Capitolo V.

Teoremi generali sul lavoro nei solidi elastici

Il lavoro di deformazione elementare, dovuto ad un incremento infinitesimo della deformazione stessa, è:

$$\delta \mathcal{L}_e = \int_V \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \int_S (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) dS + \Sigma (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w)$$

dove $X\, Y\, Z$ sono le componenti della forza riferita all'unità di massa, $X_n\, Y_n\, Z_n$ le componenti delle forze riferite all'unità di superficie, $F_x\, F_y\, F_z$, quelle delle forze concentrate: queste ultime da considerarsi sempre risultanti da un sistema di forze distribuite su di un'area piccola, con legge incognita e con pressioni unitarie grandi, applicate nel centro dell'area piccolissima: u, v, w sono le componenti degli spostamenti dei diversi punti di applicazione.

Immaginiamo che le forze esterne crescano dal valore zero al valori finale gradatamente in modo tale che, indicando con $X' \ldots X'_n \ldots F'_x \ldots$ i valori da esse raggiunti in uno stato intermedio della deformazione, essi valori risultino proporzionali al rispettivo valore finale secondo uno stesso parametro ξ variabile da zero ad uno, cioè:

$$X' = \xi X \ldots \quad X'_n = \xi X_n \ldots \quad F'_x = \xi F_x \ldots \qquad (61)$$

Applicando il principio della proporzionalità fra sforzi e deformazioni, risulteranno le componenti di deformazione, nello stesso stato intermedio, proporzionali ai valori finali secondo lo stesso parametro ξ, cioè:

$$u' = \xi u \qquad v' = \xi v \qquad w' = \xi w$$

da cui:

$$\delta u' = u\delta\xi \qquad \delta v = v\delta\xi \qquad \delta w = w\delta\xi$$

Il lavoro di deformazione elementare, compiuto per una variazione infinitesima di deformazione caratterizzata da $\delta u'$ $\delta v'$ $\delta w'$, a partire dallo stato di equilibrio definito dal valore ξ, sarà:

$$\delta \mathcal{L}_e = \int_V \rho (X'\delta u' + Y'\delta v' + Z'\delta w') dV + \int_S (X'_n \delta u' + Y'_n \delta v' + Z'\delta w') dS + \Sigma (F'_x du' + F'_y \delta v' + F'_z \delta w')$$

dalla quale sostituendo ad $X' \dots X'_n \dots F'_x \dots$ i loro valori (61), si ricava:

$$\delta \mathcal{L}_e = \xi d\xi \left[\int_V \rho (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS + \Sigma (F_x u + F_y v + F_z w) \right]$$

sommando tutti gli incrementi, cioè integrando rispetto a ξ fra 0 ad I, si ottiene:

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \left[\int_V \rho (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n + Z_n w) dS + \Sigma (F_x n + F_y v + F_z w) \right]$$

e poichè la espressione in parentesi rappresenta il lavoro che le $X \dots X_n \dots F_x \dots$ compirebbero per effetto degli spostamenti u v w, qualora esse conservassero durante tutta la deformazione il loro valore finale, possiamo enunciare il seguente teorema di Clapeyron:

"Il lavoro di deformazione di un solido elastico soggetto a forze esterne (crescenti gradatamente senza l'intervento di fenomeni dinamici) è eguale alla metà del lavoro che le forze stesse compirebbero se durante tutta la deformazione da esse prodotta esse conservassero costantemente la loro intensità finale."

Il teorema di Clapeyron permette di calcolare il lavoro di deformazione mediante le forze esterne e gli spostamenti dei loro punti di applicazione, senza eseguire la analisi della deformazione e delle pressioni interne.

Teorema di reciprocità di Betti - Teorema di Maxwell.

Il principio di reciprocità che Betti dimostrò per primo nel 1872 si può enunciare così:

"Se su di un solido elastico agiscono due diversi sistemi di forze, il lavoro compiuto dalle forze del primo sistema per effetto degli spostamenti provocati dal secondo è eguale al lavoro compiuto dalle forze del secondo sistema per effetto degli spostamenti provocati dal primo.

Questo principio è suscettibile di svariate ed eleganti applicazioni.

Esso si dimostra come segue:

Immaginiamo che sul solido elastico agiscano successivamente i due sistemi di forze A e B. Il lavoro complessivo $L(a+b)$ dovrà essere, per il principio della sovrapposizione degli effetti, lo stesso qualunque sia l'ordine col quale si fanno agire le forze applicate.

Supponiamo che agisca per primo il sistema A. Calcolando i lavori successivamente prodotti si ottiene:

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

Supponendo invece che agisca per primo il sistema B avremo:

$$L_{a+b} = L_b + L_a + L_{ba}$$

Dalle due precedenti eguaglianze si trae: $\mathcal{L}_{ab} = \mathcal{L}_{ba}$.

*

* *

Come caso particolare supponiamo che i sistemi di forze esterne A e B si riducano a due sole forze concentrate applicate in A e B, di intensità eguale ad uno agenti secondo le rette a e b.

Sia δ_{ab} lo spostamento che il punto di applicazione A subisce nella direzione <u>a</u> per effetto della forza 1 agente in B secondo b: viceversa sia δ_{ba} lo spostamento di B nella direzione b, prodotto dalla forza 1 agente in A secondo a.

Avremo per il principio dimostrato:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \qquad (62)$$

questo caso particolare era già stato dimostrato precedentemente a quello di Betti, ed è noto come "Teorema di Maxwell".

Applicazione del principio dei lavori virtuali alla determinazione di forze incognite iperstatiche -

Poichè sussiste l'equilibrio tra le forze esterne applicate al solido elastico e le forze interne in esso provocate, è nullo il lavoro virtuale di tutte le forze per un qualunque sistema di spostamenti virtuali.

Si noti che si intendono incluse fra le forze esterne le reazioni dei vincoli, le quali sostituiscono i vincoli stessi, quindi il corpo elastico si può riguardare come libero nello spazio così che tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili.

L'espressione del lavoro virtuale delle forze interne, per effetto di un sistema generico di spostamenti caratterizzati dalle componenti di deformazione $\varepsilon'_x \dots \gamma'_{yz} \dots$ è stata determinata nel Cap: IV pag: 74 formula (60).

Indicando genericamente con C le reazioni dei vincoli e δ'_c gli spostamenti dei rispettivi punti di applicazione misurati nelle direzioni delle C stesse, con Q le forze esterne applicate e δ' gli spostamenti dei loro punti di applicazione, potremo scrivere, comprendendo, in via di approssimazione, fra le forze esterne le forze di massa:

$$\Sigma C\delta'_c + \Sigma Q\delta' = -\int_V (X_x \varepsilon'_x + \dots\dots + Y_z \gamma'_{yz} + \dots) dV \qquad (63)$$

L'equazione ora scritta si presta alla importante applicazione che segue. Un solido elastico può essere fissato nello spazio con i vincoli strettamente necessari, ovvero con vincoli sovrabbondanti.

Nel primo caso la struttura si dice *isostatica* ed è allora possibile prescindere dalla influenza che la deformazione ha sulle linee di azione delle forze esterne e le reazioni degli appoggi possono determinarsi applicando le leggi della statica dei sistemi rigidi, cioè: nel piano, eguagliando a zero la proiezione delle forze date e delle reazioni sopra due assi non paralleli, ed eguagliando a zero il momento delle forze (comprese le reazioni) rispetto ad un punto; nello spazio: eguagliando a zero la somma delle proiezioni di tutte le forze sopra tre assi non complanari ed i momenti delle forze stesse rispetto a tre assi non complanari.

La struttura si dice *iperstatica* quando il numero dei vincoli è maggiore di quello strettamente necessario alla fissazione del sistema nello spazio; in questo caso le reazioni non si possono determinare senza tener conto della elasticità del materiale: uno dei procedimenti più generali deriva dall'applicazione del principio dei lavori virtuali ora richiamato.

Il solido elastico, liberato idealmente dai vincoli sovrabbondanti (e trattenuto solo dai vincoli strettamente necessari alla sua indeformabilità cinematica) si indica con "*sistema principale*".

Limitiamoci al caso in cui i detti vincoli sviluppano come reazioni, delle forze concentrate che diremo R' R'' R'''... delle quali supporremo assegnate anche le linee di azione cioè i vincoli sono semplici come ad esempio, nel piano, l'appoggio scorrevole.

Consideriamo agenti separatamente sul solido elastico i seguenti sistemi di forze:

$\underline{\underline{A}}'$: costituito dalla forza $R'=1$ e le reazioni C' dei vincoli strettamente necessari provocate da detta forza agente da sola sul sistema principale: Siano $X'_x \ldots Y'_z \ldots$ le componenti speciali di pressione in corrispondenza del detto sistema di forze; $\underline{\underline{A}}''$: costituito dalla forza $R''=1$ con le corrispondenti reazioni C'' e le componenti speciali di pressione: $X''_x \ldots Y''_z \ldots$

Analogamente si abbiamo i sistemi A''' ecc..... Il loro numero sarà quello stesso delle reazioni incognite R', R'', ecc.
B: costituito dalle forze effettivamente agenti sul solido con i vincoli completi, avremo dunque da considerare le forze esterne superficiali e di massa, le reazioni dei vincoli strettamente necessari, che abbiamo indicato genericamente con C, e le reazioni iperstatiche R' e R'' ecc; in corrispondenza del sistema B siano $X_x \dots Y_z \dots$ le componenti speciali di pressione; u, v, w, le componenti degli spostamenti ed $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ le componenti di deformazione; δ_c $\delta' \delta'' \dots$ gli spostamenti dei punti di applicazione delle reazioni C (generica) ed R' $R'' \dots$ Si noti che tutti i suddetti spostamenti sono quelli che effettivamente hanno luogo nel solido elastico per effetto dell'assegnato sistema di forze esterne.

Applichiamo ora l'equazione (63) alle coppie di sistemi A' e B; A'' e B; ecc.. assumendo come spostamenti virtuali quelli effettivi avremo:

$$\Sigma C'\delta_c + 1\delta' = -\int_V (X'_x \varepsilon_x + \dots + Y'_z \gamma_{yz} + \dots) dV$$
$$\Sigma C''\delta_c + 1\delta'' = -\int_V (X''_x \varepsilon_x + \dots + Y''_z \gamma_{yz} + \dots) dV \qquad (64)$$

ecc... Le equazioni saranno tante quante sono le incognite iperstatiche R' $R'' \dots$

Osserviamo che per la legge di Hoocke le $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ sono funzioni lineari omogenee delle $X_x \dots Y_z \dots$ inoltre le δ_c $\delta' \delta'' \dots$ o saranno note, nel caso di vincoli rigidi con difetti iniziali di montaggio, ovvero, per vincoli iperstatici, saranno proporzionali ciascuna alla rispettiva R' R'' ecc...

D'altra parte le C e le $X_x \ldots Y_z \ldots$ sono, per il principio della sovrapposizione degli effetti, funzioni lineari delle incognite R' e R'' ecc, secondo le seguenti equazioni:

$$C = C_0 + C'R' + C''R'' + \ldots\ldots$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$X_x = X_x^{(0)} + X'_x R' + X''_x R'' + \ldots\ldots \qquad (65)$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$Y_z = Y_z^{(0)} + Y'_z R' + Y''_z R'' + \ldots\ldots$$

dove i simboli con l'apice zero rappresentano le reazioni o le pressioni che le forze esterne date provocano sul sistema principale (con i soli vincoli strettamente necessarî).

Le grandezze C_0, C', C'' ecc .... sono determinabili con le sole leggi della statica, poichè rappresentano le reazioni che il sistema principale subisce rispettivamente per effetto delle forze esterne date, e delle forze note $R' = 1$, $R'' = 1$ ecc..

Le $X'_x \ldots Y'_z \ldots$; $X''_x \ldots Y''_z \ldots\ldots$ richiedono lo studio della ripartizione delle pressioni interne nel solido elastico, ridotto però al *sistema principale* e perciò reso staticamente determinato per quello che riguarda le reazioni dei vincoli.

Le (64), quando si esprimano le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ in funzione delle $X_x \ldots Y_z \ldots$ e queste in funzione delle R' $R'' \ldots$ secondo le (65) e quando si pongono per le δ_c δ' $\delta'' \ldots$ i loro valori noti o funzioni delle C e delle R' $R'' \ldots$; si riducono a funzioni lineari nelle incognite R' R'' ed il loro numero è proprio quello delle incognite stesse.

Il sistema delle equazioni lineari è sempre determinato, cioè il suo determinante è diverso da zero come deriva dalla necessità fisica dell'esistenza della risoluzione dell'equilibrio elastico e come del resto si potrebbe direttamente dimostrare.

Si noti il particolare uso che si suole fare del principio dei lavori virtuali in meccanica applicata alle Costruzioni: esso serve a stabilire delle relazioni di condizione fra deformazioni elastiche effettive incognite avvalendosi dell'equilibrio esistente fra forze fittizie note (come le R'=I, R''=I, ecc) e le forze interne da esse provocate.

Secondo principio di reciprocità -

Si dice che un solido o sistema elastico, comunque connesso, è soggetto ad una *distorsione* quando in esso si pratica un taglio secondo una superficie Σ qualsiasi, interna al solido, il quale non separi il sistema in parti indipendenti (cioè dopo il taglio il corpo risulti ancora connesso) e poi sulle due facce del taglio Σ_a ed Σ_b, inizialmente combacianti, si applicano due sistemi di forze distribuite sulle facce stesse con intensità eguali ed opposte punto per punto: questi due sistemi non alterano l'equilibrio delle forze esterne applicate ma provocano nel sistema elastico una deformazione, così che le facce del taglio subiranno uno spostamento relativo definito in ogni punto della superficie Σ; in alcuni punti di Σ può aversi compenetrazione delle due regioni del solido separate da Σ, tale compenetrazione si può rendere possibile asportando il piccolissimo strato secondo cui avverrebbe la compenetrazione: in altri punti i bordi possono risultare scostati ed allora si può immaginare di riempire di materiale il sottilissimo vano formatosi, poi si possono supporre saldati i bordi del taglio. Si dice appunto distorsione lo stato di deformazione e conseguente stato di tensione così provocato.

Indichiamo ora con (S) il sistema di forze esterne, con (Σ) il sistema delle forze interne che nel solido non soggetto a distorsioni la faccia del taglio Σ_a esercita contro la faccia Σ_b, per effetto delle forze applicate (S), cioè Σ è il sistema di forze interne provocate dalle forze esterne S e trasmesse attraverso le facce del taglio praticato secondo la superficie Σ, sarà allora $-(\Sigma)$ il sistema di forze che la faccia Σ_b esercita contro la faccia Σ_a.

Indichiamo con D e $-D$ i due sistemi di forze che applicati sulle due facce del taglio producono la descritta distorsione.

Applicando il teorema di Betti ai seguenti sistemi:

I Sistemi (S) (Σ) $-(\Sigma)$ agenti simultaneamente
II Sistemi D $-D$ " "

si trova che il lavoro che il sistema I compie per effetto degli spostamenti dovuti al sistema II è eguale al lavoro che il sistema II compie per effetto degli spostamenti dovuti al sistema I. Osservando che questo secondo lavoro è eguale a zero per essere le forze D e $-D$ eguali ed opposte punto per punto sulla superficie mentre gli spostamenti dovuti al sistema I sono eguali punto per punto sulle facce Σ_a ed Σ_b si ricava che deve essere nullo il lavoro che il sistema complessivo (S) $(\Sigma)-(\Sigma)$ compie per effetto degli spostamenti dovuti alla distorsione.

Poichè le forze dei sistemi Σ e $-\Sigma$ sono eguali ed opposte su ogni punto di Σ, nel valutare il lavoro da esse compiuto per effetto della distorsione, si può in ogni punto, mettere in evidenza, quale fattore comune, l'intensità uguale delle forze, ed allora come altro fattore rimarrà la differenza fra lo spostamento (dovuto alla distorsione) del punto di applicazione di Σ (forza esercitata dalla faccia Σ_a contro la faccia Σ_b) considerato come appartenente alla faccia Σ_b, meno lo spostamento, sempre dovuto alla distorsione, del punto contiguo che si trova su Σ_a, tale differenza rappresenta lo spostamento relativo dei due punti considerati.

Potremo dunque enunciare il seguente principio, detto secondo principio di reciprocità:

Il lavoro che le forze esterne applicate su di un sistema elastico compiono per effetto di una distorsione (ottenuta con un taglio Σ e con un generico sistema di forze distorcenti applicate sulle facce del taglio) è eguale al lavoro che le forze interne (Σ), trasmettentesi attraverso al taglio Σ, compiono per effetto degli spostamenti relativi (dovuti alla distorsione) dei punti della faccia del taglio dalla quale il sistema (Σ) emana, rispetto agli analoghi punti dell'altra faccia sulla quale (Σ) si esercita.

La dimostrazione fatta si riferisce ad una distorsione qualunque, cioè è affatto arbitraria la scelta della forma della superficie Σ del taglio, e gli spostamenti relativi di Σ_b ed Σ_a contrariamente a quanto si usa nelle applicazioni, possono anche non essere spostamenti rigidi.

Teorema di Castigliano.

Consideriamo un qualunque sistema elastico soggetto a forze esterne in equilibrio, fra le quali siano comprese eventuali reazioni dei vincoli, e consideriamo gli spostamenti dei vari punti del sistema, dovuti alla sola deformazione elastica provocata dalle forze esterne applicate.

Tra le forze esterne si abbia una forza concentrata P, ed indichiamo con δ lo spostamento elastico totale del suo punto di applicazione misurato nella direzione della forza stessa.

Indichiamo con $\mathcal{L}$ il lavoro di deformazione del sistema elastico dovuto a tutte le forze esterne, o considerate come tali; esso sarà una funzione di tutte le forze applicate, le quali sono da considerarsi tutte come variabili indipendenti.

L'espressione del lavoro totale di deformazione dopo avere attribuito alla forza P un incremento infinitesimo dP, ritenendo costanti tutte le altre forze applicate è:

$$\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} dP$$

questo lavoro totale è eguale alla somma di $\mathcal{L}$ e del lavoro che si compie per effetto di dP. questo ultimo lavoro consta di due parti: del lavoro che dP compie per effetto dello spostamento del suo punto di applicazione e del lavoro che tutte le altre forze, compresa la P, compiono per effetto dello spostamento dovuto a dP. Di questi ultimi due valori il primo è trascurabile perchè la forza infinitesima dP produce uno spostamento pure infinitesimo e quindi il lavoro è un infinitesimo di ordine superiore; il secondo, per il principio di reciprocità è eguale al lavoro che dP compie per effetto degli spostamenti dovuti a tutte le altre forze, compresa la P, dunque è dato da $\delta . dP$.

Potremo dunque scrivere:

$$\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} dP = \mathcal{L} + \delta . dP$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \delta$$

Potremo dunque enunciare il primo dei teoremi di Castigliano detti teoremi delle derivate del lavoro: "La derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto ad una forza esterna concentrata è eguale allo spostamento del punto di applicazione di detta forza misurato nella direzione della forza stessa."

Questo Teorema nelle applicazioni si usa per ottenere, dati gli spostamenti, delle relazioni lineari fra termini incogniti iperstatici analogamente a quanto si è ottenuto con l'applicazione del principio dei lavori virtuali.

Esso si presta pure alla determinazione dello spostamento di un punto del sistema elastico, in una data direzione, anche quando su detto punto non è applicata alcuna forza concentrata: in tal caso si immagina in quel punto applicata una forza concentrata P e si esprimi il lavoro di deformazione in funzione di tutte le forze applicate, compresa la F, si trova la derivata parziale rispetto ad F ed in quest'ultima si pone $F = 0$, si ottiene così il valore dello spostamento cercato.

Al Castigliano si deve un secondo teorema analogo al primo: il lavoro di deformazione in corrispondenza di un sistema elastico in equilibrio si può riguardare come una funzione degli spostamenti dei punti in superficie, da considerarsi come variabili indipendenti; potremo dunque calcolare la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto allo spostamento di un punto superficiale, valutando l'incremento che detto lavoro subisce per effetto dell'incremento infinitesimo del solo spostamento del detto punto, immaginando inalterati tutti gli altri spostamenti.

Tra le forze superficiali di massa si abbia una forza P concentrata applicata in un punto A e sia δ lo spostamento totale del punto A sotto l'azione delle forze in equilibrio sollecitanti il solido elastico -

Attribuiamo allo spostamento δ (finito) un incremento infinitesimo $d\delta$ da considerarsi come infinitesimo del primo ordine; per la continuità della superficie e dell'interno del solido considerato lo spostamento $d\delta$ si accompagnerà a spostamenti, pure infinitesimi del 1° ordine, dei punti contigui superficiali ed interni, noi potremo però immaginare limitata la deformazione suppletiva caratterizzata da $d\delta$ ad un intorno di A avente dimensioni lineari infinitesime del 1° ordine. Per effetto di questa deformazione suppletiva compiranno lavoro le forze superficiali (infinitesime del secondo ordine) provocando lavori infinitesimi del terzo ordine e le forze di massa (infinitesime del terzo ordine) provocando lavori del quarto ordine. Tali lavori saranno dunque trascurabili rispetto al lavoro che la forza P compie per effetto di $d\delta$, essendo tale lavoro infinitesimo del primo ordine. Se con P' indichiamo la proiezione di P nella direzione di $d\delta$, questo lavoro sarà dato da $P'd\delta$.

Osserviamo anche che l'incremento potrà provocare un incremento dP della forza P, al quale corrisponde un lavoro trascurabile essendo esso un infinitesimo del secondo ordine, valutabile, secondo il teorema di Clapeyron con

$$\frac{1}{2}\, dP'\, d\delta$$

Potremo dunque dire che l'incremento del lavoro di deformazione dovuto al solo incremento $d\delta$ è dato da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d}\, d\delta = P' d\delta \qquad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = P'$$

possiamo dunque esprimere il secondo teorema di Castigliano: "In un sistema elastico soggetto a forze esterne in equilibrio la derivata parziale del lavoro di deformazione, rispetto allo spostamento di un punto della superficie esterna è eguale alla forza concentrata nel punto stesso, proiettata ortogonalmente nella direzione dello spostamento.

Nelle applicazioni pratiche si ricorre di rado a questo teorema. Se lo spostamento di un punto in una data direzione è nullo per effetto di un vincolo rigido, la corrispondente componente di una forza concentrata in detto punto che può essere la reazione del vincolo, si può ottenere esprimendo la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto ad uno spostamento δ nella data direzione e poi calcolando il valore di questa derivata per $\delta=0$. È utile osservare che, nel caso in cui tra le forze esterne date P vi siano due forze eguali e direttamente opposte applicate in due punti A e B, le quali possono anche essere le reazioni di un vincolo o legame interno tra due punti A e B (così un'asta o catena che riunisca i due punti), la derivata del lavoro di deformazione presa rispetto a P dà lo spostamento relativo dei due punti A e B.

Infatti sia in A applicata la forza $P'=P$ ed in B la forza $P''=-P$ e siano δ_a e δ_b gli spostamenti di A e B misurati nella direzione di P e nei versi delle rispettive forze. Per il primo teorema di Castigliano si ha:

$$\delta_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'} \qquad \delta_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P''}$$

Tenendo conto che P' e P'' sono eguali in valore assoluto ed opposte in segni si può assumere P come variabile indipendente ed allora l'incremento del lavoro di deformazione quando P subisce l'incremento dP è:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}\, dP = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'}\, dP' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P''}\, dP''$$

dove P' e P'' si computano con i loro rispettivi segni opposti essendo:

$$dP' = dP'' = dP$$

si ricava:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P''}$$ quindi per le relazioni precedenti:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \delta_a + \delta_b$$

ed essendo δ_a e δ_b misurati in senso opposto, la loro somma

$$\delta_a + \delta_b = \delta_r$$

rappresenta proprio lo spostamento relativo dei due punti A e B nella direzione della retta AB e nel senso della forza su essi esercitata dal mutuo legame che li unisce. Dunque

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\partial P} = \delta_r$$

inversamente considerando come variabili indipendenti gli spostamenti: se tra questi si assegna lo spostamento relativo di due punti A e B collegati da un legame mutuo nella direzione della loro congiungente AB e se δ_a e δ_b sono gli spostamenti assoluti di A e B in direzione AB, ma in versi opposti, avremo: $\delta_r = \delta_a + \delta_b$

Quindi sarà pure:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_b} = P$$

eguale quindi alla forza P valutata nella direzione AB ed agente in sensi opposti sui due punti A e B, forza che si sviluppa per il legame mutuo riunente i punti stessi.

Equazioni determinatrici delle reazioni iperstatiche ricavate con il primo teorema di Castigliano -

Consideriamo un sistema elastico soggetto a forze ed a vincoli elastici principali (strettamente necessari) sviluppanti reazioni C (staticamente determinate) soggetto pure a vincoli sovrabbondanti sviluppanti reazioni incognite iperstatiche R' R'' R'''...., considerando queste come forze esterne ed attribuendo invece allo stesso sistema elastico l'eventuale elasticità dei vincoli principali potremo scrivere:

$$\mathcal{L}_e = \int_V \Phi \, dV - \frac{1}{2} \Sigma \, C \, \delta_c \qquad (66)$$

(Infatti ricordiamo che il lavoro compiuto dalle componenti speciali di pressione agenti su di un elemento dV per effetto degli spostamenti effettivi sarebbe dato da:

$$-(X_x \varepsilon_x + \dots + Y_z \gamma_{yz} \dots) \, dV$$

qualora esse conservassero il loro valore finale durante tutta la deformazione: ma poichè esse crescono gradualmente dal valore zero al valore finale, il lavoro da esse compiuto è, per il teorema di Clapeyron:

$$-\frac{1}{2}(X_x \varepsilon_x + \dots + Y_z \gamma_{yz} + \dots) \, dV$$

ed avendo posto

$$2\Phi = -(X_x \varepsilon_x + \dots + Y_z \gamma_{yz} + \dots)$$

sarà l'espressione del lavoro di deformazione in corrispondenza di dV:

$$d\mathcal{L}_e = \Phi \, dV$$

che integrata al volume V del solido elastico ci dà:

$$\mathcal{L}_e = \int \Phi \, dV \quad)$$

La sommatoria $\Sigma C \delta_c$ al secondo membro sta a rappresentare il doppio del lavoro di deformazione dei vincoli elastici principali e δ_c è lo spostamento elastico del punto di applicazione nella direzione della forza, notando che si può fare astrazione da spostamenti non elastici perchè essi, attribuiti ai vincoli principali, non generano sforzi nel sistema principale; il segno meno innanzi alla sommatoria è dovuto al fatto che le C si considerano come forze interne e quindi sono di segno contrario a quello delle δ_c da esse provocate.

Indicando, come si è già fatto a pag: 81 di questo Cap; con δ' lo spostamento effettivo del punto di applicazione di R' (reazione iperstatica) misurato nella direzione della forza stessa, avremo per il teorema di Castigliano:

$$\delta' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} \qquad (67)$$

Poichè δ_c è il cedimento elastico provocato da C (reazione) avremo per ogni vincolo semplice:

$$\delta_c = - a_c C \qquad (68)$$

dove a_c è la costante elastica del vincolo principale generico: cioè è lo spostamento che si ha per $C = 1$, il segno meno deriva dal fatto che il cedimento elastico provocato dal vincolo è di verso opposto a quello di C mentre δ_c si deve, secondo l'enunciato del teorema di Castigliano, prendere positivo nello stesso verso di C.

Ricordando ora la (57) e la (59) del Cap: IV e le (65) di questo capitolo avremo, derivando (66) rispetto ad R' ed osservando che per le (65) si ha:

$$\frac{\partial c}{\partial R'} = C' \ldots$$

$$\frac{\partial X_x}{\partial R'} = X'_x \ldots$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial R'} = Y'_z \ldots$$

$$\delta' = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial R'} dV + \Sigma\, a_c\, C \frac{\partial c}{\partial R'} =$$

da cui

$$\delta' = -\int_V \left(X'_x \varepsilon_x + \ldots + Y'_z \gamma_{yz} + \ldots \right) dV - \Sigma\, C' \delta_c \qquad (64)$$

ed analogamente per δ''

$$\delta'' = -\int_V \left(X''_x \varepsilon_x + \ldots + Y''_z \gamma_{yz} + \ldots \right) dV - \Sigma\, C'' \delta_c$$

ritroviamo così le (64) già ottenute con l'applicazione del principio dei lavori virtuali.

Le (64) possono essere trasformate esprimendo le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ e le $\delta_c\ \delta'\ \delta'' \ldots$ come funzioni lineari nelle $R'\ R'' \ldots$ come è lecito fare per il principio della sovrapposizione degli effetti, si ottiene così un sistema di n equazioni lineari non omogenee tra le n incognite $R'\ R''$ ecc.... sistema che è sempre determinato e che permette di determinarle.

Teorema di Menabrea o del minimo lavoro.

Consideriamo un sistema elastico comunque trattenuto da vincoli <u>rigidi</u> sovrabbondanti attribuendo al sistema stesso l'eventuale elasticità dei vincoli, immaginiamo che nel sistema elastico non si abbiano sforzi interni indipendenti da forze esterne e che i punti vincolati abbiamo posizioni compatibili con la forma che il sistema elastico, liberato dai vincoli sovrabbondanti, (sistema principale) assume nello stato naturale non deformato.

Se sul sistema elastico agiscono forze esterne date Q i vincoli sovrabbondanti svilupperanno certe reazioni iperstatiche R' e R''... inoltre osserviamo che praticando nel sistema stesso uno o più tagli secondo una superficie complessiva Σ la ripartizione delle forze interne antagoniste trasmettensi attraverso Σ è staticamente indeterminata.

Le forze incognite iperstatiche R' R''.... (Σ) e $(-\Sigma)$ si determinano con la condizione che agendo simultaneamente sul sistema principale elastico tagliato, inducano nei punti di applicazione delle R' R'' degli spostamenti assoluti e nei vari punti di Σ degli spostamenti relativi rispettivamente eguali ed opposti a quelli negli stessi punti provocati dalle forze esterne date agenti sullo stesso sistema principale tagliato.

Consideriamo il sistema delle forze rispettivamente agenti sul sistema elastico principale tagliato: esse saranno le Q e le R' R''.... le (Σ) e $(-\Sigma)$ designamo questo sistema con: $[Q\,R\,(\Sigma)]$; esso, agendo sul sistema tagliato provoca spostamenti nulli dei punti vincolati e spostamenti relativi pure nulli in ogni punto delle facce del taglio.

Sia L il lavoro di deformazione effettivo cioè quello dovuto al sistema $[Q\,R\,(\Sigma)]$.

Attribuiamo ora ad R' e R''..... (Σ) $(-\Sigma)$ pensate come agenti sul sistema principale tagliato dagli incrementi piccolissimi: $\Delta R' \ldots (\Delta \Sigma)\ (-\Delta \Sigma)$, esse nel loro complesso saranno indicate con $\Delta[R(\Sigma)]$.

Il sistema $\Delta[R(\Sigma)]$ provocherà spostamenti assoluti nei punti vincolati e spostamenti relativi nei punti dalle facce del taglio Σ: calcoliamo la corrispondente variazione $\Delta \mathcal{L}$ di $\mathcal{L}$. Poichè le forze esterne date Q non vengono alterate per la variazione $\Delta[R(\Sigma)]$ applicando il principio della sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare $\Delta \mathcal{L}$ come somma del lavoro di deformazione proprio del sistema $\Delta[R(\Sigma)]$ e del lavoro mutuo dei due sistemi $[Q\,R(\Sigma)]$ e $\Delta[R(\Sigma)]$.

Questo lavoro mutuo è zero, comunque sia scelta la variazione $\Delta[R(\Sigma)]$, poiché esso si può valutare come lavoro che le forze $\Delta[R(\Sigma)]$ compiono per effetto degli spostamenti effettivi dovuti al sistema $[Q\,R(\Sigma)]$ e già sappiamo che, per l'ipotesi fatta, sono nulli tutti gli spostamenti provocati da questi sistemi di forze nei punti di applicazione delle R' R'' e nulli pure sono gli spostamenti relativi delle facce del taglio.

La variazione $\Delta \mathcal{L}$ si riduce quindi al solo lavoro di deformazione dovuto alle forze $\Delta[R(\Sigma)]$ quindi la variazione è essenzialmente positiva: possiamo dunque affermare che $\mathcal{L}$ è il minimo dei valori che può assumere il lavoro di deformazione complessivo per valori delle forze R' e $R'' \ldots (\Sigma)\ (-\Sigma)$ diversi da quelli che soddisfano alle suddette condizioni di rigidità di vincoli ed alla mancanza di forze interne indipendenti da forze esterne.

Possiamo quindi enunciare il Teorema di Menabrea: In un sistema elastico con vincoli sovrabbondanti rigidi, e privo di sforzi interni indipendenti da forze esterne date i valori effettivi delle reazioni iperstatiche e la distribuzione degli sforzi interni delle tensioni interne attraverso a un qualsiasi taglio Σ rendono minimo il lavoro di deformazione del sistema elastico.

Le condizioni imposte dall'enunciato, necessarie per l'enunciazione del teorema, limitano l'applicabilità del teorema stesso a differenza di quanto accade per gli altri teoremi di elasticità che valgono anche quando si abbiano sforzi interni indipendenti da forze esterne.

Quando sia usato per la determinazione di reazioni iperstatiche, concentrate R' R''.... il Teorema di Menabrea conduce alle stesse equazioni stabilite mediante il Teorema di Castigliano, infatti dovendo essere il minimo il lavoro per i ricercati valori di R, questi dovranno soddisfare alle relazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} = 0 \dots \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R''} = 0 \dots$$

le quali secondo il Teorema di Castigliano, dimostrano che sono nulli gli spostamenti dei punti di applicazione delle R' e R''.