- §. 2° -

Soluzioni particolari del problema di Saint Venant.

Estensione semplice -

(Primo caso)

Supponiamo che lo stato di tensione del solido di Saint-Venant sia tale che per ogni suo punto si abbia:

$$\varepsilon_z = c \qquad \gamma_{yz} = 0 \qquad \gamma_{zx} = 0 \tag{95}$$

dove c è una costante. Da ciò risulta che l'unica componente speciale di tensione diversa da zero è la $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Come si è già detto (Cap: VI §.1° pag: 109) sulla base definita da $z = l$ le componenti speciali di tensione sono eguali alle analoghe componenti delle tensioni superficiali, dunque i singoli elementi di area dA sariano soggetti soltanto a forze normali di intensità

$$\sigma_z \, dA = c \, dA$$

la risultante $N_z = \int \sigma_z \, dA = cA$ (96)

è stata chiamata (pag: 110 Cap: VI §.1°) sforzo normale essa sarà applicata nel baricentro della base, quindi avrà per retta d'azione lo stesso asse z.

Nei problemi pratici è dato N, quindi la (96) permette di determinare la costante c e quindi σ_z:

$$c = \frac{N}{A} = \sigma_z \tag{97}$$

Riferendoci a quanto è detto nel Cap. VI § 1°. pag. 112), la deformazione da noi presa in considerazione si verifica nel solido elastico anche quando sulla base libera, in luogo di avere la descritta distribuzione delle forze $\sigma_z\, dA$, si abbia un altro sistema di forze normali purchè esso abbia come risultante una forza baricentrica di intensità N.

Essendo (76) $\sigma_z = E\varepsilon_z$ sarà (97) $\varepsilon_z = \frac{N}{EA}$. Ricordiamo che $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ed essendo, per ragioni di simmetria w indipendente da x ed y è:

$$w = \frac{N}{EA}\, z \qquad (98)$$

Il dato cilindro retto si trasforma in un altro cilindro pure retto, le sezioni piane del 1° si trasformano nelle sezioni piane del secondo, esse si spostano lungo l'asse del cilindro di una quantità proporzionale alla rispettiva distanza dalla base incastrata $z = 0$. Se $m > 0$, come accade sempre per gli ordinari materiali da costruzione, se N è positivo, cioè se il cilindro è sollecitato a trazione esso si allunga longitudinalmente e si contrae trasversalmente; l'opposto accade se il cilindro è sollecitato a compressione; ciò risulta dall'equazione 95 del Cap. VI § 1°.

Ponendo $z = l$ nella (98) e ricordando che ε è il rapporto fra la variazione di lunghezza primitiva dell'elemento lineare si trae:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \qquad (99)$$

Questa formula si presta alla determinazione sperimentale del modulo di elasticità normale E, quando si conosca l'intensità dello sforzo normale N, la primitiva lunghezza della provetta e l'allungamento negativo o positivo Δl.

Calcoliamo per la sollecitazione di sforzo normale baricentrico l'espressione del lavoro di deformazione:

La forza esterna N, per effetto dello spostamento Δl compie un lavoro: $N \Delta l$; applicando il Teorema di Clapeyron il lavoro di deformazione sarà:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{N^2 l}{2EA} \qquad (100)$$

Formula di stabilità alla sollecitazione di tensione (o pressione) semplice -

Come si è già detto, intendiamo per equazione di stabilità quella che esprime la condizione che deve verificarsi in ogni punto del solido affinchè questo possa resistere in modo durevole alle forze sollecitanti così da non subire mai alcuna deformazione permanente. Si è già visto (Cap: VI §1 pag: 107) quali siano le relazioni che debbano verificarsi perchè ciò accada. Poichè nel solido di sezione trasversale A sollecitato a trazione da una forza N in ogni sezione si sviluppa soltanto una tensione interna normale data da $\frac{N}{A}$, indicando con k il carico di sicurezza l'equazione di stabilità dovrà essere:

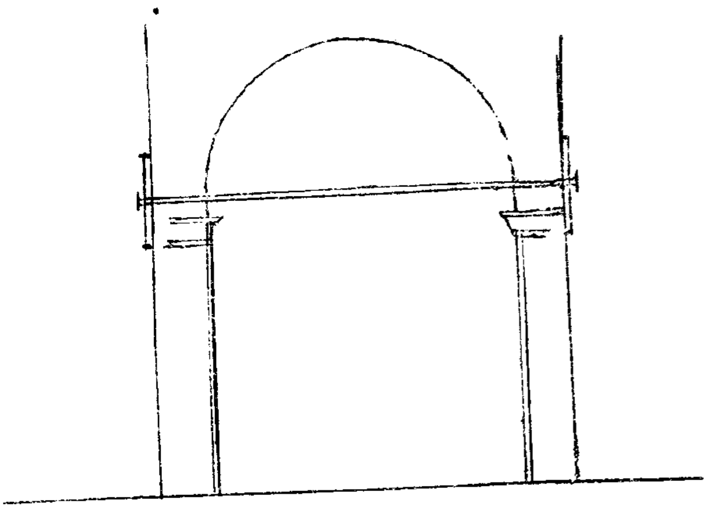
$$k \geq \frac{N}{A} \qquad (101)$$

questa formula permette di eseguire sia la verifica di stabilità che il calcolo di progetto di un solido sollecitato a trazione (o compressione) semplice.

Esercizio 1°-

Verifica di stabilità di una catena di ferro.

Supponiamo sia stato costruito un arco in muratura impostato sopra piedritti di non grande spessore. Esso, come è noto, esercita una spinta contro i piedritti, verso l'esterno che potrebbe determinarne il rovesciamento qualo_ra, ad una certa altezza sul piano d'imposta dell'arco,



non si applicasse una catena di ferro che, messa in tensione mediante una madrevite sia atta ad assorbire la spinta orizzontale dell'arco.

La catena sia di ferro omogeneo di sezione circolare di diametro $d = 40'''$ e la spinta dell'arco sia di 8000 kg: L'area $A = 1256\ mm^2$.

Si tratta di verificare se la catena è in buone condizioni di stabilità.

La sollecitazione unitaria massima che si sviluppa nel tirante è data da:

$$\sigma = \frac{8000}{1256} = 6.4\ \frac{kg}{mm^2}$$

dobbiamo quindi concludere che la catena è in buone condizioni di stabilità essendo la tensione $6.4\ kg/mm^2$ minore del carico di sicurezza del materiale.

È bene tuttavia tener conto anche dell'influenza di una variazione di temperatura rispetto a quella di posa supponiamo cioè che la costruzione si sia eseguita mentre la temperatura era di 15°, e supponiamo che nella stagione invernale essa scenda a − 15°.

I piedritti non risentiranno alcun effetto sensibile dalla detta variazione di temperatura, quindi gli estremi della catena rimarranno nella loro posizione iniziale mentre la catena, per effetto della variazione di temperatura, subirebbe un accorciamento rappresentato dal prodotto del coefficiente di dilatazione lineare del ferro (0,000012) moltiplicato per la lunghezza l della catena e per il N° di gradi di variazione della temperatura.

La dilatazione unitaria sarà:

$$\varepsilon = 0.000012 \times 30 = 0,00036$$

applicando la formola $\sigma = E\varepsilon$ si ottiene:

$$\sigma = 20000 \times 0,00036 \cong kg \cdot 7.2$$

Questa tensione va sommata a quella ottenuta precedentemente quindi il valore massimo diventa $7.2 + 6.4 = 13.6 \frac{kg}{mm^2}$ alquanto superiore al carico di sicurezza comunemente adottato.

Esercizio 2°.

Calcolo delle dimensioni di un solido soggetto a trazione semplice.

Supponiamo che un tubo di ferro omogeneo della lunghezza di tre metri debba essere applicato verticalmente al soffitto di un grande ambiente per sostenere alla sua estremità inferiore un lampadario del peso di 3750 Kg:

Supponiamo altresì che il tubo debba avere il diametro esterno:

$$d_e = 34\ mm.$$

Il problema che ci proponiamo ora di risolvere non è più dunque quello di verificare la stabilità di un solido dato, ma di determinare la sezione da assegnare a questo, e nel caso particolare, lo spessore x del tubo, in maniera che questo si trovi permanentemente in buone condizioni di stabilità.

Trascuriamo, per ragioni di semplicità, l'esame degli organi di collegamento del tubo sia col lampadario, sia col soffitto e trascuriamo altresì il peso del tubo, perchè piccolo di fronte al carico di 3750 Kg: la formula di stabilità:

$$K = \frac{N}{A}$$

ci mette in grado di risolvere subito questo problema. Infatti gli elementi noti sono: il carico di sicurezza K, che assumeremo in 10 Kg: per m/m^2 e la forza N data in 3750 Kg: resta quindi da determinare A che è dato da:

$$A = \frac{3750}{10} = 375\ mm^2.$$

Ecco l'area della sezione del tubo domandato, il cui diametro esterno è di 34 mm. Vediamo quale deve essere il suo spessore x espresso in mm.

L'area della corona circolare di diametro esterno 34 mm. e di grossezza x è espressa da $3.14\,(34-x)\,x$; onde avremo:

$$3{,}14\,(34-x)\,x = 375$$

ovvero:

$$(34-x)\,x = \frac{375}{3{,}14} = \sim 120$$

o anche:

$$x^2 - 34x + 120 = 0$$

da cui ricaviamo:

$$x = 17 \pm 13$$

e, scartata la soluzione rappresentata dal segno positivo, perchè non confacente al caso, abbiamo:

$$x = 4 \text{ mm.}$$

che è la grossezza da attribuire al tubo, ond'esso si trovi in buone condizioni di stabilità. Il suo diametro interno risulta quindi di 26 mm.

Ma siccome, canne di 35 mm. di diametro esterno con 4 mm. di spessore non si trovano in commercio, così occorrerà assumere per la canna in questione le più prossime dimensioni che risultano dalle tabelle commerciali le quali danno per un diametro esterno di 34 mm un diametro int. 25 m/m.