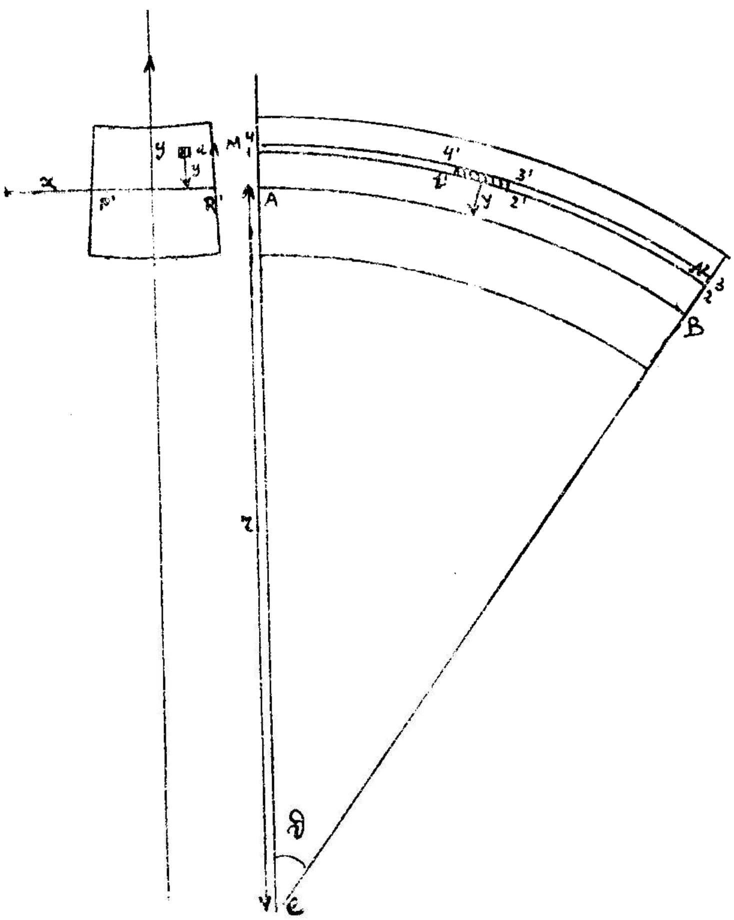
§ 3. Flessione semplice.

Secondo caso particolare.

Immaginiamo ora di attribuire al prisma elastico una particolare deformazione, che qui descriviamo:

I piani delle sezioni rette inizialmente paralleli fra loro ed alle due basi di estremità si trasformano nei piani di un fascio avente per asse una retta del piano $z = 0$, parallela all'asse x, situata dalla parte delle y negative, in particolare il piano della base vincolata resta fisso; le rette inizialmente parallele all'asse z si disporranno secondo archi aventi i loro centri sulla retta asse del fascio e contenuti in piani normali alla retta stessa, l'asse geometrico del prisma si disponga secondo un arco circolare di raggio r senza che risulti alterata la sua primitiva lunghezza.



Studiamo dapprima il caso del solido prismatico a sezione rettangolare.

Una fibra elementare qualunque che si proietta sul piano della figura in 1, 2, 3, 4; di sezione trasversale dA, alla distanza y dalla fibra neutra individuata dalla superficie cilindrica avente per direttrice l'asse geometrico del solido deformato e generatrici normali al piano che la contiene avrà subito una dilatazione unitaria positiva o negativa:

$$\varepsilon = \pm \frac{y}{r}$$

infatti la fibra avente per traccia MN subisce una dilatazione unitaria

$$\frac{MN - AB}{AB}$$

essendo AB la lunghezza comune a tutte le fibre del solido elastico prima della deformazione:

$$MN = (y+r)\,\vartheta \quad ; \quad AB = r\vartheta \quad \text{quindi} \quad \frac{MN - AB}{AB} = \frac{(y+r)\vartheta - r\vartheta}{r\vartheta} = \frac{y}{r}$$

Immaginiamo ancora che le dimensioni trasversali della detta fibra secondo la direzione y subiscano una dilatazione unitaria negativa o positiva $\pm \frac{y}{mr}$ e disponiamo finalmente l'asse x di ogni sezione trasversale (si ricordi che x ed y sono gli assi principali di inerzia della sezione trasversale) senza alterarne la lunghezza secondo un arco $P'R'$ di raggio mr', e trasformiamo le fibre parallele ad x in archi circolari concentrici a IR; in tal modo le facce laterali del prisma a sezione rettangolare inizialmente parallele al piano yz si deformeranno secondo zone di superfici coniche di rotazione aventi per asse la stessa retta sostegno del fascio di piani secondo cui si dispongono le sezioni rette, le altre due facce laterali, parallele inizialmente all'asse geometrico del solido z ed all'asse x (detto asse neutro), si trasformano in zone di tori circolari di rotazione aventi per asse ancora la stessa retta di sostegno del detto fascio di piani.

Se consideriamo del prisma così deformato un elemento di fibra qualunque 1'2'3'4' (tratteggiato in figura) di sezione trasversale dA, da quanto precede risulta che esso avrà subito, per raggiungere la descritta deformazione, nella direzione longitudinale (secondo z) un allungamento (o accorciamento se trattasi di una fibra dalla parte delle y negative) unitario $\frac{y}{r}$ e nelle due direzioni trasversali un accorciamento (o allungamento) $\frac{y}{mr}$ per unità di dimensione trasversale.

È noto (V. Cap: III. pg 59) che una simile deformazione corrisponde all'azione della tensione (o compressione) normale unitaria $\sigma_z = E\frac{y}{r}$ agente secondo l'asse longitudinale dell'elemento di fibra considerato. Tale sollecitazione unitaria, moltiplicata per l'area infinitesima dA, ci dà la forza $E\frac{y}{r}dA$ che deve essere esercitata in corrispondenza della fibra considerata per determinarvi la descritta deformazione, senza che tale elemento eserciti azione alcuna sugli elementi contigui attraverso le facce laterali: dunque l'unica componente speciale di tensione diversa da zero è la σ_z. Che la τ_{yz} è eguale a zero è mostrato anche dal fatto che le rette inizialmente parallele all'asse z, traettorie ortogonali delle sezioni rette del cilindro non deformato, si trasformano, in seguito alla descritta deformazione, in cerchi che, per avere il loro centro sulla retta asse del fascio di piani in cui si trasformano le sezioni trasversali inizialmente parallele, sono le traettorie ortogonali degli stessi piani del fascio: analogamente per la descritta deformazione della sezione trasversale si ricava che $\gamma_{zx}=0$ e quindi è nulla τ_{zx}.

La risultante delle tensioni normali, da noi già detta forza normale (Cap. VI - §.1.) è data da:

$$N_z = \int \sigma_z \, dA = \frac{E}{r} \int_A y \, dA$$

per essere l'asse x baricentrico risulterà $\int_A y\,dA = 0$ quindi $N_z = 0$.

L'unica caratteristica delle tensioni interne diversa da zero è la:

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA = \frac{E}{r} \int y^2 \, dA = \frac{E}{r} I_x \qquad (102)$$

avendo indicato con I_x il momento di inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse x.

(Si noti che $M_z = 0$ perchè τ_{zx} e τ_{zy} sono nulle, e
$M_y = \int \sigma_z x \, dA = \frac{E}{r} \int x y \, dA = 0$ perchè essendo x ed y gli assi principali di inerzia della sezione trasversale, il momento centrifugo della sezione stessa rispetto ad assi è nullo).

Per gli stessi motivi addotti per la sollecitazione a tensione semplice si può ritenere con tutta l'approssimazione necessaria nella pratica applicazione che le deformazioni dalle quali siamo partiti siano quelle stesse che si hanno quando sulla base libera (dove le componenti di tensione sono eguali a quelle delle tensioni superficiali applicate), in luogo della trovata distribuzione delle tensioni, si abbia nel piano yz una coppia flettente il cui momento sia eguale al momento delle tensioni $\sigma_z dA$ rispetto all'asse neutro; sappiamo infatti che la modificazione che si introduce nelle deformazioni è limitata ad un piccolo tratto in vicinanza della base suddetta. (V. Cap. IV. §. 1° pg. 112) - Il piano yz contenente la coppia flettente è detto <u>piano di sollecitazione</u>, l'asse y, intersezione di esso con il piano della sezione trasversale del solido è detto <u>asse di sollecitazione</u>.

Essendo

$$\sigma_z = \frac{y}{r} E$$

sostituendo ad r il valore tratto dalla (102)

$$r = \frac{E I_x}{M_x} \qquad (103)$$

si ricava

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad (104)$$

la precedente è detta <u>formula di Navier</u>: essa ci dice che la tensione normale σ_z varia, nella sezione trasversale, proporzionalmente alla distanza del punto generico dall'asse neutro, il quale separa la sezione in due parti, in una delle quali si hanno tensioni positive, nell'altra negative, così che il diagramma delle tensioni normali nella sezione trasversale è rettilineo con ordinata nulla in corrispondenza dell'asse neutro.

Poichè la curvatura trasversale dello strato neutro è piccolissima, essendo r molto grande e quindi mr $(m=4)$ più grande ancora, si trascura nelle pratiche applicazioni la deformazione della sezione trasversale, quindi si ammette che oltre che piane e normali all'asse deformato del solido (linea elastica) le sezioni stesse conservino la loro forma e le loro dimensioni.

La dimostrazione fatta si riferisce ad un solido prismatico a sezione rettangolare; consideriamo ora un solido ad asse rettilineo che non sia dotato di un piano di simmetria ma che sia, come per il caso precedente, sollecitato, in corrispondenza della base libera, e quindi di ogni sezione trasversale, da una coppia giacente in uno dei due piani individuati dall'asse z e rispettivamente dai due assi principali di inerzia della sezione trasversale, supponiamo per es: che la traccia del piano di sollecitazione sul piano $x\,y$ sia ancora y. Il ragionamento fatto precedentemente si può ripetere senza alcuna modificazione: anche in questo caso la rotazione di ogni sezione trasversale rispetto alla contigua avviene intorno ad un asse giacente nel suo piano, detto asse neutro che risulta essere l'altro asse principale di inerzia della sezione trasversale, cioè x, l'asse neutro sarà quindi baricentrico e normale all'asse di sollecitazione, i diversi assi neutri costituiranno la fibra neutra.

Le fibre parallele alla fibra neutra si deformano in fibre cilindriche a curvatura costante e concentriche.

L'angolo di cui ruota la base libera rispetto a quella vincolata si ottiene dalla (103) osservando che $r\vartheta = l$ quindi

$$\vartheta = \frac{l}{r} = \frac{M_x l}{E I_x} \tag{105}$$

Equazione di stabilità.

La formula di Navier (104) mostra che la tensione normale interna unitaria varia linearmente con la y, essa risulterà quindi massima nei punti più distanti dall'asse neutro. Indichiamo con y_1 ed y_2 i valori assoluti delle massime distanze delle fibre, rispettivamente dalla parte delle y positive e da quella delle y negative, misurate dall'asse neutro; (y_1 ed y_2 sono le distanze dei punti di contatto delle tangenti al contorno parallele all'asse neutro, da questo più lontane). I valori numerici massimi della σ_z rispettivamente a tensione a compressione sono:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_x} y_1$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{I_x} y_2 \tag{106}$$

Di solito in pratica si ha $y_1 = y_2$ essendo la sezione simmetrica rispetto all'asse neutro, così che le due tensioni interne unitarie massime relative a trazione, ed a compressione, in una sezione qualunque, non differiscono in valore assoluto.

Conseguentemente, se il solido presenta lo stesso carico di sicurezza a trazione ed a compressione, come il ferro e l'acciaio, la equazione di stabilità si avrà eguagliando uno qualunque dei valori di σ_1 e σ_2 (eguali in valore assoluto) al carico di sicurezza k del materiale

$$k \geq \frac{M_x}{I_x} y_1 \qquad (107)$$

Ove fosse $y_1 \neq y_2$, e per esempio $y_2 > y_1$ la formula di stabilità sarebbe:

$$k \geq \frac{M_x}{I_x} y_2 \qquad (108)$$

qualora poi la resistenza del materiale a trazione fosse diversa da quella a compressione, evidentemente dovremo eguagliare ciascuno dei due valori di σ_1 e σ_2 al corrispondente valore del carico di sicurezza k_1 e k_2.

Moduli di resistenza a flessione.

Le due grandezze $\frac{I}{y_1}$ ed $\frac{I}{y_2}$ (la cui equazione dimensionale è l^3) si chiamano moduli di resistenza a flessione e si indicano in generale con W. Essi sono eguali se $y_1 = y_2$.

L'equazione (106) può assumere la forma:

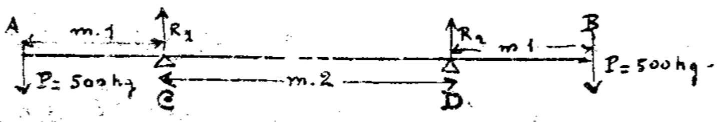
$$k \geq \frac{M}{W} \qquad (109)$$

restando inteso che se il solido è isotropo e $y_1 \neq y_2$ si deve prendere per W il maggiore dei due valori $\frac{I}{y_1}$ e $\frac{I}{y_2}$, se il solido si comporta diversamente a trazione e a compressione si avranno due equazioni

$$k_1 \geq \frac{M}{W_1}$$
$$k_2 \geq \frac{M}{W_2} \qquad (110)$$

applichiamo le formule precedenti ad una verifica di stabilità e ad un calcolo di progetto di travi soggette a flessione semplice.

Verifica di stabilità di una trave di legno della sezione di cm: 14 x 20 appoggiata in due punti intermedî C e D distanti fra loro 2 m: e dagli estremi di 1 m:



La trave sia sollecitata agli estremi da due carichi di 500 kg: ciascuno. Si tratta di verificare se la trave è in buone condizioni di stabilità, occorre quindi determinare il massimo valore della tensione unitaria interna normale ed assicurarsi che esso sia minore del carico di sicurezza che, per il legno, sia a trazione che a compressione può assumersi eguale a 60 Kg/cmq.

Per poter procedere allo studio della deformazione e della resistenza di un solido sollecitato da forze esterne, vincolato, occorre preliminarmente liberarlo dai vincoli e sostituire ad essi le corrispondenti reazioni.

Supponiamo che i due appoggi C e D siano capaci soltanto di reazioni verticali, così che all'appoggio C sostituiremo una relazione R_1 e a D una relazione R_2, verticali entrambi.

Per determinare R_1 ed R_2 basta studiare le condizioni di equilibrio della trave sotto l'azione delle quattro forze segnate in figura: poichè però la trave è simmetrica e simmetricamente caricata anche le reazioni R_1 e R_2 dovranno essere eguali e ciascuna eguale e contraria a P.

Per risultante relativa ad una sezione del solido noi intendiamo la risultante di tutte le forze applicate al solido, liberato dai vincoli, da un estremo fino alla sezione che si considera. Nel nostro caso la risultante relativa ad una sezione S del tratto CD è costituita considerando per es: le forze a sinistra della sezione S, dalla risultante di P applicata in A e di $R_1 = P$ applicata in C avente verso opposto a quello di P. La risultante sarà dunque una coppia situata nel piano di simmetria della trave e di uno degli assi principali di inerzia della sezione trasversale, tale coppia è costante per tutte le sezioni del tratto CD, dunque questo tratto è sollecitato a <u>flessione semplice</u>.

Il momento $M = 500 \times 1m = 500$ Kgm $= 50000$ Kgcm.

Il momento di inerzia I_x è:

$$I_x = \frac{1}{12} \; 14 \times \overline{20}^3 \;; \quad Y_1 = Y_2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ quindi}$$

$$W = \frac{14 \times \overline{20}^3}{12 \times 10} = 933 \text{ cm}^3.$$

applicando allora la formula (110) si ottiene:

$$\sigma = \frac{50000}{933} = 53,5 \;\frac{kg}{cm^2}$$

Il precedente valore è minore del carico di sicurezza del legno ($60 \; kg/cm^2$) dunque la trave è in buone condizioni di stabilità.

Calcolo di una trave in ferro a doppio T sollecitata a flessione semplice -

La lunghezza del tratto CD e quella degli sbalzi siano le stesse di quella dell'es: prec:. Le forze P siano eguali a 2000 Kg: ciascuna. Per assegnare alla trave delle dimensioni che ne garentiscano la stabilità permanente prendiamo la formola di stabilità (109) e da essa ricaviamo il modulo di resistenza (che è incognito) imponendo la condizione che la sollecitazione massima sia eguale al carico di sicurezza k, che porremo eguale a 10 Kg/mmq.

$$M = 2000 \times 1 = 2000 \text{ kg}\cdot\text{m} = 2000000 \text{ kg mm}$$

$$W = \frac{2000000}{10} = 200000 \text{ mm}^3$$

Si fa quindi uso delle tabelle correnti dei ferri laminati. Dal "Colombo", pag: 304 XCVI tabella si rileva che il tipo NP 20 presenta un valore di W ivi indicato $\frac{I}{z}$ eguale a 214000 mm³. quindi per la trave cercata adotteremo un tipo a doppio T di ferro avente alterza di 200 mm. larghezza di 90 mm. spessore delle ali di 11,3 mm. e spessore della costola di 7,5 mm.

Espressione del lavoro di deformazione elastica nella sollecitazione di flessione semplice.

Il momento M compie lavoro per effetto della rotazione della sezione libera, cui esso è applicato, rispetto a quella vincolata, tale lavoro sarebbe:

$M\vartheta$

qualora la coppia mantenesse costante durante tutta la deformazione il suo valore finale, ma noi immaginiamo anche qui, come sempre, che la sollecitazione vada crescendo da zero fino al suo valore finale, quindi il lavoro da essa compiuto, per il Teorema di Clapeyron è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \vartheta$$

Essendo (V. formula (105)) $\vartheta = \frac{Ml}{EI_x}$ avremo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{EI_x} . \qquad (111) .$$