si ricava:

$$K r^2 A = \int_A \frac{v^2}{1+\frac{r}{v}} dA$$

e che quindi per $r=\infty$ si ha:

$$K r^2 A = \int_A v^2 dA = I$$

Perciò per $r=\infty$ la (234) diviene

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M}{EI} \tag{235}$$

Dobbiamo osservare che per le travi ad asse rettilineo, essendo inizialmente $\frac{1}{r}=0$, nella (235) in luogo di $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ si può porre lo stesso $\frac{1}{r}$ della trave deformata, e si ricade così, come deve essere, nella ben nota formula trovata per le travi rettilinee.

La (235), rigorosa solo per $r=\infty$, si può pure con ottima approssimazione, applicare quando r sia finito, ma molto grande, cioè nel caso dei solidi a piccola curvatura.

Lavoro di deformazione per un tronco elementare di solido ad asse curvilineo.

Analogamente a ciò che si fa nello studio dei solidi prismatici vogliamo qui cercare l'espressione del lavoro di deformazione per un tronco elementare, di lunghezza ds, del solido ad asse curvilineo, studiato in questo capitolo.

Trascuriamo anche qui, come più sopra, l'effetto dello sforzo di taglio, ed applichiamo il teorema di Clapeyron dimostrato nel Cap. V esprimendo d'altra parte il lavoro della forza esterna come somma dei lavori che per effetto della deformazione sono compiuti dalle due componenti: sforzo normale N e momento flettente M, ricordando che tali lavori si devono intendere compiuti per effetto dello spostamento relativo delle sezioni estreme del tronco elementare considerato, di lunghezza ds.

Lo sforzo normale N, secondo le convenzioni fatte, s'intende applicato al baricentro della sezione. lo spostamento "relativo" di tale punto è dato da $\varepsilon_0 ds$ [(V.(205)] perciò il contributo di N al lavoro di deformazione, secondo il teorema di Clapeyron è $= \frac{1}{2} N \varepsilon_0 ds$.

Analogamente il momento flettente lavora per effetto della rotazione relativa della sezione finale rispetto a quella iniziale del tronco considerato suddetto, tale rotazione, coi simboli adottati (205), si esprime $= \omega\, d\varphi = \omega \frac{ds}{r}$

perciò il contributo che il momento M reca al lavoro di deformazione è $= \frac{1}{2} M \frac{\omega}{r} ds$.

In complesso indicando con $d\mathcal{L}$ il lavoro di deformazione dell'elemento lungo ds si ha:

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[N\varepsilon_0 + M\frac{\omega}{r}\right]ds$$

richiamando ora le espressioni di ε_0 e di ω date dalle (215) e (216) si trova

$$d\mathcal{L} = \frac{ds}{2EA}\left[N^2 + 2\frac{NM}{r} + \frac{M^2}{r^2}\frac{1+K}{K}\right] \qquad (236)$$

Rileviamo di qui che il lavoro di deformazione è dato da una funzione quadratica omogenea dei due parametri della forza esterna N ed M, e notiamo che tale funzione ha pure, con coefficiente non nullo, il termine rettangolare in NM.

I termini quadratici (in N ed M) rappresentano com'è facile verificare i lavori di deformazione che si hanno quando agiscono separatamente il solo sforzo normale N ed il solo momento flettente M, mentre il termine $\frac{2NM}{r}$ è la somma di due termini uguali $\frac{NM}{r}$, ciascuno dei quali, moltiplicato per il fattore comune fuori parentesi nella (236), rappresenta il lavoro compiuto da una delle due componenti N e M per effetto della deformazione prodotta dall'altra componente, (e crescente con legge lineare, come si è fatto nel Capitolo V studiando il teorema di Clapeyron).

La presenza del termine rettangolare è dunque dovuta al fatto che ciascuna delle due componenti N ed M compie lavoro per effetto della (215) e (216), nelle quali si vede che ε_0 dipende anche da M ed ω è pure funzione di N.

Per rendere più semplice l'espressione del lavoro di deformazione, ed altre espressioni che da quella derivano, o con essa si connettono, secondo i vari teoremi generalissimi che studiammo a suo tempo nel Capitolo V, può ora essere opportuno scegliere i parametri (o le componenti) della forza esterna in modo tale che ciascuno di essi non compia lavoro per effetto della deformazione prodotta dall'altra, sicchè il lavoro di deformazione risulti una funzione quadratica di parametri "ridotta alla forma canonica", senza il termine rettangolare.

Ciò si può ottenere se, come "centro di riduzione" della forza esterna, anzichè il baricentro G della sezione, si sceglie il punto G_* definito ed individuato sull'asse di sollecitazione dell'ascissa:

$$v = v_* = -\,z\,\frac{K}{1+K}$$

secondo la (223).

In altri termini lo sforzo normale N si dovrà intendere applicato in G_*, e si dovrà assumere come ulteriore componente della forza esterna il suo momento M rispetto al punto G_* stesso. Risulta quindi evidentemente M_* legato al momento M, rispetto al baricentro G, dalla relazione:

$$M_* = M + Nr \frac{K}{1+K} \qquad (237)$$

È opportuno ricordare che per il punto G_* passa l'asse neutro per $N=0$ ossia quando c'è sola flessione, e che inoltre G_* è il centro dell'involuzione determinata sull'asse di sollecitazione dai centri secondo quanto si vide in precedenza.

Come già si vide, indicando con σ_{t*} la tensione in G_* si ha:

$$\sigma_{t*} = \frac{N}{A}$$

e quindi per la legge di Kooke, la dilatazione in G_* è:

$$\varepsilon_* = \frac{N}{EA} \qquad (238)$$

che è indipendente da M_*, perciò la N è applicata in G_* non lavora per l'azione di M_*.

D'altra parte, se nell'espressione di ω data dalla (216) in funzione di M e di N, si introduce per M il valore per esso fornito dalla (237) in funzione di M_* e di N, dopo ovvie trasformazioni algebriche e riduzioni, si trova:

$$\omega = \frac{1}{EA} \times \frac{M_*}{r} \times \frac{1+K}{K} \qquad (239)$$

ed anche qui notiamo che la ω dipende solo da M_* e perciò quando agisce la N applicata in G_*, (cioè per $M_*=0$) lo spostamento relativo delle sezioni estreme del tronco ds si riduce ad una traslazione, la rotazione ω è nulla, ed il momento M_* non compie lavoro.

Indichiamo poi con ds_* l'archetto, concentrico con ds, passante per G_* e compreso nello stesso angolo al centro $d\varphi$, si ha così:

$$ds_* = \frac{ds}{1+K}$$

Ciò posto il lavoro di deformazione sarà espresso da:

$$d\mathcal{L} = \frac{ds_*}{2}\left[N\varepsilon_* + \frac{M_*}{r}(1+K)\omega\right]$$

e sostituendo i valori dati dalle (238) e (239), si ottiene:

$$d\mathcal{L} = \frac{ds_*}{2EA}\left[N^2 + \frac{M_*^2}{r^2}\,\frac{(1+K)^2}{K}\right] \qquad (240)$$

ed anche conforme alle (228) e (229)

$$d\mathcal{L} = \frac{ds_*}{2EA}\left(N^2 + \frac{M_*^2}{\rho_*^2}\right) \qquad (241)$$

e questa è per dL l'espressione che si cercava priva del termine rettangolare; essa si può riguardare come somma dei lavori di deformazione che lo sforzo normale N applicato in G_* ed il momento M_* rispetto a G_* producono separatamente, quando agiscono ciascuno isolatamente.

Equazioni generali delle deformazioni, con speciale riguardo ai solidi a piccola curvatura.

Analisi della deformazione complessiva in un solido ad asse curvilineo.

Dobbiamo ora studiare le deformazioni non più elementari, ma complessive di un solido ad asse curvilineo piano, sollecitato sempre, come sopra si suppose da forze giacenti nel piano dell'asse geometrico, e precisamente sempre nell'ipotesi che le sezioni trasversali si mantengano piane, dobbiamo trovare lo spostamento relativo di una sezione generica del solido rispetto ad una sezione considerata come fissa, p. es. rispetto ad una sezione di estremità.

E poichè in molti casi delle pratiche applicazioni le dimensioni trasversali dei solidi che si devono studiare sono molto piccole in confronto del raggio di curvatura, l'elemento del solido si può con buona approssimazione considerare come avente asse rettilineo. In tali condizioni il solido si dice pure trave ad arco a piccola curvatura.

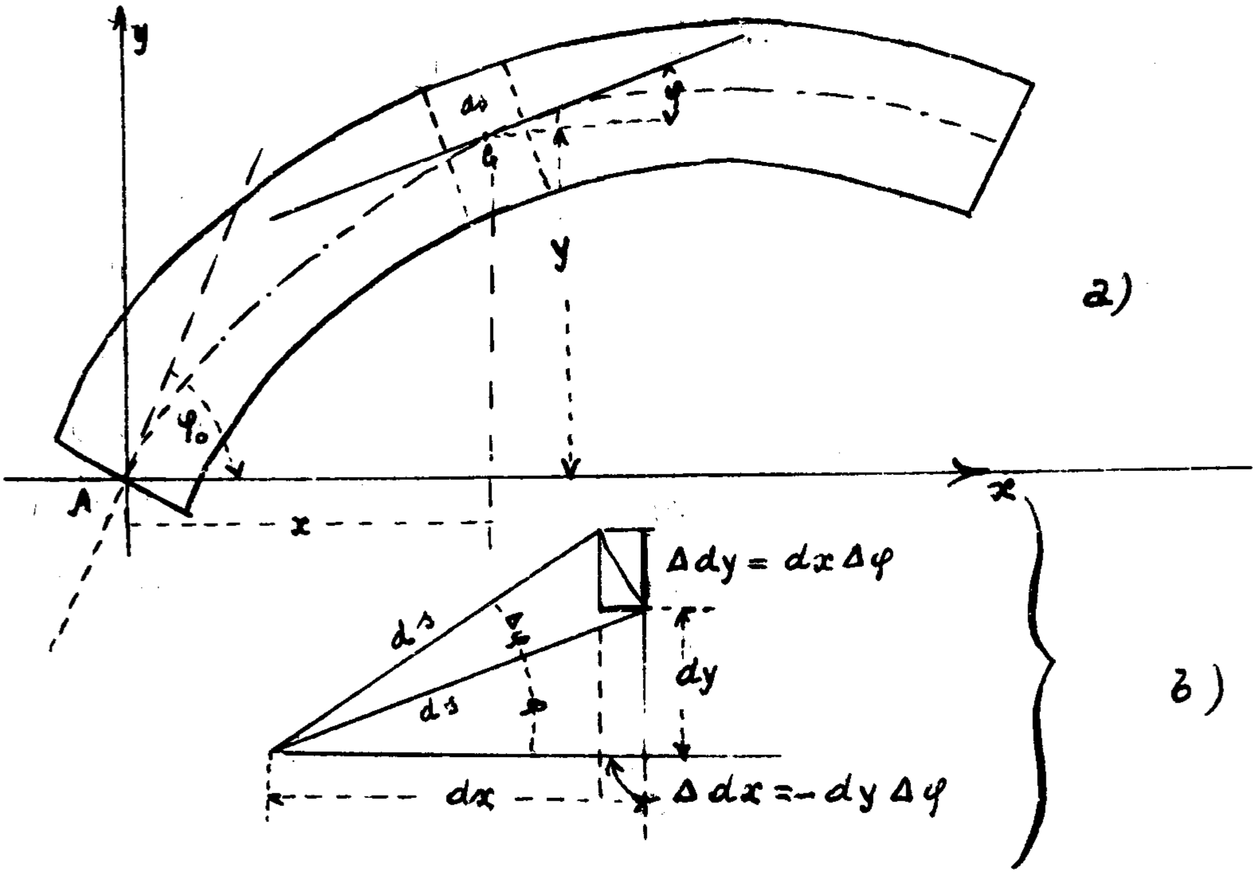
Perciò noi nella presente ricerca, mentre da un lato ci atterremo alla formula rigorosa per i solidi ad asse curvilineo, d'altra parte non mancheremo di esporre le formule semplificate valevoli per la trave a piccola curvatura.

Così, dall'esposizione parallela delle formule esatte e di quelle approssimate potrá risultare per confronto l'entitá degli errori commessi con le seconde, in modo da poter giudicare, caso per caso, se essi possono essere tollerati.

Consideriamo dunque un tratto di solido arcuato di cui una sezione di estremitá, p. e. quella sinistra A sia fissa (p. es. incastrata) del resto libero da vincoli e soggetto a forze generiche, purchè giacenti, al solito, nel piano geometrico curvilineo.

Per fissare le idee, riterremo che questo piano (di sollecitazione) sia verticale.

Riferiamo tale linea curva a due assi ortogonali x ed y aventi l'origine nel punto A, baricentro della sezione d'estremità fissa: l'asse x verrà assunto orizzontale verso destra e l'asse y (verticale) sarà positivo verso l'alto.



Sia φ l'inclinazione della tangente all'asse geometrico nel punto G di coordinate x ed y, baricentro della sezione generica del solido che si considera, e sia φ_0 il valore di φ nell'estremità sinistra dell'arco, supposta fissa.

Secondo la forma che più comunemente presentano gli archi usati nelle applicazioni supporremo che l'asse geometrico rivolga la concavità verso il basso, e perciò al crescere della x l'angolo φ diminuisce, sicchè risulta $\frac{d\varphi}{dx}<0$.
Indichiamo al solito con N ed M lo sforzo normale flettente, conservando per i segni di questi le convenzioni già fatte (ossia N positivo se di tensione ed M positivo se ha verso tale da fare aumentare, in valore assoluto, la curvatura dell'arco, escludendo beninteso che questo, in qualche sua parte, possa presentare concavità verso l'alto). Inoltre per maggiore generalità, terremo conto di un'eventuale variazione di temperatura di t gradi centigradi (positiva se in aumento), notando che una tale variazione può avere nella pratica una grande importanza, non tanto per le sole deformazioni da essa prodotte quanto per gli sforzi che essa può provocare nei solidi iperstatici in conseguenza del fatto che i vincoli ostacolano, riducono, ed anche del tutto impediscono le deformazioni stesse: tali sforzi possono in taluni casi essere rilevantissimi.

questa variazione di temperatura si supporrà uniforme su tutto il solido considerato; perciò, avendo inoltre supposto il corpo omogeneo per effetto della variazione di temperatura si dilata uniformemente assumendo una forma simile e similmente posta (omotetica) alla primitiva;
Quindi tutte le dimensioni lineari del solido, dopo la variazione di temperatura, saranno divenute eguali alle primitive moltiplicate per il binomio di dilatazione $(1+\alpha t)$, ove α è il coefficiente di dilatazione termica lineare, ben noto dalla fisica, e su tutti i manuali si trovano di esso i valori per i vari materiali.

Ne consegue che la variazione uniforme di temperatura non provoca rotazioni relative delle varie sezioni trasversali del solido, o delle rispettive tangenti all'asse geometrico.

Tale deformazione termica, colle condizioni di vincolo supposte, non provoca sforzi di sorta nel solido che consideriamo: anzi è facile riconoscere che lo stesso accade se, più in generale, i vincoli esterni sono nel numero strettamente necessario e sufficiente ad assicurare l'equilibrio, ossia se le loro reazioni sono staticamente determinate.

Se poi il solido elastico dovrà supporsi sottoposto a nuovi vincoli, i quali siano sovrabbondanti, la dilatazione termica, contrastata da tali vincoli, provocherà sforzi; e per determinare questi, insieme a quelli provocati dalle forze esterne, noi non avremo che a sovrapporre la dilatazione termica alla deformazione elastica prodotta dalle forze esterne stesse, e quindi passare dalle deformazioni agli sforzi nel modo che vedremo tra breve.

Trascureremo le dilatazioni termiche delle dimensioni trasversali del solido, come già si fece per le analoghe deformazioni elastiche, e quindi considereremo solo le dilatazioni termiche delle dimensioni dell'asse geometrico del solido studiato e delle fibre ad esso parallele.

Inoltre da quanto ora si è esposto risulta che noi potremo far l'analisi delle deformazioni elastiche dovute alle sole forze esterne, a temperatura costante, salvo poi a sovrapporre alle deformazioni complessive dell'arco o delle sue parti la dilatazione ternica or ora descritta.

Per procedere in questo studio occorre tener presente che colle ipotesi fatte sulla scelta dei versi positivi, e sul senso della concavità dell'arco, bisogna ritenere:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\varphi}{ds}$$

intendendo per $\frac{1}{r}$ il valore assoluto (o modulo) della curvatura.

Ciò posto, richiamando le (205) (218) (234) e (235) per il solo effetto delle forze applicate, sull'elemento generico del solido considerato, si ha:

a) nel caso della grande curvatura

$$\sigma_t = \frac{1}{A}\left[N + \frac{M}{r}\left(1 + \frac{1}{K}\cdot\frac{v}{r+v}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{t_0} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{1}{EA}\left(N + \frac{M}{r}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\varepsilon_{t_0}}{r} = \frac{M}{EAKr^2}$$

e quindi per la (243)

$$-\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M(1+K)}{EAKr^2} + \frac{N}{EAr} \qquad (245)$$

b) nel caso della piccola curvatura ($r = \infty$)

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{Mv}{I} \qquad (242)$$

$$\varepsilon_{t_0} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EA} \qquad (243)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} \qquad (244)$$

Rammentiamo qui che la variazione Δ, dovuta alle forze applicate, finita ma piccolissima, si può considerare e trattare alla stregua di un differenziale, e perciò dovremo ritenere:

$$\Delta ds = d\Delta s$$

$$\Delta d\varphi = d\Delta\varphi$$

ecc.....

Cerchiamo ora la variazione di lunghezza dell'asse generico dell'arco, e dalla (243) ricaviamo, (ritenendo E costante):

caso a)

$$\Delta s = \int_0^s \varepsilon_{to} ds = \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{A} ds + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M}{Ar} ds$$

caso b)

$$\Delta s = \int_0^s \varepsilon_{ot} ds = \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{A} ds \qquad (246)$$

intendendo gli integrali estesi all'arco s di asse geometrico compreso tra l'estremo iniziale ed il centro della sezione generica dell'arco.

Ora possiamo pure valutare l'effetto della variazione uniforme di temperatura di t gradi centigradi, la quale produce, per quanto si disse sopra, una dilatazione della lunghezza s data da αts; perciò se indichiamo con $\Delta's$ la variazione di lunghezza dell'arco complessiva delle forze applicate, ed insieme alla dilatazione termica avremo:

$$\Delta' s = \Delta s + \alpha t s \qquad (247)$$

e quindi per la (246)

caso a)

$$\Delta' s = \alpha t s + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{A} ds + + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M}{Ar} ds$$

caso b)

$$\Delta' s = \alpha t s + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N}{A} ds .$$

$$(248)$$

Può essere opportuno notare che a tutto rigore si dovrebbe scrivere:

$$s + \Delta' s = (s + \Delta s)(1 + \alpha t)$$

da cui si ricaverebbe:

$$\Delta' s = \Delta s + \alpha t s + \alpha t \Delta s$$

ma poichè le due quantità αt e Δs sono tutte e due piccolissime ed assimilabili ad infinitesi, così si deve trascurare il loro prodotto, e perciò si ritrova la (247) che viene così pienamente e rigorosamente giustificata.

Passiamo poi a calcolare la rotazione $\Delta\varphi$ della sezione generica (od anche della tangente o della normale all'asse geometrico nel centro della sezione stessa) ed indichiamo con $\Delta\varphi_0$ l'eventuale rotazione della sezione d'estremità A, della quale supponiamo però ancora fisso il centro, origine dei nostri assi di riferimento x ed y, notiamo che questo $\Delta\varphi_0$ potrà essere un cedimento dato "a priori", ovvero funzione della reazione di vincolo tuttora incognita. noi per ora lo supporremo noto, salvo a ritornare più tardi eventualmente sul modo di calcolarlo.

Ciò posto, abbiamo evidentemente:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\,\Delta\varphi =$$

$$= \Delta\varphi_0 + \int_0^s \frac{d\Delta\varphi}{ds}\,ds$$

ed utilizzando le (244) e (245) si ottiene:

caso a)

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M(1+K)\,ds}{A K r^2} - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N\,ds}{A r}$$

caso b)

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M\,ds}{I} \qquad (249)$$

e notiamo che, per l'osservazione già fatta, in queste formule non ha alcuna influenza la variazione uniforme di temperatura.

Consideriamo ora un elemento ds dell'asse geometrico dell'arco (v. fig. 345) le cui proiezioni sulle direzioni degli assi coordinati siano rispettivamente dx e dy.

È ovvio che la lunghezza ds subisce la dilatazione lineare $\varepsilon_0 ds$ le sue proiezioni dx e dy si dilatano in egual misura unitaria e perciò subiscono dilatazioni $\varepsilon_0 dx$ ed $\varepsilon_0 dy$ rispettivamente.

Inoltre se l'inclinazione φ dell'elemento ds subisce un incremento positivo $\Delta\varphi$, con semplicissime considerazioni cinematiche, secondo anche ciò che risulta dalla fig. in b) si riconosce facilmente che le proiezioni dx e dy subiscono rispettivamente le variazioni $dy\,d\varphi$ e $dx\,d\varphi$. Trattandosi di variazioni assimilabili ad infinitesimi noi possiamo sommare per ciascuna proiezione quella dovuta alla dilatazione lineare $\varepsilon_0 ds$ con quella dovuta alla rotazione $\Delta\varphi$ (trascurando infinitesimi di ordine superiore) perciò otteniamo complessivamente, per effetto delle forze applicate, (escluso l'effetto della variazione uniforme della temperatura):

$$\Delta dx = d\Delta x = \varepsilon_{t_0} dx - dy\,\Delta\varphi$$

$$\Delta dy = d\Delta y = \varepsilon_{t_0} dy + dx\,\Delta\varphi$$

Integrando tra l'estremo A e la sezione generica si ottiene:

$$\Delta x = \int \varepsilon_{t_0}\, dx - \int dy\, \Delta\varphi$$

$$\Delta y = \int \varepsilon_{t_0}\, dy + \int dx\, \Delta\varphi$$

Si noti che in queste espressioni il $\Delta\varphi$ è una funzione della s, e quindi della y e della x rispettivamente, essendo nota la forma dell'arco: quindi l' $\int dy\,\Delta\varphi$ si deve eseguire rispetto ad y e quello $\int dx\,\Delta\varphi$ va eseguito rispetto ad x. Questi due integrali si possono calcolare "<u>per parti</u>" al modo ben noto, assumendo come <u>fattore da integrarsi</u> il dy o dx rispettivamente e si ottiene:

$$\Delta x = \int \varepsilon_{t_0}\, dx - y\,\Delta\varphi + \int y\, d\,\Delta\varphi$$

$$\Delta y = \int \varepsilon_{t_0}\, dy + x\,\Delta\varphi - \int x\, d\,\Delta\varphi$$

ed ora applicando le (243) (244) (245) e per E costante si ottiene:

per il caso a) (grande curvatura)

$$\Delta x = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{N}{A}\, dx + \frac{1}{E}\int_0^x \frac{M}{Ar}\, dx - y\,\Delta\varphi - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M(1+K)\,y\,ds}{AKr^2} - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N y\, ds}{Ar}$$

$$\Delta y = \frac{1}{E}\int_0^y \frac{N}{A}\,dy + \frac{1}{E}\int_0^y \frac{M}{Ar}\,dy + x\,\Delta\varphi + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M(1+K)\,x\,ds}{A K r^2} + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{N x\,ds}{Ar} \qquad (250\text{-}a)$$

e per il caso b) (piccola curvatura)

$$\Delta x = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{N}{A}\,dx - y\,\Delta\varphi - \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M y\,ds}{I}$$

$$\Delta y = \frac{1}{E}\int_0^y \frac{N}{A}\,dy + x\,\Delta\varphi + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M x\,ds}{I} \qquad (250\text{-}b)$$

e, beninteso, in queste relazioni il $\Delta\varphi$ ha i valori dati dalla (249) per i casi a) e b) rispettivamente.

Ora per tener conto anche delle dilatazioni termiche basterà sovrapporre queste alle deformazioni elastiche dovute alle forze applicate, e perciò, se indichiamo con $\Delta' x$ e $\Delta' y$ le variazioni complessive delle coordinate x ed y del centro di una sezione generica, avremo analogamente alla (247)

$$\Delta' x = \Delta x + \alpha t x$$

$$\Delta' y = \Delta y + \alpha t y \qquad (251)$$

ove le Δx e Δy sono quelle date dalle (250-a) o (250-b).