Capitolo IV -

Potenziale di elasticità - Lavoro di deformazione -

Come è noto dalla meccanica razionale, intendiamo per *energia potenziale* quell'energia che viene accumulata in un sistema materiale a spesa delle forze esterne, conferendo ad esso la capacità di compiere lavoro.

L'esistenza del *potenziale elastico* fu ammessa nel 1837 dal Green e dimostrata nel 1855 da Lord Kelvin nel caso in cui il solido elastico venga deformato a temperatura costante, ovvero quando alla fine della deformazione, non vi sia, da parte del solido elastico, nè acquisto nè perdita di calore.

Supponiamo che il solido elastico si trovi inizialmente nel suo stato naturale, senza deformazioni nè tensioni interne indipendenti da forze esterne e partendo da tale stato iniziale, immaginiamo che esso venga deformato da forze esterne la cui intensità cresca gradualmente e così lentamente da evitare nelle varie parti del solido accelerazioni e velocità sensibili e senza produrre vibrazioni od oscillazioni: le forze esterne, cioè, debbono avere *azione statica* in modo da escludere le forze di inerzia e le oscillazioni dinamiche. Immaginiamo ancora che per tutta la durata del fenomeno la temperatura resti costante.

Raggiunta una certa deformazione, si faccia ritornare il solido gradatamente allo stato primitivo, passando per stati di equilibrio anche diversi da quelli attraversati nella precedente fase di deformazione.

Poichè non si è verificato nè acquisto nè perdita di energia, il lavoro complessivo deve essere nullo, cioè il lavoro svolto dalle forze esterne nella prima fase che può dirsi "di andata" deve essere eguale e contrario a quello svolto nella seconda fase "di ritorno". Tali trasformazioni si dicono *isotermiche invertibili*.

Indichiamo con δL_e e δL_i i lavori sviluppati rispettivamente dalle forze esterne e dalle forze interne in ciascuna delle due dette fasi di trasformazione. Per le ipotesi fatte circa il modo di agire delle forze stesse, non si avrà sviluppo nè perdita di lavoro nel complesso della deformazione di andata e di quella di ritorno, dovrà essere quindi

$$\delta L_e + \delta L_i = 0$$

in totale, per una variazione finita delle forze applicate si avrà:

$$L_e + L_i = 0$$

cioè il lavoro delle forze interne è uguale ed opposto a quello delle forze esterne.

Il lavoro compiuto dalle forze esterne è detto *lavoro di deformazione*.

Immaginiamo che un corpo elastico si possa far passare da uno stato iniziale a_1 ad uno stato finale a_2 con due trasformazioni diverse τ e τ' alle quali corrispondano i lavori L_e L_i ed L_e' L_i'.

Poichè il corpo ritorna allo stato primitivo dopo la trasformazione τ e la trasformazione inversa della τ' il lavoro complessivamente sviluppato dalle forze esterne è nullo, cioè:

$$\mathcal{L}_e - \mathcal{L}'_e = 0 \qquad \mathcal{L}_e = \mathcal{L}'_e$$

Per la relazione scritta precedentemente sarà quindi:

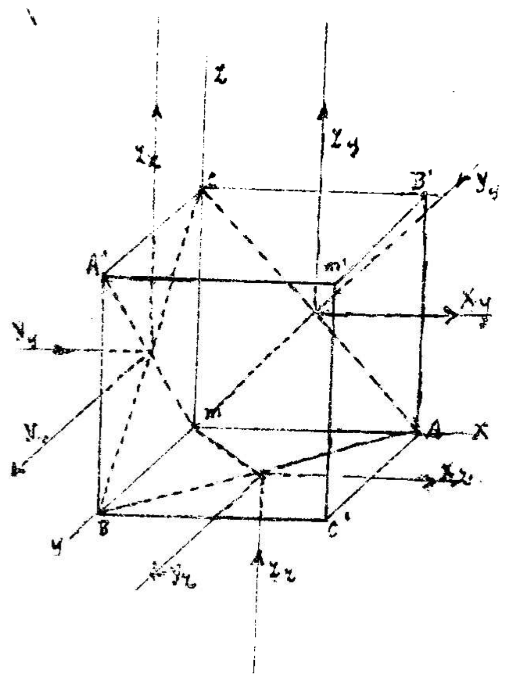
$$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}'_i$$

Quanto precede ci permette di affermare che il lavoro delle forze esterne (o quello eguale e contrario delle forze interne), nel passaggio fra due stati di equilibrio, effettuato da trasformazioni isotermiche invertibili, è invariante rispetto alle trasformazioni stesse, cioè non dipende dagli stati intermedii attraversati, ma soltanto dai due stati estremi.

È noto dalla meccanica razionale che in simili condiderazioni, cioè in un sistema equilibrato, soggetto a forze che dipendano solo dalle posizioni relative dei punti del sistema (quali sono le forze elastiche) quando il lavoro eseguito dalle forze non dipende dalle configurazioni iniziale e finale, esiste una funzione di quei parametri che caratterizzano le configurazioni estreme, cioè delle componenti di deformazione pura (nei moti rigidi le forze elastiche non compiono lavoro), detta potenziale tale che la differenza fra i valori che essa assume in corrispondenza degli stati finale ed iniziale rappresenta il lavoro compiuto dalle forze esterne per passare dalla prima configurazione alla seconda.

Il potenziale ha la importante proprietà di rappresentare, a meno di una costante, l'energia (attitudine a compiere lavoro), riferita all'unità di volume, che il corpo elastico possiede nell'intorno del punto che si considera, energia che è equivalente sia al lavoro che l'unità di volume del corpo può svolgere nel restituirsi dallo stato attuale allo stato naturale, sia al lavoro che hanno dovuto svolgere le forze esterne per condurre la detta unità di volume dallo stato naturale all'attuale suo stato di coazione elastica.

Calcoliamo l'incremento del potenziale come lavoro che le forze in equilibrio su di un parallelepipedo rettangolo elementare di volume $dV = dx\, dy\, dz$, compiono per effetto di un incremento della deformazione del parallelepipedo diviso per il volume dV del parallelepipedo stesso.



Le due facce normali all'asse x, di area $dy\, dz$ sopportano, per azione del corpo circostante, due spinte dirette verso l'interno del parallelepipedo, date rispettivamente da $X_x\, dy\, dz$ e $-(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx)\, dy\, dz$ tali spinte producono lavoro per effetto degli spostamenti delle due facce nella direzione dell'asse x.

L'incremento della deformazione del parallelepipedo è individuato dagli incrementi delle sei componenti di deformazione che sono da considerarsi come variabili indipendenti.

La differenza degli spostamenti delle facce nella direzione x è eguale a $-\delta\varepsilon_x dx$, quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore, il lavoro dovuto alle spinte sulle facce MBA'C e M'B'AC' è

$$-X_x \delta\varepsilon_x \, dx\, dy\, dz$$

si noti che il segno negativo deriva dal fatto che la X_x è una componente normale di pressione e $\delta\varepsilon_x$ è l'incremento del coefficiente di dilatazione nella direzione x, quindi lo spostamento $\delta\varepsilon_x \, dx$ avviene in verso contrario a quello della forza.

Le stesse due facce sono sollecitate dalle forze tangenziali $Y_x \, dy\, dx$ e $-(Y_z + \frac{\partial Y_x}{\partial x})\, dy\, dz$ le quali lavorano per effetto degli spostamenti delle facce stesse in direzione dell'asse y; la differenza di tali spostamenti è $-\delta \frac{\partial v}{\partial x} dx$, sicchè, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, il lavoro di dette azioni tangenziali è

$$-Y_z \,\delta \frac{\partial v}{\partial x} \, dx\, dy\, dz$$

allo stesso modo si dimostra che le azioni tangenziali sulle stesse facce agenti secondo l'asse z generano un lavoro

$$-Z_x \,\delta \frac{\partial w}{\partial x} \, dx\, dy\, dz$$

Analoghe espressioni si ricavano per i lavori sviluppati dalle azioni normali e tangenziali esercitate sulle altre due coppie di facce opposte del parallelepipedo elementare; sommando tutte le ottenute espressioni, ricordando i valori di γ_{yz} ..... (V. Capitolo -) e ponendo $dx\,dy\,dz = dV$ si trova come espressione del lavoro compiuto dalle forze esterne per imprimere all'elemento dV l'incremento di deformazione di componenti $\delta\varepsilon_x \ldots \delta\gamma_{yz} \ldots\ldots$:

$$d\delta\mathcal{L}_e = -(X_x\delta\varepsilon_x + Y_y\delta\varepsilon_y + Z_z\delta\varepsilon_z + Y_z\delta\gamma_{yz} + Z_x\delta\gamma_{zx} + X_y\delta\gamma_{xy})$$

Dividendo per dV si ottiene il lavoro riferito all'unità di volume cioè l'incremento $\delta\Phi$ di quella funzione che abbiamo chiamata *potenziale elastico*.

Tale funzione è definita a meno di una costante arbitraria.

Di solito si assume la costante in modo che Φ risulti nulla quando sono nulle le componenti di deformazione, cioè Φ è eguale a zero in corrispondenza dello stato naturale non deformato del solido elastico.

Il segno è determinato così che un valore di $\delta\Phi$, da considerarsi come lavoro compiuto dalle forze interne, sia un decremento della funzione Φ cioè questa rappresenta la capacità acquistata dal solido deformato a compiere lavoro contro le forze esterne, per unità di volume.

Porremo quindi:

$$-\delta\Phi = X_x\delta\varepsilon_x + Y_y\delta\varepsilon_y + Z_z\delta\varepsilon_z + Y_z\delta\gamma_{yz} + Z_x\delta\gamma_{zx} + X_y\delta\gamma_{xy} \qquad (51)$$

Risulta immediatamente:

$$X_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} \ldots\ldots \qquad Y_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}} \ldots\ldots \qquad (52)$$

ossia: le componenti speciali di pressione sono eguali ed opposte alle derivate parziali del potenziale elastico rispetto alle analoghe componenti di deformazione.

Ricordando che, per la legge di Hooke (Cap: III pag: 48), le componenti speciali di pressione $X_x \dots Y_y \dots$ sono funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ per le (52) dovrà essere Φ una funzione quadratica delle stesse $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ senza termini lineari (essendo $X_x \dots Y_z \dots$ funzioni omogenee) nè può contenere un termine costante dovendo essere $\Phi = 0$ quando le $\varepsilon_x \dots$ e le $\gamma_{yz} \dots$ sono eguali a zero.

La funzione Φ, detta *potenziale elastico* è, come si è visto, una funzione dello stato di equilibrio del corpo elastico e si è espressa in funzione dei parametri $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ che individuano la deformazione: osserviamo che tale deformazione può essere pure caratterizzata dalle componenti speciali di pressione, cioè si possono assumere queste componenti come variabili indipendenti e calcolare l'espressione di $\delta\Phi$. La mutua interdipendenza fra forze e deformazioni, che risulta in ogni fenomeno di deformazione elastica, ci lascia prevedere per $\delta\Phi$ una espressione perfettamente simmetrica nelle $\varepsilon_x \dots$ e nelle $X_x \dots$ a quella già trovata:

Sul parallelepipedo elementare in esame agiscano successivamente il sistema 1 di componenti $X_x \dots Y_z \dots$ e quello 2 di componenti $\delta X_x \dots \delta Y_z \dots$. Indicheremo con $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ le componenti di deformazione prodotte dal sistema 1, e con $\delta\varepsilon_x \dots \delta\gamma_{yz}$ quelle prodotte dal sistema 2.

È chiaro che il lavoro complessivo svolto dai due sistemi è invariante rispetto all'ordine col quale i due sistemi si susseguono trattandosi di deformazioni piccolissime alle quali è applicabile il principio della sovrapposizione degli effetti.

Ricordiamo ancora che le forze debbono avere una azione statica cioè crescono gradatamente fino a raggiungere il valore finale, evitando produzione di forze d'inerzia apprezzabili.

Immaginiamo che agisca per primo il sistema 1: esso produrrà una deformazione caratterizzata da $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ ed in corrispondenza si avrà un lavoro che indichiamo con L.

In seguito agisca il sistema 2, questo sistema produrrà una deformazione caratterizzata da $\delta\varepsilon_x \dots \delta\gamma_{yz} \dots$ ed un lavoro che, trattandosi di forze aventi azioni graduali sarà minore di quello che si avrebbe qualora le forze agissero con intensità costante, ma che ad ogni modo è trascurabile rispetto al lavoro L considerato essendo espresso in questo caso il lavoro come prodotto di forze infinitesime per spostamenti infinitesimi.

Le forze del I sistema che, durante la loro azione avevano raggiunto la intensità finale $X_x \dots Y_z \dots$, compiranno lavoro per effetto della deformazione dovuta al sistema 2.

Tale lavoro, per quanto sopra si è dimostrato è:

$$-(X_x \delta\varepsilon_x + \dots + Y_z \delta\gamma_{yz} + \dots)$$

In totale il lavoro compiuto dai due sistemi è:

$$L_{totale} = L - (X_x \delta\varepsilon_x + Y_y \delta\varepsilon_y + Z_z \delta\varepsilon_z + Y_z \delta\gamma_{yz} + Z_x \delta\gamma_{zx} + X_y \delta\gamma_{xy})$$

Così che, rispetto al lavoro compiuto dal solo sistema 1, l'incremento è:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{totale} - \mathcal{L} = -(X_x\delta\varepsilon_x + Y_y\delta\varepsilon_y + Z_z\delta\varepsilon_z + Y_z\delta\gamma_{yz} + Z_x\delta\gamma_{zx} + X_y\delta\gamma_{xy}) \quad (53)$$

Ritroviamo così la espressione che avevamo sopra trovata, come del resto era prevedibile, perchè quegli incrementi $\delta\varepsilon_x \dots \delta\gamma_{yz} \dots$ che avevamo considerati come incrementi di variabili indipendenti possono considerarsi come dovuti ad un certo sistema di forze $\delta X_x \dots \delta Y_z \dots$ al quale corrisponde come si è visto, per effetto delle $\delta\varepsilon_x \dots \delta\gamma_{yz} \dots$ un lavoro trascurabile, e rimane solo il lavoro che il sistema $X_x \dots Y_z \dots$, che avevamo sopra considerato, compie per effetto della deformazione dovuta al sistema $\delta X_x \dots \delta Y_z \dots$.

Immaginiamo ora che agisca per primo il sistema 2. Il lavoro compiuto dalle forze $\delta X_x \dots \delta Y_z \dots$ per gli spostamenti corrispondenti, per le ragioni sopra indicate, è trascurabile. Facciamo agire successivamente il sistema 1. Esso produrrà la deformazione caratterizzata da $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ ed in corrispondenza si avrà un lavoro che, come si è già fatto sopra, indichiamo con $\mathcal{L}$, ed è infine il lavoro che le forze $\delta X_x \dots \delta Y_z \dots$ compiono per effetto della deformazione dovuta al sistema 1. Tale lavoro sarà:

$$-(\varepsilon_x\delta X_x + \varepsilon_y\delta Y_y + \varepsilon_z\delta Z_z + \gamma_{yz}\delta Y_z + \gamma_{zx}\delta Z_x + \gamma_{xy}\delta X_y)$$

In totale il lavoro è

$$\mathcal{L}_{totale} = \mathcal{L} - (\varepsilon_x\delta X_x + \varepsilon_y\delta Y_y + \varepsilon_z\delta Z_z + \gamma_{yz}\delta Y_z + \gamma_{zx}\delta Z_x + \gamma_{xy}\delta X_y)$$

L'incremento del lavoro è dato da:

$$\mathcal{L}_{totale} - \mathcal{L} = -(\varepsilon_x\delta X_x + \dots + \gamma_{yz}\delta Y_z + \dots) \quad (54)$$

Per essere i primi membri delle (53) e (54) eguali, risulta

$$X_x\delta\varepsilon_x + Y_y\delta\varepsilon_y + Z_z\delta\varepsilon_z + Y_z\delta\gamma_{yz} + Z_x\delta\gamma_{zx} + X_y\delta\gamma_{xy} = \varepsilon_x\delta X_x + \varepsilon_y\delta Y_y + \varepsilon_z\delta Z_z + \gamma_{yz}\delta Y_z + \gamma_{zx}\delta Z_x + \gamma_{xy}\delta X_y$$

Potremo quindi porre:

$$-\delta\Phi = \varepsilon_x \delta X_x + \varepsilon_y \delta Y_y + \varepsilon_z \delta Z_z + \gamma_{yz}\delta Y_z + \gamma_{zx}\delta Z + \gamma_{xy}\delta X_y \quad (55)$$

Dalla quale risulta:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial X_x} \cdots \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y_z} \cdots \quad (56)$$

cioè: Le componenti di deformazione sono eguali ed opposte alle derivate parziali del potenziale elastico rispetto alle analoghe componenti speciali di pressione -

Ricordando poi che le componenti di deformazione sono funzioni lineari omogenee delle componenti speciali di pressione, ne risulta che il potenziale elastico è una funzione quadratica omogenea delle componenti speciali di pressione -

È noto dall'analisi, e del resto si può facilmente verificare, che essendo Φ una funzione quadratica omogenea nelle $X_x \cdots Y_z \cdots$ si ha:

$$2\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X_x}X_x + \frac{\partial\Phi}{\partial Y_y}Y_y + \frac{\partial\Phi}{\partial Z_z}Z_z + \frac{\partial\Phi}{\partial Y_z}Y_z + \frac{\partial\Phi}{\partial Z_x}Z_x + \frac{\partial\Phi}{\partial X_y}X_y$$

e per le (56)

$$2\Phi = -(X_x\varepsilon_x + Y_y\varepsilon_y + Z_z\varepsilon_z + Y_z\gamma_{yz} + Z\gamma_{zx} + X_y\gamma_{xy}) \quad (57).$$

Il potenziale elastico per i solidi isotropi.

Nella espressione di Φ data dalla (57) noi possiamo sostituire alle $X_x \ldots Y_z \ldots$ le loro espressioni in funzione delle $\varepsilon_x \ldots$ $\gamma_{yz} \ldots$ date dalle (49) e (50) del Cap: III pag: 50 valevoli per il solido isotropo -

Ciò fatto, con facili riduzioni si ottiene:

$$2\Phi = \lambda\Theta^2 + \mu\left[2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2\right] \quad (58)$$

la quale ci esprime per il corpo isotropo il potenziale elastico come funzione quadratica omogenea delle componenti di deformazione.

È facile verificare qui direttamente che le derivate parziali di Φ rispetto alle $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ ci danno le $X_x \dots Y_z \dots$ espresse secondo le (49) e (50) conforme alla proprietà indicata dalle (52).

D'altra parte possiamo sostituire nella (57) alle $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ le loro espressioni in funzione delle $X_x \dots Y_z \dots$ secondo le (45) e (47) del Cap: III pag: 56. Si ottiene così dopo facili riduzioni:

$$2\Phi = \frac{1}{E}\left\{-\frac{P^2}{m} + \frac{m+1}{m}\left[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2\left(Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2\right)\right]\right\} \qquad (59$$

la quale esprime per il corpo isotropo il potenziale elastico come funzione quadratica omogenea delle componenti speciali di pressione.

Ricordando che

$$P = X_x + Y_y + Z_z$$

anche qui si verifica direttamente che le derivate parziali della Φ rispetto alle $X_x \dots Y_z \dots$ sono le $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ espresse secondo le (45) e (47) e ciò conforme alle (56).

Lavoro compiuto da un dato sistema di forze per un sistema generico di spostamenti.

Spesso occorre esprimere il lavoro che un dato sistema di forze compie per effetto un dato sistema di spostamenti del corpo elastico. Questi spostamenti, che possono pure non essere quelli prodotti dal dato sistema di forze, a volte non sono neppure effettivi, ma fittizi o virtuali, e introdotti nel calcolo per speciale artifizio che verrà in seguito giustificato.

Il lavoro in questo ultimo caso calcolato non è un lavoro effettivamente compiuto ma è virtuale e la sua espressione serve alla applicazione del principio dei lavori virtuali noto dalla meccanica razionale.

Indichiamo con $\mathcal{L}'$ il lavoro virtuale calcolato supponendo che le forze abbiano raggiunto e conservino costante tutta la loro intensità durante la deformazione.

L'espressione di $\mathcal{L}'$ si ottiene calcolando il lavoro elementare dovuto alla deformazione di un elemento parallelepipedo rettangolo con gli spigoli diretti come gli assi coordinati, in modo del tutto analogo a quello seguito sopra per la determinazione del lavoro elementare che le forze in equilibrio sull'elemento dV compiono per effetto di un incremento della deformazione del parallelepipedo.

Il lavoro che le componenti speciali $X_x \dots Y_z \dots$ in equilibrio sull'elemento dV compiono per effetto di una deformazione virtuale caratterizzata dalle componenti di deformazione $\varepsilon'_x \dots \gamma'_{yz} \dots$ è:

$$d\mathcal{L}' = -(X_x \varepsilon'_x + Y_y \varepsilon'_y + Z_z \varepsilon'_z + Y_z \gamma'_{yz} + Z_x \gamma'_{zx} + X_y \gamma'_{xy})\, dV$$

che integrato nel volume V ci dà l'espressione del lavoro virtuale:

$$\mathcal{L}' = -\int_V (X_x \varepsilon'_x + Y_y \varepsilon'_y + Z_z \varepsilon'_z + Y_z \gamma'_{yz} + Z_x \gamma'_{zx} + X_y \gamma'_{xy})\, dV \quad (60)$$