# Capitolo VI -

## Il problema di Saint Venant -

### - §. 1 -

### Posizione generale del problema. -

Consideriamo un solido cilindrico (o prismatico) cioè generato da un'area piana di forma qualunque che si sposta descrivendo con ogni suo punto una linea retta a cui l'area generatrice si conservi sempre normale: la lunghezza $l$ del cilindro sia assai grande rispetto alle dimensioni trasversali.

Supporremo nulle le forze di massa e libera da ogni forza e da ogni vincolo la superficie laterale così che il solido non può essere vincolato e sollecitato che alle basi.

Assumiamo come asse delle $z$ l'asse geometrico del cilindro cioè la retta contenente i baricentri delle sezioni trasversali del cilindro stesso, e come assi delle $x$ ed $y$ i due assi principali di inerzia di una delle basi, il senso di $z$ sia positivo verso l'interno del solido. In luogo delle componenti speciali di pressione $X_x \dots Y_z \dots$ consideriamo quelle di tensione, eguali ed opposte alle prime, indicando con $\sigma$ le componenti di tensione normali agli elementi sui quali si esercitano e con $\tau$ le componenti tangenziali:

$$\sigma_x = -X_x \quad \sigma_y = -Y_y \quad \sigma_z = -Z_z \quad \tau_{yz} = -Y_z \quad \tau_{zx} = -Z_x \quad \tau_{xy} = -X_y$$

inoltre consideriamo come verso positivo della normale ad uno l'intensità dello sforzo normale $N$, la primitiva lunghezza della provetta e l'allungamento negativo o positivo $\Delta l$.

Calcoliamo per la sollecitazione di sforzo normale baricentrico l'espressione del lavoro di deformazione:

La forza esterna $N$, per effetto dello spostamento $\Delta l$ compie un lavoro: $N\Delta l$; applicando il Teorema di Clapeyron il lavoro di deformazione sarà:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} N\Delta l = \frac{N^2 l}{2EA} \qquad (100)$$

## Formula di stabilità alla sollecitazione di tensione (o pressione) semplice -

Come si è già detto, intendiamo per equazione di stabilità quella che esprime la condizione che deve verificarsi in ogni punto del solido affinchè questo possa resistere in modo durevole alle forze sollecitanti così da non subire mai alcuna deformazione permanente. Si è già visto (Cap: VI §1 pag. 107) quali siano le relazioni che debbano verificarsi perchè ciò accada. Poichè nel solido di sezione trasversale $A$ sollecitato a trazione da una forza $N$ in ogni sezione si sviluppa soltanto una tensione interna normale data da $\frac{N}{A}$ indicando con $k$ il carico di sicurezza l'equazione di stabilità dovrà essere:

$$k \geq \frac{N}{A} \qquad (101)$$

questa formula permette di eseguire sia la verifica di stabilità che il calcolo di progetto di un solido sollecitato a trazione (o compressione) semplice.

alla superficie quello diretto verso l'esterno della porzione di solido da essa limitata. Per le fatte ipotesi le equazioni indefinite, (V. Cap. II: pag. 22) con le nuove notazioni, sono:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (69)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

(ricordiamo che $\tau_{yx} = \tau_{xy} \ldots\ldots$)

Le equazioni di equilibrio in superficie, essendo $\alpha_z = 0$ ed essendo scarica la superficie laterale stessa si ridurranno a

$$\sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y = 0$$

$$\tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = 0 \qquad (70)$$

$$\tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y = 0$$

Il Saint Venant ha studiato quei casi particolari di sollecitazione, di notevole interesse pratico, in cui ogni elemento superficiale parallelo all'asse $z$ è soggetto soltanto ad una tensione tangenziale parallela all'asse stesso: da ciò risulta che in ogni punto del solido

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \qquad (71)$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio (69) diventano

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (69')$$

Le equazioni di equilibrio sulla superficie laterale (70) si riducono a:

$$\tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y = 0$$

la quale esprime che la tensione tangenziale che si sviluppa su di una sezione retta del cilindro, è, nei punti del contorno, tangente al contorno stesso.

Sulle due basi, poichè la normale ad asse è parallela a $z$, saranno:

$$\alpha_x = \alpha_y = 0 \qquad \alpha_z = \pm 1$$

(Il segno − vale per la base $z=0$; quello + per la base $z=l$) quindi le $\tau_{zx}$ $\tau_{yz}$ $\sigma_z$ sono rispettivamente eguali ed opposte (V. equaz: 22 Cap: I) alle omologhe componenti delle tensioni superficiali sulla base $z=0$, mentre sulla base $z=l$ esse sono proprio eguali alle tensioni superficiali stesse.

Le equazioni (44) del Cap. III, con le nuove notazioni, divengono:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \qquad (72)$$

e le (49) e (50), quando si indichi con G la seconda costante di Lamé in precedenza indicata con $\mu$, assumono la forma:

$$\sigma_x = \lambda\,\Theta + 2G\,\varepsilon_x$$

$$- - - - - - - - - \qquad (73)$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \qquad (74)$$

Le precedenti equazioni (72) e (74) combinate con le (71) ci danno

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m} \qquad (75)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \qquad (76)$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = 0 \qquad (77)$$

La dilatazione cubica (20) risulta:

$$\Theta = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\varepsilon_z \qquad (78)$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio, in virtù delle (74) e (76) ci danno:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y}+\frac{E}{G}\,\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}=0 \qquad (78)$$

Le (75), (77), (79) esprimono le condizioni a cui debbono soddisfare le componenti della deformazione in seguito alle ipotesi fondamentali del problema; tali relazioni possono essere poi trasformate sostituendo alle $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz}$ le loro espressioni in funzione delle componenti di spostamento.

In oltre per escludere, nel modo più semplice, ogni possibile moto rigido dell'intero sistema, supporremo che i vincoli siano strettamente necessari, così che le reazioni possano determinarsi mediante le equazioni della statica in funzione di forze esterne comunque date: riterremo cioè il cilindro libero dai vincoli sulla base $z=l$, e rigidamente incastrato in corrispondenza della base $z=0$, allora:

1) Il baricentro O della base è fisso;

2) l'elemento superficiale determinato in O dagli assi $x$ ed $y$ mantiene immutata la sua giacitura.

3) l'elemento lineare uscente da O nella direzione di $x$ mantiene immutata la sua direzione.

Per 1) dovranno essere nulle le tre componenti $u, v, w$ dello spostamento in O; per 3) dovranno essere nulle le le componenti secondo $y$ e $z$ dello spostamento di un punto dell'asse $x$ infinitamente prossimo all'origine, cioè $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=0$ nell'origine; perchè sia soddisfatta 2) occorre che sia nulla la componente secondo $z$ dello spostamento di un punto $y$ infinitamente prossimo all'origine, cioè $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ nell'origine. Riassumendo:

per $x = y = z = 0$ deve aversi:

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

*

* *

## Potenziale elastico = Tensioni principali = Linee isostatiche = Nel caso generale del problema di Saint Venant -

Ricordiamo l'espressione (58) del Cap. IV, che ci dà il potenziale elastico per un solido elastico isotropo:

$$2\Phi = \lambda\,\Theta^2 + G\left[2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2\right]$$

questa, quando si sostituiscono a $\Theta$, alle $\varepsilon$ ed alle $\gamma$ i valori (78) (75) (71) diventa:

$$\Phi = \frac{E}{2}\varepsilon_z^2 + \frac{G}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \qquad (80)$$

Per studiare le proprietà delle linee isostatiche osserviamo che su di un elemento di sezione trasversale del cilindro (normale a $z$) si sviluppa, oltre alla tensione normale $\sigma_z$ anche solo una tensione tangenziale $\tau_z$ che è la risultante di $\tau_{yz}$ e $\tau_{xz}$ agenti sullo stesso elemento di sezione trasversale e dirette rispettivamente secondo $y$ e $x$.

In un punto $O'$, generico della sezione trasversale, consideriamo una terna di assi $x'\,y'\,z'$: sia $z'$ parallelo a $z$, $x'$ diretto come $\tau_z$, e $y'$ normale al piano di $x'$ e $z'$. Riferendoci a questa terna nello studio di un intorno infinitesimo di $O'$, osserviamo che le componenti speciali di tensione si riducono alle due sole $\sigma_z$ e $\tau_z$, le altre essendo nulle per l'ipotesi restrittiva (71) introdotta da Saint Venant e per la opportuna scelta degli assi: la distribuzione delle tensioni si riduce a due dimensioni (V. Cap. II pag: ) cioè la tensione totale su di un elemento nell'intorno di O', comunque orientato è parallela al piano $\pi'$, in questo stesso piano sono contenute due delle tensioni principali in O', mentre la terza, che dovrebbe essere normale a questo piano, è nulla.

Secondo le (69) essendo $\tau_{zx}$ e $\tau_{yz}$ indipendenti da $z$, anche la loro risultante $\tau_z$ sarà indipendente da $z$, quindi resta la stessa per tutti i punti di una parallela a $z$. Poichè la $\tau_z$ è un vettore definito in ogni punto di una qualunque sezione trasversale, in ciascuna di tali sezioni esiste una semplice infinità di linee che sono le linee di forza della su detta distribuzione vettoriale, essendo $\tau_z$ indipendente da $z$, fra tali traettorie, quelle che escono da punti di una stessa retta parallela a $z$, stanno tutte su di una stessa superficie cilindrica a generatrici parallele a $z$.

Da quanto si è detto si ricava subito che un qualsiasi piano tangente al detto cilindro è il piano della distribuzione a due dimensioni delle tensioni relative ad un qualsiasi punto della generatrice di contatto: quindi a detto cilindro sono tangenti le direzioni principali relative a tutti i punti della sua superficie, cioè le linee isostatiche, uscenti da punti della superficie del cilindro costituiscono sulla superficie stessa un doppio sistema di traettorie ortogonali.

Determiniamo ora nel piano della distribuzione a due dimensioni $x'$ $y'$ le 2 tensioni principali ed i loro parametri di direzione in funzione delle due sole componenti speciali di tensione non nulle $\sigma_z$ e $\tau_z$.

Indichiamo con $\sigma_*$ una tensione principale e siano $\alpha_{x'}$ e $\alpha_{z'}$ i suoi coseni direttori rispetto agli assi coordinati $x'$ $z'$; osservando che per la definizione stessa di tensione principale, dovranno essere $\alpha_{x'}$ e $\alpha_{z'}$ i coseni direttori della normale all'elemento sul quale $\sigma_*$ si esercita, applicando le formule di Cauchy (V. Cap. II a pag. 22) si ha:

$$\tau_z \alpha_{z'} = \sigma_* \alpha_x$$

$$\tau_z \alpha_{x'} + \sigma_z \alpha_{z'} = \sigma_* \alpha_{z'} \qquad (81)$$

Poichè $\alpha_{x'}$ e $\alpha_{z'}$ non possono essere simultaneamente nulli, dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} -\sigma_* & \tau_z \\ \tau_z & \sigma_z - \sigma_* \end{vmatrix} = 0 \qquad (82)$$

la quale rappresenta l'equazione (24) del Cap: II, nel nostro caso particolare: Sviluppando la (82) si ha:

$$\sigma_*^2 - \sigma_z \sigma_* - \tau_z^2 = 0$$

Indicando con $\sigma_1$ e $\sigma_2$ le due radici di questa equazione si ottengono le due tensioni principali:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \qquad (83)$$

queste equazioni mostrano che $\sigma_1$ e $\sigma_2$ sono sempre reali (come era già noto).

Per le note proprietà della forme quadratiche:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_z$$
$$\sigma_1 \sigma_2 = - \tau_z^2 \qquad (84)$$

la prima delle quali rappresenta l'invariante lineare già definito nel Cap I pag. 5.

Le tensioni principali $\sigma_1$ e $\sigma_2$ possono essere individuate quando siano note le tangenti degli angoli che esse formano con l'asse $z'$, o, ciò che è lo stesso, con l'asse $z$, essendo $z$ e $z'$ paralleli, avremo come inclinazione della tensione principale generica $\sigma_*$:

$$i_* = \frac{\alpha_{z'}}{\alpha_{z'}}$$

quindi dalla prima delle (81)

$$i_* = \frac{\tau_z}{\sigma_*}$$

e sostituendo i valori di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ separatamente:

$$i_1 = \frac{\tau_z}{\sigma_1} \qquad i_2 = \frac{\tau_z}{\sigma_2} \qquad (85)$$

Tenendo presente la seconda delle (84) si ottiene

$$i_1 i_2 = -1 \qquad (86)$$

come deve essere poichè le due direzioni principali sono tra loro ortogonali.

Si ricava ancora dalle (84) e dalle (85)

$$i_1 + i_2 = -\frac{\sigma_z}{\tau_z} \qquad (87)$$

dalle (86) (87) si trae che $i_1$ e $i_2$ sono radici della seguente equazione di secondo grado:

$$i_*^2 + \frac{\sigma_z}{\tau_z} i_* - 1 = 0 \qquad (88)$$

La (88) si può scrivere:

$$\frac{1}{i_*} - i_* = \frac{\sigma_z}{\tau_z} \qquad (89)$$

Riferendoci al sistema di assi in cui $i_*$ è l'ascissa generica, $\frac{1}{i_*}$ sarà l'ordinata generica di una iperbole equilatera, ed $i_*$ stessa sarà l'ordinata generica in corrispondenza di una retta inclinata a 45° rispetto agli assi coordinati.

Con tale rappresentazione grafica possono ottenersi le $i_1$ ed $i_2$ dato il rapporto $\frac{\sigma_2}{\tau_2}$, ovvero si può ad ottenere questo rapporto quando sia dato $i_1$ (e quindi $i_2$).

Determinando i luoghi in cui $i_1$ ed $i_2$ hanno valori costanti si ottengono delle linee che possono chiamarsi <u>isocline</u> rispetto alle isostatiche e definirsi come i luoghi dei punti in cui i parametri di direzione delle tensioni principali hanno valori costanti; tali linee isocline sono utili per il tracciamento delle isostatiche.

Vediamo ora come si specializzano le quadriche ed i coni attinenti alla distribuzione delle tensioni.

Essendo la distribuzione delle tensioni a due dimensioni, nel piano $x'$ $z'$ le quadriche di tensione e quelle delle componenti normali si specializzano in coniche o in cilindri a generatrici normali al detto piano, aventi per assi le due rette di azione delle tensioni principali $\sigma_1$ e $\sigma_2$. I coni di scorrimento e delle tensioni normali nulle si riducono a coppie di rette nel piano $x'$ $z'$, ovvero a coppie di piani normali a questo, passanti per $O'$; tali rette o tali piani sono sempre reali essendo le tensioni principali di segno contrario.

L'ellissoide di Lamè si riduce ad un ellisse avente per semi assi $\sigma_1$ e $\sigma_2$. Al cono di scorrimento, ridotto in questo caso, a due sole rette, appartiene la retta $z'$ infatti sugli elementi contenenti $z'$ agiscono soltanto tensioni tangenziali; e poiché tale cono ha per assi le direzioni principali, l'altra retta sarà la z'', simmetrica di z' rispetto a ciascuna delle rette di azione di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ (cosicché $\sigma_1$ e $\sigma_2$ sono le bisettrici degli angoli formati da z' e z'').

In conseguenza le quadriche di pressione divengono iperboli aventi per asintoti z' e z''.

Analogamente il cono delle componenti normali nulle si specializza nella coppia di piani normali a z' e z'' e le quadriche delle componenti normali sono cilindri iperbolici asintotici alla detta coppia di piani.

## Dilatazioni principali - Equazioni di stabilità.

Poiché nel corpo isotropo le rette principali di deformazione coincidono con le rette principali di tensione già determinate, possiamo esprimere le dilatazioni principali in funzione delle tensioni principali direttamente, con equazioni analoghe a quelle del Cap. III - pag. 48 - trasformate introducendo le tensioni invece delle pressioni e ponendo $\sigma_3 = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m}\right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m}\right) \qquad\qquad (90) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{Em} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati dalle (83) si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left\{\frac{m-1}{2m}\sigma_z + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}\right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left\{\frac{m-1}{2m}\sigma_z - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}\right\} \qquad\qquad (91) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\sigma_z}{Em} \end{aligned}$$

Poichè le dilatazioni principali sono tutte e tre diverse da zero, le quadriche di deformazione ed il cono delle dilatazioni nulle non degenerano.

Le dilatazioni principali hanno grande importanza nei problemi tecnici, infatti, per assicurare la buona conservazione di un materiale occorre, secondo risultati sperimentali, evitare le deformazioni permanenti, cioè porre un limite alle massime dilatazioni principali.

Poichè nei casi di <u>sollecitazione semplice</u>, cioè quando esiste la sola $\sigma_z$ o sola $\tau_z$ è invalso l'uso di assegnare un limite superiore alle dette tensioni stesse, limite detto <u>carico di sicurezza</u>, così, per uniformità, si usa anche nei casi di sollecitazione composta, in cui la simultanea presenza di $\sigma_z$ e $\tau_z$ provoca delle dilatazioni principali, trasformare queste dilatazioni principali in tensioni, moltiplicandole per il modulo di elasticità, e si impone che i valori massimi di tali tensioni non superino i rispettivi carichi di sicurezza.

I prodotti $E\varepsilon_1$, $E\varepsilon_2$, $E\varepsilon_3$ si dicono <u>tensioni principali ideali</u> esse sono delle tensioni normali le quali agendo da sole separatamente nelle rispettive direzioni principali, produrrebbero dilatazioni lineari eguali alle dilatazioni principali prodotte dalla effettiva distribuzione di forze interne.

Esse servono a costituire le equazioni di stabilità nei casi di sollecitazione composta. Il su detto carico di sicurezza è una frazione del carico limite di elasticità o del <u>carico di snervamento</u> questo ultimo è il valore limite della sollecitazione normale interna oltre la quale si hanno grandi deformazioni permanenti e brusche cadute e riprese di resistenza.

La detta frazione si chiama coefficiente di sicurezza ed è funzione della compattezza ed omogeneità dei diversi materiali in corrispondenza dei quali varia da $1/3$ ad $1/10$.

Osserviamo ancora che mentre per alcuni materiali da costruzioni il carico di sicurezza K a compressione ed a tensione è lo stesso (ferro, acciaio, rame) e quindi si scrive una unica equazione di stabilità eguagliando il carico di sicurezza al valore assoluto della tensione principale ideale numericamente massima; per gli altri materiali di struttura eterogenea (ghisa, legname) si hanno due carichi di sicurezza rispettivamente a compressione ed a trazione e quindi due equazioni di stabilità.

## Caratteristiche dei sistemi di forze esterne.

Consideriamo una qualsiasi sezione retta individuata dalla coordinata z. In ogni punto le componenti speciali di tensione non nulle, secondo i tre assi x y e z sono: $\sigma_z$ $\tau_{yz}$ $\tau_{xz}$ esse rappresentano le tre componenti delle tensioni unitarie relative all'elemento di sezione retta contiguo al punto considerato. Se immaginiamo di tagliare in due il cilindro in corrispondenza della detta sezione, le $\sigma_z$ $\tau_{yz}$ $\tau_{xz}$ individuano completamente punto per punto il sistema di tensioni interne che, nello stato di equilibrio, la porzione di solido situata, rispetto alla sezione retta, dalla parte della z positive, trasmette alla rimanente porzione: come caratteristiche del detto sistema di tensioni interne possiamo assumere i seguenti sei integrali di superficie estesi a tutta l'area A della sezione:

$$N_z = \int_A \sigma_z \, dA \qquad T_z = \int_A \tau_{zx} \, dA \qquad T_y = \int \tau_{yz} \, dA$$
$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA \qquad M_y \int \sigma_z x \, dA \qquad M_z = \int (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA \qquad (92)$$

$N_z$ misura la componente diretta secondo l'asse z del cilindro cioè normalmente al piano sul quale si esercita è quindi detta: <u>sforzo normale</u>.

$T_x$ e $T_y$ sono le somme delle componenti secondo gli assi x ed y delle tensioni tangenziali e sono dette <u>sforzi di taglio</u> per la tendenza che essi rappresentano, di far scorrere la sezione nel suo piano e perciò a tagliare secondo essa il cilindro in due parti.

$T_x$ e $T_y$ sono le due componenti dello sforzo di taglio complessivo o totale definito in valore assoluto da:

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \qquad (93)$$

Le ultime tre caratteristiche sono dei momenti, precisamente: le $M_x$ ed $M_y$ sono i momenti rispetto ad x ed y delle tensioni elementari normali $\sigma_z \, dA$, ciascuno di questi momenti rappresenta una tendenza a far ruotare la sezione intorno ad un asse giacente nel piano stesso della sezione; essi tendono quindi ad inflettere il cilindro e perciò si chiamano momenti <u>flettenti</u>: il loro momento risultante, avente per vettore momento la somma geometrica dei loro vettori momenti si chiama momento flettente complessivo ed in valore assoluto è:

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \qquad (94)$$

L'ultima caratteristica $M_z$ è il momento delle forze interne preso rispetto all'asse $z$: esso tende a far ruotare la sezione nel piano perciò è detto momento torcente. Siano:

$$N_z(l) \quad T_x(l) \quad T_y(l)$$
$$M_x(l) \quad M_y(l) \quad M_z(l)$$

le sei caratteristiche in corrispondenza della sezione estrema $z = l$, tali caratteristiche, per l'equilibrio, saranno eguali alle analoghe caratteristiche del sistema di forze esterne applicate, come si è già detto, sulla base del cilindro.

Per trovare una relazione fra le caratteristiche del sistema delle forze esterne e quelle relative ad una sezione generica $z$, consideriamo il tronco compreso fra questa sezione e la sezione estrema $z = l$ ed applichiamo ad essa le equazioni di equilibrio dei corpi rigidi; avremo:

$$N_z = N_z(l) \qquad T_x = T_x(l) \qquad T_y = T_y(l)$$

$$M_x = M_x(l) - T_y(l - z) \qquad M_y = M_y(l) - T_x(l - z) \quad M_z = M_z(l)$$

Quindi nel nostro cilindro sollecitato da forze esterne date solo sulle due basi, lo sforzo normale, gli sforzi taglianti ed il momento torcente sono costanti per tutte le sezioni trasversali del solido mentre i momenti flettenti variano linearmente con le distanze della sezione retta generica dalle due basi, risulta ancora che, assegnate le caratteristiche delle sollecitazioni esterne applicate alla base libera sono determinate le sei caratteristiche del sistema di tensione interne relative ad una sezione retta qualsiasi.

## Generalità sulle soluzioni del problema di Saint Venant e sulla loro portata pratica.

È importante la seguente considerazione, sperimentalmente giustificata.

La sostituzione di un dato sistema di forze applicate ad una delle basi del cilindro (o prisma) con altro staticamente equivalente, cioè avente le stesse caratteristiche (forza risultante e momento risultante) per quanto differente nel modo di applicazione e nella legge di ripartizione, non ha influenza sensibile sui punti del cilindro situati dalla base stessa ad una sufficiente distanza, la quale può essere anche relativamente molto piccola.