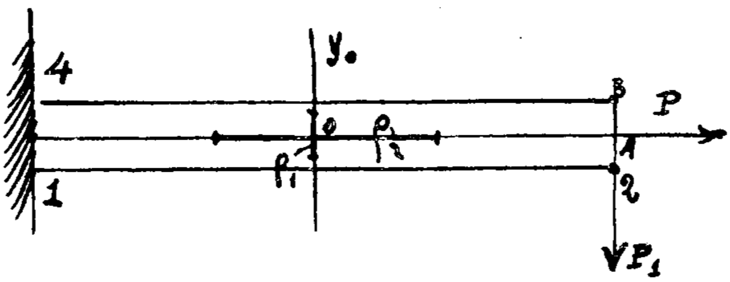
l'elemento terminale Ω, secondo una qualunque direzione, dovuto ad una forza arbitrariamente applicata all'elemento stesso, è uguale al prodotto della grandezza di questa forza per il momento di secondo ordine del sistema dei pesi elastici preso rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si misura lo spostamento.

4) Lo spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa è uguale al prodotto della grandezza della forza per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici rispetto alla sua retta di azione.

Determiniamo ora l'ellisse di elasticità per il solido prismatico ad asse rettilineo.



Si è definito centro di elasticità il punto intorno al quale ruota l'elemento terminale del solido quando su di esso è applicata una coppia. Il centro della ellisse di elasticità è l'antipolo della retta all'infinito che può considerarsi come linea di azione di una forza infinitamente piccola e lontana, cioè di una coppia.

Ora è noto che un solido a sezione costante sollecitato da un momento flettente costante si abbassa di

$\frac{Ml^2}{2EI}$ (freccia) e l'inclinazione della tangente alla linea elastica nel punto terminale è: $\frac{Ml}{EI}$; così che si può dire che l'elemento terminale ruota intorno al punto medio di AB.

Giusta la definizione di peso elastico (v. a pag. 365) $\Theta = MG$ dove Θ è l'ampiezza della rotazione, eguagliando le due espressioni di Θ ora riportate: $\frac{Ml}{EI} = GM$ cioè $G = \frac{l}{EI}$ (peso elastico)

Determinata la posizione del centro dell'ellisse e del peso elastico passiamo a determinare i due semiassi della ellisse stessa.

Per una forza P agente secondo l'asse della trave si ha uno spostamento dell'elemento terminale nella direzione stessa di P, dato da $\frac{Pl}{E\Omega}$; d'altra parte, per quanto si è detto a pag. 372 questo spostamento è dato dal prodotto di P per il momento di inerzia (perchè la direzione dello spostamento coincide con quella della forza) del peso elastico rispetto alla linea di azione di P ed inoltre, poichè la forza P passa per il baricentro elastico, il centro di rotazione è all'infinito nella direzione coniugata a quella di p, rispetto all'ellisse di elasticità, questo dice che la direzione dell'asse geometrico del solido è coniugata a quella ad essa normale. Il che è pure evidente per ragioni di simmetria.

Si sono così determinate le rette sulle quali giacciono gli assi dell'ellisse. Se indichiamo con ρ_1 il semiasse disteso sulla normale per O all'asse del solido, avremo, eguagliando le due espressioni dello spostamento traslatorio dell'elemento terminale.

$$\frac{Pl}{E\Omega} = \frac{Pl}{EI}\rho_1^2$$

da cui

$$\rho_1^2 = \frac{I}{\Omega}$$

cioè il <u>semiasse</u> dell'ellisse di elasticità normale all'asse geometrico ha la stessa lunghezza dell'analogo semiasse dell'ellisse centrale di inerzia alla sezione retta del cilindro.

Se la sezione è rettangolare $\rho_1^2 = \frac{h^2}{12}$

Per determinare il semiasse disteso lungo l'asse geometrico del solido applichiamo in A una forza P_1 perpendicolare all'asse diretta verso il basso: è noto che l'abbassamento subito da A nella direzione di P è dato, se si tiene conto della deformazione dovuta al taglio, da $\frac{Pl^3}{3EI} + \chi\frac{Pl}{G\Omega}$.

Da quanto precede risulta ancora che tale spostamento è anche dato dal momento di inerzia del peso elastico preso rispetto alla linea di azione di P_1.

Questo ultimo momento di inerzia, per il ben noto teorema del trasporto, è uguale al momento di inerzia preso rispetto all'asse baricentrico parallelo y_0: aumentato dal prodotto del peso elastico per il quadrato della distanza fra i due assi; cioè indicando con ρ_2 il semiasse dell'ellisse di elasticità disteso sull'asse geometrico del solido: dalla eguaglianza delle due espressioni dello spostamento risulta:

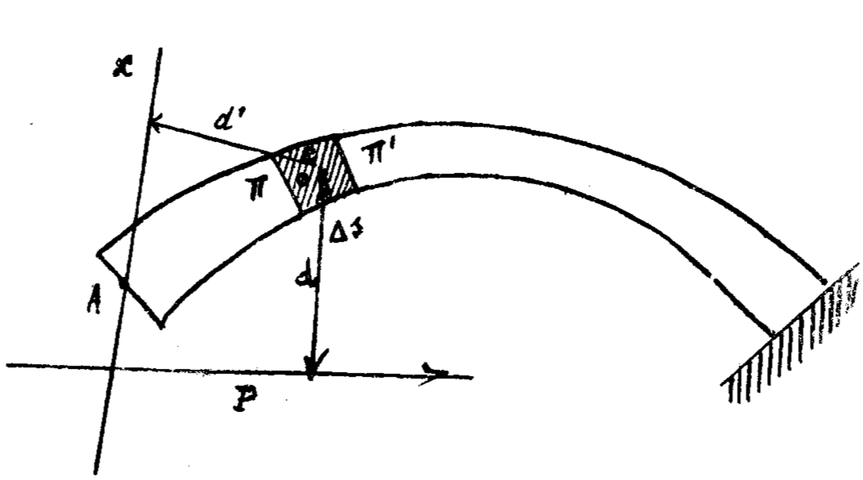
$$\frac{Pl^3}{3EI} + \chi \frac{Pl}{G\Omega} = P\left\{\rho_2^2 \frac{l}{EI} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{l}{EI}\right\}$$

da cui:

$$\frac{l^3}{3EI} + \chi\frac{l}{G\Omega} - \frac{l^3}{4EI} = \rho_2^2 \frac{l}{EI} \quad ; \quad \rho_2^2 = \frac{l^2}{12} + \chi \frac{E}{G}\frac{I}{\Omega}$$

Si è così ottenuto anche l'altro semiasse dell'ellisse di elasticità. Le conclusioni precedenti mostrano che, se la sezione trasversale del solido è rettangolare l'ellisse di elasticità coincide con l'ellisse di inerzia del rettangolo 1234 quando si trascurino le deformazioni prodotte dal taglio.

Per passare al calcolo effettivo numerico grafico relativo ad un solido di forma generale (v. figura) immaginiamo di limitare il nostro studio ad un elemento di un piccolissimo tronco di esso compreso fra due sezioni rette, arbitrariamente scelte, la cui



distanza, misurata lungo l'asse, sia Δs, cioè consideriamo rigido tutto il solido ad eccezione del piccolo tronco Δs.

Determiniamo quindi lo spostamento che subisce un punto A dell'elemento terminale Ω sotto l'azione di una forza P ad esso applicata direttamente (o con l'intermediario di un braccio rigido) per effetto della elasticità del tronco Δs.

Nelle sezioni limitanti tale tronco la π' deve rimanere fissa, perchè collegata alla parte rigida del solido che a sua volta è incastrata.

La sezione π è da considerarsi come rigidamente collegata alla sezione terminale Ω; allora è chiaro che lo spostamento cercato del punto A di Ω si può calcolare quando si conoscano le caratteristiche elastiche del tronco Δs in esame.

Per effetto della forza P collegata rigidamente ad Ω e quindi (essendo la parte compresa fra Ω e π rigida) rigidamente collegata a π, si ha una rotazione intorno al punto C, che è l'antipolo della retta P rispetto all'ellisse parziale del tronco Δs studiato.

L'ampiezza della rotazione è:

$$P \cdot d \cdot dG.$$

(dove dG è il peso elastico del tronco considerato).

Lo spostamento che un punto A della sezione terminale Ω subisce nella direzione x per effetto della rotazione di ampiezza P.d. dG, intorno a C è:

$$P.d.d' dG$$

Immaginiamo ora che tutti i tronchi elementari dell'arco siano elastici: allora applicando il principio della soprapposizione dei piccoli movimenti si trae che lo spostamento che subisce il punto A è dato dalla somma degli spostamenti dovuti alla elasticità dei singoli tronchi cioè da:

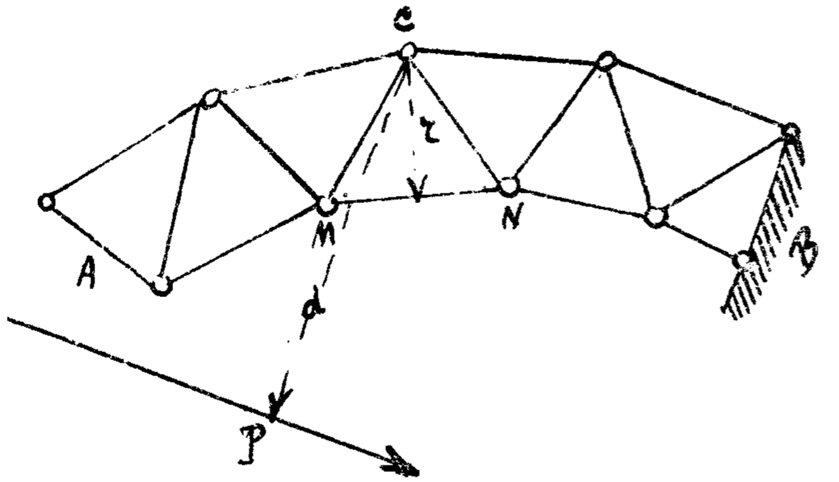
$$P \Sigma d_x d'_x \, dG$$

cioè dal prodotto della intensità della forza per il momento centrifugo dei pesi elastici presi sempre rispetto alla linea di azione della forza ed alla retta x secondo la quale si valuta lo spostamento.

Da ciò deriva che, suddiviso il solido in tronchi così piccoli da poter essere considerati prismatici (cioè tali che ad essi si possano applicare i risultati del problema di Saint-Vincent) in corrispondenza dei quali abbiamo imparato precedentemente a tracciare l'ellisse di elasticità, il sistema dei pesi elementari dG applicati ai centri delle ellissi costituisce il sistema di forze parallele, la cui ellisse d'inerzia è quella che abbiamo chiamato l'ellisse di elasticità del solido.

La costruzione di tale ellisse va quindi eseguita con le stesse norme che valgono per la costruzione dell'ellisse centrale di un sistema di masse piane. (V. statica grafica).

Se la struttura è reticolare, si osserva che, ove sia tolta un'asta MN la struttura diviene deformabile,



in quanto costituita di due parti rigide, le quali però possono assumere un moto relativo che è una rotazione intorno al punto C, polo di MN: la funzione di MN è dunque quella di contrastare tale rotazione.

Supposta incastrata la travatura in B, e del resto libera, una forza rigidamente collegata all'estremo A induce in MN uno sforzo S dato da $\frac{Pd}{r}$ ed un allungamento $\Delta l = \frac{Pd}{r}\,\frac{l}{E\omega}$ dove l è la lunghezza dell'asta e ω la sua sezione trasversale.

L'ampiezza della rotazione intorno a P è data da $\frac{\Delta l}{r}$ cioè da:

$$d\theta = Pd\frac{l}{E\omega r^2}$$

confrontando questa espressione con quella che definisce il peso elastico $d\theta = M \cdot dG$ si ricava che

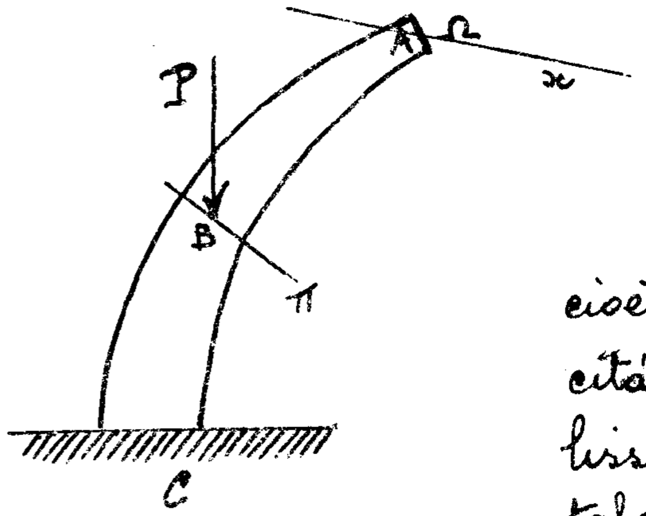
$$dG = \frac{l}{\omega E r^2}$$

Analogamente per le aste di parete.

L'ellisse di elasticità dell'arco sarà l'ellisse centrale del sistema dei pesi elastici dG applicati nei rispettivi poli. Per le aste di parete i poli non coincidono con nodi effettivi, ma con nodi virtuali.

Spesso, nelle applicazioni, si prescinde dalla deformazione delle aste di parete e l'ellisse di elasticità si riduce all'ellisse centrale dei pesi dG relativi alle sole aste di contorno.

In quanto precede si è sempre supposto che la forza esterna P agisse direttamente, o con l'intermediario di un braccio rigido, sulla sezione terminale Ω cioè che fosse in gioco l'elasticità di tutta la struttura. L'ellisse di elasticità costruita in tal caso è detta ellisse di elasticità terminale.

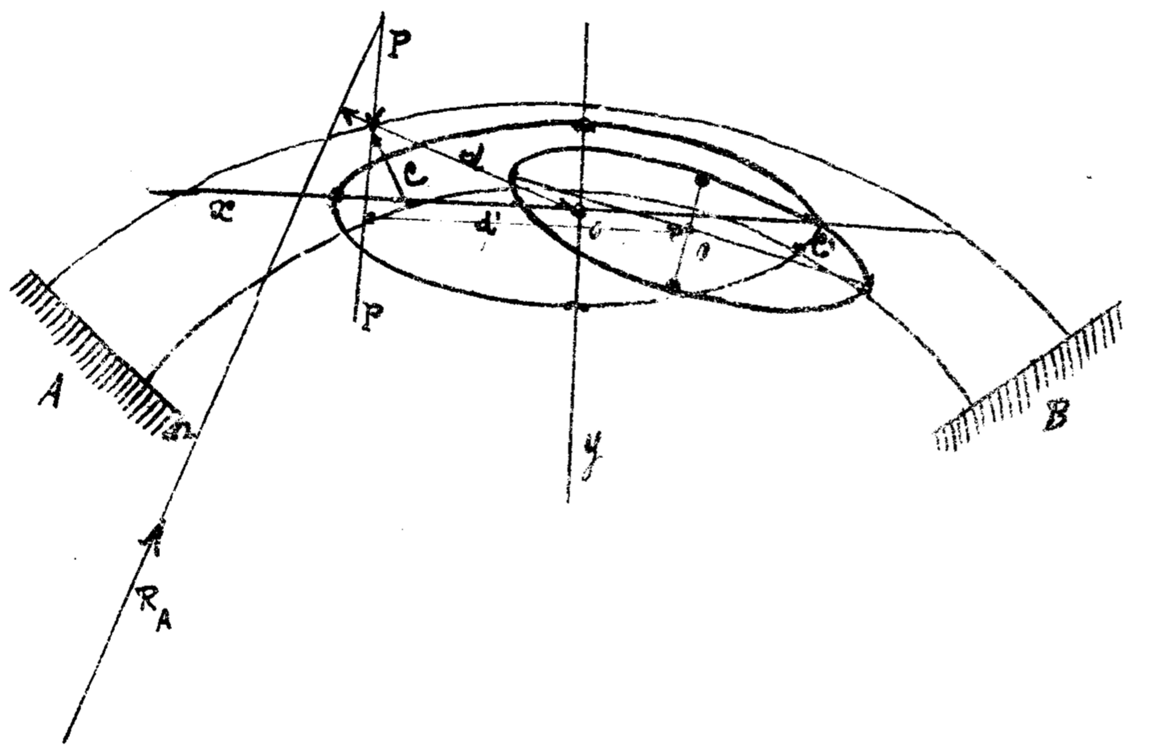


Se la forza esterna P non è applicata alla sezione terminale, ma ad una sezione qualsiasi per determinare lo spostamento di un punto della sezione terminale Ω occorre tener conto dell'elasticità del tratto CB, la rimanente parte BA non interviene attivamente e si comporta ~~come se~~ avesse peso elastico nullo: cioè per ottenere lo spostamento del punto A di s nella direzione x occorre valutare il momento centrifugo dei pesi elastici degli elementi corrispondenti al tratto CB rispetto alla retta di azione di P ed alla retta x.

Il centro di rotazione risulterà essere l'antipolo della linea d'azione di P rispetto all'ellisse di elasticità della parte BC.

A scopo di esercizio, per applicare le precedenti conclusioni ad un interessante problema della pratica tecnica proponiamoci di determinare le reazioni delle imposte di un arco incastrato.

Tale arco, come è noto, è triplamente iperstatico. Sia P la forza esterna che sollecita l'arco. Scegliamo



come incognita la reazione R_A della imposta A e supponiamo l'arco liberato da tale imposta.

La forza P agente sull'arco reso così isostatico produrrà una rotazione della sezione terminale Ω intorno ad un punto C' antipolo di p (retta di azione di P) rispetto all'ellisse di elasticità relativa al tratto CB di arco, l'ampiezza di tale rotazione è:

$$P \times d' \times G'$$

dove G' è il peso elastico che corrisponde al tronco CB di arco.

L'azione di R_A (reazione dell'imposta A) è quella di annullare tale rotazione (se gli incastri si suppongono rigidi), dunque la R_A produrrà una rotazione di Ω (di senso opposto a quella provocata da P) intorno allo stesso punto C'. Osservando che sotto l'azione di R_A entra in gioco l'elasticità di tutto l'arco AB, risulta che la linea di azione di R_A dovrà essere l'antipolare di C' rispetto all'ellisse di elasticità di tutto l'arco AB; dalla eguaglianza delle rotazioni:

$$P \times d' \times G' = R_A \times d \times G$$

si ricava il valore di R_A.

Si può evitare il tracciamento delle due ellissi procedendo come segue:

La reazione R_A può essere definita mediante i tre parametri V, H, M che sono rispettivamente la componente verticale per O, la componente secondo la direzione coniugata alla verticale, rispetto all'ellisse di elasticità terminale, passante per O, ed il momento di R_A rispetto al baricentro elastico O di tutto l'arco.

Immaginiamo l'imposta A rigidamente collegata al baricentro elastico O, per effetto della forza P il baricentro elastico subirà uno spostamento che si può decomporre in una rotazione $\Delta\varphi$, in uno spostamento Δy secondo la verticale passante per O ed in uno spostamento Δx secondo l'asse coniugato di y rispetto all'ellisse di elasticità dell'arco (se l'arco è simmetrico, come in figura, l'asse x è l'orizzontale per O).

La rotazione $\Delta\varphi$ è il prodotto di P (intensità della forza) per il momento statico, rispetto alla linea di azione del carico, dei pesi elastici corrispondenti al tratto CB, mentre Δy e Δx sono rispettivamente il prodotto dell'intensità della forza per il momento centrifugo degli stessi pesi elastici rispetto alla linea di azione della forza ed alla linea secondo la quale si valutano gli spostamenti (cioè rispettivamente y e x).

Se le imposte sono rigide, l'effetto della reazione R_A

sarà quello di annullare la rotazione $\Delta\varphi$ e gli spostamenti Δy e Δx. Il parametro M della reazione incognita R_A (momento di R_A rispetto ad O) è quello che produce la rotazione $\Delta\varphi$, ed infatti V ed H, poiché le loro linee di azioni passano per O, producono soltanto traslazioni di tale punto; inoltre V non produce spostamento secondo x, ed H (spinta dell'arco) non produce spostamento secondo y essendo x ed y assi coniugati rispetto all'ellisse di elasticità terminale.

La rotazione dovuta ad M è misurata da:

$$\Delta\varphi = M\,G$$

in cui, essendo M riferito al punto O che si immagina rigidamente collegato alla estremità Ω dell'arco la G è il peso elastico di tutto l'arco; Δy è il prodotto di V per il momento di inerzia (perchè la linea di azione della forza coincide con la linea secondo la quale si valuta lo spostamento) dei pesi elastici di tutto l'arco rispetto all'asse y;

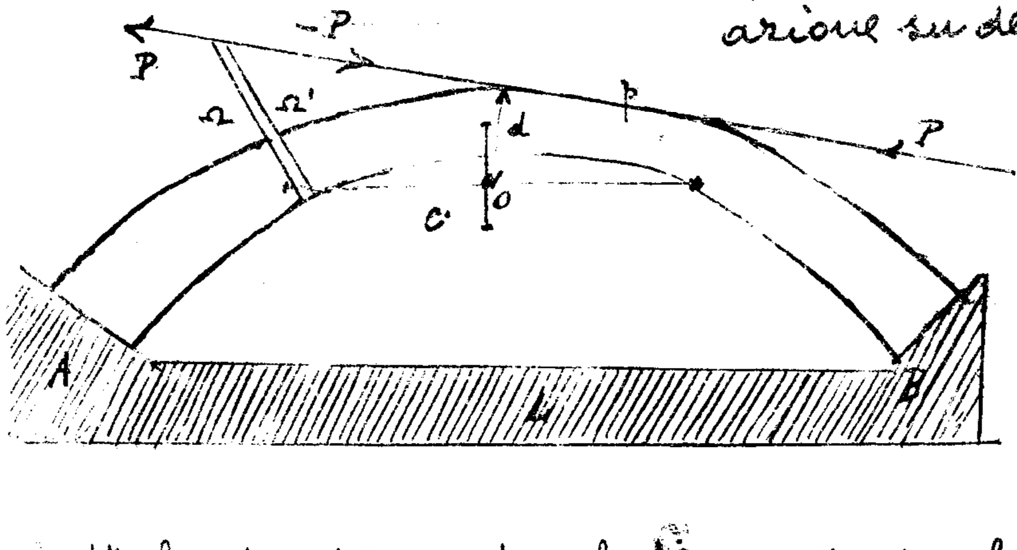
Δx è il prodotto di H per il momento di inerzia dei pesi elastici di tutto l'arco rispetto ad x.

Si ottengono così tre equazioni che permettono di ricavare i tre parametri incogniti: si noti che, per la opportuna scelta di tali parametri, le tre equazioni contengono ciascuna una sola delle incognite.

*

* *

Se in un solido elastico piano rigidamente incastrato alle estremità si immagina praticato un taglio trasversale qualsiasi e si immaginano applicate alle due facce del taglio due forze eguali ed opposte, il moto relativo delle due facce è una rotazione che si compie intorno all'antipolo C della linea di azione p comune alle due forze rispetto all'ellisse di elasticità (terminale) dell'arco e l'ampiezza della rotazione è data dal prodotto $P \times G \times d$ cioè dal prodotto di P per il momento statico del peso elastico dell'arco rispetto alla linea di azione su detta.



Infatti lo spostamento relativo delle due facce è quello che si ottiene immaginando fissa, per esempio, la faccia Ω appartenente al tronco di sinistra, collegando le due imposte dell'arco con un legame rigido (è ovvio che quanto si afferma è valido non solo per un arco ma in generale) e determinando lo spostamento della sezione s del tronco di destra come spostamento terminale del sistema ottenuto.

All'elemento rigido aggiunto corrisponde un peso elastico nullo, quindi i pesi elastici elementari, in grandezza e posizione, sono quelli stessi che si avrebbero considerando l'arco incastrato, per esempio, in A e libero in B, ed inoltre si osserva che le deformazioni consentite dai singoli pesi elastici si sovrappongono in ogni caso, in conseguenza la ellisse di elasticità del nuovo sistema coincide con quella che corrisponde all'arco incastrato in un estremo e libero nell'altro.

A scopo di esercizio dimostreremo per altra via la su detta proprietà.

Se si libera l'arco incastrato nei due estremi dall'incastro in B, e si immagina applicata alla sezione terminale B una forza P; per effetto di questa la sezione B ruoterà intorno al punto C (antipolo della linea di azione p di P rispetto alla ellisse di elasticità terminale) l'ampiezza della rotazione è:

$$\Theta = P \cdot d \cdot G .$$

dove d è la distanza del baricentro elastico O da p e G il peso elastico dell'arco.

Avvenuta la deformazione immaginiamo praticato un taglio (come in figura), che connetta il sistema elastico, ed applichiamo sulle due facce del taglio due distribuzioni di forze P e -P equivalenti ai sistemi di tensioni interne che attraverso la superficie del taglio si trasmettevano prima del taglio stesso: in tal modo non avremo alterato lo stato di deformazione elastica del sistema.

Se supponiamo allora di imprimere al tronco che si trova alla destra del taglio (il quale, per le fatte ipotesi, è libero da ogni vincolo) un moto rigido di rotazione intorno a C di ampiezza $-R_d.C_y$ la sezione B ritorna nella posizione che essa aveva prima della deformazione ne segue che la attuale configurazione del sistema è quella stessa che il sistema stesso, incastrato alle due estremità A e B, assumerebbe qualora, praticato il taglio, alle sue due facce Ω ed Ω' si applicassero due forze eguali ed opposte P e -P.

L'osservazione precedente è particolarmente utile nelle applicazioni del secondo principio di reciprocità al tracciamento delle linee di influenza di alcune caratteristiche delle forze esterne (sforzi di taglio, momenti flettenti, momenti di nocciolo).