Capitolo XL

Solidi di uniforme resistenza a pressione -

Un solido ad asse rettilineo si dice di uniforme resistenza a pressione (o trazione) quando in tutte le sezioni la tensione unitaria è la stessa ed in particolare è eguale al carico di sicurezza K del materiale.

Consideriamo un solido omogeneo disposto verticalmente, di peso proprio complessivo G, sospeso ad un estremo e stirato all'estremità inferiore da un carico P, ovvero appoggiato all'estremità inferiore e caricato superiormente dal carico P: in entrambi i casi la sollecitazione esterna normale N cresce dall'estremità in cui è applicato il carico, verso l'altra estremità nella quale raggiunge il valore massimo

$$N_l = P + G$$

Indichiamo con x la distanza di una sezione trasversale generica dalla estremità a cui è applicato il carico P: nel passare da tale sezione trasversale a quella individuata dall'ascissa $x+dx$ la sollecitazione N_x sarà cresciuta del peso dello strato elementare di solido di alterza dx, così che, indicando con γ il peso specifico del solido e con A_x l'area della sezione trasversale alla distanza x, il detto aumento di N sarà:

$$\gamma A_x dx$$

Per quanto sopra si è detto, dovendo essere la tensione unitaria costante ed eguale a K, nel passare dalla prima sezione alla seconda, si dovrà avere un incremento dA della sezione trasversale per cui risulti:

$$K dA = \gamma A_x dx$$

da cui:

$$\frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma}{K} dx \quad \text{ed integrando}$$

$\log A_x = \frac{\gamma}{K} x + c$, indicando con A_0 l'area del solido per $x = 0$ si avrà:

$$c = \log A_0 \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\log A_x - \log A_0 = \frac{\gamma}{K} x \qquad \log \frac{A}{A_0} = \frac{\gamma}{K} x$$

e passando ai numeri:

$$A = A_0 e^{\frac{\gamma}{K} x}$$

od anche, essendo $A_0 = \frac{P}{K}$

$$A_x = \frac{P}{K}\, e^{\frac{\gamma}{K}x}$$

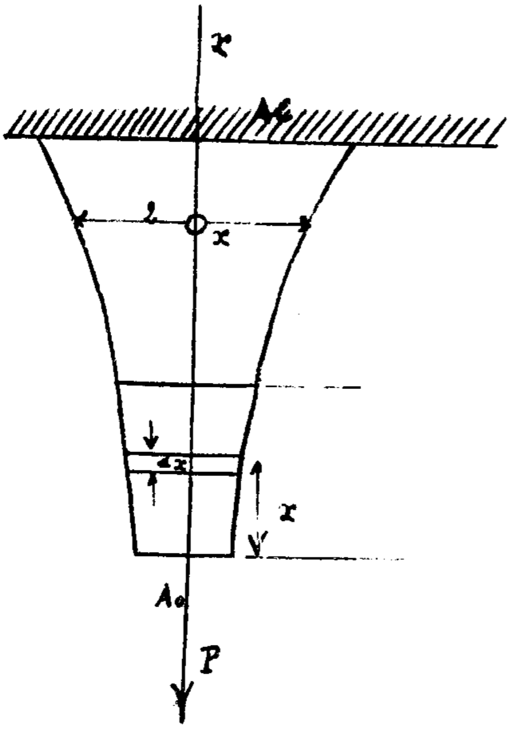
che è una relazione fra A ed x.

Se la sezione è costantemente circolare, il raggio r_x sarà dato da

$$\pi r_x^2 = \frac{P}{K}\, e^{\frac{\gamma}{K}x} \qquad \text{da cui}$$

$$r = e^{\frac{\gamma}{K}\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{P}{\pi K}}$$

che rappresenterà l'ordinata del profilo, simmetrico rispetto all'asse x, nei piani passanti per x.



Se la sezione è rettangolare di lati a_x e $2b_x$ e supponiamo una dimensione, per es: a_x costante ed eguale ad a, si ha b_x, cioè l'ordinata del profilo simmetrico rispetto ad x, nel piano perpendicolare ad a, dalla

$$b_x = \frac{P}{2aK}\, e^{\frac{\gamma}{K}x}$$

La precedente equazione mostra che l'ascissa e l'ordinata di un punto intermedio compreso fra due altri già determinati sono rispettivamente la media aritmetica fra le ascisse dei due punti noti e la media geometrica fra le ordinate dei due punti stessi: quando si sono determinati b_0 e b_l, cioè le ordinate estreme, è dunque facile ricavare ogni altra ordinata intermedia.

*

* *

Solidi di eguale resistenza a flessione.

La condizione di eguale resistenza, nel caso della flessione, non si può saddisfare in modo completo, come è invece possibile nel caso precedente, poichè la tensione interna dovuta alla flessione non si ripartisce uniformemente sui vari elementi di una sezione trasversale: perciò bisogna limitarsi a realizzare la condizione di eguale resistenza $\sigma = K$ solo per gli elementi più cimentati di ogni singola sezione; negli esempi seguenti, per semplicità, riterremo che il materiale ammetta un unico carico di sicurezza a trazione e a compressione e trascureremo le sollecitazioni dovute al taglio.

La condizione di ugual resistenza si stabilisce quindi imponendo che in ogni sezione trasversale del solido inflesso, sia verificata l'equazione di stabilità a flessione

$$K = \frac{M}{W}$$

essendo K, ben inteso, costante.

Per ogni sezione del solido, dati i carichi esterni, sarà determinato il momento flettente M, e dividendo questo per il carico di sicurezza K si troverà il modulo di resistenza W, dal quale si dedurranno le dimensioni della sezione.

Osserviamo però che se in qualche sezione si ha $M=0$, dal calcolo ora accennato risulterebbe anche $W=0$ e le dimensioni della sezione in conseguenza dovrebbero essere infinitamente piccole; in tal modo la sezione sarebbe inadatta a resistere al taglio che nella sezione stessa può essere anche molto diverso da zero; perciò in tal caso la sezione stessa va calcolata coll'equazione di stabilità al taglio; lo stesso converrà fare con le sezioni vicine, e perciò la forma del solido, ricavata in base alla sola flessione, deve essere, in prossimità delle sezioni in cui è $M=0$ convenientemente modificata in base al calcolo relativo al taglio.

Per quanto riguarda le deformazioni, si noti che nelle fibre più cimentate la dilatazione unitaria E' sarà costante e data da: $E' = \frac{K}{E}$ (secondo la legge di Hooke); e se con y' indichiamo al solito la distanza dall'asse neutro della fibra più cimentata, il raggio di curvatura della linea elastica sarà:

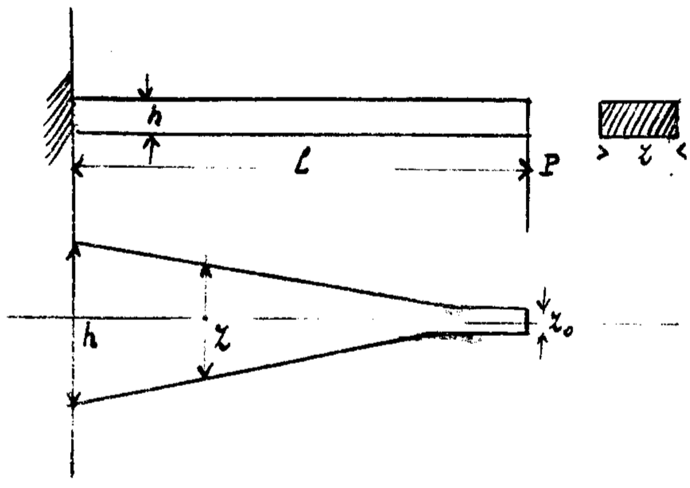
$$r = \frac{y'}{\varepsilon'} = \frac{E\,y'}{K}$$

proporzionale cioè alla y', e quindi in generale anche all'altezza h della sezione, altezza che nei casi più comuni è con y' in un rapporto costante.

Passiamo ora a trattare qualche caso particolare notevole a titolo di esempio:

Consideriamo una trave incastrata ad un estremo e sollecitata all'altro estremo da un carico concentrato; la sezione della trave sia rettangolare ad altezza costante.

Indichiamo con z la larghezza variabile della sezione rettangolare e con x la sua distanza dall'estremo libero della trave;



Avremo quindi l'equazione di stabilità:

$$K = \frac{M}{W} = \frac{6Px}{z\,h^2}$$

dalla quale si ricava

$$z = \frac{6P}{K\,h^2}\,x \qquad (201)$$

Questa è l'equazione del profilo della pianta della trave, profilo che risulta quindi rettilineo, come è disegnato in figura. Per $x = l$ si ottiene la larghezza b all'incastro:

$$b = \frac{6Pl}{Kh^2}$$

È ovvio che conviene fare detta pianta simmetrica rispetto all'asse longitudinale.

La larghezza z_0 della sezione all'estremo libero deve essere calcolata con l'equazione di stabilità al taglio:

$$\frac{4}{5} K = \frac{3}{2} \; \frac{P}{z_0 h}$$

da cui si ottiene:

$$z_0 = \frac{15P}{8hk}$$

La larghezza della trave dovrà essere costantemente uguale a z_0 (essendo costante il taglio P) per x compreso tra 0 ed il valore x_0, che si ricava ponendo nella relazione (201) $z = z_0$.

Risolvendo si ottiene:

$$x_0 = \frac{5}{16} h$$

Si hanno così due profili, l'uno ricavato in base alla flessione secondo la (201) e l'altro con larghezza costante z_0; essi si tagliano nella sezione di ascissa

x_0 e devono poi in tale sezione venire raccordati empiricamente.

Per ciò che si disse più sopra, riguardo alle deformazioni, si ha il raggio di curvatura della linea elastica

$$r = \frac{Eh}{EK}$$

il quale è costante; perciò la linea elastica è un arco di cerchio, e la freccia d'incurvamento f, si ricava con la relazione ben nota:

$$f(2r - f) = l^2$$

ed anche, con buona approssimazione, trascurando il termine molto piccolo f^2, si ottiene:

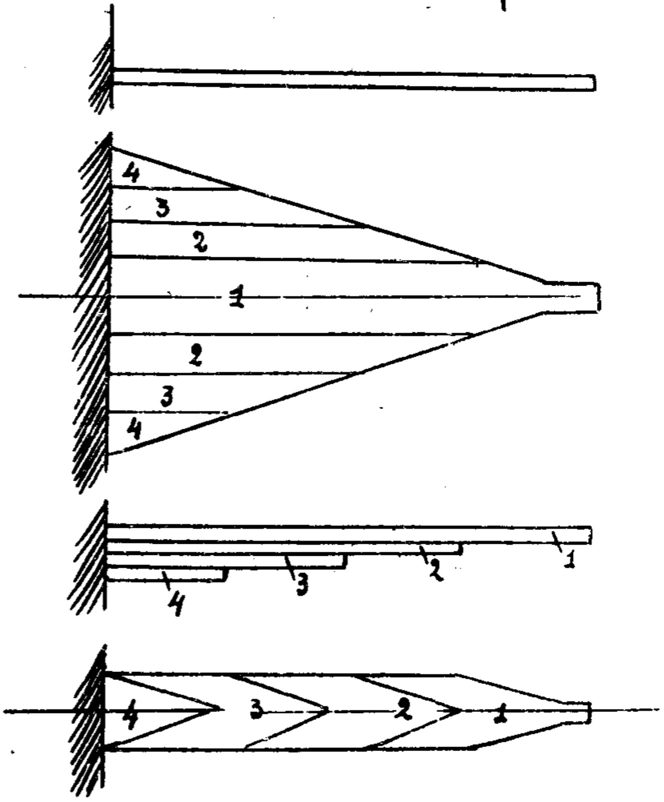
$$f = \frac{l^2}{2r} = \frac{Kl^2}{Eh} = \frac{6Pl^2}{Ebh} = \frac{3}{2}\,\frac{Pl^3}{3EI}$$

ove con I s'intende il momento d'inerzia della sezione d'incastro.

Ricordando la formola (173) si riconosce come in questo caso la freccia è i $\frac{3}{2}$ di quella che si ha, a parità di altre condizioni, in una trave a sezione rettangolare costante.

Questo caso si applica alle <u>molle</u>, e particolarmente alle molle così dette a <u>balestra</u>, usate in varie macchine, e sopratutto come sospensione elastica dei veicoli.

La molla a balestra si ricava da una molla di ugual resistenza a pianta triangolare, (come la trave sopra studiata) immaginando di scomporre questa in un certo N° di strisce longitudinali di eguale larghezza, due a due simmetriche rispetto all'asse, quindi accostando e riunendo insieme le strisce di ugual lunghezza, e poi sovrapponendo per semplice contatto successivamente le varie strisce in ordine di lunghezza come indica, con l'ausilio del N° di riferimento, la figura (nella quale la parte inferiore rappresenta la pianta della molla a balestra vista di sotto). Il carico viene applicato all'estremità della striscia superiore più lunga.



Spesso tali molle sono leggermente incurvate colla concavità verso l'alto.

Con la trasformazione qui descritta si risparmia spazio nel senso della larghezza in confronto del caso della molla triangolare, e si ha anche una costruzione più facile.

Il comportamento elastico e resistente è perciò lo stesso nei due casi, poichè le varie striscie sono, come si disse, semplicemente sovrapposte e non solidali per aderenza fra loro, in modo che non sono impediti scorrimenti relativi secondo le superfici di contatto, e le strisce stesse sotto l'azione del carico si deformano per flessione, proprio come se, anzichè sovrapposte, fossero disposte l'una di fianco all'altra.

Passiamo ora ad un altro caso pure notevole: la trave incastrata ad un estremo è sollecitata da un carico P concentrato all'altro estremo, a sezione rettangolare con larghezza costante b ed altezza variabile z.

L'equazione di stabilità è

$$K = \frac{M}{W} = \frac{6Px}{b\ z^2}$$

e da essa si ottiene:

$$z^2 = \frac{6P}{bK}x$$

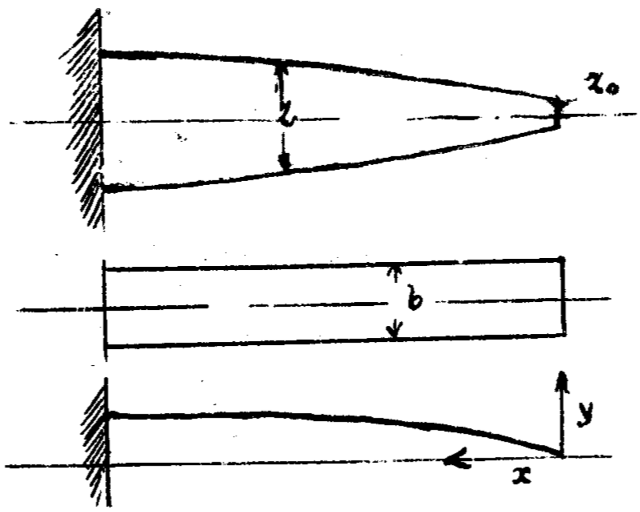
questa è l'equazione di una parabola, e perciò il profilo del solido in prospetto è parabolico, e conviene farlo simmetrico rispetto all'asse geometrico, come si disse sopra (vedi fig., prospetto, pianta e sezione).

Anche qui per $x=0$ la sezione deve essere calcolata in base al taglio, e perciò l'altezza z_0 deve soddisfare la condizione:

$$\frac{4}{5}K = \frac{3}{2}\frac{P}{bz_0}$$

da cui si ottiene:

$$z_0 = \frac{15}{8}\frac{P}{bK}.$$



L'altezza deve restare costante $= z_0$, per x compreso tra zero ed il valore di x_0 per cui la z, calcolata in base alla flessione, risulta uguale a z_0, si ottiene:

$$x_0 = \frac{75}{128}\frac{P}{bK}$$

I due profili si raccordano poi empiricamente.

Facendo $x=l$ nell'equazione del profilo, si ottiene per z il valore h, altezza della sezione di incastro.

$$h = \sqrt{\frac{6Pl}{bK}}$$

e l'equazione del profilo si può [illegible] scrivere cone segue:

$$z^2 = \frac{h^2}{l}\,x$$

od anche

$$z = h\sqrt{\frac{x}{l}}$$

Per ricavare le deformazioni della trave si ricordi l'espressione del raggio di curvatura trovata più sopra, e si trasformi:

$$r = \frac{Ez}{2K} = \frac{Eh}{2K}\sqrt{\frac{x}{l}} = a\sqrt{x}$$

ponendo:

$$a = \frac{Eh}{2K\sqrt{l}}$$

quindi, chiamando al solito y l'ordinata della linea elastica contata positiva verso l'alto da un asse x orizzontale per l'estremo libero della trave, colle convenzioni solite si avrà:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{a\sqrt{x}}$$

Integrando con la condizione che per $x = l$ sia $\frac{dy}{dx} = 0$ si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{a}\left(\sqrt{l} - \sqrt{x}\right)$$

ed integrando ancora con la condizione che per $x = 0$ deve essere $y = 0$, si ricava infine:

$$y = \frac{2}{a}\left(x\sqrt{l} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$$

(equazione della linea elastica).

La freccia di incurvamento f si ottiene ponendo in questa equazione $x = l$; inoltre riporremo al posto di a il suo valore ed avremo:

$$f = \frac{4}{3}\,\frac{Kl^2}{Eh}$$

ed esprimendo qui K in funzione di h, secondo l'equazione di stabilità, si ottiene

$$f = \frac{8\,P\,l^3}{E\,b\,h^3} = 2\,\frac{P\,l^3}{3EI}$$

indicando anche qui con I il momento di inerzia della sezione d'incastro. E ricordando anche qui la formola (173) si nota che in questo caso la freccia è doppia di quella che si avrebbe, a parità di altre condizioni, in una trave a sezione rettangolare costante bh.

Studiamo ancora la trave incastrata ad un estremo e sollecitata da un carico concentrato all'estremo libero, ma supponiamo che la sezione varii con legge di similitudine, restando però sempre egualmente orientata (legge omotetica).

Se per es: la sezione è rettangolare di altezza z, la base b sarà proporzionale a z, in modo che se c è una costante sia: $b = cz$.

Perciò il modulo di resistenza W sarà:

$$W = \frac{bz^2}{6} = \frac{c}{6} z^3$$

Se la sezione fosse circolare (caso degli alberi di macchine), indicando con z il raggio, si avrebbe, come è noto:

$$W = \frac{\pi}{4} z^3$$

In ambo i casi il W è proporzionale a z^3, e si può esprimere con:

$$W = Az^3$$

essendo A la costante di proporzionalità.

L'equazione di stabilità è quindi:

$$K = \frac{M}{W} = \frac{Px}{Az^3}$$

da cui si ricava:

$$z^3 = \frac{P}{AK} x$$

La curva rappresentata da questa equazione si chiama, nella geometria, la <u>parabola cubica</u>; tale è dunque il profilo longitudinale della trave così in pianta come in prospetto.

È ovvio che anche qui ponendo $x=l$ si ottiene il valore di z per la sezione d'incastro.

Anche qui la sezione per $x=0$ va calcolata in base al taglio con la relazione

$$\frac{4}{5}k = \frac{3}{2}\frac{P}{c z_0^2} \quad \text{per la sezione rettangolare}$$

e con:

$$\frac{4}{5}k = \frac{4}{3}\frac{P}{\pi z_0^2} \quad \text{per la sezione circolare.}$$

Il valore z_0 vale per $x \leq x_0$ ove x_0 si definisce e si ricava, come si disse sopra nei casi analoghi, ottenendo:

$$x_0 = \frac{5}{32}\sqrt{\frac{15}{2}\frac{P}{ck}} \quad \text{per la sezione rettangolare}$$

$$x_0 = \frac{5}{12}\sqrt{\frac{5}{3}\frac{P}{\pi k}} \quad \text{per la sezione circolare}$$

In conseguenza si corregge il profilo alla estremità libera della trave con opportuno raccordo, come pure si vide più sopra.

Il calcolo delle deformazioni, che omettiamo per brevità, si fa nel modo solito, già esposto ripetutamente più sopra: svolgendolo si ottiene che la freccia di incurvamento è in questo caso i 9/5 di quella che, a parità di condizioni, si ha per la trave a sezione costante eguale a quella di incastro.

Ora possiamo utilizzare i risultati qui ottenuti e considerare una trave semplicemente appoggiata ai due estremi A e B, e caricata da un carico concentrato P in un punto intermedio C a distanza a e b dai due estremi rispettivamente.

Già sappiamo dalla statica che le due reazioni degli appoggi sono:

$$A = \frac{Pb}{l} \quad e \quad B = \frac{Pa}{l} \; (\text{essendo } l = a + b);$$

inoltre il momento flettente in C vale

$$M = \frac{Pab}{l}$$

e poi, andando da C verso A e verso B, decresce linearmente fino ad annullarsi negli stessi punti A e B.

Perciò, ciascuno dei due tratti di trave CA e CB, si comporta come la trave (precedentemente considerata) incastrata ad un estremo (C) e caricata di un carico concentrato ($\frac{Pb}{l}$ ovvero $\frac{Pa}{l}$) all'estremo libero (A e B).

Possiamo quindi senz'altro applicare i risultati poco sopra trovati, per profilare in questo caso la trave di ugual resistenza, e per le varie forme considerate per la sezione rettangolare ad altezza costante, ed a larghezza costante o variante per omotetia, ovvero la sezione circolare.

Studieremo qui ancora la trave incastrata ad un estremo e libera all'altro, ma la supporremo soggetta ad un carico uniformemente ripartito su tutta la lunghezza l, di intensitá q per unitá lineare.

Incominciamo dalla trave a sezione rettangolare ad altezza costante h e larghezza variabile z.

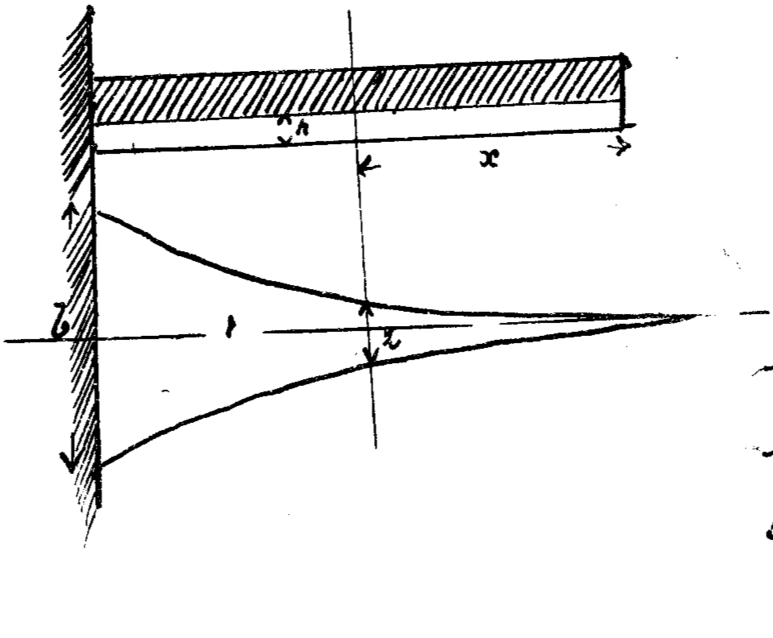
a distanza x dall'estremo libero B il momento flettente è $M = \frac{qx^2}{2}$, e perciò l'equazione di stabilitá ci dà la relazione:

$$K = \frac{M}{W} = \frac{qx^2}{2} \cdot \frac{6}{h^2 z} = \frac{3qx^2}{h^2 z}$$

da cui si ricava:

$$z = \frac{3q}{h^2 K} x^2 \qquad (202)$$

questa è l'equazione del profilo della trave in pianta, tale profilo è quindi una parabola (V. figura).



Per $x = l$ la relazione (202) dà la larghezza d'incastro:

$$b = \frac{3q}{h^2 K} l^2$$

lo sforzo di taglio nella sezione a distanza x da B è $T = qx$; e perciò deve essere pure verificata la condizione:

$$\frac{4}{5}k \geq \frac{3}{2}\;\frac{qx}{hz}$$

da cui si ha:

$$z \geq \frac{15}{8} \cdot \frac{qx}{hK} \qquad (203)$$

Per valori di x abbastanza piccoli il valore di z dato dalla (202) non soddisfa alla condizione (203); ciò avviene per x minore di un valore x dato dalla relazione seguente che si ottiene combinando la (202) e la (203):

$$\frac{3q}{h^2 k}x_0^2 = \frac{15}{8}\;\frac{q}{hk}x_0$$

da cui riducendo:

$$\frac{1}{h}x_0^2 = \frac{5}{8}x_0$$

questa equazione di secondo grado è soddisfatta per $x_0 = 0$ come era evidente a priori, e poi è anche soddisfatta per:

$$x_0 = \frac{5}{8}h$$

Ora per $x_0 < x$ il profilo della trave deve essere rettilineo, rappresentato dall'equazione:

$$z = \frac{15}{8} \cdot \frac{q}{hK}x$$

e per $x > x_0$ deve essere quello rappresentato dalla (202).

I due profili, che si tagliano nel punto di ascissa x_0, potranno poi essere tra loro raccordati empiricamente.

Per quanto riguarda la deformazione, sappiamo che la linea elastica è un arco di circolo con raggio:

$$r = \frac{Eh}{2K}$$

e la freccia di incurvamento f si calcola nel modo già visto più sopra:

$$f = \frac{l^2}{2r} = \frac{Kl^2}{Eh}$$

ed utilizzando l'equazione di stabilità

$$f = \frac{3ql^4}{Ebh^3} = 2\,\frac{ql^4}{8EI}$$

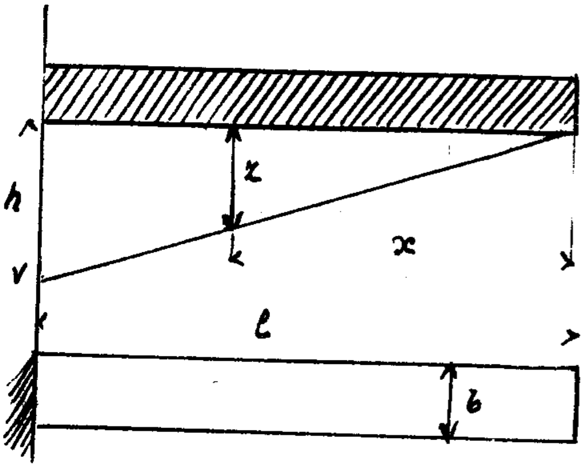
essendo I il momento di inerzia della sezione di incastro.

Confrontando colla formola precedente e ricordando che ivi è $Q = ql$, si vede come la freccia qui calcolata è doppia di quella che si ha, a parità di altre condizioni, per la trave a sezione rettangolare costante bh.

Consideriamo ora la <u>trave a sezione rettangolare a larghezza costante b, e ad altezza variabile z ancora, ben inteso, incastrata ad un estremo, libera all'altro e soggetta ad un carico uniformemente</u>

ripartito su tutta la lunghezza, d'intensità unitaria q.

L'equazione di stabilità è:



$$K = \frac{M}{W} = \frac{qx^2}{2} \cdot \frac{6}{bz^2}$$

da cui si ricava:

$$z = x\sqrt{\frac{3q}{Kb}}$$

che è l'equazione di una retta.

Il profilo in prospetto della trave è quindi rettilineo. L'altezza h della sezione d'incastro è il valore di z per x = l:

$$h = l\sqrt{\frac{3q}{Kb}}$$

Se scriviamo l'equazione di stabilità al taglio indicando con z_t l'altezza della sezione necessaria per resistere a questo sforzo si ottiene:

$$\frac{4}{5}k = \frac{3qx}{2bz_t} \qquad z_t = \frac{3qx}{2bk}\,\frac{5}{4} = \frac{15qx}{8bk}$$

da cui

$$z_t = \frac{15q}{8k}x$$

si avrà quindi

$$z_t \geq z$$

quando sia rispettivamente

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{q}{Kb} \geq \sqrt{\frac{3q}{Kb}}$$

la quale relazione, semplificata, diventa

$$\frac{q}{b} \geq \frac{64}{75} K = \sim 0.8533\, K$$

Il rapporto $\frac{q}{b}$ rappresenta l'intensità del carico esterno riferita all'unità di area della superficie su cui insiste.

Nei casi concreti più comuni tale intensità di carico è di gran lunga minore del carico di sicurezza K, e perciò non c'è da tener conto del taglio, perchè l'altezza z calcolata per la flessione è esuberante per la resistenza al taglio; ma può presentarsi il caso, specialmente per b molto piccolo, in cui si abbia effettivamente:

$$\frac{q}{b} > 0.8533\, K$$

e quindi, essendo $z_t > z$, occorre assumere come profilo della trave, in prospetto, la retta di equazione.

$$z_t = \frac{15}{8} \frac{q}{b} x$$

Per ciò che riguarda le deformazioni, abbiamo, secondo quanto già vedemmo sopra:

$$r = \frac{Ez}{2k} = \frac{E}{2K} \sqrt{\frac{3q}{kb}}\, x = ax$$

avendo posto

$$a = \frac{E}{2K} \sqrt{\frac{3q}{Kb}}$$

quindi, colle convenzioni solite, si ha:

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{ax}$$

ora integrando colla condizione che per $x = l$ sia $\frac{dy}{dx} = 0$ si ricava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \log \frac{l}{x}$$

(ove il log. è, ben inteso, naturale, in base e)

Per integrare nuovamente conviene osservare che se deriviamo la funzione

$$\frac{x}{a}\left(\log\frac{l}{x} + 1\right)$$

otteniamo appunto

$$\frac{1}{a} \log \frac{l}{x}$$

infatti, applicando le regole note:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a}\left(\log\frac{l}{x} + 1\right)\right] = \frac{1}{a}\left(\log\frac{l}{x} + 1\right) - \frac{x}{a}\,\frac{x}{l}\,\frac{l}{x^2} = \frac{1}{a}\log\frac{l}{x}$$

quindi inversamente:

$$y = \int \frac{1}{a} \log\frac{l}{x}\, dx = \frac{x}{a}\left(\log\frac{l}{x} + 1\right) + c$$

C la costante arbitraria, nel caso nostro, è zero perchè per $x = 0$ deve essere $y = 0$ e, d'altra parte, è facile dimostrare che per $x = 0$ la funzione $x = \log\frac{l}{x}$ tende a zero.

Abbiamo quindi:

$$y = \frac{x}{a}\left(\log\frac{l}{x} + 1\right)$$

da cui, per $x = l$ si ricava la freccia d'incurvamento:

$$f = \frac{l}{a} = \frac{6ql^4}{Ebh^3} = 4\frac{ql^4}{8EI}$$

essendo al solito I il momento d'inerzia della sezione d'incastro.

Ne risulta che la freccia d'incurvamento è quadrupla di quella che si ha, a parità di altre condizioni, nella trave a sezione costante bh.

Consideriamo ora la trave a sezione (rettangolare o circolare) variante con legge di similitudine (omotetia) ed ancora incastrata ad un estremo, libera all'altro, e soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità unitaria q.

Come già si vide nel caso analogo trattato più sopra, si ha:

$$W = Az^3$$

essendo z l'altezza della sezione rettangolare o il raggio della sezione circolare, e per i valori di A si veda a pag. 298

L'equazione di stabilità a flessione è in questo caso:

$$K = \frac{M}{W} = \frac{qx^2}{2Az^3}$$

da cui si ricava:

$$z = \sqrt[3]{\frac{qx^2}{2Ak}}$$

La curva rappresentata da questa equazione, nella geometria si chiama parabola semicubica: essa è in questo caso il profilo della trave.

Scriviamo ora l'equazione di stabilità al taglio, indicando con z_t la dimensione della sezione strettamente necessaria per la resistenza al taglio: detta equazione prende la forma:

$$k = \frac{qx}{Bz_t^2}$$

ove per la sezione rettangolare è:

$$B = \frac{8}{15}c\,;$$ (c è stato definito a pag. 298)

e per la sezione circolare

$$B = \frac{3}{5}\pi$$

Dall'equazione sopra scritta si ricava:

$$z_t = \sqrt{\frac{qx}{Bk}}$$

e questo rappresenterebbe il profilo della trave corrispondente al calcolo del solo taglio. Questo profilo incontra quello dedotto in base alla sola flessione nell'estremo libero della trave, poichè per $x=0$ risulta simultaneamente $z=0$ e $z_t=0$; inoltre i due profili si incontrano pure in altro punto per cui si ha $z=z_t$, punto il quale ha quell'ascisse x_0 che si ottiene eguagliando le espressioni di z e di z_t, e liberando l'equazione che ne risulta dalla soluzione $x = 0$ già considerata or ora:

$$x_0 = \frac{4A^2}{B^3}\,\frac{q}{k}$$

Per $x < x_0$ risulta $z_t > z$ e deve adottarsi il profilo ricavato in base al taglio, e per $x > x_0$ risulta $z > z_t$, e deve quindi adottarsi il profilo calcolato in base alla flessione. I due profili poi nella pratica, in prossimità di $x = x_0$ si raccordano empiricamente.

Lo studio della deformazione si conduce nel modo già indicato nei casi precedenti; ed omettendo per brevità il calcolo, indicheremo, come risultato, il valore della freccia:

$$f = 3\,\frac{ql^4}{8EI}$$

ove I è, al solito, il momento d'inerzia della sezione d'incastro. Questa freccia risulta tripla di quella che si avrebbe, a parità di altre condizioni, per la trave a sezione costante uguale a quella d'incastro.

Può interessare infine lo studio della trave appoggiata semplicemente alle due estremità e soggetta ad un carico uniformemente distribuito per tutta la lunghezza l, con intensità unitaria q.

In una sezione generica a distanza x dal mezzo della trave si ha il momento flettente:

$$M = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

Perciò l'equazione di stabilità è:

$$k = \frac{q}{2W}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

Se la trave è a sezione rettangolare con altezza costante h ed a larghezza variabile z si ha:

$$k = \frac{3q}{h^2 z}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

da cui

$$z = \frac{3q}{h^2 k}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

Perciò il profilo della trave è una parabola. In prossimità degli appoggi prevale l'influenza del taglio che vale qx, e dà luogo all'equazione di stabilità:

$$\frac{4}{5} k = \frac{3}{2} \frac{qx}{h z_t}$$

da cui risulta:

$$z_t = \frac{15}{8}\frac{qx}{hK} \quad (\text{profilo rettilineo})$$

La larghezza della trave alle estremità risulta uguale a $\frac{15}{16}\frac{ql}{hK}$. Si deve adottare il profilo rettilineo ricavato in base al taglio ($z_t > z_0$) per $x > x_0$ essendo x_0 il valore di x che rende $z_t = z$.

$$x_0 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}h\right)^2} - \frac{5}{16}h$$

In corrispondenza del punto determinato da $x = x_0$ i due profili s' intersecano e devono essere raccordati al solido modo.

Se la trave è a <u>sezione rettangolare con larghezza costante b ed altezza variabile z</u>, si ha:

$$K = \frac{3q}{bz^2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

Per $x = 0$ si ottiene $z = h$, essendo h l'altezza della sezione di mezzo, e si ha:

$$h = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3q}{bK}}$$

ed eliminando K tra queste due relazioni, si trova:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

Tale equazione rappresenta, come è noto, un ellisse di semiassi $\frac{1}{2}l$ ed h.

Per il taglio si trova al solito modo:

$$z_t = \frac{15}{8}\,\frac{qx}{bK}$$

e l'ascissa del punto di passaggio:

$$x_0 = \frac{\pm l}{2\sqrt{1+\frac{75}{64}\frac{q}{bK}}}$$

Così se la trave ha la sezione variabile con legge di omotetia, di altezza z si ha:

$W = Az^3$ e l'area della sezione è $A = cz^2$;

ove A e c hanno valori che dipendono solo dalla forma della sezione.

Così per la flessione si ha l'equazione di stabilità:

$$K = \frac{q}{2Az^3}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

da cui si ricava:

$$z = \sqrt{\frac{q}{2AK}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)}$$

che è l'equazione del profilo.

Per il taglio si ha:

$$\frac{4}{5}K = X\frac{qx}{cz_t^2}$$

e si ricava:

$$z_t = \sqrt{\frac{5}{4}X\frac{qx}{cK}}$$

facendo $z = z_t$ si ha quel valore x_0 già definito negli altri casi.

Si noti che l'espressione del momento flettente sopra trovata per la trave semplicemente appoggiata alle estremità:

$$M = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

quando si ponga:

$$q = \frac{2P}{l}$$

diviene:

$$M = \frac{P}{l}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

che è l'espressione del momento flettente sotto il carico concentrato P agente sulla sezione di ascissa x.

Si osservi poi che se un carico P si sposta sulla trave, in una data sezione si ha il momento flettente massimo quando il carico insiste sulla sezione.

Perciò i profili ora studiati per la trave semplicemente appoggiata alle estremità sono pure di equal resistenza ai momenti massimi nelle varie sezioni provocati da un carico concentrato, che si sposti sulla trave, di intensità $P = \frac{ql}{2}$.
