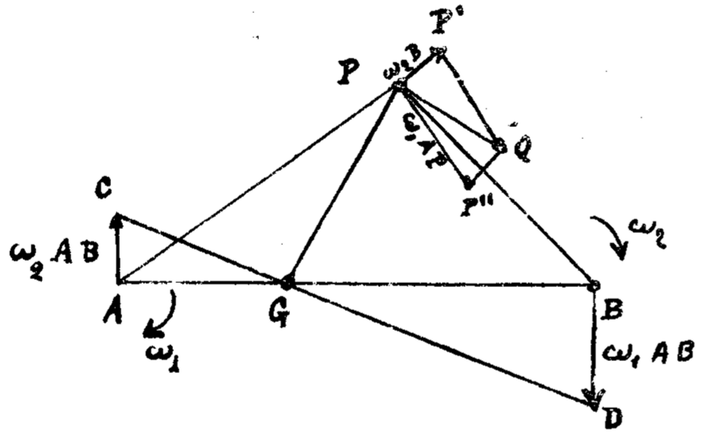
- Capitolo XIII -

Richiami di Cinematica dei sistemi rigidi.

Dalla Cinematica dei sistemi rigidi è noto che se più moti sono impressi ad un sistema rigido nello stesso intervallo di tempo (simultanei) il moto risultante è quello in cui ogni punto del sistema ha in ogni istante una velocità (vettore) che è la risultante dei vettori velocità che gli competerebbero in quel medesimo istante in ognuno dei moti componenti.

In particolare a noi interessa il moto risultante di più moti rotatori istantanei intorno ad assi paralleli.

Immaginiamo che un sistema rigido, piano debba rotare intorno a due assi a e b normali al piano del sistema e passanti per A e B. Sia ω_1 la velocità angolare della rotazione intorno ad A ed ω_2 quella corrispondente al moto di rotazione intorno a B. Innanzi tutto ricordiamo che per un teorema dovuto ad Eulero ogni



moto istantaneo piano è puramente rotatorio, o, in particolare, traslatorio; dunque tale sarà anche il moto risultante dei due moti assegnati.

Un qualsiasi punto P del nostro sistema piano sarà animato, per effetto della rotazione intorno ad A, da una velocità $\omega_1 \cdot AP$, diretta normalmente ad AP, e per effetto del moto intorno a B, da una velocità: $\omega_2 \cdot BP$ diretta normalmente a BP. Il moto composto (risultante) è quello per cui P è animato dalla velocità PQ, essendo PQ la risultante dei due vettori PP' e PP'' che rappresentano le due velocità parziali.

Se si osserva che per effetto del I° moto (rotazione intorno ad A) resta A fisso, si conclude che per esso, la velocità risultante (che coincide colla velocità dovuta alla rotazione intorno a B) sarà un vettore diretto normalmente ad AB il cui modulo è: $AB|\omega_2|$; analogamente per B la velocità del moto risultante sarà un vettore normale ad AB di modulo $AB|\omega_1|$; questo basta per poter affermare che il moto risultante è una rotazione intorno ad un punto G della retta AB; ricordando che le velocità sono proporzionali alle distanze dei punti considerati dal centro di rotazione, dai triangoli simili ACG e BGD risulta che $\frac{AG}{GB} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ da cui $AG = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} AB$: segue che la velocità angolare del moto risultante è data da:

$$\frac{AG}{AG} = \frac{|\omega_2|\,AG}{\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\times AB} = \omega_1 + \omega_2$$, cioè è uguale alla somma delle velocità angolari dei moti componenti.

Se ω_1 e ω_2 sono di segni contrarii, il centro della rotazione risultante è esterno al tratto AB.

Se $\omega_1 = \omega_2$ il punto G va all'infinito ed il moto risultante è una traslazione, il valore assoluto della velocità è uguale al prodotto di $|\omega_1| = |\omega_2|$ per la distanza fra i due centri di rotazione.

Quanto precede ci permette di affermare che il moto risultante dei due moti rotatori dati è una rotazione intorno al baricentro delle due velocità angolari applicate nei rispettivi centri e la velocità angolare della rotazione risultante è uguale alla somma algebrica delle velocità angolari dei moti componenti.

Se i moti componenti fossero più di due, riferendo quanto precede al moto risultante dei primi due ed al terzo e così via si giunge a poter affermare che: <u>il moto risultante di più moti rotatori istantanei intorno a diversi punti $A, B, C, \ldots\ldots$ è un moto rotatorio istantaneo intorno al punto G che è il baricentro dei punti $A\ B\ C \ldots\ldots$ affetti dai pesi $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots\ldots$ (velocità angolari corrispondenti alle rotazioni componenti). La velocità angolare risul-</u>

tante è eguale alla somma algebrica delle velocità angolari dei moti componenti.

Se tale somma è eguale a zero, sono da distinguersi due casi: il punto G è all'infinito ed allora il moto risultante è una traslazione; il punto G è al finito, allora il moto risultante è nullo.

Da quanto precede balza evidente la analogia del problema cinematico della composizione di più moti istantanei rotatori con il problema statico della composizione di forze parallele.

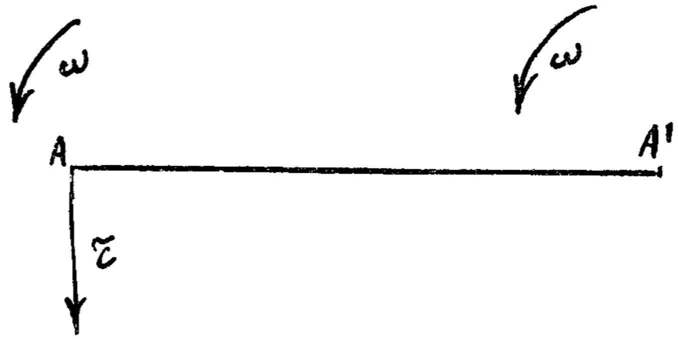
*

* *

Composizione di una traslazione e di una rotazione.

Consideriamo un moto istantaneo impresso ad un sistema piano composto di una rotazione intorno ad un punto A con velocità angolare ω ed una traslazione τ del sistema piano nel suo piano stesso.

Il moto risultante dei due moti considerati è un moto di rotazione intorno ad un punto A', la cui posizione si ottiene osservando che τ, in quanto è anche uguale alla velocità di A, deve essere il momento di ω applicato in A', cioè:



$$AA' = \frac{\tau}{\omega}$$

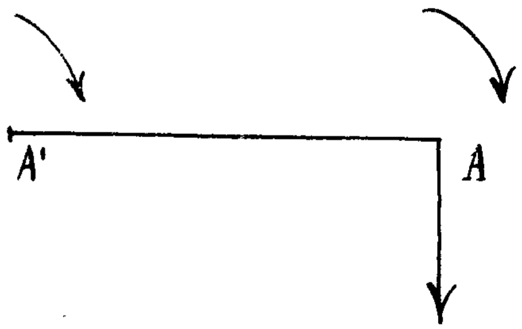
Infatti per questo valore di AA' risulta che in seguito alla rotazione intorno ad A', con velocità angolare ω, il punto A è animato da una velocità $AA' \cdot \omega = \tau$ e tale è anche la velocità di A per effetto dei due moti componenti (per effetto della rotazione intorno ad A il punto A stesso resta fisso e per effetto della traslazione A è animato dalla velocità τ).

Analogamente si vede che il punto A' resta fisso sia per effetto dei due moti componenti che per effetto del moto risultante indicato.

Ricordando poi che il moto di un sistema piano è perfettamente individuato quando si conosca il moto di due suoi punti risulta dimostrata la equivalenza fra i due moti componenti ed il moto di rotazione risultante intorno ad A'.

Viceversa è vero che una rotazione con velocità angolare ω intorno ad un punto A' equivale ad una rotazione con velocità angolare ω intorno ad un altro punto A e ad una traslazione τ che è il momento rispetto ad A di ω applicata in A'. È chiaro che se il verso della rotazione è contrario a quello segnato nella figura precedente il centro di rotazione

A' si trova a sinistra di A, come si vede nella seguente figura.



È bene notare incidentalmente la analogia esistente tra il problema in esame e quello statico della composizione di una forza e di una coppia.

*

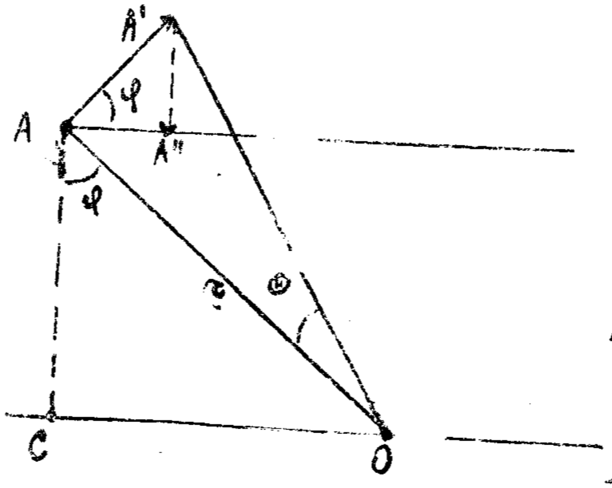
* *

Quanto precede può riferirsi agli spostamenti istantanei come risulta subito moltiplicando i vettori velocità per lo scalare dt, in tal caso, invece di velocità angolari, si parlerà di ampiezze (infinitesime) di rotazione.

*

* *

Ricordiamo ancora che se un punto A, si sposta per effetto di una rotazione infinitesima di ampiezza θ intorno ad un punto O e passa in A', la componente dello spostamento, presa in una direzione x qualsiasi per A si ottiene moltiplicando l'ampiezza della rotazione per la distanza da O dell'asse x (passante per A) secondo il quale si valuta lo spostamento.



La componente di AA' secondo x è AA'' ed essendo

$$AA' = r\Theta \quad \text{dove } r = OA$$

risulta

$$AA'' = r\Theta\cos\varphi \quad \text{dove } \varphi \text{ è}$$

l'angolo $\widehat{A'AA''} = \widehat{OAC}$.

Osservando che $AC = r\cos\varphi$ risulta

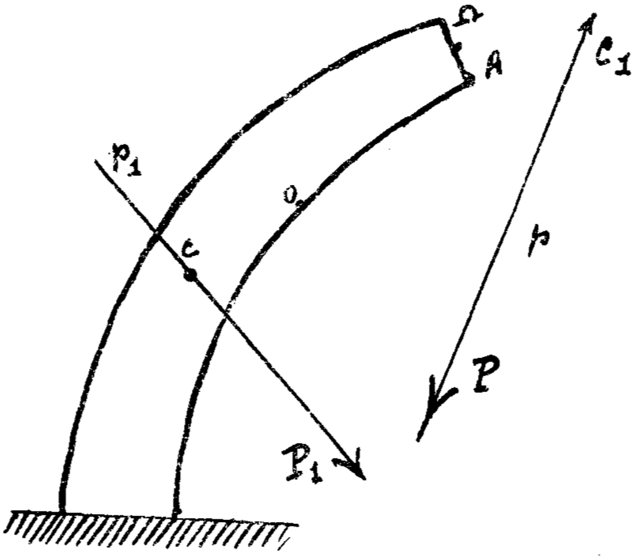
$$AA'' = AC \cdot \Theta .$$

Ellisse di Elasticità -

Consideriamo un solido elastico qualsiasi incastrato in un estremo e libero nell'altro.

Limitiamoci a considerare gli effetti di forze complanari agenti direttamente, o per l'interposizione di un braccio rigido, sulla base libera s, e producenti deformazioni contenute nel loro piano comune che è anche piano di simmetria del solido cilindrico o prismatico considerato.

Per effetto della forza P il solido elastico subisce una deformazione che dipende dagli elementi che caratterizzano la forza (linea di azione, senso, intensità) e dagli elementi geometrici del solido



elastico (forma, condizione di vincoli, proprietà elastiche del materiale).
Se prescindiamo, data la piccolezza delle dimensioni trasversali rispetto alla lunghezza del cilindro, dal mutamento di forma della base libera, cioè se la consideriamo come un sistema rigido, lo spostamento, sotto l'azione delle forze esterne deformatrici, giacenti nel piano di simmetria del solido che contiene l'asse del solido stesso, sarà una rotazione intorno ad un punto del piano: ci proponiamo di determinare il centro e l'ampiezza della rotazione.

Riferiamoci alla sezione terminale Ω del solido elastico. Innanzi tutto osserviamo che, per il principio di proporzionalità fra sforzi e deformazioni, poichè lo spostamento della sezione Ω è proporzionale alla intensità della forza P, la grandezza di questa non può influire sulla posizione del centro intorno al quale la sezione Ω ruota. Si presenta quindi l'opportunità di considerare di quale natura sia la corrispondente fra-le rette del piano (considerate come linee di azione di forze P agenti direttamente o con l'interposizione di un braccio rigido, sulla sezione Ω) ed i punti del piano stesso (considerati come centri delle rispettive rotazioni della sezione Ω).

Noi consideriamo dunque la sezione estrema Ω come un sistema rigido e ad essa rigidamente collegato un piano coincidente con quello in cui agiscono le forze applicate al solido elastico e ci proponiamo di investigare intorno a quale punto ruota il sistema rigido collegato con la sezione Ω quando sul solido elastico agisce una generica forza P.

Sia p la linea di azione della forza P e C il centro intorno al quale ruota la sezione Ω per passare dalla posizione iniziale a quella finale dopo la deformazione.

<u>Il punto C non può appartenere alla retta p.</u>

Infatti se C si trovasse su p il lavoro compiuto dalla forza P sarebbe nullo per qualunque ampiezza, sempre piccolissima, della rotazione (P passa per il centro di rotazione) dovrebbe quindi, per il teorema di Clapeyron, essere nullo il lavoro di deformazione, il che non è possibile se il sistema elastico non è degenere (per es: comprendente alcune parti rigide).

Consideriamo ora una retta p_1 passante per C come linea di azione di una forza P_1 e dimostriamo che il centro C_1 intorno al quale ruota s per effetto di P_1 deve necessariamente trovarsi su p: ciò deriva dal teorema di reciprocità o di Betti infatti poichè è nullo il lavoro che compie P_1 per effetto della deformazione dovuta a P (P_1 passa per C) deve essere nullo il lavoro che compie P per effetto della deformazione dovuta a P_1, cioè C_1 deve trovarsi su p.

Sia Θ l'angolo di cui ruota la sezione s intorno ad un punto C per effetto di una forza P, e Θ_1 l'angolo di cui — sezione s ruota intorno a C_1 sotto l'azione di P_1. Per quanto si è visto a pag. 358 l'ampiezza dell'angolo di cui complessivamente la sezione s avrà ruotato cioè l'ampiezza della rotazione della sezione s sotto l'azione della risultante P' di P e P_1 è dato da $\Theta + \Theta_1$; tale rotazione avverrà intorno ad un punto C' baricentro dei due punti C e C_1 affetti rispettivamenti da pesi Θ e Θ_1; quanto precede dimostra che, sotto l'azione della forza P' risultante di P e P_1 e quindi passante per il punto B di concorso di p e p_1 la sezione s ruota intorno al centro C' che è allineato con C e C_1 possiamo quindi concludere che: se più forze passano per un medesimo punto B i rispettivi centri di rotazione giacciono su di una retta la quale è la corrispondente di B.

Se la linea di azione della forza è la retta all'infinito del piano, cioè il sistema delle forze applicate alla sezione terminale si riduce ad una coppia, la rotazione della sezione terminale stessa avverrà intorno ad un punto determinato O che si chiama <u>baricentro elastico</u> che non può stare all'infinito, non potendo appartenere alla retta ad esso corrispondente (la coppia deve produrre rotazione e nello stesso suo verso): l'ampiezza della rotazione risulterà proporzionale al momento della coppia, potremo cioè scrivere:

$$\Theta = G\,M$$

dove la costante G, detta <u>peso elastico</u>, si può determinare quando si conosca il solido elastico con i suoi vincoli e ci dà la misura della deformabilità del sistema elastico.

Viceversa, per la reciprocità, quando la linea di azione della forza passa per il baricentro elastico O, la rotazione della sezione terminale avverrà intorno ad un punto della retta all'infinito del piano (che è quella che corrisponde al baricentro elastico O): cioè l'elemento terminale subisce una traslazione in una certa direzione per ora indeterminata.

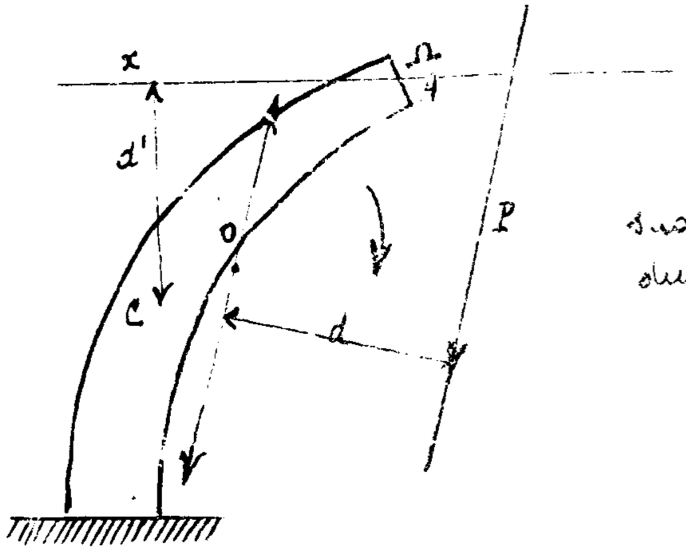
Supponiamo ora che la forza p (direttamente applicata alla sezione terminale o od essa collegata mediante un braccio rigido) abbia una linea di azione affatto qualsiasi, ad essa forza si potrà sempre sostituire una equipollente forza per il baricentro elastico O, purchè si aggiunga la coppia P.d che nasce dal trasporto della forza.

Con il su detto trasporto, avvalendoci del principio della sovrapposizione degli effetti, veniamo a sostituire alla rotazione che l'elemento terminale subisce per effetto di P, intorno ad un certo punto C (corrispondente alla linea di azione p di P), una rotazione, dovuta alla coppia P.d, che avverrà, per quanto si è già detto, intorno al baricentro elastico O la cui ampiezza è: $\Theta = P\,G\,d$ ed una traslazione dovuta alla forza P trasportata in O.

Innanzi tutto è noto che la traslazione non modifica l'ampiezza della rotazione dovuta alla coppia; inoltre osserviamo che, pur non conoscendo per ora la direzione della traslazione, essa sarà tale che, composta con la rotazione intorno ad O, darà luogo ad una rotazione risultante intorno al già indicato punto C la cui distanza dalla linea di azione p di P sarà maggiore della distanza del baricentro elastico O dalla stessa p;

Ciò risulta immediatamente decomponendo lo spostamento dovuto alla forza P trasportata in O secondo la direzione di P e la normale ad essa.

Dovendo la forza P produrre lavoro positivo, la prima di dette componenti deve avere lo stesso verso di P.



Osservando che la coppia produce una rotazione che ha lo stesso suo verso dovendo anche essa produrre lavoro, e riferendoci a quanto si è riportato a pag. 355 sulla composizione di una rotazione e di una traslazione concludiamo che il centro di rotazione C è più di O distante dalla retta di azione p di P.

In conclusione la sezione terminale A ruota intorno a C e l'ampiezza della rotazione è: $\Theta = P_x d_x G$.

Il prodotto G.d può considerarsi come il momento statico della massa già denominata "peso elastico", con baricentro in O, rispetto alla linea di azione p della forza P. È forse opportuno ripetere che, qualunque sia la linea di azione p di P l'ampiezza della rotazione è sempre della forma $P_x d_x G$.

cioè la distanza d va sempre misurata dal punto O.

Da quanto è stato detto a pag: 362 risulta che volendo conoscere la componente dello spostamento di un punto generico A giacente su Ω o ad Ω rigidamente collegato, secondo una qualsiasi direzione x passante per esso basterà moltiplicare la già trovata ampiezza della rotazione per la distanza del centro di rotazione C della retta x; il valore di tale spostamento è quindi:

$$P.Q.d.d'.$$

tale espressione può considerarsi come il prodotto di P per il momento statico della grandezza $Q.d$ preso rispetto alla retta x, cioè il momento, rispetto ad x, del momento statico del peso elastico rispetto alla linea di azione p di P.

Riepilogando, da noi è stato messo in evidenza:

- che il centro C intorno al quale ruota la sezione terminale per effetto di una forza P non può appartenere alla retta p.

che una forza P_1 avente come linea di azione una retta p_1 passante per C determina una rotazione della sezione terminale intorno ad un punto C_1 che deve trovarsi sulla linea di azione p di P.

che se più forze passano per un medesimo punto

B i centri di rotazione giacciono su di una retta b la quale è la corrispondente di B.

— che esiste una certa grandezza Q detta "peso elastico" che col suo momento statico rispetto alla linea di azione della forza P ci dà la grandezza della rotazione corrispondente a P = 1.

— che il centro della detta rotazione (eguale al citato momento statico) si trova, rispetto alla linea di azione p, più distante del baricentro elastico O.

— che lo spostamento di un punto generico A secondo una certa retta x per esso passante è il prodotto PQdd' (vedi sopra) che, per P = 1, si può interpretare come il momento centrifugo del peso elastico rispetto alle due rette p ed x.

Da quanto precede e specialmente dai tre ultimi capoversi, siamo condotti a riconoscere che il "peso elastico" si comporta come una massa distribuita diffusa in quanto i suoi momenti statici rispetto a vari assi non sono applicati nel baricentro O mentre sarebbero applicati nel baricentro O stesso, se la massa fosse concentrata in O.

La corrispondente tra le rette p ed i centri C, come risulta dalla descrizione fatta più sopra, è perfettamente analoga a quella tra assi e centri relativi studiata nella statica grafica, con riferimento a sistemi piani di masse.

Sotto questo punto di vista il centro C della rotazione prodotta da P si deve considerare come il centro relativo di p rispetto alla distribuzione del peso elastico.

Ne consegue ancora che la corrispondenza tra rette d'azione p di forze P ed i rispettivi centri di rotazione C è l'antipolarità rispetto all'ellisse di inerzia del peso elastico. (V. analogo capitolo di statica grafica).

Questo particolare ellisse si chiama anche ellisse di elasticità.

Possiamo quindi completare le precedenti conclusioni enunciando i seguenti teoremi:

1) Applicando una coppia alla sezione libera questa sezione (ed ogni altro punto ad essa rigidamente collegato) ruota intorno al baricentro elastico O e l'ampiezza della rotazione è data dal prodotto del momento della coppia per il peso elastico.

2) applicando una forza alla sezione libera questa sezione (ed ogni altro punto ad essa rigidamente collegato) ruota intorno all'antipolo della linea di azione della forza rispetto all'ellisse di elasticità e la rotazione è eguale al prodotto della forza per il momento statico del peso elastico rispetto alla linea di azione della forza.

3) Lo spostamento di un punto qualunque A del-