sia di 1200 Kgm.

Siano a e b la base e l'altezza della sezione creata:

$$I_z = \frac{1}{12} a b^3$$

$$I_\eta = \frac{1}{12} b a^3$$

$$\eta' = \frac{b}{2} \quad \zeta' = \frac{a}{2}$$

quindi la (126) fornisce

$$k = \frac{6M_f}{ab} \left(\frac{\cos \varphi}{b} + \frac{\sin \varphi}{a} \right)$$

Tenendo presente che in pratica conviene assumere $a = 0,7b$

$$k = \frac{6M_f}{0,7b^3} \left(\cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{0,7} \right)$$

essendo $M_f = 120000 \text{ KGmm}$. $K = 60 \text{ Kg/cmq}$.

$$b^3 = \frac{6 \times 120000}{0,7 \times 60} \left(0,866 + \frac{0,50}{0,70} \right) = 27084$$

$$b = 30 \text{ cm quindi } a = 21 \text{ cm.}$$

*

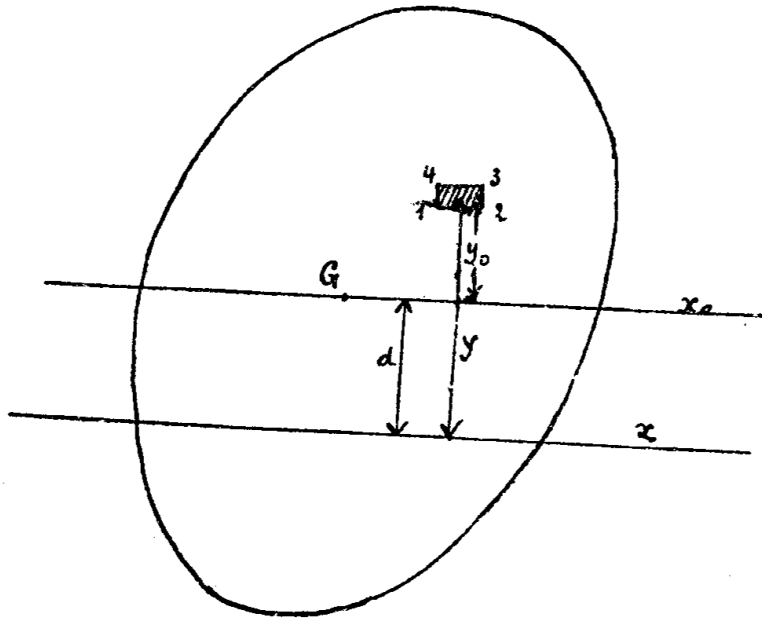
* *

Tensione (o pressione) e Flessione.

Osserviamo che per stabilire le equazioni differenziali fondamentali della deformazione soddisfacente alle condizioni di Saint-Venant non utilizziamo l'ipotesi, inizialmente fatta, sulla scelta degli assi x ed y principali di inerzia (e quindi baricentrici) e quindi dell'asse x coincidente con l'asse geometrico del solido; occorre soltanto, per la validità di quelle deduzioni, che l'asse x sia parallelo alle generatrici del cilindro.

Uoi supponiamo ora che gli assi x ed y (ortogonali) non solo non siano principali di inerzia della sezione (come nel caso precedente) ma non siano neppure baricentrici, e consideriamo ancora quella deformazione per la quale

le rette inizialmente parallele all'asse x ed incidenti all'asse z (ancora asse neutro) si incurvano ad arco di cerchio conservando inalterata la loro lunghezza, tutte le fibre



parallele alla fibra neutra si dispongano concentricamente a quella, così che le sezioni trasversali subiscano una rotazione relativa intorno all'asse neutro z .

Una fibra (tratteggiata in figura) alla distanza y dall'asse neutro avrà subito una dilatazione unitaria positiva o ne-

gativa: $\epsilon_z = \pm \frac{y}{r}$ dove con r indichiamo sempre il raggio di curvatura in corrispondenza della fibra neutra.

$$\sigma_z = E\epsilon_z = \frac{E y}{r} \quad (128)$$

La caratteristica della sollecitazione N è:

$N_z = \int \sigma_z dA = \frac{E}{r} \int y dA$, dove l'integrale rappresenta il momento statico della sezione trasversale preso rispetto all'asse z che è baricentro, esso non è quindi nullo (contrariamente al caso precedente) ed è uguale al prodotto dell'area A per la distanza del baricentro G della sezione dall'asse z :

$$N_z = \frac{E}{r} A d \quad (129)$$

il momento delle tensioni interne normali $\sigma_x dA$ rispetto all'asse x è dato da:

$$M_x \int \sigma_y dA = \frac{E}{\alpha} \int y^2 dA = \frac{E}{\alpha} I_x \quad (130)$$

Avevamo indicato con I_x il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse x .

Per il noto teorema del trasporto sarà:

$$I_x = I_{x_0} + Ad^2 \quad \text{quindi:}$$

$$M_x = \frac{E}{\alpha} I_{x_0} + \frac{E}{\alpha} Ad^2 \quad (129)$$

che, tenendo conto della (129), diventa:

$$M_x = \frac{E}{\alpha} I_{x_0} + Nd \quad (131)$$

osservando che è

$$y = y_0 + d$$

e che per una notissima equazione di statica

$$M_x = M_{x_0} + Nd$$

si trae dalla

$$M_x = M_{x_0} + Nd = \frac{E}{\alpha} I_{x_0} + Nd$$

$$M_{x_0} = \frac{E}{\alpha} I_{x_0}$$

dalla (129) si ricava $\frac{N}{A} = \frac{Ed}{\alpha}$

quindi

$$\sigma_x = \frac{Ey}{\alpha} = \frac{Ey_0}{\alpha} + \frac{Ed}{\alpha} = \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}} y_0 + \frac{N}{A} \quad (132)$$

Dalla (128) si ricava che σ_x è proporzionale alla y , quindi le forze normali elementari $\sigma_x dA$ sono proporzionali ai momenti statici $y dA$ degli elementi di area dA rispetto all'asse neutro x , quindi la risultante N_x delle forze interne

$\sigma_z dA$ è applicata nel baricentro dei momenti statici alle aree elementari della sezione presi rispetto all'asse neutro x ; questo baricentro, come è noto dalla statica grafica, è detto centro relativo dell'asse x rispetto alla sezione ed è l'antipolo dell'asse x rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione.

Per l'equilibrio, nel centro X , detto centro di sollecitazione, deve essere pure applicata la risultante delle forze esterne sollecitanti la base $x = l$ del cilindro, in conseguenza la sollecitazione che qui studiamo è detta: sforzo normale eccentrico.

Da quanto precede risulta che centro di sollecitazione X e rispettivo asse neutro x sono elementi corrispondenti nell'antipolarità rispetto all'ellisse di inerzia della sezione.

La retta che congiunge il centro di sollecitazione X con il baricentro G della sezione si chiama asse di sollecitazione, la sua direzione è coniugata di quella dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale di inerzia.

Lo sforzo normale esterno N_z , applicato eccentricamente in X , si può trasportare parallelamente a sé stesso ad agire nel baricentro G della sezione purchè si tenga conto della coppia di momento $N_z \times \overline{XG}$ che, come è noto dalla statica, si chiama coppia di trasporto.

Considerando separatamente gli effetti della forza N_z applicata nel baricentro, e dalla coppia di trasporto osserviamo che la prima produce sforzo normale centrato (V. Cap. VI §.2) e la seconda flessione semplice che potrà essere retta.

deviata a secondo che l'asse di sollecitazione coincide o no con uno degli assi principali di inerzia della sezione trasversale.

A queste due sollecitazioni componenti possono applicarsi la (97) e la (104) (ovvero, se si tratta di flessione deviata, la (115)) che, sommate, (per il principio della sovrapposizione degli effetti) riproducono la (132).

Dalla (132) risulta che per $y = 0$, cioè sull'asse parallelo all'asse neutro condotto per il baricentro della sezione si ha una tensione (o pressione) $\sigma_z = \frac{N_z}{A}$ eguale alla tensione media: essa rappresenta il valore costante che assumerebbe la tensione in tutti i punti della sezione qualora lo sforzo normale N_z fosse applicato al baricentro.

*

* *

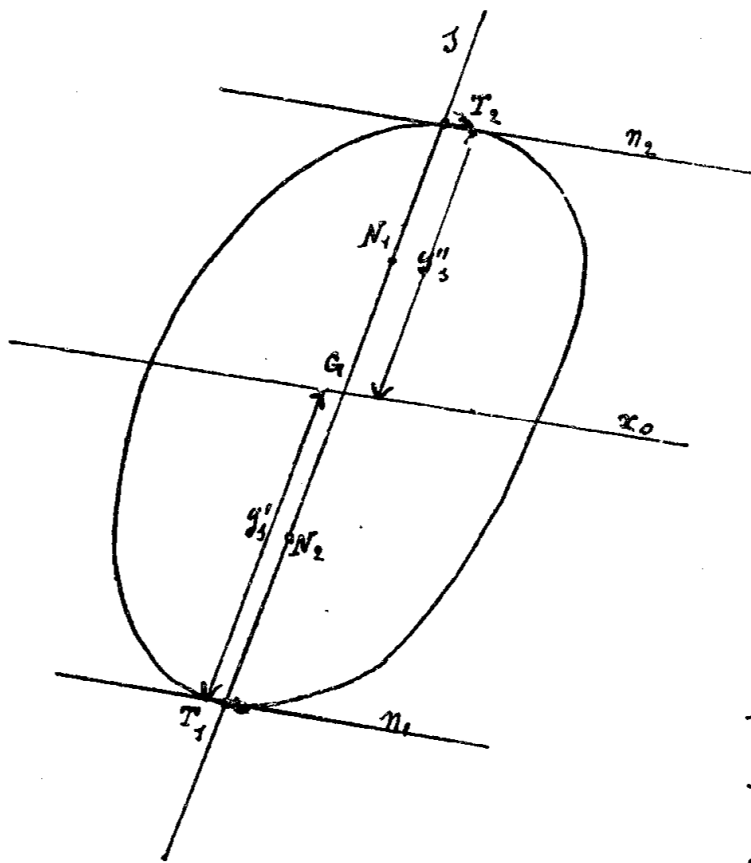
Momenti di nocciolo - Equazioni di stabilità -

Poiché l'asse neutro è l'antipolare del centro di sollecitazione X rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione trasversale, esso risulterà esterno, tangente e secante rispetto al contorno della sezione, secondo che il centro di sollecitazione X è interno, sul contorno o esterno al nocciolo; nel 1° caso la tensione interna σ_z è, su tutta la sezione, dello stesso segno e l'asse neutro è da considerarsi virtuale, cioè non vi sono punti della sezione trasversale nei quali sia nulla σ_z .

Se l'asse neutro taglia la sezione esso la divide in due.

zione, nelle quali si hanno tensioni σ_x di segno contrario. La (132) si presta a calcolare i valori massimi e minimi (massimi negativi) della σ_x che si verificano nei punti del contorno più distanti dall'asse neutro, cioè per i valori massimi numerici di y .

Ma essa risulta che il diagramma delle σ_x , in funzione di y è lineare, con ordinata nulla sull'asse neutro. In base ai detti valori massimi e minimi si scrivono le equazioni di stabilità con le avvertenze già indicate.



Consideriamo i due punti N_1 ed N_2 del contorno del mozzo centrale di inerzia situati sull'asse di sollecitazione: ξ , i quali si chiamano punti di mozzo relativi all'asse di sollecitazione stesso.

Siano n_1 ed n_2 le antipolari di N_1 ed N_2 rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione, esse risulteranno

parallele all'asse neutro ξ e toccheranno il contorno della sezione in due punti T_1 e T_2 , in questi, poiché sono i punti più lontani dell'asse neutro, si verificano i massimi valori di σ_x .

Alla forza normale applicata in X può sostituirsi una forza equipollente applicata al N_1 ed una coppia di trasporto

il cui momento M_{n_1} è eguale a quello della N_x (agente in X) rispetto al punto N_1 .

Applicando il principio della sovrapposizione degli effetti, ricaviamo che la forza N_x , applicata in N_1 , non produce tensione nel punto T_1 (infatti n_1 risulta essere asie neutro per la sollecitazione di pressione e flessione dovuta ad N_x applicata in N_1), dunque la tensione in T_1 è dovuta esclusivamente alla coppia flettente il cui momento è M_{n_1} , allora indicando con y'_s la distanza di T_1 dall'asse x_0 misurata nella direzione dell'asse di sollecitazione (V. (115)) si ha

$$\sigma'_z = \frac{M_{n_1}}{I_{x_3}} y'_s = \frac{M_{n_1}}{W'_{x_3}} \quad (133)$$

Analogo ragionamento può ripetersi per l'altro punto di nocciolo N_2 , cioè indicando con M_{n_2} il momento della forza N_x applicata in X rispetto ad N_2 , la tensione in T_2 indicando con y'' la sua distanza dall'asse x_0 misurata nella direzione di s è data da:

$$\sigma''_z = \frac{M_{n_2}}{I_{x_3}} y'' = \frac{M_{n_2}}{W''_{x_3}}$$

I momenti M_{n_1} , M_{n_2} sono detti momenti di nocciolo, in base ad essi le tensioni interne massime, dovute allo sforzo normale eccentrico, si possono calcolare con la formula della flessione semplice.

*

*

*

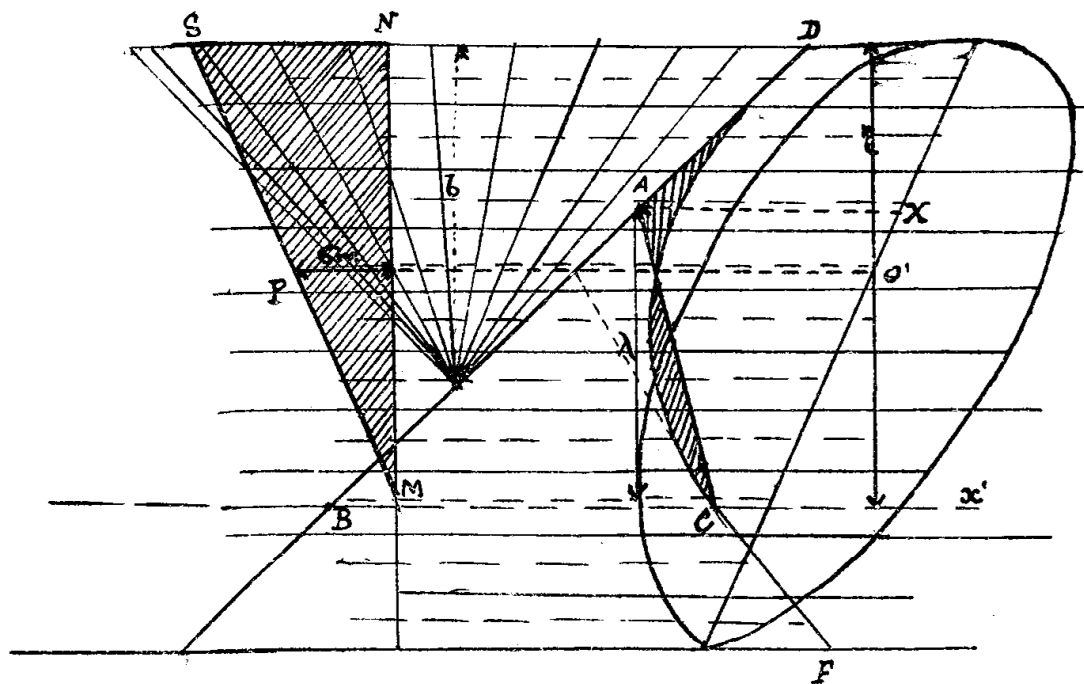
Caso in cui la sezione del solido prismatico
è capace di resistere soltanto a compressione.

Quando si debba verificare o calcolare un muro o pilastro in muratura sollecitato a compressione normale eccentrica, in pratica, si prescinde dalla resistenza a trazione della muratura; questo si fa per la eventuale presenza di screpolature trasversali le quali, invece, non hanno influenza sulla resistenza a compressione.

Se il centro di sollecitazione è interno al campo di uccello tutta la intera sezione trasversale è compressa, e nulla vi è da aggiungere a quanto precede: Se il centro di sollecitazione è esterno al campo di uccello della intera sezione trasversale ammetteremo sempre che la sezione resti, dopo la deformazione, fissa ed inoltre che esso ruoti intorno ad un asse del suo piano che divide la sezione stessa in due parti: una reagente ed una inerte; tale asse neutro non è più l'antipolare di X (centro di sollecitazione) rispetto all'ellisse centrale di inerzia di tutta la sezione, ma è l'antipolare di x rispetto all'ellisse centrale di inerzia di quella sola parte di sezione che reagisce.

La determinazione di tale asse è basata sul fatto che la distanza fra centro di sollecitazione X ed asse neutro x è data dal rapporto fra momento di inerzia e momento statico della zona reagente rispetto all'asse x stesso. Immaginiamo dapprima che il centro di sollecitazione X giaccia su di un asse S di simmetria (orto-

gonale od obliqua), esso allora contiene il baricentro G della sezione, tale asse, come è noto dalla statica grafica, è coniugato alla direzione comune x delle corde biseguate da esso, rispetto all'ellisse di inerzia di tutta la sezione ovvero di parte di essa compresa fra il contorno ed un asse di separazione qualsiasi parallelo alla direzione stessa.



Si divide la sezione trasversale in strisce con corde tutte parallele ad x , ai baricentri delle strisce si applicano, nella stessa direzione x , delle forze proporzionali alle aree delle singole strisce e si connettono con un poligono funicolare $BDCF$.

Si proietta X , nella direzione x in A sul primo lato BD del poligono funicolare e si conduce la AC , retta di compenso del poligono funicolare stesso, cioè tale che l'area $\frac{BC \times \lambda}{2}$ del triangolo ABC risulti equivalente all'area

DBC compresa fra il poligono funicolare e la retta BC.
 Questa individua l'asse neutro x' : infatti ricordando il metodo di Mohr per la ricerca del momento d'inerzia ed indicando con a la base di riduzione delle aree delle strisce e con b la distanza polare del poligono funicolare

$$\lambda = \frac{2 \times \text{area BDC}}{BC} = \frac{\frac{1}{ab} I_{x'}}{\frac{1}{ab} M_{x'}} = \frac{I_{x'}}{M_{x'}}$$

λ è dunque la distanza fra centro di sollecitazione ed asse neutro.

Trovato l'asse neutro x' per mezzo dello stesso poligono funicolare già costruito si determina il baricentro O' dalla sezione reagente la cui area indichiamo con A' ; portando da una retta MN normale all'asse neutro, ed in corrispondenza della parallela per O' all'asse neutro, una ordinata eguale alla pressione unitaria media: $\sigma_m = \frac{N_x}{A'}$, la congiungente MP con le sue ordinate riferite ad MN dà la legge di variazione delle pressioni unitarie di cui NS è la massima.

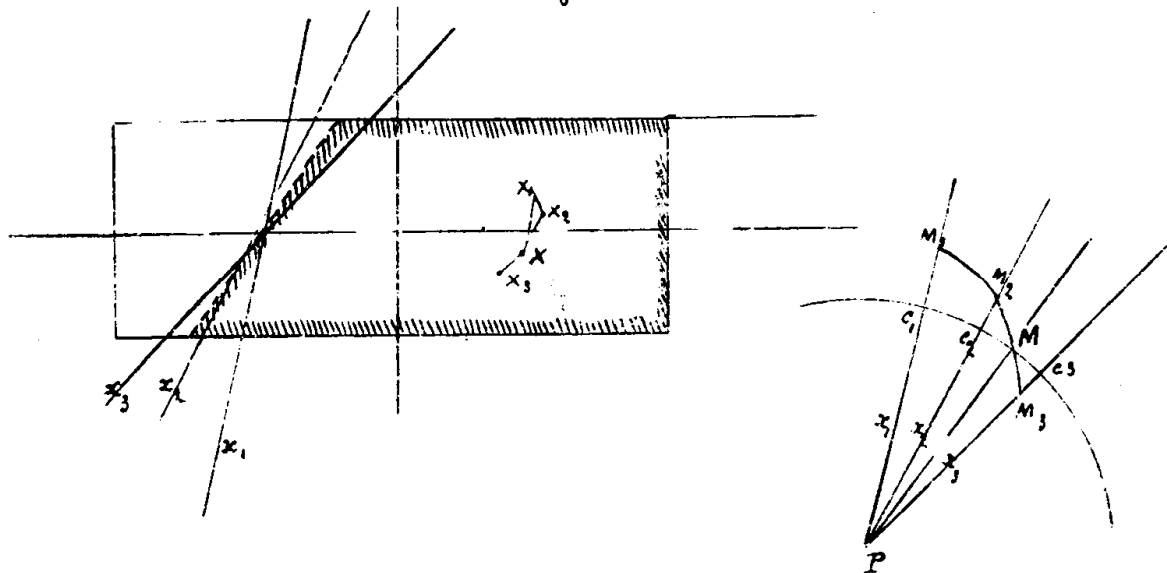
Si può ottenere lo sforzo massimo σ_{max} dalla relazione

$$\sigma_{max} = \frac{N_x \eta}{M} = \frac{N_x \eta}{ab \cdot CB}$$

che si ottiene scrivendo l'equilibrio alla traslazione delle forze interne (η è la distanza del punto più sollecitato dall'asse neutro).

La soluzione del problema diventa più lunga quando non si conosce a priori la direzione dell'asse neutro cioè

quando il centro X non si trova su di un asse di simmetria della sezione trasversale. In tal caso bisogna procedere per tentativi; assunta per l'asse neutro una certa direzione se ne determina, come si è visto precedentemente, la posizione. Nota la sezione reagente, dell'asse ottenuto si trova



il centro relativo rispetto alla stessa. Se questo coincide con il centro di sollecitazione X , la soluzione è esatta cioè l'asse ottenuto è l'asse neutro, altrimenti occorre tentare una altra soluzione modificando la direzione di x .

Si può essere agevolati nella precedente determinazione dalla costruzione di una opportuna curva di errore.

Scelta una prima direzione x_1 , applicando ad essa la costruzione precedentemente indicata si sia ottenuto in x_1 il presunto asse neutro.

Di esso si sia trovato il centro relativo X_1 rispetto alla sezione reagente.

Se X_1 coincidesse con X , il problema sarebbe risoluto, invece X_1 non coincide con X però si trova su di una parallela ad x_1 , condotta per X (questa proprietà può servire

a riprovare la esattezza delle costruzioni). Si sia eseguita la stessa costruzione per un'altra direzione arbitraria: x_2 . Sia X_2 il centro relativo di x_2 rispetto alla nuova parte reagente; analogamente per x_3, \dots

Centro in un punto arbitrario P si descriva un cerchio di raggio arbitrario, a partire da questo cerchio sulle parallele per P ad x_1, x_2, x_3, \dots si portino i segmenti $C_1M_1, C_2M_2, C_3M_3, \dots$ eguali in grandezza e seguono ai segmenti XX_1, XX_2, XX_3, \dots i punti M_1, M_2, \dots determinano la curva di errore: essa taglia il cerchio in un punto M; il raggio PM ha la direzione dell'asse neutro cercato, ad esso si applicherà la costruzione sopra descritta.

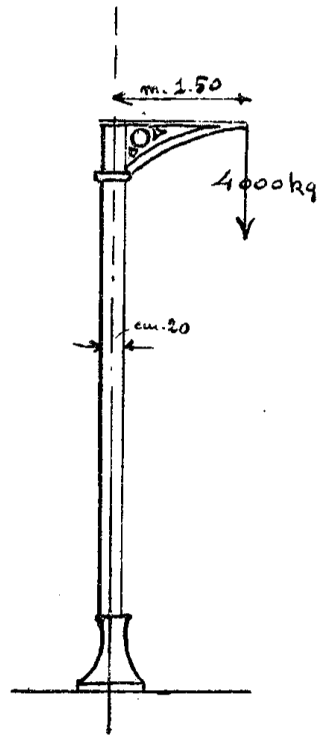
Espressione del lavoro di deformazione.

Consideriamo il presente caso di sollecitazione come composto da sforzo normale centrato e flessione semplice; applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e tenendo conto che le caratteristiche delle forze esterne dell'una sollecitazione non compiono lavoro per effetto della deformazione dovuta all'altra si può scrivere ricordando la (100) e la (111).

$$Q = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M^2 l}{2EI}$$

Esercizio.

Verificare la stabilità di una colonna cava di acciaio



del diametro esterno di 20 cm. e dello spessore di 2 cm. incastrata inferiormente ed alla base superiore sollecitata da un carico di 4000 Kg. agente con eccentricità di 1.50 m.

Basterà applicare l'equazione (132) nella quale dovremo porre:

$$M_{x_0} = 4500 \times 1500 \text{ kgmm.} \quad D = 200 \text{ (diametro esterno)}$$
$$d = 140 \text{ (diametro interno)}$$

$$\frac{I_{x_0}}{y_0} = 0.098 \frac{D^4 - d^4}{D} = 5957616 \text{ (V. "Colombo", pag. 295)}$$

$$A = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) = \text{mm}^2 (16022)$$

$$\sigma = \frac{4000 \times 1500}{5957616} + \frac{4000}{16022} = 10.5 + 0.25 = 10.75 \text{ kg/mm}^2$$

La colonna si può quindi considerare stabile.
