

- Capitolo XII -

Solidi a semplice curvatura.

Dopo aver studiato, nei Capitoli precedenti, i solidi prismatici ad asse geometrico rettilineo, passiamo ora a studiare i solidi elastici con asse geometrico a semplice curvatura detti: solidi a semplice curvatura.

Tali solidi si possono intendere generati dal movimento di un'area piana Ω , la quale mantenendo inalterata, o variando di pochissimo le dimensioni e la forma, si muova in modo che il suo baricentro descriva una curva piana, ed il piano della data area Ω si mantenga in ogni sua posizione normale alla curva α descritta dal suo baricentro. Tale curva si può considerare come l'asse geometrico del solido e la data area si potrà, in ogni sua posizione considerare come la sezione trasversale del solido stesso, inoltre supponiamo che il piano π della curva α contenga uno degli assi principali di inerzia per ognuna delle posizioni dell'area Ω .

Immaginiamo ancora che nel piano π dell'as-

se geometrico a siano contenute tutte le forze esterne sollecitanti il solido così che il piano sarà il piano di sollecitazione ed in esso, per ragioni di simmetria, sarà contenuta la deformata dell'asse geometrico o linea elastica che sarà quindi una curva piana.

I solidi a semplice curvatura si distinguono in solidi a grande curvatura in cui il raggio di curvatura r non è molto grande rispetto alle dimensioni della sezione trasversale, e solidi a piccola curvatura.

* * *

Solidi a grande curvatura.

Distribuzione delle tensioni interne nella sezione trasversale.

Le sollecitazioni esterne, in seguito alle fatte ipotesi, in una sezione trasversale, si riducono ad uno sforzo normale N baricentrico (che assumeremo positivo se di trazione) ad uno sforzo T , ad un momento M (che assumeremo positivo se tende ad aumentare la curvatura del solido).

Preseinderemo, nel nostro studio, dalle sollecitazioni tangenziali; per le quali nei casi concreti, si

impiegano le stesse formole valide per i solidi ad asse rettilineo.

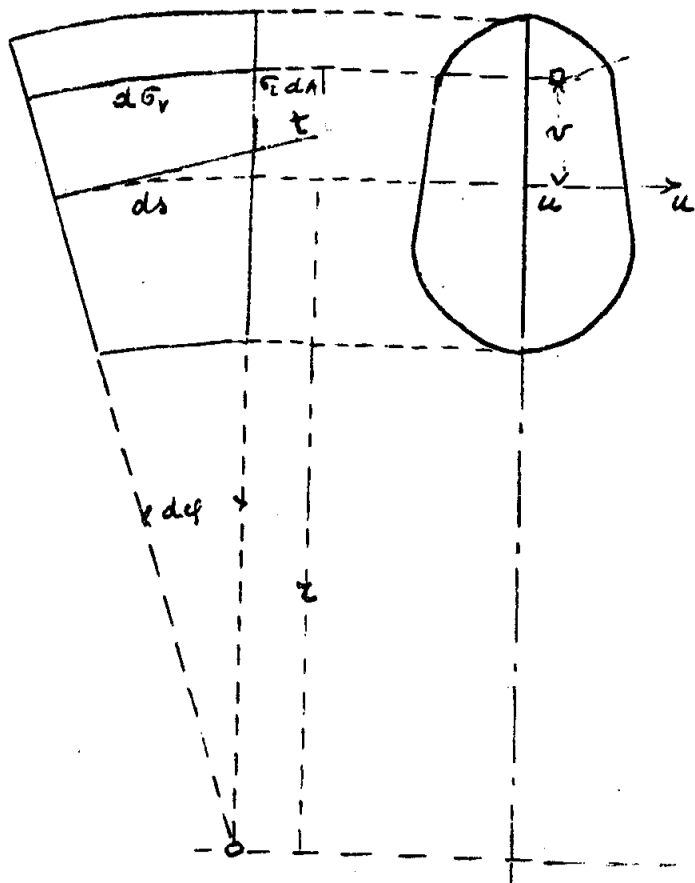
Passiamo quindi a studiare la distribuzione delle tensioni normali sulla sezione trasversale.

Consideriamo un elemento di solido compreso tra due sezioni trasversali infinitamente vicine, comprendenti tra loro un angolo infinitesimo $d\varphi$ (V. figura); indicheremo con ds l'archetto elementare di asse geometrico compreso tra le due sezioni, e con r il raggio di curvatura dell'archetto ds , ricordiamo la ben nota relazione

$$r d\varphi = ds$$

Indichiamo con t la tangente all'asse geometrico nel baricentro della sezione considerata.

Riferiremo poi la sezione trasversale ai suoi assi principali d'inertia, che diremo u e v , intendendo che l'asse v sia quello che giace nel piano di sollecitazione, e ante-



mente l'asse geometrico curvilineo, secondo le ipotesi fatte più sopra.

Avevamo poi supposto che la sezione trasversale, nel variare di posizione, generando il solido, mantenga inalterate o vari di pochissimo le sue dimensioni, potremo ritenere uguali le due sezioni infinitamente vicine ora considerate.

Picchè un punto generico della sezione, individuato dalle coordinate u e v , nel passare dall'una all'altra delle sezioni di estremità dell'elemento di solido considerato, genera un arco che diremo ds_r , il quale evidentemente ha per raggio $r+v$, e quindi sta la relazione

$$ds_r = (r+v) d\varphi = ds + v d\varphi.$$

Indicheremo con Δ le variazioni di lunghezza o di angoli, dovuti all'azione delle forze esterne applicate, inoltre per semplicità e con approssimazione perfettamente ammissibile nella pratica riterremo che la v non vari per l'azione delle forze stesse.

Le deformazioni preponderanti sono, in questo caso le dilatazioni o contrazioni delle fibre longitudinali (come la ds_r) aventi l'aumento dell'asse geometrico; tali deformazioni sono però, come è noto, accompagnate da contrazioni e rispetti-

namente dilatazioni trasversali che stanno con le precedenti nel noto rapporto di Poisson, cioè sono, per un solido isotropo, circa $\frac{1}{4}$ delle precedenti, perciò, data la loro relativa piccolezza, e dato pure che esse influiscono indirettamente sui valori delle deformazioni laterali si possono trascurare, ritenendo che le sezioni trasversali mantengano inalterate le loro dimensioni.

D'altra parte è facile convincersi che se si volesse tener conto di dette deformazioni, si incontrerebbero complicazioni di calcolo non indifferenti.

Ritenendo quindi costante ν durante la deformazione del solido, e considerando come dei differenziali le variazioni finite, ma piccolissime, Δ , avremo:

$$\Delta ds_r = \Delta ds + \nu \Delta d\varphi \quad (204)$$

Se ora indichiamo con ϵ_t la dilatazione unitaria (cioè riferita all'unità di lunghezza) dell'archetto ds_r (dilatazione nella direzione t , tangente all'asse geometrico), avremo:

$$\epsilon_t = \frac{\Delta ds_r}{ds_r} = \frac{\Delta ds + \nu \Delta d\varphi}{ds + \nu d\varphi} = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} + \frac{\nu}{\nu} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{\frac{\nu + \nu}{\nu}}$$

Possiamo poi porre:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{t_0} &= \frac{\Delta d s}{d s} = \text{dilatazione unitaria sull'asse geometrico} \\ \omega &= \frac{\Delta d \varphi}{d \varphi} = \text{rotazione relativa unitaria} \end{aligned} \right\} (205)$$

Allora si ha:

$$\varepsilon_{t_r} = \left(\varepsilon_{t_0} + \omega \frac{v}{r} \right) \cdot \frac{r}{r+v} = \varepsilon_{t_0} \frac{r}{r+v} + \omega \frac{r}{r+v},$$

ed infine con ovvie trasformazioni

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t_0} + (\omega - \varepsilon_{t_0}) \frac{v}{r+v} \quad (206)$$

Possiamo ora passare dalle deformazioni agli sforzi: moltiplicando la ε_t per il modulo di elasticità E , si trova la tensione elementare unitaria σ_t sugli elementi di area della sezione trasversale a distanza v dell'asse u :

$$\sigma_t = E \varepsilon_t = E \left[\varepsilon_{t_0} + (\omega - \varepsilon_{t_0}) \frac{v}{r+v} \right] \quad (207)$$

Ora siamo in grado di mettere in relazione le tensioni interne colle sollecitazioni esterne date.

Così, esprimendo per la sezione considerata l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse geometrico, tra le forze interne e quelle esterne, ed indicando con dA l'elemento dell'area A della sezione trasversale, troviamo:

$$N = \int_A \sigma_z dA = E \left[\varepsilon_{t_0} A + (\omega - \varepsilon_{t_0}) \int_A \frac{v}{r+v} dA \right] \quad (208)$$

Analogamente, esprimendo per la data sezione l'equazione di equilibrio alla rotazione ed equazione dei momenti intorno all'asse u , e ricordando che essendo u asse baricentrico si ha:

$$\int_A v dA = 0$$

troviamo:

$$M = \int_A \sigma_z v dA = E(\omega - \varepsilon_{t_0}) \int_A \frac{v^2}{r+v} dA \quad (209)$$

Ora per comodità possiamo porre:

$$\int_A \frac{v}{r+v} dA = -KA \quad (210)$$

definendo con questa relazione il coefficiente di forma K della sezione trasversale, il quale è un numero astratto, come risulta dalla (210) e si noti che nel secondo membro di questa si è posto il segno - perché quasi sempre l'integrale a primo membro è negativo, ed allora il K definito dalla (210) risulta positivo.

Calcoliamo ora l'integrale che compare a secondo membro della (209), trasformandolo per identità e tenendo presente la (210).

Si ha così:

$$\int_A \frac{v^2}{z+v} dA = \int_A \left(v - z \frac{v}{z+v} \right) dA =$$

$$= -z \int_A \frac{v}{z+v} dA = K A z \quad (211)$$

Se poi i valori dati dalle (210) (211) si sostituiscono nelle (208) e (209), queste diventano rispettivamente:

$$N = EA \left[\varepsilon_{t_0} - (\omega - \varepsilon_{t_0}) K \right] \quad (212)$$

$$M = EAKz (\omega - \varepsilon_{t_0}) \quad (213)$$

Da queste, risolvendo si trova:

$$\omega - \varepsilon_{t_0} = \frac{M}{EAKz} \quad (214)$$

$$\varepsilon_{t_0} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EA} + (\omega - \varepsilon_{t_0}) K = \frac{1}{EA} \left(N + \frac{M}{z} \right) \quad (215)$$

$$\omega = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \varepsilon_{t_0} + \frac{M}{EAKz} = \frac{1}{EA} \left(N + \frac{M}{z} + \frac{M}{Kz} \right) \quad (216)$$

Sostituendo questi valori nella (207) avremo:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M}{Az} + \frac{Mv}{KAz(z+v)} \quad (217)$$

la quale si può scrivere pure:

$$\sigma_t = \frac{1}{A} \left\{ N + \frac{M}{z} \left[1 + \frac{1}{K} \frac{v}{z+v} \right] \right\} \quad (218)$$

ovvero anche:

$$\sigma_z = \frac{1}{A} \left\{ N + \frac{M}{z} \left[1 + \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \cdot \frac{z}{z+v} \right] \right\} \quad (219)$$

È facile verificare che la (217) per $z = \infty$ ci dà la ben nota espressione della tensione unitaria per i solidi ad asse rettilineo e soggetti a sforzo normale e flessione (vedi Cap. VI §. 3 formula (132) infatti per $z = \infty$ nel secondo membro della (217) il secondo termine α svanisce; inoltre si osservi che per la (211) abbiamo, con trasformazioni identiche:

$$K A z (z+v) = \left(1 + \frac{v}{z}\right) \int_A \frac{v^2}{1 + \frac{v^2}{z}} dA :$$

Ora per $z = \infty$ questa espressione, (che è il denominatore del terzo termine a secondo membro della (217) diviene $= \int v^2 dA = I =$ momento d'inertia della sezione trasversale rispetto all'asse u ; resta così verificato ciò che abbiamo affermato più sopra.

Dalla (217) (218) e (219) si rileva che per il solido ad asse curvo la variazione della σ_z in funzione della v non è più lineare; possiamo anzi molto facilmente precisare la natura della curva che ci dà il diagramma della σ_z , riferito, nel piano di sollecitazione, alla traccia della sezione trasversale quale asse delle v ed alla tangente all'asse geometrico quale asse delle σ_z , convenendo che le σ_z siano positive se di trazione e le v

positive dalla parte opposta a quella del centro di curvatura,

Costatiamo infatti che per

$$v = -r$$

la (13) dà

$$\sigma_t = -\infty$$

Inoltre per $v = \infty$ si ha:

$$\sigma_{t=\infty} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A_2} + \frac{M}{KA_2} = \frac{1}{A} \left(N + \frac{M}{r} \frac{K+r}{K} \right) \quad (220)$$

sicché la (217) si può scrivere:

$$\sigma_t = \sigma_{t=\infty} - \frac{M}{KA(r+v)} \quad (221)$$

ed anche

$$(\sigma_{t=\infty} - \sigma_t)(r+v) = \frac{M}{KA} \quad (222)$$

Ora i binomi $\sigma_{t=\infty} - \sigma_t$ ed $r+v$ si possono considerare come le coordinate di un punto generico del diagramma delle σ_t quando si assumano come assi coordinati le rette di equazioni $\sigma_t = \sigma_{t=\infty}$ e $v = -r$ delle quali la prima è, parallela all'asse delle v , distando da questo di $\sigma_{t=\infty}$, e la seconda è parallela alla tangente all'asse geometrico del solido e passa per il centro di curvatura.

Ciò posto l'equazione (222) dimostra che il diagramma delle tensioni σ_t è un arco di iperbole

è indipendente, quindi dal valore del momento flettente M .

Detta iperbole equilatera è individuata quando sia noto σ_{t*} e $\sigma_{t\infty}$, e si può poi costruire geometricamente.

Ciò dimostra che, restando costante N , al variare di M , le diverse iperboli equilatera, diagrammi delle tensioni σ_t , passano tutte per il punto F individuato dalle coordinate:

$$v = v_*$$

$$\sigma_t = \sigma_{t*}$$

(rispetto ai primitivi assi $v=0$ e $\sigma_t=0$)

Per $M > 0$ l'iperbole volge la concavità dalla parte delle σ_t negative, l'opposto accade per $M < 0$; ed inoltre per $M = 0$ il diagramma delle tensioni è la retta parallela al profilo della sezione (asse delle v) a distanza

$$\sigma_{t*} = \frac{N}{A}$$

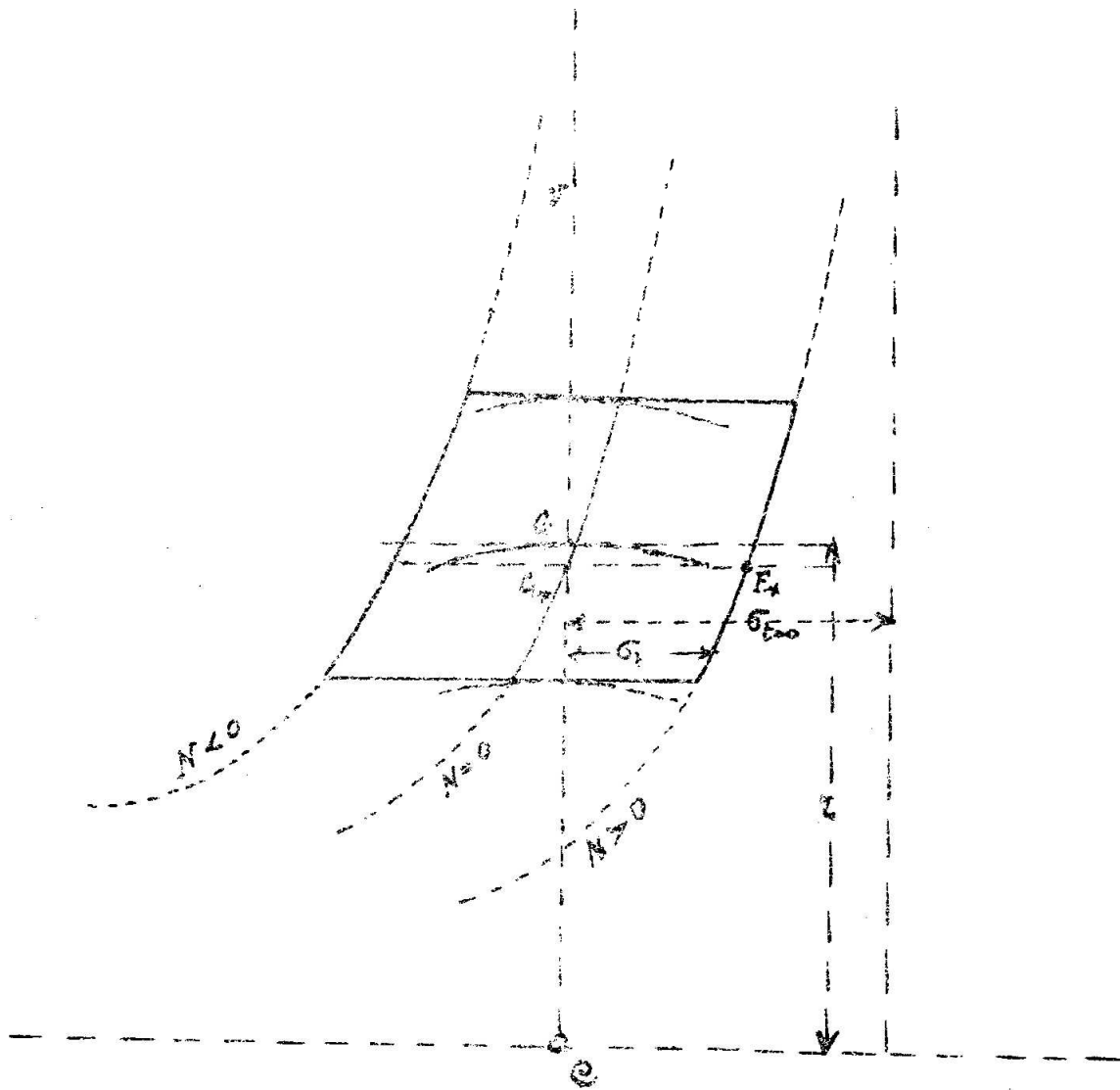
sicché in tal caso la tensione si distribuisce uniformemente nella sezione (V. figura).

Se ora si immagina di tener costante M , e di far variare N , dalla (222) risulta che la "forma" delle varie iperboli non muta, ma si passa

dall'una all'altra di esse con una traslazione
parallela all'asse delle σ_t , poichè al variare di
 N , varia proporzionalmente la σ_{t*} restando
però fissa la $(\sigma_{t\infty} - \sigma_t)$, perciò F_* si sposta de-
scrivendo una retta parallela all'asse delle σ_t .

Notiamo che dal confronto della (220) colla (216)
risulta

$$\sigma_{t\infty} = Ew$$



$N = \text{costante} > 0$

ciò si spiega pure osservando che dalla (206) per $v = \infty$, si ricava

$$e_{p\infty} = \omega$$

Asse neutro, sua relazione col centro di spinta.

Passiamo ora a ricercare, per valori generici di N ed M , se ed in quali punti della sezione la tensione può essere nulla.

Dalla (217) risulta che $\sigma_z = 0$ quando v assume il valore v_0 dato dalla relazione:

$$v_0 = \frac{Nz + M}{N + \frac{M}{l} \cdot \frac{k+1}{k}} \quad (224)$$

I punti, in cui $\sigma_z = 0$, sono quindi sulla retta parallela all'asse u , a distanza v_0 ; tale retta si può chiamare l'asse neutro e si indicherà con n .

Si verifica subito dalla (224) e (223) che per $N=0$ si ha:

$$v_0 = v_*$$

sicché per la sola flessione l'asse neutro non è baricentrico, come è invece per i solidi ad asse rettilineo.

Ricordiamo qui che lo sforzo normale N baricentrico ed il momento flettente M equival-

gono allo sforzo normale N applicato in un punto X situato sempre sull'asse di sollecitazione v , e ad una distanza δ dal baricentro G della sezione, essendo in grandezza e segno:

$$\delta = \frac{M}{N} \quad (225)$$

Il punto X si chiama pure il centro di spinta, δ si dice anche il braccio ideale della sollecitazione esterna.

Ciò posto, la (224) si può pure esprimere come segue:

$$v_0 = \frac{z + \delta}{1 + \frac{\delta}{z} \frac{k+1}{k}} \quad (226)$$

questa equazione è bilineare in v_0 e δ e si trasforma in se stesso se si scambia δ con v_0 ; ciò dimostra (per quanto è ben noto dalla geometria analitica e proiettiva), che la corrispondenza tra i punti X ed X' è proiettiva (perchè la (227) è bilineare) e reciproca (perchè la (227) è invariante rispetto alla permutazione di δ con v); ossia tale corrispondenza è un' involuzione.

Perciò se il centro di spinta cade in X' l'asse neutro corrispondente n' passa per X .

Dalla (227) si ricava poi:

$$v_0 = v_x \frac{\delta + z}{\delta - v_x}$$

la quale, per $\delta = v_x$ ci dà: $v_0 = \infty$; d'altra parte

dalla stessa risulta pure ovviamente che per $\delta = \infty$ si ha $v_0 = v_*$. Ciò prova che il centro della involuzione è il punto G_* dell'asse delle v individuato da $v = v_*$.

Ciò è confermato dal fatto che la (220), tenendo conto della (223), si può scrivere

$$\sigma_{t\infty} = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{\delta}{v_*} \right)$$

e perciò per $v = v_*$ si ha: $\sigma_{t\infty} = 0$, cioè l'asintoto mobile dell'iperbole equilatera già studiata, viene a coincidere coll'asse v .

Inoltre dalla (227) si deduce facilmente:

$$(v_0 - v_*) (\delta - v_*) = v_* (v_* + z)$$

e per la (223)

$$(v_0 - v_*) (\delta - v_*) = -z^2 \frac{K}{(K+1)^2} = -\rho_*^2 \quad (228)$$

avendo posto

$$\rho_* = z \frac{\sqrt{K}}{K+1} \quad (229)$$

La (228) conferma, - ciò è noto - che le distanze di due punti X ed X' coniugati nell'evoluzione, dal centro G_* dell'evoluzione stessa danno un prodotto costante negativo, il cui valore assoluto si può rappresentare col quadrato di un segmento, che si può chiamare raggio e semiasse del.

l'involutione e fa qui lo stesso ufficio che, nelle sezioni dei solidi ad asse rettilineo, esercita il semiasse o raggio d'inertia (v. statica grafica).

Il segno negativo del prodotto costante è dovuto al fatto che i punti X ed X' si trovano sempre da parti opposte rispetto al punto G_* , centro dell'involutione; perciò questa è ellittica, e non ha quindi elementi uniti.

Ciò era prevedibile "a priori", poiché è chiaro che la tensione σ_z non può essere nulla in corrispondenza del punto di applicazione della forza esterna che la provoca, e perciò il centro X non può mai appartenere al corrispondente asse neutro.

Quando l'asse n corrispondente, secondo la (227), ad un dato centro X , risulta esterno alla sezione trasversale del solido, allora tale asse non ha più significato concreto di asse neutro; ma bisogna ricordare che nell'analisi più sopra fatta della deformazione e della conseguente ripartizione della tensione, noi abbiamo implicitamente ammessa la conservazione delle sezioni piane, e perciò l'asse n anche se esterno alla sezione rappresenta sempre l'asse intorno al quale la sezione considerata ruota per effetto della elasticità di un

tronco infinitesimo del solido e in cui l'altra sezione stessa (e ciò s'intende nello spostamento relativo della sezione considerata rispetto all'altra sezione di estremità del suddetto tronco infinitesimo).

La corrispondenza tra i punti X e X' è perfettamente analoga a quella che si ha per la sezione dei solidi ad asse rettilineo; soltanto nel caso del solido curvo il baricentro viene sostituito col punto G_* ed il semiasse, o raggio di inerzia, col raggio ρ_* . Viceversa è facile verificare che per $r = \infty$ si trova, come caso limite, la stessa corrispondenza che si ha nella sezione di un solido ad asse rettilineo.

Infatti risulta dalla (210) che per $r = \infty$ si ha $K = 0$ ed inoltre dalla (211) si ricava che pure per $r = \infty$ è $K r^2 A = 0$.

Perciò dalla (223) risulta $v_* = 0$ per $r = \infty$ ossia il centro G_* dell'involutione coincide col baricentro G della sezione.

Inoltre dalla stessa (211) risulta:

$$K r^2 = \int_A \frac{v^2}{1 + \frac{v}{r}} dA$$

e per $r = \infty$

$$K r^2 A = \int_A v^2 dA = I$$

Ora dalla (228) si ricava:

$$\rho_* A = \frac{K L^2 A}{(K+1)^2}$$

e per $z = \infty$ il denominatore diventa 1 (essendo $K=0$) ed il numeratore assume il valore I espresso dalla precedente relazione, e quindi si trova:

$$\rho_*^2 = \frac{I}{A}$$

ossia il raggio ρ_* assume il valore noto per le sezioni delle travi ad asse rettilineo.

Calcolo del coefficiente K .

L'espressione (20) del coefficiente K può essere determinata analiticamente sviluppando in serie, con la nota formula del binomio di Newton.

$$K = -\frac{1}{A} \int_A \frac{1}{1 + \frac{v}{z}} v dA = -\frac{1}{Az} \int_A v \left(1 + \frac{v}{z}\right)^{-1} dA =$$

$$= \frac{1}{Az} \int_A \left(1 - \frac{v}{z} + \frac{v^2}{z^2} - \frac{v^3}{z^3} + \frac{v^4}{z^4} - \dots\right) v dA$$

e ricordando che $\int_A v dA = 0$

$$K = \frac{1}{A} \left\{ \frac{1}{z^2} \int_A v^2 dA - \frac{1}{z^3} \int_A v^3 dA + \frac{1}{z^4} \int_A v^4 dA - \dots \right\}$$

Per una sezione rettangolare si trova

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2z}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2z}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2z}\right)^6 + \dots$$

dove h è l'alterna della serie

Per una serie circolare di raggio R

$$K = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{R}{r}\right)^6 + \frac{7}{128} \left(\frac{R}{r}\right)^8 + \dots$$

Il coefficiente k , per una serie a contorno generico, può essere determinato graficamente.

Poiché la funzione da integrarsi non contiene la u , ma soltanto la v come elemento di area dA si può assumere una striscia parallela all'asse u di lunghezza x e di alterna dv , ossia si può porre $dA = x dv$.

Sostituendo nella espressione di K si ottiene:

$$K = -\frac{1}{A} \int \frac{xv}{r+v} dv \quad (230)$$

La funzione da integrarsi $\eta = \frac{xv}{r+v}$ è una lunghezza e può determinarsi come quarta proporzionale dopo le tre lunghezze $r+v$, v , r .

Converrà determinare la η per parecchi valori di v , a successivi intervalli piuttosto piccoli, cioè per parecchie corde della serie quindi, portando ciascun valore di η sulla rispettiva corda a partire da un asse parallelo a v (ed all'asse v stesso), si può costruire il diagramma delle η in funzione di v .

Essendo

$$K = -\frac{1}{A} \int \eta dv$$

basterà misurare, per es: con l'integrazione grafica, l'area del diagramma delle η e l'area della sezione trasversale, per ottenere immediatamente il valore di K .

Secondo la (230) la η ha sempre il segno della v , quindi si annulla con la v sull'asse baricentrico u , è positiva nei punti più lontani dal centro di curvatura che non il baricentro e negativa negli altri punti più vicini al centro di curvatura: il diagramma delle η è perciò intrecciato.

Equazione di stabilità.

Come già si disse noi prescindiamo qui per ora dalle tensioni tangenziali, le quali, nei casi concreti, hanno un'importanza secondaria e perciò dovremo fare calcoli di stabilità per il solido in base alle sole tensioni o pressioni normali σ_t determinate nella formula (217) e (218). Per la stabilità occorre assicurarsi che i valori massimi positivi e negativi della σ_t non superino i rispettivi carichi di sicurezza.

I valori massimi della σ_t si avranno evidentemente ai lembi estremi della sezione, cioè all'intradosso e all'estradosso dell'arco.

Indichiamo con v_2 e v_1 i valori assoluti massi-

mi della v all'estradosso e rispettivamente all'intradosso, e con σ_{t_e} e σ_{t_i} i corrispondenti valori della σ_t , secondo la (218) avremo:

$$\begin{aligned}\sigma_{t_e} &= \frac{1}{A} \left[N + \frac{M}{z} \left(1 + \frac{1}{K} \cdot \frac{v_e}{z + v_e} \right) \right] \\ \sigma_{t_i} &= \frac{1}{A} \left[N + \frac{M}{z} \left(1 - \frac{1}{K} \cdot \frac{v_i}{z - v_i} \right) \right] \quad (231)\end{aligned}$$

È ben noto che queste due tensioni risultano di senso opposto se l'asse neutro taglia la sezione.

In tal caso, e se il materiale è di tal natura che per esso si debbano assumere due diversi carichi di sicurezza, l'uno a tensione e l'altro a compressione, per la stabilità occorre che ciascuna delle σ_e e σ_i risulti in valore assoluto non superiore al corrispondente carico di sicurezza.

Invece, se i due carichi di sicurezza hanno lo stesso valore, ovvero se l'asse neutro non taglia la sezione, allora basta verificare che sia non superiore al rispettivo carico di sicurezza il maggiore dei valori assoluti delle σ_e e σ_i date dalle (231).

Variazione della curvatura dell'asse geometrico
Nelle applicazioni, per completare lo studio

della deformazione interessa spesso tale variazione della curvatura, che vogliamo qui calcolare.

Ricordiamo che si è convenuto di indicare con Δ le variazioni dovute alla deformazione provocata dalle forze esterne, e, per l'estrema piccolezza di tali variazioni, si è riconosciuto lecito trattarle come differenziali.

Perciò differenziando la curvatura

otterremo
$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{ds \Delta d\varphi - d\varphi \Delta ds}{ds^2}$$

e con semplicissime trasformazioni, tenendo presente l'espressione della curvatura sopra riportata, si ottiene:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \quad (232)$$

e ricordando la definizione dei rapporti ω ed ε_{t_0} introdotti con le (205) si ricava:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} (\omega - \varepsilon_{t_0}) \quad (233)$$

e per la (214) si ha infine:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M}{EAKr^2} \quad (234)$$

Ricordiamo che già si vide come dalla (211)