

## - Capitolo X -

### Solidi caricati di punta.

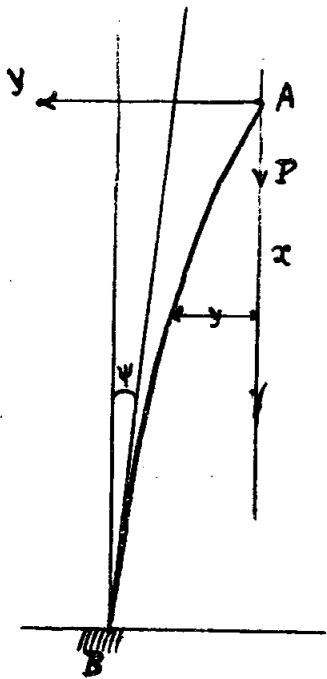
Il solido prismatico avente dimensioni trasversali notevoli rispetto a quella longitudinale sollecitato da una forza centrata, si comporta come un solido soggetto a pressione semplice e ad esso si applica quanto si è detto nel Cap: VI. 3. 2°.

Vi sono inoltre casi di sollecitazione centrata in solidi prismatici di alterra maggiore a 20, 30 ed anche 50 volte la minore dimensione trasversale della sezione: in tal caso le condizioni di resistenza vanno studiate in modo diverso dal caso della pressione semplice.

Per una eventuale inesattezza nella forma prismatica del solido, per una imperfetta omogeneità del solido stesso, e per una non rigorosa coincidenza fra linea di azione della forza  $P$  e l'asse geometrico del solido, la stessa forza  $P$  agisce con un braccio di leva, anche piccolissimo, rispetto ai baricentri delle singole sezioni trasversali: in tal caso la compressione è accompagnata da flessione e la resistenza del solido è vinta da un

valore di  $P$  inferiore a quello necessario a vincere la resistenza del solido per semplice compressione. I solidi così sollecitati si dicono: solidi caricati di punta.

Consideriamo un prisma  $AB$ , incastrato in  $B$  e sollecitato in  $A$  da una forza  $P$  ecentrata avente



una certa inclinazione  $\psi$  rispetto all'asse geometrico primitivo non deformato. Sotto l'azione della forza  $P$  il solido s'infilette nel modo indicato dalla figura: per studiare la sua deformazione assumiamo due assi coordinati con l'origine nel punto  $A$  che è l'estremo

della trave dopo la deformazione: l'asse  $x$  coincidente con la linea di azione di  $P$ , l'asse  $y$  ad esso normale per  $A$ . Una sezione del solido individuata dalle coordinate del suo baricentro  $(x, y)$  è sollecitata da uno sforzo normale  $P$  e da un momento flettente destrorso  $M = Py$ .

Poiché la curva si sviluppa con la convessità dalla parte delle  $y$  positive, e poiché la pressione baricentrica non influisce sulla rotazione delle

senza cui, l'equazione differenziale dell'asse deformato AB è:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}$$

P è una forza applicata, quindi è una costante positiva, E ed I sono quantità note pure positive: per conseguenza il rapporto  $\frac{P}{EI}$  è una costante positiva che noi indicheremo con

$$\mu^2 = \frac{P}{EI}$$

L'equazione dell'asse deformato è dunque:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mu^2 y$$

Integrando la precedente equazione differenziale introdurremo due costanti arbitrarie determinabili con le condizioni ai limiti.

L'integrale generale della equazione precedente è:

$$y = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$$

Volendo risultare  $y=0$  per  $x=0$ , e tenendo conto che per  $x=0$ ,  $\sin \mu x$  si annulla e  $\cos \mu x$  diviene eguale alla unità, resta  $C_1=0$ .

La precedente equazione si semplifica in:

$$y = C_2 \sin \mu x$$

Per determinare  $C_2$  teniamo conto dell'altra condizione ai limiti, cioè che per  $x=l$  deve risultare (V. figura)

$$\frac{dy}{dx} = +\psi \text{ essendo:}$$

$$\frac{dy}{dx} = + C_2 \mu \cos \mu x \quad \text{sarà}$$

$$+ \psi = C_2 \mu \cos \mu l \quad \text{quindi} \quad C_2 = + \frac{\psi}{\mu \cos \mu l}$$

L'equazione della linea elastica in termini finiti è dunque:

$$y = \frac{\psi}{\mu} \frac{\sin \mu x}{\cos \mu l} \quad (193)$$

essa è una sinusside. Il valore di  $y$  per  $x=l$  è dato da  $y_B = \frac{\psi}{\mu} \operatorname{tg}(\mu l)$ .

Osserviamo innanzi tutto che per  $\psi=0$  e  $\mu l = \frac{\pi}{2}$  si ottiene  $y_B = 0$ , mentre per  $\mu l = \frac{\pi}{2}$  si può stabilire soltanto che per  $\psi$  comunque piccolo, purché non nullo,  $y_B$  diviene infinito, che se invece anche  $\psi=0$  si per  $y_B$  una espressione indeterminata.

La formula (193) dà risultati assurdi ( $y$  negativo) per  $\psi$  comunque piccolo e  $\mu l > \frac{\pi}{2}$ .

Il valore di  $P$ , al quale corrisponde per  $\psi$  comunque piccolo,  $y_B = \infty$  è detto cario critico; esso si ottiene dalla relazione:

$$\mu l = \frac{\pi}{2}$$

da cui, ricordando il valore di  $\mu$  si ricava:

$$P_2 = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad (194)$$

Ma quanto sopra si è detto, risulta che la formula (193) per valori del carico  $P$  prossimi al carico critico, non rappresenta bene il fenomeno meccanico.

Infatti, se per  $v=0$ , e per valori del carico inferiori al carico critico è  $y=0$ , è prevedibile, per ragioni di continuità, che per valori del carico pochissimo superiori al valore critico si abbiano per le deformazioni valori finiti, pur crescendo essi molto rapidamente per ulteriori aumenti del carico.

La incompleta esattezza della formula (193) si spiega osservando che essa si è ottenuta dalla equazione della linea elastica nella sua forma approssimata:  $\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ .

Tale semplificazione, perfettamente ammissibile quando il momento flettente è funzione della sola  $x$ , non lo è più quando le  $y$  entrano, come nel caso in esame, nella espressione del momento flettente; in tal caso è chiaro che la valutazione delle  $y$  deve essere rigorosa, cioè essa deve ottenersi integrando l'equazione completa (V. Cap. VII):

$$\frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI}$$

Lo studio rigoroso del presente problema condurrà ai seguenti risultati.

Per un carico perfettamente centrato, per valori del carico di punta minori di quelli che abbiamo

chiamato carico critico (detto anche carico di Euler) il comportamento meccanico elastico del solido caricato di punta è caratterizzato dalla esistenza di una unica posizione media di equilibrio stabile, mentre per ogni valore del carico di peso superiore al detto carico critico si hanno due diverse posizioni di equilibrio stabile che vanno rapidamente scostandosi da quella iniziale media suddetta.

Tale comportamento è analogo a quello di altri sistemi meccanici, tra i quali citiamo a titolo di notizia:

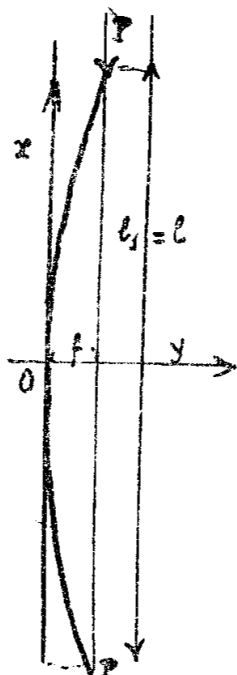
- un galleggiante rigido in posizione di equilibrio stabile il quale venga caricato da un peso  $P$  ad esso applicato in un punto della verticale contenente il baricentro ed il centro di carena del galleggiante al di sopra del metacentro.
- un corpo rigido pesante limitato inferiormente da una superficie cilindrica a generatrici orizzontali ed appoggiato mediante questa su di un piano orizzontale, con contatto lungo una generatrice, in modo che esso si trovi in equilibrio stabile, il quale corpo poi venga caricato da un peso  $P$  applicato in un punto del piano verticale

per la generatrice di appoggio, al disopra del centro di curvatura della sezione retta del cilindro.

Osservo di questi due sistemi meccanici, finché il carico  $P$  resta inferiore ad un certo valore che si potrebbe anche qui designare come carico critico, conserva come posizioni di equilibrio quella primitiva iniziale (per  $P=0$ ) per valori di  $P$  di poco superiori al carico critico, presenta due posizioni di equilibrio prossime a quella media iniziale le quali, quando siano soddisfatte determinate condizioni, sono entrambe stabili e si scostano da quella primitiva media, così che per valori di  $P$  relativamente di poco maggiori di quello critico si può avere il rovesciamento del corpo considerato.

La sollecitazione, nelle precedenti condizioni di vincoli, è nota come caso 1° del carico di punta.

Consideriamo ora il caso in cui il primo compresso secondo l'asse abbia le sezioni estreme libere di ruotare, è evidente che la linea elastica dovrà assumere una forma simmetrica rispetto all'asse  $V$  condotto normalmente all'asse geometrico primitivo  $z$ , per il punto medio  $O$  (V. figura): perciò ciascuna delle due metà del primo si comporta come incastrata in  $O$  e libera



all'altro estremo, ossia come il prisma considerato al caso precedente per  $\psi = 0$ .

La sollecitazione in queste condizioni si suole indicare come Caso II° del carico di punta.

Per quanto ora si è detto è ben chiaro che il carico critico per il caso II° si ottiene dalla (194) pro-

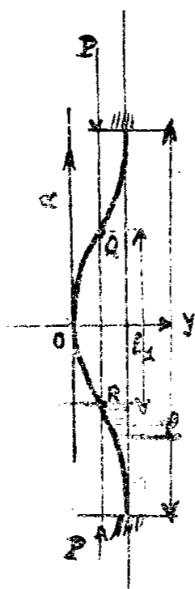
cedendovi  $\frac{1}{2}l$  in luogo di  $l$ , si trova così:

$$P_a = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (195)$$

Nel caso ora studiato gli estremi del solido sono punti di momento nullo e quindi punto di flesso per la linea elastica sinusoidale.

Il Caso IV° del carico di punta si verifica quando il prisma compresso secondo l'asse è incastrato alle due estremità: in tal caso le tangenti estreme alla linea elastica non possono ruotare,

e la linea elastica stessa, sempre sinusoidale, assume la forma indicata dalla figura, simmetrica rispetto all'asse  $y$  normale all'asse geometrico primitivo nel suo punto di mezzo  $O$ , tale linea costituisce una intera onda della sinusoide, le due estremità del pri-





sua ed il punto di mezzo  $O$  costituiscono tre ventri o punti di massima curvatura, mentre si hanno due nodi o punti di flesso (e perciò di momento nullo) nei punti  $Q$  ed  $R$  che distano di  $\frac{l}{4}$  dalle due estremità. È ovvio che sulla retta  $QR$  parallela all'asse  $x$  si deve intendere agente il carico di punta  $P$ , risultante dello sforzo normale centrato e del momento reazione sviluppato dall'incastro. Il tronco  $QR$  compreso fra i due punti di flesso si comporta come il solido considerato nel caso II°, quindi ne consegue che il carico critico per il caso IV° si deve ricavare dalla (195) ponendovi  $\frac{l}{2}$  in luogo di  $l$  (ossia dalla (194) ponendovi  $\frac{l}{4}$  in luogo di  $l$ ).

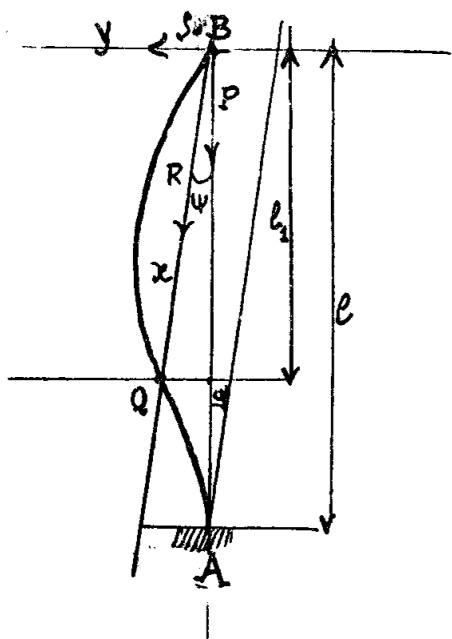
Si trova così:

$$P = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (196)$$

Un caso intermedio fra i due ultimi considerati si presenta per un prisma incastrato ad un estremo  $A$  e con l'altro estremo  $B$  girevole, ma guidato in modo da essere costretto a restare sull'asse geometrico primitivo: esso si suole chiamare: caso III° del carico di punta.

La linea elastica, in questo caso, deve assumere la forma indicata dalla figura: essa presenta due punti di flesso: nell'estremo girevole  $B$  ed in un punto intermedio  $Q$ . Lo sforzo  $R$  (risultante del

carico esterno dato  $P$  e della reazione  $S$  sviluppata dal vincolo che trattiene l'estremo girovole  $B$  sull'asse geometrico primitivo  $AB$ ) avrà quindi per retta di azione la  $BQ$  (congiungente i due punti di momento nullo). Risultata da quanto precede che il tratto  $BQ$  si comporta come se avesse in  $B$  e  $Q$  due



vincoli a cerniera. Circa la grandezza di  $S$  si osserva che le deformazioni del solido sono molto piccole quindi  $R$  si inclina di pochissimo alla verticale, il che vuol dire che  $S$  non può essere notevole rispetto a  $P$ , così che praticamente si può ritenere  $P = R$ .

Sia  $\psi$  la tangente trigonometrica dell'angolo  $QBA$ , ossia la inclinazione della retta  $BQ$  rispetto all'asse geometrico primitivo  $AB$ .

Si può assumere come origine  $B$ , e per asse delle  $x$  la retta  $BQ$  (col verso positivo da  $B$  verso  $Q$ ): data poi la piccolezza della inclinazione  $\psi$ , le ascisse dei vari punti della linea elastica possono intendersi indifferentemente misurate sull'asse  $x$ , o sull'asse geometrico primitivo  $BA$  e si

Si può assumere come origine  $B$ , e per asse delle  $x$  la retta  $BQ$  (col verso positivo da  $B$  verso  $Q$ ): data poi la piccolezza della inclinazione  $\psi$ , le ascisse dei vari punti della linea elastica possono intendersi indifferentemente misurate sull'asse  $x$ , o sull'asse geometrico primitivo  $BA$  e si

assuma il verso positivo delle  $x$ , come indica la figura.

La linea elastica sinusoidale deve soddisfare alla condizione che per  $x=l$ , l'inclinazione della tangente all'asse delle  $x$  sia eguale a  $\psi$ .

L'equazione della linea elastica seguendo il procedimento già indicato risulta essere

$$y = \frac{\psi}{\mu} \frac{\sin(\mu x)}{\cos(\mu l)} \quad \text{per } x=l \text{ si ottiene}$$

$$f = \frac{\psi}{\mu} \operatorname{tg}(\mu l).$$

Inoltre poiché l'estremo girevole è costretto a restare sull'asse geometrico primitivo a cui è tangente in A la linea elastica, si deve avere per  $x=l$ :

$$(y)_{x=l} = f = \psi l.$$

uguagliando i due valori di  $f$  si ottiene:

$$\operatorname{tg} \mu l = \mu l$$

Da cui si deduce facilmente

$$\mu l = 4,4934$$

Osservando che la distanza  $BQ = l_1$ , per quanto si è detto circa il caso II° del carico di punta, deve soddisfare alla relazione

$$\mu l_1 = \pi$$

si ricava quindi:

$$l_1 = l \frac{\pi}{4,4934} = 0,71 \quad (197)$$

\* \* \*

Riassumendo le formule (196) (197) (195) (194) ci diamo i valori del carico critico per i quattro casi tipici del carico di punta, disposti in ordine crescente rispetto allo stesso carico critico.

In pratica, si usa di sintetizzare i vari casi come diversi aspetti di un unico fenomeno, perciò ci si riferisce al caso II° considerato come caso fondamentale, per esso la lunghezza del prisma è uguale alla distanza fra due punti di flesso consecutivi della sinusoide unica elastica detta lunghezza libera di flessione  $l_1$ . Per gli altri tre casi, volendosi avvalere sempre della (195) o cor- rera, secondo quanto sopra si disse, porre come lunghezza libera di flessione rispettivamente:

caso	I	II	III	IV
$l_1 =$	$2l$	$l$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{l}{2}$

Le formule relative ai vari casi si riassumono allora nella seguente:

$$P_2 = \pi^2 \frac{EF}{l_1^2} \quad (198)$$

Essa si applica anche in casi diversi da quelli trattati purchè sia prevedibile la lunghezza libera di flessione  $l_1$ .

Nella (198) per  $l$  bisogna porre il momento di inerzia minimo fra i momenti di inerzia baricentrici della sezione, e ciò perchè il solido sotto

l'orizzonte del carico di punta si riflette nel piano di minima resistenza cioè in modo che sia asse neutro quell'asse principale di inerzia a cui corrisponde il momento di inerzia minimo.

\*  
\*   \*  
\*

### Equazione di stabilità.

Il carico  $P_c$  che il prisma, nelle varie condizioni di vincolo, può sopportare con tutta sicurezza, si deve assumere eguale ad una conveniente frazione del carico critico di rottura dato dalla (198).

La scelta del coefficiente di sicurezza dipende dalla natura del materiale ed è, caso per caso, stabilito in seguito ad accurati esperimenti.

Di solito tale frazione si assume:

$\frac{1}{5}$  per il ferro

$\frac{1}{8}$  per la ghisa

$\frac{1}{10}$  per il legno

ritenendo che per gli stessi materiali si può rispettivamente ammettere

$$E = 20000 \quad = 10000 \quad = 1000 \quad \text{Kg/mm}^2.$$

È utile considerare la pressione unitaria di rottura definita, in valore assoluto da =

$$\sigma_z = \frac{P_z}{A}$$

Ricordando che  $I = A\rho^2$  la (198) diviene:

$$P_z = \pi^2 EA \left(\frac{\rho}{l_1}\right)^2$$

da cui si ricava

$$\sigma_z = \pi^2 E \left(\frac{\rho}{l_1}\right)^2 \quad (199)$$

Se il rapporto  $\frac{\rho}{l_1}$  (detto sull'ora del prisma) è molto grande la  $\sigma_z$  può risultare maggiore della pressione massima a cui può resistere il materiale alla rottura per semplice schiacciamento (carico di rottura al saggio cubico).

In tal caso la formula di Euler non è più applicabile poiché essa è una formula di elasticità, che ha significato solo finché il materiale è sollecitato da tensioni o pressioni interne inferiori al carico limite di elasticità, sicché, se il prisma è di lunghezza relativamente piccola rispetto al raggio di inerzia minimo  $\rho$ , quando il carico di punta cresce gradatamente, prima che esso raggiunga il valore critico  $P_z$  il materiale è già superato per eccessiva pressione.

Dalla (199) si ricava:

$$\frac{l_1}{\rho} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_z}}$$

dalla quale sostituendo i noti valori di  $E$  e  $\sigma_z$  per i

vari materiali, si ricavano i limiti di applicabilità della formula di Euler.

1) per il ferro omogeneo

$$\sigma_z = 20 \text{ Kg/mm}^2 \quad E = 21000 \quad \frac{l_z}{\rho} = 102$$

2) per la ghisa

$$\sigma_z = 20 \text{ Kg/mm}^2 \quad E = 10.000 \quad \frac{l_z}{\rho} = 70$$

3) per il legname

$$\sigma_z = 1.5 \text{ Kg/mm}^2 \quad E = 1000 \quad \frac{l_z}{\rho} = 80$$

La inapplicabilità della formula di Euler ai prismi relativamente corti fece sentire la necessità di trovare una formula applicabile ai detti casi.

A questo scopo si può osservare che il solido caricato di punta si può considerare come un solido compresso parallelamente all'asse con una certa eccentricità piccolissima ed inesatta il cui massimo valore (nella sezione pericolosa) può essere indicato con  $\lambda$ .

L'equazione di stabilità è quindi quella relativa alla pressione e flessione (V. Cap. 6 §. 3 pag. 446) e cioè:

$$K'' = \frac{P_z}{A} + \frac{P_z \lambda y''}{A}$$

ricordando che  $K''$  deve essere il carico di sicurezza a compressione ed  $y''$  la distanza dell'asse neutro dell'elemento più lontano nella zona compressa.

quindi si deduce:

$$P_z = \frac{K'' A}{1 + \frac{\lambda y''}{\rho_z}}$$

Poichè  $\lambda$  è ignoto, occorre esprimerlo con criteri in parte empirici e basati su esperimenti. Per tener conto del fatto che l'effetto del carico di punta e la conseguente flessione laterale cresce rapidamente col crescere della lunghezza libera di flessione e decresce al crescere delle dimensioni trasversali, si conviene di porre:

$$\lambda = \alpha \frac{l_1^2}{y''}$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente numerico da determinarsi sperimentalmente; dobbiamo notare che rigorosamente esso non si può ritenere costante, perchè recenti esperimenti provano che esso varia con  $l_1$ , ad ogni modo, essendo abbastanza piccola tale variazione, accettando l'ultima relazione ricavata dalla precedente:

$$P_z = \frac{K'' A}{1 + \alpha \left(\frac{l_1}{\rho}\right)^2} \quad (200)$$

questa formula è nota come formula di Rankine.

In media si può assumere:

per il ferro e l'acciaio	= 0.00015
per la ghisa	= 0.0002
per il legno	= 0,0006

Dalla (200) si vede che, ridotto il carico di sicurezza  $K''$  dividendolo per  $1 + \alpha \left(\frac{l_1}{\rho}\right)^2$  (detto coefficiente di Rankine) il calcolo del solido caricato di punta non



differisce da quello del solido soggetto a pressione semplice.

### Esempio.

Una trave di ferro a doppio I del tipo commerciale N° 25, avente una sezione delle dimensioni di  $\text{mm} \frac{250 \times 110}{9 \times 13.6}$  ed una altezza di  $m: 3$  deve essere sottoposta ad un carico di punta.

Calcolare il carico che può sopportare sapendo che gli estremi sono liberi ma guidati.

I dati sono:  $\Omega = 4970 \text{ mm}^2$   $I = 2.550.000 \text{ mm}^4$

$$\rho^2 = \frac{I}{\Omega} = \frac{2.550.000}{4970} = 512 \text{ mm}^2 \quad \rho = \sqrt{512} = 22.6 \text{ mm.}$$

$$\frac{l_1}{\rho} = \frac{3000}{22.6} = 132 \quad l_1 = l$$

Essendo la snellera maggiore di 102 è applicabile la formula di Euler: essa fornisce:

$$P_2 = \frac{10 \times 20000 \times 4970}{132} = 56.900 \text{ Kg.}$$

Precedendo come coeff. di sicurezza 5  $P_0 = \frac{1}{5} P_2 = 11380 \text{ Kg.}$   
La formula di Rankine dà, invece, scegliendo  $k'' = 10$

$$P_0 = \frac{10 \times 4970}{1 + 0.00015 \times 17500} = 13700 \text{ Kg.}$$