-Capitolo II-

Analisi delle pressioni interne in un corpo continuo.

Generalità sulle pressioni interne.

Le forze che sollecitano un corpo continuo possono essere *forze di massa* (cioè sollecitanti gli elementi di massa del corpo stesso) ovvero *forze superficiali* (cioè distribuite con o senza continuità sulla superfice esterna del corpo).

Spesso si considerano forze esterne concentrate in determinati punti mentre in realtà le forze in gioco nella natura sono sempre ripartite: a questa sostituzione si ricorre per semplificare la trattazione dei problemi e la si giustifica col fatto che, quando si tratta di forze ripartite su di un'area piccolissima, l'effetto della sostituzione è sensibile solo in una regione molto piccola in prossimità del punto di applicazione della forza concentrata.

Supponiamo che il corpo continuo, sollecitato da forze superficiali e di massa, sia in equilibrio.

Nell'interno del corpo si svilupperanno delle *pressioni interne* che reagiscono a quelle deformatrici.

Si supponga di tagliare il corpo, già deformato ed in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne, con una superficie qualunque S che lo separi in due parti A e B. Ammetteremo che l'equilibrio per es: della parte A, possa essere ristabilito distribuendo sulla superfice di separazione forze univocamente determinate punto per punto.

Se dS è un elemento infinitesimo della superficie di separazione ed M un punto interno ad esso, la forza da applicare su dS sia indicata con $F_n\, dS$: essa è dello stesso ordine (2°) dell'area dS e dipende dalle coordinate di M e dalla orientazione di dS: questa orientazione è definita dalla normale all'elemento sulla quale assumeremo come positivo il senso diretto verso l'interno del corpo del quale studieremo l'equilibrio.

$F_n\, dS$ è detta *pressione interna* sull'elemento dS. L'intensità unitaria è F_n, essa si dovrà ritenere finita. Il vettore F_n è definito dalle sue tre componenti sui tre assi:

$$X_n \quad Y_n \quad Z_n$$

dette *componenti ortogonali di pressione*.

Indicheremo con N_n la proiezione ortogonale di F_n sulla direzione della normale n a dS, e la chiameremo *pressione normale*: si dirà che l'elemento dS è soggetto a compressione o a trazione secondo che N_n risulti positiva (cioè diretta nel senso positivo di n) o negativa.

La proiezione di F_n sul piano di dS si dice pressione *tangenziale* o *componente tangenziale* di pressione.

Dimostriamo che: Le pressioni interne in un corpo continuo soddisfano alla legge della reazione eguale e contraria all'azione.

Cioè la forza elementare da applicarsi su dS, quando si rimuove la parte B del corpo continuo, è uguale e contraria a quella da applicarsi sullo stesso elemento quando, tolta la parte A, si voglia ristabilire l'equilibrio della parte B.

Isoliamo nell'interno del corpo un cilindro retto; le basi piane siano S ed S'; sia S'' la superficie laterale; siano n, n', n'' le rispettive normali. L'equilibrio del cilindro sarà ristabilito quando si facciano agire su i punti di S, S', S'' delle forze F_n, $F_{n'}$, $F_{n''}$ e sulla massa del cilindro stesso una certa forza di componenti

$$\rho X \, dV \qquad \rho Y \, dV \qquad \rho Z \, dV$$

(dove con X, Y, Z s'indicano le componenti della forza riferita all'unità di massa, con ρ la densità e con dV il volume del cilindro considerato).

Ricordando che le condizioni d'equilibrio del corpo rigido sono necessarie, se pure non sufficienti, all'equilibrio del corpo elastico (principio dell'irrigidimento) potremo scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse x:

$$\int_S X_n \, dS + \int_{S'} X_{n'} \, dS' + \int_{S''} X_{n''} \, dS'' + \int_V \rho X \, dV = 0$$

due relazioni analoghe sussistono per gli altri due assi coordinati. Passando ora al limite, cioè facendo avvicinare indefinitivamente le due basi S ed S' che sono uguali, i due ultimi integrali tendono a zero e si ha:

$$\int_S (X_n + X_{n'}) \, dS = 0$$

e due analoghe.

Queste debbono sussistere quale che sia la forma del contorno di dS, quindi in ogni punto di S dovrà essere:

$$X_n + X_{n'} = 0$$

e poichè $n' = -n$ possiamo sinteticamente scrivere

$$F_n = -F_{-n}$$

relazione che dimostra il teorema.

*

* *

Componenti speciali di pressione.

Intorno al punto M si consideri un elemento piano di area dS_x (parallelo al piano yz). Le componenti ortogonali di pressione su questo elemento la cui normale è l'asse x, nel senso positivo, si indicano con X_x Y_x Z_x.
Analogamente indichiamo con X_y Y_y Z_y e rispettivamente con X_z Y_z Z_z le componenti della pressione relative ad elementi di area dS_y e dS_z le cui normali sono gli assi y e z positivi.

Le nove grandezze così definite si chiamano componenti speciali di pressione relative al punto M riferite alla terna $x\,y\,z$.

*

* *

Teorema di Cauchy.-

Le componenti di pressione relative ad un elemento dS_n piano, passante per M, e comunque orientato, dipendono in generale dalla posizione di M e dall'orientazione dell'elemento, ossia dai coseni di direzione della sua normale, la legge della loro dipendenza dalle coordinate $x\,y\,z$ non si può assegnare senza conoscere la natura e lo stato fisico del corpo; mentre invece si può stabilire genericamente il modo con cui esse componenti dipendono dai coseni direttori dell'elemento.

Infatti si può dimostrare facilmente il seguente teorema generale, dovuto a Cauchy.

" Le componenti di pressione su di un elemento piano in
" un corpo in equilibrio sono funzioni lineari ed omogenee
" dei coseni direttori della normale all'elemento, e delle compo-
" nenti speciali di pressione ".

E precisamente la componente ortogonale di pressione relativa ad uno degli assi coordinati è uguale alla somma dei prodotti delle singole componenti speciali di pressione relative allo stesso asse, rispettivamente moltiplicate per i coseni direttori della normale all'elemento.

Per dimostrarlo, consideriamo il triedro trirettangolo formato da tre semirette $x\,y\,z$ uscenti da M parallele rispettivamente ai tre assi coordinati, nei sensi positivi di questi. Tale triedro si tagli con un piano di orientazione qualunque, intersecante i tre spigoli del triedro $x\,y\,z$ in tre punti $A\,B\,C$ vicinissimi ad M: tale piano stacca dal triedro un tetraedro elementare del quale vogliamo studiare l'equilibrio.

Sia

$$MA = dx$$

$$MB = dy$$

$$MC = dz$$

Ora se indichiamo con dS l'area della faccia triangolare elementare ABC del tetraedro, e se indichiamo con n la direzione della normale al piano stesso, presa positiva diretta verso l'interno del tetraedro, si ha ovviamente, proiettando

dS sui tre piani coordinati:

$$dS \cos(nx) = -\frac{1}{2}\, dy\, dz$$
$$dS \cos(ny) = -\frac{1}{2}\, dz\, dx$$
$$dS \cos(nz) = -\frac{1}{2}\, dx\, dy$$

Il tetraedro sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze di massa, e delle forze superficiali applicate all'area dS e sulle facce laterali

$$\frac{1}{2}\, dy\, dz$$
$$\frac{1}{2}\, dz\, dx$$
$$\frac{1}{2}\, dx\, dy$$

del tetraedro.

Se consideriamo gli incrementi $dx\ dy\ dz$ come infinitesimi di primo ordine, le aree delle facce del tetraedro, e con esso le forze superficiali sono infinitesime di secondo ordine, mentre le forze di massa, proporzionali al volume dell'elemento, sono, come questo, infinitesime di terzo ordine, e perciò trascurabili di fronte a quelle di secondo ordine.

Perciò per avere delle relazioni tra le forze superficiali applicate al tetraedro elementare considerato, tra queste sole dovremo esprimere l'equilibrio.

Quindi, coi simboli introdotti nel N° precedente, per l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x, a meno di infinitesimi di ordine superiore dovremo avere:

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \qquad (21)$$

e questa relazione esprime appunto il teorema di Cauchy sopra enunciato.

Per brevità possiamo indicare con $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$ i coseni direttori della normale n; inoltre potremo scrivere due relazioni analoghe alla (21), una per ciascuno degli altri due assi y e z; si trova così:

$$X_n = X_x \alpha_x + X_y \alpha_y + X_z \alpha_z$$
$$Y_n = Y_x \alpha_x + Y_y \alpha_y + X_z \alpha_z \qquad (22)$$
$$Z_n = Z_x \alpha_x + Z_y \alpha_y + Z_z \alpha_z$$

Ne risulta che se in un punto M sono conosciute le componenti speciali di pressione, data l'orientazione di un elemento di area contiguo ad M, si possono ricavare colle (22) le componenti della pressione sull'elemento stesso; perciò la distribuzione delle pressioni nell'intorno di M è caratterizzata da quella delle componenti speciali di pressione.

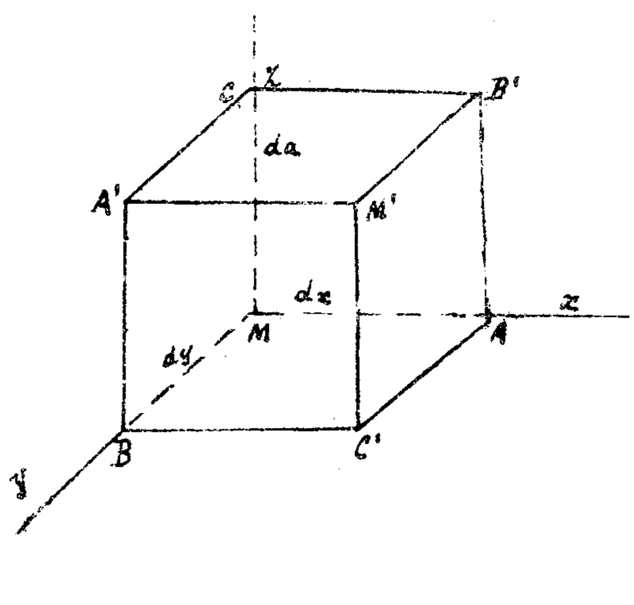
È chiaro che le precedenti formule valgono anche per gli elementi superficiali del corpo considerato.

*

* *

Equazioni indefinite.

Scomponiamo idealmente il corpo continuo, già deformato sotto l'azione delle forze applicate, in elementi parallelepipedi, mediante tre sistemi di piani paralleli



ai piani coordinati. Consideriamo uno di questi parallelepipedi e scriviamo che esso trovasi in equilibrio sotto l'azione delle forze interne e delle forze di massa. Indichiamo con dx, dy, dz le lunghezze degli spigoli orientati secondo i tre assi coordinati.

Ci proponiamo di scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse x:

Il piano yz divide il corpo in due parti, noi immaginiamo di rimuovere quella parte del corpo continuo che si trova dalla parte delle x negative. La forza che sollecita la faccia $MBA'C$ (di area $dy\,dz$) ha come componenti sull'asse x la $X_x\,dy\,dz$ (si ricordi che X_x è riferita all'unità di area) che è da considerarsi positiva se diretta verso l'interno del parallelepipedo. Quando dalla faccia $MBA'C$ si passa alla faccia opposta $M'B'AC'$ la funzione X_x cresce del suo differenziale preso facendo variare la sola x dell'incremento infinitesimo dx, cioè si ha $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx$, e poichè immaginiamo di asportare la parte del corpo continuo che si trova dalla parte delle x crescenti, per il principio già dimostrato della eguaglianza fra azione e reazione, la pressione su $M'B'AC'$ diretta verso l'interno del parallelepipedo è

$$-\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

Da ciò segue che la proiezione sull'asse x della risultante delle pressioni che si esercitano sulle due facce opposte la cui normale è parallela ad x, è

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

Analogamente si vede che, essendo $X_y\,dx\,dz$ la componente diretta secondo x della forza che si esercita sulla faccia $MAB'C$ la cui normale è y, e $-\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz$

quella della forza che si esercita su $M'A'BC'$, opposta alla prima, si ha una risultante sull'asse x

$$-\frac{\partial X_y}{\partial y} dy\, dx\, dz$$

Così sull'asse x, le componenti delle forze agenti su $MAC'B$ (di area $dx\, dy$) e su $M'A'CB'$ danno luogo ad una risultante

$$-\frac{\partial X_z}{\partial z} dz\, dx\, dy$$

La forza di massa deve considerarsi applicata nel baricentro del volume considerato, se indichiamo con X la componente di tale forza riferita all'unità di massa si avrà in corrispondenza della massa $\rho\, dx\, dy\, dz$ (ρ = densità) dell'elemento considerato una componente sull'asse x:

$$\rho X dx\, dy\, dz$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione secondo l'asse x si ha:

$$\rho X dx\, dy\, dz - \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\, dy\, dz - \frac{\partial X_y}{\partial y} dx\, dy\, dz - \frac{\partial X_z}{\partial z} dx\, dy\, dz = 0$$

da cui, dividendo per $dx\, dy\, dz$ si ha:

$$\rho X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Le equazioni

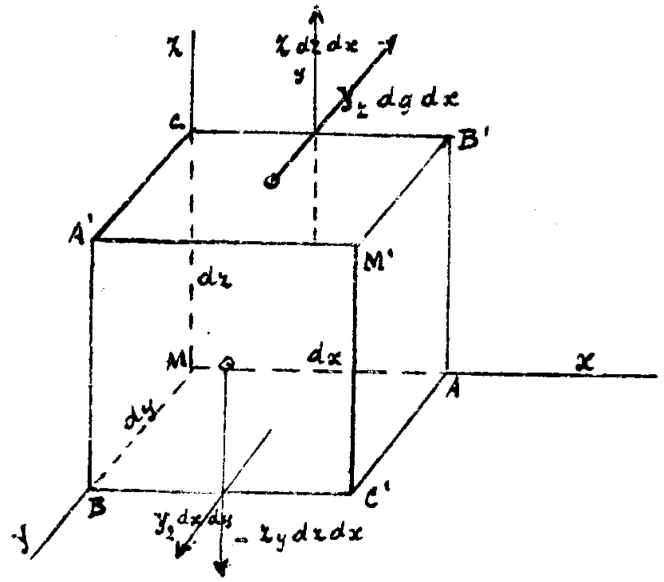
$$\rho Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

$$\rho Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial z} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \qquad (23)$$

hanno significato analogo rispetto ad Y e Z. Le (23) si dicono equazioni indefinite per l'equilibrio e sono valide per qualunque punto interno del corpo continuo.

Esprimiamo ora l'equilibrio alla rotazione intorno ai tre assi, dell'elemento preso in esame, supposto irrigidito.

Osserviamo che per la continuità di cui si suppongono dotate le pressioni, è lecito ammettere che le loro risultanti siano applicate nei centri delle facce infinitesime del parallelepipedo. Prendiamo quindi i momenti intorno ai tre assi coordinati.



Cominciamo con lo scrivere l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse x.

Considereremo eguali le componenti di tensione sulle facce opposte cioè la componente Y_z agente sulla faccia MBA'C si considera eguale in intensità alla Y_z agente sulla M'B'AC' perchè i differenziali delle componenti speciali di pressione danno luogo a momenti infinitesimi del 4° ordine, mentre i momenti che noi computiamo sono infinitesimi del 3° ordine.

Le componenti normali di pressione, sulle facce MCA'B ed M'C'AB' non danno momenti rispetto all'asse x, perchè sono parallele ad x. Le componenti normali Y_y (agenti sulla faccia MAB'C e sulla faccia opposta M'A'BC') danno luogo ad un momento risultante nullo essendo eguali in intensità, di verso opposto e di eguale linea di azione.

Così dicasi per la Z_z.

Le componenti delle tensioni tangenziali Y_z e Z_x danno luogo a coppie agenti in piani paralleli ad x. La

Y_z agente su $MAC'B$ non dà momento perchè incontra l'asse x; così dicasi per la Z_y.

Bisogna inoltre trascurare il momento derivante dalla forza di massa la quale, per essere infinitesima del 3° ordine, dà luogo ad un momento infinitesimo del 4° ordine. Rimarranno dunque a produrre momento rispetto ad x, la $Y_z\,dx\,dy$ agente sulla faccia $M'A'CB'$; e la $Z_y\,dz\,dx$ agente sulla faccia $M'A'BC'$.

Assumendo come positiva la rotazione nel senso $y.z$; essendo il braccio delle due coppie rispettivamente eguale a dz ed a dy, potremo scrivere:

$$Y_z\,dx\,dy\,dz - Z_y\,dz\,dx\,dy = 0 \qquad \text{cioè} \quad Z_y = Y_z$$

e analogamente si ottiene:

$$Z_x = X_z \qquad \text{e} \qquad X_y = Y_x$$

queste relazioni dimostrano il teorema seguente: le tensioni tangenziali unitarie in due piani tra loro perpendicolari, prese normalmente all'intersezione dei piani, sono eguali e dirette entrambe verso lo spigolo stesso o in senso opposto.

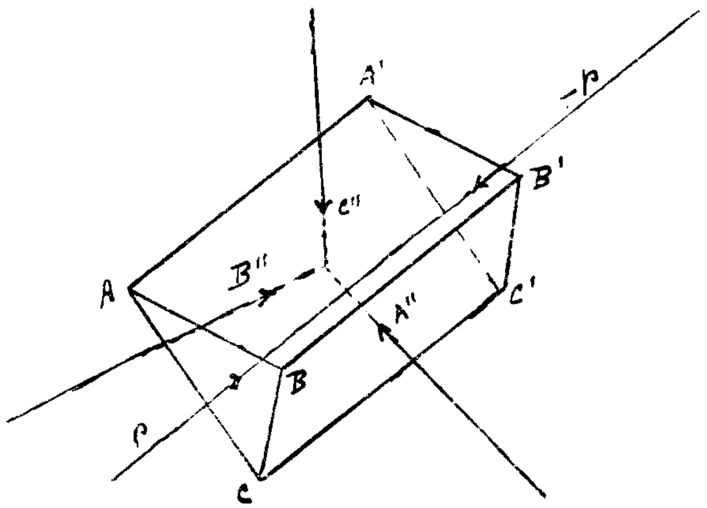
Da quanto precede risulta che le componenti speciali di pressione si riducono a sei sole distinte.

*

* *

Analisi delle pressioni in un punto.

Ci proponiamo di conoscere la distribuzione delle pressioni nell'interno del punto generico M. A tal fine consideriamo in prossimità del punto M un elemento piano comunque orientato: su di esso si esercita una pressione p agente secondo una retta in generale obliqua rispetto al piano dell'elemento. Nell'interno del corpo continuo, nell'intorno di M, immaginiamo separato un prismetto elementare con due basi triangolari ABC ed $A'B'C'$ parallele all'elemento piano sopra considerato ed avente le facce laterali parallele alla retta p di azione delle pressioni esercitantesi sull'area elementare ABC. Studiamo l'equilibrio di questo prisma elementare supposto irrigidito.



Nel nostro studio la pressione su ciascuna delle cinque facce del prisma è da ritenersi uguale a quella agente sull'elemento piano condotto per M parallelamente alla faccia stessa, e ciò perchè i differenziali delle pressioni introducono dei termini di terzo ordine trascurabili di fronte alle spinte elementari, che sono del secondo ordine, che qui computiamo. Le spinte elementari sulle basi ABC e $A'B'C'$ si fanno direttamente equilibrio, perchè agiscono secondo la stessa retta p e sono eguali e contrarie, ciò in seguito alla particolare forma scelta per il prisma e perchè le dimensioni del prisma sono infinitesime.

Ne consegue che le spinte sulle tre facce laterali debbono equilibrarsi, quindi debbono essere complanari e concorrenti in un punto, quindi esse sono contenute nel piano dei tre punti $A''B''C''$ che sono i punti d'incontro delle tre facce laterali con le tre spinte corrispondenti: essendo infinitesime le dimensioni del prisma, i tre punti $A''B''C''$ sono i baricentri dei tre parallelogrammi, facce laterali del prisma considerato e quindi il piano $A''B''C''$ risulta parallelo alle basi del prisma ABC e $A'B'C'$, quindi a queste tre basi sono anche parallele le tre spinte sulle tre facce laterali, spinte contenute nel piano $A''B''C''$.

Possiamo dunque concludere: Se per M si conduce un elemento piano ABC qualunque, e su questo si ha una pressione agente secondo una retta p (per M) allora sugli elementi piani per M contenenti la p si esercitano pressioni agenti secondo rette contenute nel piano ABC.

Ciò basta per poter affermare che nella stella di piani e di rette di centro M intercede una corrispondenza biunivoca fra le rette di azione delle pressioni p ed i piani (sempre per M) sui quali quelle pressioni si esercitano: si ha cioè una polarità nella stella di centro M.

È noto dalla Geometria Proiettiva che una simile polarità ammette un cono quadrico fondamentale, avente il vertice in M, rispetto al quale risultano coniugati il piano di un elemento e la retta di azione della corrispondente pressione. Questo cono, luogo delle rette che appartengono al corrispondente piano polare, ed inviluppo dei piani che contengono la retta ad essi coniugata è detto *cono di scorrimento* perchè la retta di azione della pressione, giacendo nel piano stesso dell'elemento sul quale essa si esercita, fa sì che lungo la superfice del cono stesso la materia del corpo continuo è sollecitata unicamente a scorrere lungo la superficie stessa.

È noto ancora che il cono in discorso possiede tre piani reali di simmetria detti *piani principali* passanti naturalmente per M.

Le tre rette intersezioni dei tre piani principali sono dette *direzioni principali di pressione*.

Gli elementi piani passanti per M, giacenti sui tre piani principali sono tali che su di essi la pressione è tutta normale (la pressione tangenziale è nulla) essa è detta *pressione principale*.

*

* *

Ricerca delle direzioni e pressioni principali.

Sia $x\,y\,z$ la terna di riferimento affatto qualunque, per determinare le direzioni e le pressioni principali basta osservare che, se P è una pressione principale, essa agirà normalmente all'elemento piano che gli corrisponde nella involuzione sopra individuata: da ciò deriva che i coseni direttori di P sono quelli stessi della normale all'elemento piano sul quale P si esercita.

Applicando le formole di Cauchy (21) si ricava la componente di P sull'asse delle x:

(22) $\quad P\alpha_x = X_n = X_x\alpha_x + Y_x\alpha_y + Z_x\alpha_z$ e due analoghe

ossia.

$$(X_x - P)\alpha_x + X_y\alpha_y + X_z\alpha_z = 0 \tag{23}$$
$$Y_x\alpha_x + (Y_y - P)\alpha_y + Y_z\alpha_z = 0$$
$$Z_x\alpha_x + Z_y\alpha_y + (Z_z - P)\alpha_z = 0$$

queste costituiscono pure un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle α, il quale deve essere soddisfatto per valori non tutti nulli delle incognite, perciò occorre e basta che sia nullo il determinante dei coefficienti -

Si ottiene così l'equazione seguente:

$$\begin{vmatrix} X_x - P & Y_x & Z_x \\ Y_x & Y-P & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - P \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Essa è di terzo grado in P ed è analoga alla equazione (19) trovata nel Cap: 1° e come quella ha le tre radici tutte reali. Dette tre radici sono appunto le pressioni principali $X_\xi\ Y_\eta\ Z_\zeta$.

Sostituendo queste radici una alla volta nelle (23) si ottengono i coseni di direzione delle rette (od assi) principali, notando che le (23) si riducano a due sole condizioni distinte, poichè per la (24) una qualunque di esse è conseguenza delle altre due, ma i detti tre coseni risultano individuati poichè tra essi sussiste la ben nota relazione:

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$$

Anche in questo caso, dalla teoria delle equazioni algebriche, eguagliando il coefficiente del termine contenente P^2, mutato di segno, alla somma delle radici, si ottiene $X_\xi + Y_\eta + Z_\zeta = X_x + Y_y + Z_z$, che è detto *invariante fondamentale di pressione*.

*

* *

Componente normale di pressione su di un elemento superficiale generico -

Assunte, come assi coordinati, le tre rette principali $\xi\ \eta\ \zeta$ uscenti da M, le componenti speciali di pressione si riducono alle tre sole pressioni principali $X_\xi\ Y_\eta\ Z_\zeta$ essendo nulle le componenti speciali tangenziali.

Determiniamo le componenti di pressione su di un elemento i coseni direttori della cui normale sono $\alpha_\xi\ \alpha_\eta\ \alpha_\zeta$ applicando le relazioni di Cauchy (21) che in questo caso si riducono a:

$$\begin{aligned} X_n &= X_\xi \alpha_\xi \\ Y_n &= Y_\eta \alpha_\eta \\ Z_n &= Z_\zeta \alpha_\zeta \end{aligned} \qquad (25)$$

La componente normale della pressione F_n è data da:

$$N_n = X_n \alpha_\xi + Y_n \alpha_\eta + Z_n \alpha_\xi$$

che per le (25) diventa:

$$N_n = X_\xi \alpha_\xi^2 + Y_\eta \alpha_\eta^2 + Z_\zeta \alpha_\zeta^2 \qquad (26)$$

cioè: La componente normale di pressione è funzione quadratica omogenea dei coseni direttori della normale all'elemento superficiale su cui essa si esercita ed è pure funzione lineare omogenea delle componenti speciali di pressione.

Derivando la (26) rispetto ad α_ξ avremo:

$$\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_\xi} = 2 X_\xi \alpha_\xi \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_\xi} = X_\xi \alpha_\xi = X_n \qquad (27)$$

cioè: le componenti ortogonali di pressione sono le semi-derivate della componente normale rispetto ai coseni di direzione della normale all'elemento di area considerato.

Eliminando fra (26) e (25) i coseni direttori si ottiene:

$$N_n = \frac{X_n^2}{X_\xi} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta} \qquad (28)$$

cioè: la componente normale di pressione è funzione quadratica omogenea delle componenti ortogonali di pressione.

Derivando la (28) rispetto ad X_n si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial X_n} = \frac{X_n}{X_\xi} = \alpha_\xi \qquad (29)$$

cioè i coseni di direzione della normale all'elemento sono le semiderivate della componente normale della pressione sullo stesso elemento, rispetto alle componenti ortogonali di pressione.

*

* *

Ellissoide di Lamè - Quadriche di pressione e di direzione -

Poniamo ora:

$$N_n = \frac{X_n^2}{X_\xi} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta} = \text{costante} \qquad (30)$$

nella quale X_n, Y_n, Z_n si considerano come coordinate di punto.

L'equazione (30) rappresenta una quadrica avente per assi le rette ξ η ζ, che sono pure gli assi del cono qua drico fondamentale della polarità precedentemente considerata. Poichè su questo cono, che noi abbiamo chiamato "di scorrimento", stanno quelle F_n (di componenti $X_n\ Y_n\ Z_n$) per le quali la componente normale N_n è nulla, la sua equazione sarà

$$\frac{X_n^2}{X_\xi}+\frac{Y_n^2}{Y_\eta}+\frac{Z_n^2}{Z_\zeta}=0 \qquad (31$$

che, come è noto dalla geometria analitica, rappresenta pure il cono asintotico delle quadriche $N_n = \text{cost}$.

Le quadriche (30) sono dette quadriche di *pressione* o quadriche di *direzione* perchè godono della seguente proprietà:

Considerando sempre $X_n\ Y_n\ Z_n$ come coordinate di punto si prenda in esame la quadrica $N_n = \text{cost}$. passante per il punto $X_n\ Y_n\ Z_n$. I coseni direttori della normale alla quadrica nel punto considerato sono proporzionali a $\frac{\partial N_n}{\partial X_n}$, $\frac{\partial N_n}{\partial Y_n}$, $\frac{\partial N_n}{\partial Z_n}$.

Dalla (29) si trae che $\frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial X_n}=\alpha_\xi$ ecc..... cioè le derivate parziali di N_n rispetto a $X_n\ Y_n\ Z_n$ sono proporzionali ai coseni direttori della normale all'elemento sul quale si esercita la pressione di componenti $X_n\ Y_n\ Z_n$. Dunque: la normale alla quadrica nel punto $X_n\ Y_n\ Z_n$ ha coseni direttori proporzionali ai coseni direttori della normale all'elemento piano sul quale la pressione di componenti ortogonali $X_n\ Y_n\ Z_n$ si esercita. Dunque l'elemento piano ora detto è coniugato della direzione F_n rispetto alle quadriche (30) e ciò giustifica il loro nome di quadriche di *direzione* o di *pressione*.

Le quadriche (30) al variare della costante rappresentano un fascio semplicemente infinito di quadriche concentriche ed omotetiche rispetto al centro stesso.

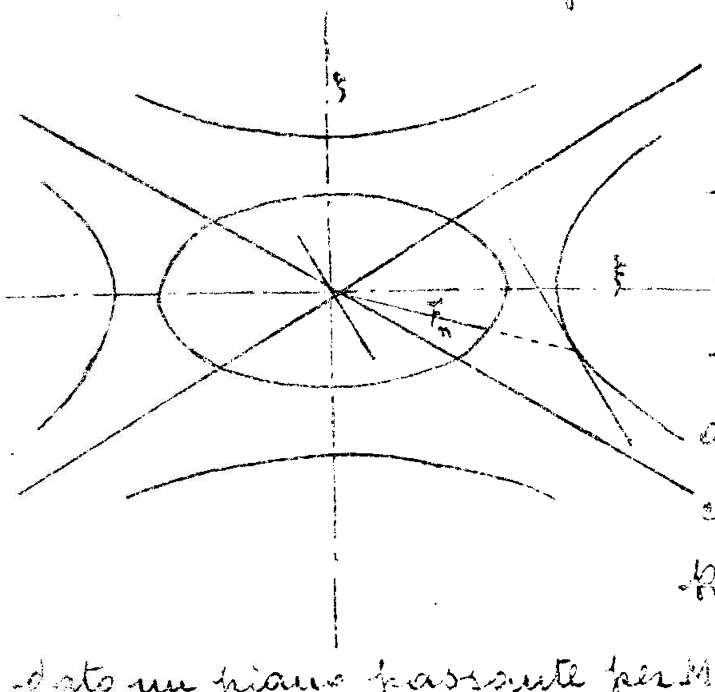
Per essere poi

$$\alpha_\xi = \frac{X_n}{X_\xi} \qquad \alpha_\eta = \frac{Y_n}{Y_\eta} \qquad \alpha_\zeta = \frac{Z_n}{Z_\zeta}$$

per la nota relazione $\alpha_\xi^2 + \alpha_\eta^2 + \alpha_\zeta^2 = 1$ si ricava

$$\frac{X_n^2}{X_\xi^2} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta^2} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta^2} = 1 \tag{32}$$

la quale, quando $X_n\ Y_n\ Z_n$ si considerino come coordinate di punto rappresenta un ellissoide avente il centro nell'origine ed i semiassi eguali alle pressioni principali. Ora le $X_n\ Y_n\ Z_n$ sono le coordinate dell'estremo del vettore F_n condotto a partire dall'origine degli assi M (M è un punto generico del corpo continuo), il luogo dell'estremo del vettore è dunque un ellissoide che si può definire come il diagramma polare nello spazio della pressione F_n agente sui vari elementi di area piana condotti per M.



Tale ellissoide si chiama *ellissoide di Lamé*, esso ha gli assi sulle rette $\xi\ \eta\ \zeta$ che sono, come si è già visto, le direzioni degli assi delle quadriche di pressione e del cono di scorrimento.

Riassumendo possiamo dire:

dato un piano passante per M, la pressione che su di esso si esercita ha la direzione coniugata del detto piano rispetto alle quadriche di pressione, la grandezza di tale pressione è data dal semidiametro dell'ellissoide di Lamè nella direzione suddetta. V. figura)

Le normali per M al cono di scorrimento costituiscono un altro cono, esse sono le normali agli elementi sui quali la componente normale è nulla. I coseni direttori di queste normali si ottengono dalla (26) ponendovi $N_n = 0$.

La $$X_\xi \alpha_\xi^2 + Y_\eta \alpha_\eta^2 + Z_\zeta \alpha_\zeta^2 = 0 \qquad (33)$$
è l'equazione del cono espressa in coordinate omogenee nella stella di rette di centro M: Volendo l'equazione del cono come luogo di punti, indicando con $\xi\ \eta\ \zeta$ le coordinate di un punto nell'intorno di M, riferito sempre agli assi principali in M e sostituendo in (33) si ottiene:
$$X_\xi \xi^2 + Y_\eta \eta^2 + Z_\zeta \zeta^2 = 0 \qquad (34)$$
Questo cono è detto cono delle *componenti normali nulle*: esso divide la stella di rette di centro M in due regioni, in una delle quali stanno le rette di azione delle componenti normali positive (compressioni) e nell'altra le rette di azione delle componenti normali negative (trazioni). Questo cono ha significato ed equazione analoghe a quelli del cono delle dilatazioni nulle studiato nel Cap-I. Il cono delle componenti normali nulle è asintotico a tutto un fascio di quadriche:
$$X_\xi \xi^2 + Y_\eta \eta^2 + Z_\zeta \zeta^2 = \text{cost} \qquad (35)$$
aventi centro in M ed assi negli stessi assi delle quadriche

di pressione.

Se il cono (34) è reale le quadriche (35) sono iperboloidi ad una falda in una delle due regioni in cui il cono stesso divide lo spazio ed iperboloidi a due falde nell'altra regione. Se il cono (34) è immaginario le quadriche (35) sono ellissoidi.

Le quadriche (35) dette *delle componenti normali* hanno proprietà analoghe a quelle delle quadriche di deformazione.

Se ρ è il semidiametro di una di esse, secondo la direzione di coseni direttori $\alpha_\xi \; \alpha_\eta \; \alpha_\zeta$, le coordinate del suo estremo sono:

$$\xi = \rho\alpha_\xi \quad \eta = \rho\alpha_\eta \quad \zeta = \rho\alpha_\zeta$$

sostituendo nella equazione (35) si ottiene:

$$X_\xi \xi^2 + Y_\eta \eta^2 + Z_\zeta \zeta^2 = X_\xi \alpha_\xi^2 + Y_\eta \alpha_\eta^2 + Z_\zeta \alpha_\zeta^2 = \frac{cost}{\rho^2}$$

in cui il 1° membro rappresenta per la (26) la componente normale N_n, dunque: una qualunque delle quadriche delle componenti normali si può considerare come il diagramma polare dei reciproci delle radici quadrate dei valori assoluti delle componenti normali di pressione.

*

* *

Distribuzione a due ed a una dimensione.

Supponiamo che l'equazione (24) di terzo grado che con le sue radici determina le tre pressioni principali ammetta una radice eguale a zero. Scelti allora come assi coordinati $\xi \; \eta$ le due direzioni alle quali corrispondono pressioni principali diverse da zero, risulta, studiando l'equilibrio di un prisma elementare retto avente due basi parallele al piano $\xi\eta$, che su di un qualsiasi elemento di area piano normale alle basi considerate si deve esercitare una pressione parallela al piano $\xi\eta$: perciò nell'intorno del punto M la distribuzione delle pressioni interne si riduce a due dimensioni, cioè tutte le pressioni sono parallele ad un piano.

Poniamo esplicitamente in evidenza che se si verifica il caso in esame, esistendo un piano sul quale non si esercita pressione alcuna per esso risulteranno X_n Y_n Z_n eguali a zero, cioè applicando le formule di Cauchy deve risultare

$$0 = X_x \alpha_x + Y_x \alpha_y + Z_x \alpha_z$$
$$0 = X_y \alpha_x + Y_y \alpha_y + Z_y \alpha_z$$
$$0 = X_z \alpha_x + Y_z \alpha_y + Z_z \alpha_z$$

Affinchè le equazioni precedenti siano compatibili per valori non tutti nulli di α_x α_y α_z dovrà essere

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} = 0$$

Dalle precedenti equazioni di Cauchy omogenee e dalla $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$ si ricavano i valori di α_x α_y α_z che sono i coseni direttori della normale all'elemento piano sul quale le tre componenti ortogonali di pressione sono uguali a zero.

Si noti che nella distribuzione delle pressioni a due dimensioni le componenti speciali di pressione diverse da zero sono soltanto tre.

Risultando in questo caso: $Z_\xi = 0$, l'ellissoide di Lamè assumerà la forma

$$\frac{X_\eta^2}{X_\xi^2} + \frac{Y_\eta^2}{Y_\eta^2} = 1 \qquad (37)$$

cioè diventa un ellisse piano $\xi\,\eta$, avente semiassi eguali a X_ξ, Y_η rispettivamente. Le quadriche di direzione si riducono a coniche ed il cono di scorrimento si riduce a due rette che sono le rette unite della involuzione nel fascio di centro M, fra le sezioni degli elementi piani per M e le corrispondenti pressioni.

Se invece le radici eguali a zero sono due allora in modo analogo si verifica che su di un qualunque elemento piano per M la pressione è sempre diretta secondo ξ, se indichiamo con ξ la direzione lungo la quale si esercita la pressione principale X_ξ che è l'unica diversa da zero.

In questo caso non soltanto $\Delta = 0$, ma è eguale a zero anche il determinante Δ' formato con le tre componenti speciali di pressione diverse da zero:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} = 0$$

Le specializzazioni della distribuzione delle pressioni parallele ad un piano, ovvero ad un'unica direzione si presentano spesso nelle applicazioni.

*

* *

Interpetrazzione delle direzioni principali. Linee isostatiche.

In ogni punto M del corpo continuo sono definite le tre rette principali e le corrispondenti tre pressioni principali. Ciascuna di esse si può considerare come un vettore funzione di un punto generico M, generando così una triplice distribuzione di vettori funzioni del punto, ossia si hanno tre campi vettoriali tali che in ogni punto i relativi vettori sono mutuamente ortogonali.

Si è così condotti a considerare le linee di forza di questi campi vettoriali, cioè le linee in ciascun punto tangenti ad una delle pressioni principali, ciascuna di esse è l'inviluppo di una delle tre rette principali nei punti che si susseguono lungo la linea stessa.

Queste linee costituiscono tre congruenze (sistemi doppiamente infiniti) mutuamente ortogonali dette linee isostatiche.

Secondo queste linee si trasmettono soltanto pressioni normali, ne risulta che il corpo continuo studiato si potrebbe sostituire con un corpo avente struttura filamentosa, con elementi a guisa di fili o bastoncini disposti secondo le dette linee, essendo ogni elemento collegato con moltissimi altri vicinissimi disposti secondo linee delle altre due congruenze, senza invece che si abbia alcun diretto legame fragli elementi contigui disposti secondo linee di una stessa congruenza; con tale costruzione si otterrebbe un sistema che, per le date forze esterne, presenterebbe quello stesso distribuzione di sforzi interni, che si ha nel corpo continuo. In vero con questa sostituzione si suppone che le varie fibre adiacenti, aventi andamento quasi parallelo (appartenenti alla stessa congruenza) manchino della capacità di trasmettersi mutuamente azioni tangenziali attraverso alle superficii laterali di separazione delle varie fibre, capacità che invece si ha nel corpo continuo; ma per la data distribuzione di forze attraverso alle superfici laterali delle dette fibre non si trasmettono azioni tangenziali, quindi il comportamento del sistema fibroso descritto è identico a quello del corpo continuo primitivo.

Questa proprietà giustifica la denominazione di linee isostatiche.

La loro conoscenza nelle applicazioni pratiche può essere utile per realizzare una struttura reticolare o cellulare con elementi esclusivamente tesi o compressi di resistenza equivalente ad una data struttura continua.

La natura offre un esempio della suddetta distribuzione della materia nelle epifisi (ingrossamenti terminali delle ossa lunghe) di certe ossa umane: esse sono costituite da tante laminette dette trabecole disposte proprio, come in particolare il Culmann ha trovato per il femore, secondo le linee isostatiche corrispondenti alle forze esterne cui l'osso è soggetto.