Capitolo III

Equilibrio dei Solidi elastici. Proprietà elastiche dei solidi naturali = Legge sperimentale di Hooke.

Gli scopi pratici dello studio della scienza delle Costruzioni sono i calcoli relativi alla stabilità ed alla resistenza dei corpi materiali impiegati nelle pratiche applicazioni. Tali calcoli si possono raggruppare in due ordini di problemi distinti e per così dire inversi l'uno dell'altro:

a) Le verifiche di stabilità, ossia le determinazioni degli sforzi interni in corpi dei quali siano assegnate forma e dimensioni, sollecitati da sforzi esterni noti.

b) I calcoli di progetto, cioè la determinazione della forma e delle dimensioni di parti di costruzioni o di organi di macchine perchè risultino atte a sopportare con tutta sicurezza l'azione delle forze esterne date.

Le nozioni svolte nei due precedenti capitoli si riferiscono ad un qualsiasi corpo continuo, solido, liquido o gassoso. Per gli scopi del corso di "Scienza delle costruzioni" limitiamo ora la nostra analisi ai solidi elastici, appunto perchè ci proponiamo di investigare il comportamento, sotto l'azione di forze esterne in equilibrio, dei solidi naturali più spesso usati nelle costruzioni e dotati di quella particolare proprietà che prende il nome di elasticità.

A base della teoria matematica della elasticità abbiamo un principio enunciato dal fisico inglese Hooke fin dal 1660, detto *legge di Hooke*:

Se in un solido elastico date forze esterne, in equilibrio, producono una deformazione piccolissima, la grandezza della deformazione stessa è proporzionale all'intensità delle forze che la producono."

Ciò risulta per una qualunque porzione del solido elastico considerato e perciò la legge stessa si può più precisamente enunciare così:

In un solido elastico soggetto a forze esterne che su di esso si fanno equilibrio, le componenti di deformazioni sono funzioni lineari omogenee delle componenti speciali di pressione.

Salvo casi particolarissimi il detto sistema di equazioni lineari è tale che il determinante dei coefficienti è diverso da zero, cioè è possibile esprimere inversamente le componenti speciali di pressione come funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione. Le eccezioni si presentano ad es: quando sotto l'azione di particolari sistemi di forze una parte del corpo si comporta come se fosse

La legge di Hooke è sperimentalmente verificata fino a quando le pressioni o le tensioni interne non superano certi valori detti appunto limiti di proporzionalità

Avvertiamo esplicitamente che nel dire che la legge è verificata sperimentalmente intendiamo dire che, anche la legge stessa e ricavarne le conseguenze in casi particolarmente semplici, si sono sottoposti questi casi all'esperimento. Il fatto che nei problemi particolari si è trovata verificata la legge di Hooke ci induce ad ammetterla in tutta la sua generalità.

*

* *

Corpi isotropi ed anisotropi = Moduli di elasticità ed altre costanti elastiche.

Un corpo continuo si dice isotropo se presenta in ogni punto proprietà elastiche indipendenti dalla direzione degli elementi lineari o superficiali che in esso si considerano.

Sono da considerarsi come isotropi i metalli fusi o forgiati che abbiano subito un trattamento termico uniforme in tutta la massa, i vetri, alcune rocce elastiche o vulcaniche o compatte purchè non stratificate.

Sono anisotropi i metalli laminati, i legnami, le pietre stratificate i solidi a struttura cristallina -

Però i materiali da costruzione, in via di approssimazione, si considerano come isotropi -

Un esperimento di importanza fondamentale si fa quando una sbarra cilindrica o prismatica di un certo materiale viene assoggettata per es. a trazione con una forza diretta secondo l'asse, mentre con accurate misure se ne rileva la deformazione.

Si trova sperimentalmente che il coefficiente di dilatazione lineare ε, misurato lungo l'asse del prisma, o cilindro, è proporzionale alla tensione unitaria σ, riferita cioè all'unità di area di sezione trasversale: ciò conferma la legge di Hooke. Si nota inoltre che gli elementi lineari normali all'asse subiscono un accorciamento o dilatazione negativa, il corrispondente coefficiente di contrazione lineare η è pure proporzionale a σ, cioè ad ε.

Abbiamo dunque: $\sigma = E\varepsilon$ (38) $\eta = \frac{\varepsilon}{m}$ (39)

essendo E ed m costanti per uno stesso corpo isotropo e per deformazioni isotermiche.

La costante E è detta *modulo di elasticità* o *modulo di Young*.

La costante $\frac{1}{m}$ è detta *rapporto di Poisson*, circa il suo valore, la teoria, come si vedrà fra poco, stabilisce soltanto la disuguaglianza:

$$-1 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2} \qquad (40)$$

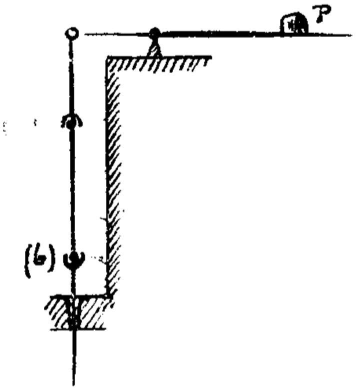
Difficile è la determinazione sperimentale delle due costanti E ed m per la difficoltà di trovare dei corpi perfettamente isotropi, per il fatto che la tensione in una unica direzione fa in modo che il corpo perda la sua isotropia, oltre che per la piccolezza delle deformazioni: quest'ultima difficoltà si accentua nella determinazione di m, essendo non soltanto la dilatazione trasversale unitaria (η) minore di quella longitudinale ma anche le dimensioni trasversali stesse minori di quella longitudinale.

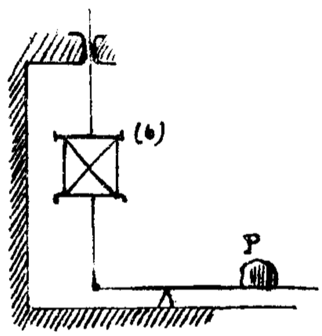
Essendo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ l'esperienza richiede la misura contemporanea della forza normale applicata e della variazione

Δl di lunghezza del corpo stesso, quando siano note l'area A e la lunghezza del corpo in esame.

Naturalmente occorre avere cura di non oltrepassare il limite di proporzionalità.

La misura è relativamente facile, se si opera per es: su di un lungo filo, del quale sia fissato un estremo, messo in tensione mediante dei pesi; ma quando si operi su saggi di dimensioni trasversali non troppo piccole la deformazione non può essere realizzata mediante applicazione diretta dei pesi. Si ricorre allora a macchine espressamente costruite, che, nella maggior parte dei casi, realizzano i semplicissimi schemi seguenti:





Il saggio viene nel 1° caso stretto da staffe, nell'altro è compresso tra piastre parallele. Una delle staffe (b) o delle piastre (b) è collegata al dispositivo di manovra col quale s'imprime un movimento di traslazione nella direzione dell'asse del provino; rispettivamente all'altra staffa o piastra è collegato un apparecchio di misura degli sforzi che può ridursi anche ad una semplice leva da mantenersi orizzontale spostando il peso P. Per evitare le difficoltà che s'incontrano nella determinazione di m si misurano, come vedremo in seguito, delle grandezze che possono esprimersi in funzione di m.

È invalso l'uso di ammettere, per i materiali da costruzione più comuni

$$m = 4 \tag{41}$$

Indichiamo qui altre due costanti elastiche utili nei calcoli che seguiranno, dette rispettivamente *prima e seconda costante di Lamé*; questa ultima è anche detta *modulo di elasticità tangenziale* ed indicata con la lettera G.

$$\lambda = \frac{E}{m\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)} \tag{42}$$

$$\mu = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{43}$$

*

* *

Principio della sovrapposizione degli effetti.

Dal principio di Hooke, sempre che si tratti di deformazioni piccolissime, deriva un principio fondamentale per la sua applicazione, detto "principio della sovrapposizione degli effetti".

Esso si enuncia così:

"Qualora le deformazioni di un solido elastico si mantengono piccolissime e proporzionali alle forze che le producono, se sul solido agiscono successivamente più sistemi di forze esterne, gli effetti - sforzi interni e deformazioni - dovuti ai vari sistemi parziali di forze si sovrappongono senza mutuamente influenzarsi, di modo che i loro parametri omologhi: componenti speciali di pressione o componenti di deformazione, si sommano algebricamente.

Ciò si giustifica osservando che le deformazioni piccolissime non alterano sensibilmente la forma geometrica del solido e perciò neppure la configurazione delle rette di azione delle forze di altri sistemi successivamente applicati, così che nuove forze agenti sul solido già deformato provocano incrementi di reazioni e di tensioni interne eguali a quelle che provocherebbero sul solido ancora non deformato. D'altra parte le deformazioni piccolissime pure si sovrappongono come è noto dalla cinematica dei piccoli spostamenti, dunque, finchè è valida la legge di Hooke, si può dire che le deformazioni prodotte da più sistemi di forze agenti successivamente sono eguali a quelle che si otterrebbero facendo agire sul solido elastico il sistema di forze complessive risultante dai sistemi parziali.

Da quanto precede è chiaro che il principio non è applicabile quando le deformazioni non siano piccolissime ovvero quando siano tali da alterare in modo apprezzabile la configurazione delle linee di azione delle forze esterne applicate, ovvero ancora, quando la natura del corpo non consente la applicazione del principio di Hooke, cioè quando il modulo di elasticità non si possa considerare costante.

I casi di eccezione sono però rari e verranno esplicitamente indicati in seguito; ed il principio sopra enunciato, quando si applica nei casi concreti, permette di risolvere problemi complessi utilizzando, come vedremo, i risultati di problemi semplici.

*

* *

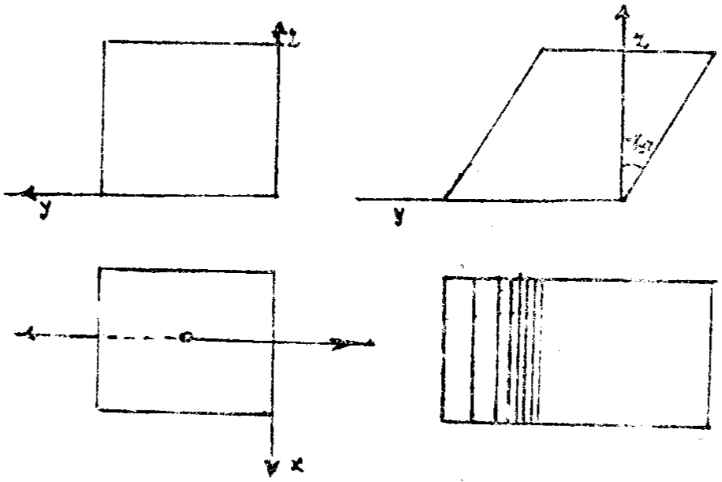
Relazioni fra le pressioni (o tensioni) e le deformazioni in un solido elastico isotropo.

Un prisma retto di materiale isotropo soggetto a pressioni (o tensioni) normali uniformi sulle due basi subisce delle contrazioni (o dilatazioni) nella direzione dell'asse e delle dilatazioni (o contrazioni) nelle direzioni ad essa perpendicolari; cioè il prisma, dopo la deformazione, rimane retto: ciò deriva da evidenti ragioni di simmetria ed è sperimentalmente provato.

Da quanto precede risulta che un parallelepipedo rettangolo isotropo soggetto solo a pressioni o tensioni normali uniformi sulle varie facce, dopo la deformazione, è ancora un parallelepipedo rettangolo essendo nulli gli scorrimenti mutui nelle direzioni degli spigoli.

Poniamo esplicitamente in evidenza che, viceversa, le tensioni tangenziali producono scorrimenti mutui: così un parallelepipedo sollecitato dalla sola componente speciale di tensione tangenziale Y_z presenta soltanto scorrimento mutuo γ_{yz} fra le direzioni y e z e ciò pure per evidenti ragioni di simmetria.

Si noti che, essendo positiva la Y_z, cioè diretta nella direzione positiva di y l'angolo fra le direzioni degli assi y e z aumenta cioè lo scorrimento mutuo γ_{yz} è negativo secondo la convenzione fatta a pag: 6 del Cap: 1°.



Nell'intorno del punto M in un solido elastico continuo isotropo soggetto a forze in equilibrio consideriamo un parallelepipedo rettangolo elementare avente gli spigoli diretti lungo i tre assi x y z generici, uscenti da M.

Il parallelepipedo si deformerà ed in genere non rimarrà rettangolo, (ciò avverrebbe qualora i tre spigoli fossero diretti secondo le tre direzioni principali in M).

Indichiamo con E il modulo di elasticità del materiale isotropo e con m il coefficiente di Poisson e proponiamoci di esprimere, avvalendoci della legge di Hooke e del principio della sovrapposizione degli effetti, le componenti della deformazione come funzioni lineari delle componenti speciali di pressione.

Determiniamo il valore di ε_x: per effetto di X_x (pressione) gli spigoli del parallelepipedo paralleli ad x subiscono un accorciamento unitario (contrazione lineare) dato da:

$$\frac{X_x}{E}$$

Cioè una dilatazione lineare uguale a $-\frac{X_x}{E}$.

Per effetto delle pressioni Y_y e Z_z gli stessi spigoli subiscono due allungamenti unitari (dilatazioni lineari) espressi per quanto si è detto precedentemente (V. Formula (39) da:

$$\frac{Y_y}{mE} \cdot \frac{Z_z}{mE}$$

Le componenti speciali tangenziali, come abbiamo visto, non producono dilatazioni ma soltanto scorrimenti, quindi in virtù del principio della sovrapposizione degli effetti, sommando le deformazioni precedentemente indicate si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{m}(Y_y + Z_z) - X_x\right] \quad (44) \text{ e due analoghe.}$$

Indicando con P l'invariante lineare di pressione (V. Cap: II p. 22)

$$P = X_x + Y_y + Z_z$$

ed introducendo nella precedente equazione, si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)X_x\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)Y_y\right] \qquad (45)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)Z_z\right]$$

Cerchiamo ora di esprimere gli scorrimenti mutui γ_{yz} γ_{zx} γ_{xy} in funzione delle componenti speciali tangenziali avvalendosi delle stesse due costanti E ed m.

Immaginiamo che sia diverso da zero soltanto la componente speciale Y_z. Per ottenere le pressioni e le direzioni principali basterà applicare le (23) Cap: II, che in questo caso si riducono a:

$$- P\alpha_x = 0$$

$$- P\alpha_y + Y_z\alpha_z = 0 \qquad (46$$

$$- Z_y\alpha_y - P\alpha_z = 0$$

L'equazione (24) si riduce a:

$$\begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & Y_y \\ 0 & Z_y & -P \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata dà:

$$P(P^2 - Y_z^2) = 0$$

le radici sono: $P_1 = Y_z$ $\quad P_2 = Y_z$ $\quad P_3 = 0$

Poichè una delle radici è nulla la distribuzione delle pressioni intorno ad M è a due dimensioni e ciò risulta anche dal fatto che il determinante Δ delle componenti speciali di pressione

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_z \\ 0 & Z_y & 0 \end{vmatrix}$$ è eguale a zero (V. Cap. II pag: 43)

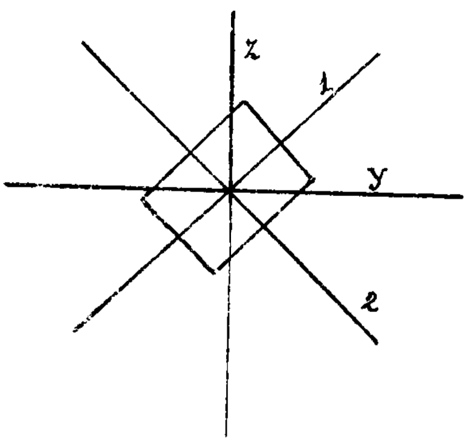
Sostituendo il valore di P_1 nelle (46) si ha:

$-Y_z\alpha_y + Y_z\alpha_z = 0$ $\quad$ cioè $\quad \alpha_y = -\alpha_z \quad \alpha_x = 0$

sostituendo nella

$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$ $\quad$ si ottiene $\quad \alpha_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

cioè: le direzioni principali sono le bisettrici degli assi.



Consideriamo ora nel piano della distribuzione a due dimensioni (piano yz) un elemento rettangolare avente i lati paralleli alle direzioni principali e valutiamo la dilatazione lineare nella direzione I secondo cui agisce la pressione principale P_1.

La pressione principale $P_1 = Y_z$ produce una contrazione lineare $\frac{Y_z}{E}$, cioè una dilatazione lineare $-\frac{Y_z}{E}$.

La $P_2 = -Y_z$ (tensione) agente nella direzione 2 produce nella direzione 1 una contrazione lineare $\frac{Y_z}{mE}$, cioè una dilatazione lineare $-\frac{Y_z}{mE}$. Per il principio della sovrapposizione degli effetti potremo scrivere:

$\varepsilon_1 = \frac{Y_z}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ analogamente si trova lungo la direzione 2: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.

Applicando ora la formula che ci dà il coefficiente di dilatazione lineare secondo un elemento rettilineo in funzione delle sei componenti di deformazione (pag: 8 Cap. 1), e tenuto presente che per le già dette ragioni di simmetria, la γ_{yz} è l'unica componente di deformazione diversa da zero prodotta dalla Y_z, si ha:

$$\varepsilon_1 = \gamma_{yz}\,\alpha_y\,\alpha_z = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$$

eguagliando le due espressioni ottenute per ε_1 si ha:

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = -\frac{Y_z}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{2}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)Y_z \qquad (47)$$

analogamente si ottiene:

$$\gamma_{zx} = -\frac{2}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)Z_x$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)X_y$$

Le (45) e le (47) esprimono le componenti di deformazione come funzioni lineari ed omogenee delle componenti speciali di pressione.

Ricordando la definizione e la espressione della dilatazione cubica (V. cap. 1°. pag: 19) che costituisce pure l'invarisulte lineare di deformazione, dalle (45) sommando si ottiene

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{P}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \qquad (48)$$

Cerchiamo ora di esprimere le componenti speciali di pressione in funzione delle componenti di deformazione.

Dalle (45), moltiplicando la 1ª per $(m-1)$ e sommandola con le altre due si ottiene:

$$(m-1)\,\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m}(m-1) - \left(1+\frac{1}{m}\right)(m-1)\,X_x\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)Y_y\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)Z_z\right]$$

$$(m-1)\,\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{m}(m+1) - \left(1+\frac{1}{m}\right)(m-1)X_x - \left(1+\frac{1}{m}\right)Y_y - \left(1+\frac{1}{m}\right)Z_z\right]$$

Aggiungendo e togliendo ε_x a primo membro, ed aggiungendo e togliendo a secondo membro $\left(1+\frac{1}{m}\right)X_x$ si ottiene, ricordando le espressioni di Θ e quella di P:

$$\theta + (m-2)\,\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)(m-1)\,X_x + \left(1+\frac{1}{m}\right)X_x\right]$$

$$\Theta + (m-2)\,\varepsilon_x = -\frac{1}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)(m-2)\,X_x$$

avendo posto, vedi pag: 53

$$\lambda = \frac{E}{m\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}$$

sostituendo

$$\Theta + (m-2)\,\varepsilon_x = -\frac{X_x}{\lambda}$$

che risoluta rispetto ad X_x, per essere $\lambda\,(m-2) = 2\mu$ ci dà:

$$X_x = -\lambda\,\Theta - 2\mu\,\varepsilon_x \quad \text{e due analoghe}$$

$$Y_y = -\lambda\,\Theta - 2\mu\,\varepsilon_y \qquad (49)$$

$$Z_z = -\lambda\,\Theta - 2\mu\,\varepsilon_z$$

direttamente dalla (47) essendo $\mu = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}$ si ottengono:

$$\begin{aligned} Y_z &= -\mu\, \gamma_{yz} \\ Z_x &= -\mu\, \gamma_{zx} \qquad\qquad (50) \\ X_y &= -\mu\, \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Le (49) e le (50) esprimono le componenti speciali di pressione come funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione, si suole dire che esse servono per passare dalle deformazioni agli sforzi.

Dalle (49) si trae che μ è il rapporto fra le pressioni tangenziali su di un elemento e lo scorrimento da esso provocato: ciò giustifica la denominazione di modulo di elasticità tangenziale.

Dalle (49) si deduce che la prima costante di Lamé λ, si può interpetrare come il rapporto tra la pressione normale in una direzione e la dilatazione cubica, nel caso in cui la dilatazione lineare nella stessa direzione sia nulla.

I segni negativi nei secondi membri delle (49) indicano che se le X_x Y_y Z_z, componenti di pressione, sono positive, le ε_x ε_y ε_z risultano negative ed in conseguenza pure negativa risulta la dilatazione cubica come deve essere.

Il segno negativo nel secondo membro delle (50) si giustifica, rilevando, come del resto si è già mostrato poco più sopra, che se Y_z è positiva si ha aumento positivo dell'angolo compreso fra le direzioni positive x ed y, (facendo divenire ottuso tale angolo) e d'altra parte abbiamo convenuto di assumere positivo lo scorrimento

mento di due direzioni, quando esso costituisce una diminuzione dell'angolo compreso fra le stesse due direzioni.

L'esperienza dimostra che se le tre pressioni principali sono tutte e tre positive (cioè il parallelepipedo elementare è compresso in tutte e tre le direzioni principali) la dilatazione cubica è negativa, allora dalle (48) si ricava

$$1 - \frac{2}{m} > 0$$

cioè

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{2}$$

inoltre quando Y_z è negativa il corrispondente scorrimento è, per quanto sopra si è visto, positivo, perciò dalle (50) si ricava che μ deve essere positiva quindi:

$$1 + \frac{1}{m} > 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{m} > -1$$

Resta così giustificata la doppia disuguaglianza (40) che era stata soltanto enunciata.