Capitolo I

Analisi della deformazione

Si dice *continuo* un corpo che occupi un certo volume con continuità, cioè in modo che ogni elemento infinitesimo del volume stesso sia occupato da particelle del corpo considerato.

Un corpo continuo è detto *deformabile* quando la sua forma (ossia la reciproca posizione dei suoi punti) può essere modificata per l'azione di forze esterne agenti sulla superficie esterna (forze superficiali) o su ogni elemento di massa (forze di massa)

Sono compresi fra i corpi continui deformabili i solidi, i liquidi ed i gas.

Diremo *stato iniziale* lo stato del corpo non deformato, *stato attuale* lo stato del corpo dopo la deformazione. A determinare lo stato attuale del corpo occorre conoscere gli spostamenti dei singoli punti del corpo continuo.

Gli spostamenti che noi prendiamo in esame sono piccolissimi rispetto alle dimensioni del corpo.

*

* *

Nell'interno del corpo allo stato naturale consideriamo un punto generico M di coordinate $x\,y\,z$, riferite ad una terna di assi fissi. Dopo la deformazione il punto M avrà assunto la posizione M'.

Il segmento MM' è lo spostamento di M: esso è individuato dalle sue proiezioni sui tre assi coordinati. Queste proiezioni siano

$$u, \quad v, \quad w,$$

esse prendono il nome di *componenti dello spostamento* del punto M sono funzioni di $x\,y\,z$. Noi supporremo che tali funzioni siano continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, che ammettano derivate prime anche esse continue uniformi e piccolissime di fronte all'unità. Consideriamo un intorno piccolissimo del punto M, ad esso appartenga il punto A, generico, di coordinate

$$x+\xi \;,\; x+\eta \;,\; z+\zeta \;,$$

cioè indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate di A riferite ad una terna di assi ortogonali uscenti dal punto M, paralleli agli assi fissi $x\,y\,z$, (ξ, η, ζ infinitesimi).

Avvenuta la deformazione il punto A sarà passato in A' a costituire, con tutti gli altri punti come A', il nuovo intorno di M', tale intorno è da considerarsi come il deformato del primitivo intorno di M.

Indichiamo con $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ le coordinate di A' riferite agli assi paralleli a quelli coordinati ed uscenti dal punto M e con $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ le coordinate dello stesso punto riferite ad una terna di assi paralleli ai primi ed uscenti dal punto M'. Sussisteranno le seguenti relazioni:

$$\xi_1 = u + \xi' \qquad \eta_1 = v + \eta' \quad \zeta_1 = w + \zeta'$$

se indichiamo con du, dv, dw, gli incrementi che subiscono le tre funzioni $u\ v\ w$, quando si attribuiscano alle tre variabili $x\ y\ z$ rispettivamente gli incrementi infinitesimi $\xi\ \eta\ \zeta$, sarà:

$$\xi_1 = u + \xi' = \xi + u + du$$

ed analogamente per η_1 e ζ_1; si trae quindi:

$$\xi' = \xi + du = \xi + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta$$

$$\eta' = \eta + dv = \eta + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \qquad (1)$$

$$\zeta' = \zeta + dw = \zeta + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta$$

Nelle formule precedenti le derivate delle u, v, w, hanno i valori che ad esse spettano nel punto M.

Le (1) che esprimono le $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ come funzioni lineari omogenee delle ξ, η, ζ, mostrano che l'intorno primitivo di M non deformato e l'intorno deformato (in quanto sono infinitesimi) si corrispondano in una omografia affine, cioè nella deformazione i piani si trasformano in piani, le rette in rette; rette e piani paralleli si trasformano in rette e piani pure paralleli.

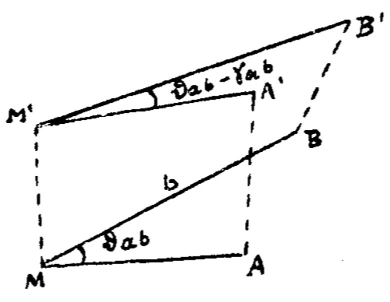
*

* *

Coefficiente di dilatazione lineare scorrimento mutuo di due direzioni.

Nell'analisi della deformazione si è naturalmente condotti a studiare, innanzi tutto, l'alterazione delle distanre fra i punti vicinissimi e l'alterazione degli angoli fra due elementi lineari uscenti da uno stesso punto.

Indicando con a la lunghezza piccolissima dell'elemento



lineare MA, con a' la lunghezza dell'elemento M'A', potremo scrivere:

$$a' = (1 + \varepsilon_a)\, a \qquad (2)$$

avendo posto:

$$\varepsilon_a = \frac{a' - a}{a} \qquad (3)$$

ε_a è detto *coefficiente di dilatazione lineare* nella direzione MA, esso è il rapporto fra l'allungamento subito dall'elemento a - e per la lunghezza primitiva dell'elemento.

Consideriamo ora un altro elemento lineare MB, uscente da M, ed indichiamo con ϑ_{ab} l'angolo BMA: dopo la deformazione quest'angolo assumerà un nuovo valore $\vartheta_{ab} - \gamma_{ab}$, se con γ_{ab} indichiamo la variazione dell'angolo stesso (converremo di assumere γ_{ab} positivo quando ϑ_{ab} diminuisce in seguito alla deformazione) Noi chiameremo γ_{ab}: *scorrimento mutuo delle due direzioni* $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Indichiamo con $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$ i coseni direttori del raggio MA; avremo $\xi = \alpha_x a$ ..... e due analoghe; trattiamo come infinitesimi gli incrementi finiti, ma piccolissimi, dovuti alla deformazione che indicheremo genericamente con δ, considerandoli come differenziali, quindi avremo differenziando,

$$\delta\xi = \alpha_x \delta a + a\,\delta\alpha_x$$

e per essere $\delta a = a' - a = \varepsilon_a a$,

$$\delta\xi = \xi' - \xi = \alpha_x \delta a + a\,\delta\alpha_x = a\alpha_x \varepsilon_a + a\,\delta\alpha_x \quad \text{da cui:}$$

$$\delta\alpha_x = \frac{\xi' - \xi}{a} - \alpha_x \varepsilon_a$$

e sostituendo $\xi' - \xi$ con il valore ricavato dalla (1), tenendo conto che $\xi = a\alpha_x$ ...... si ha:

$$\delta\alpha_x = -\alpha_x \varepsilon_a + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\xi}{a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\eta}{a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\zeta}{a} = -\varepsilon_a \alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\alpha_z$$

e due analoghe.

Se indichiamo con $\beta_x\ \beta_y\ \beta_z$ i coseni direttori della retta MB, potremo scrivere la nota relazione:

$$\cos\vartheta_{ab} = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z$$

Calcoliamo l'incremento che la deformazione induce nei due membri della precedente eguaglianza, ricordando che $\delta\vartheta_{ab} = -\gamma_{ab}$, si ha:

$$\gamma_{ab} \operatorname{sen}\vartheta_{ab} = \alpha_x \delta\beta_x + \alpha_y \delta\beta_y + \alpha_z \delta\beta_z + \beta_x \delta\alpha_x + \beta_y \delta\alpha_y + \beta_z \delta\alpha_z$$

Sostituendo a $\delta\alpha_x\ \delta\alpha_y\ \delta\alpha_z$ i valori ricavati dalle (4) ed a $\delta\beta_x\ \delta\beta_y\ \delta\beta_z$, le analoghe relazioni valevoli per la retta b, lungo la quale indichiamo con ε_b il coefficiente di dilatazione lineare, raccogliendo i termini simili, avremo:

$$\gamma_{ab} \operatorname{sen}\vartheta_{ab} = -(\varepsilon_a + \varepsilon_b)\cos\vartheta_{ab} + 2(\varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z) +$$
$$+ \gamma_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + \gamma_{xz}(\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z) + \gamma_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \qquad (5)$$

avendo posto:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

Queste sei combinazioni delle nove derivate parziali delle componenti di spostamento si chiamano *componenti* di deformazione nel punto M: quando esse siano note è possibile conoscere il coefficiente di dilatazione lineare lungo un qualsiasi elemento uscente da M ed il coefficiente di scorrimento mutuo fra due qualsiasi direzioni ortogonali uscenti da M.

Infatti supponendo che le due direzioni MA ed MB coincidono avremo:

$$\vartheta_{ab}=0 \quad \operatorname{sen}\vartheta_{ab}=0 \quad \cos\vartheta_{ab}=1 \quad \varepsilon_a=\varepsilon_b \quad \alpha_x=\beta_x \cdots\cdots$$

quindi:

$$\varepsilon_a=\varepsilon_x\alpha_x^2+\varepsilon_y\alpha_y^2+\varepsilon_z\alpha_z^2+\gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z+\gamma_{zx}\alpha_z\alpha_x+\gamma_{yx}\alpha_x\alpha_y \qquad (7)$$

cioè: il coefficiente di dilatazione lineare di un elemento rettilineo uscente da M è una funzione lineare omogenea delle sei componenti di deformazione relative ad M ed una funzione quadratica omogenea dei coseni direttori dell'elemento.

Supponiamo ora che sia $\vartheta_{ab}=\frac{\pi}{2}$, cioè che siano perpendicolari le due direzioni a e b, dalla (5) si ricava:

$$\gamma_{ab}=2(\varepsilon_x\alpha_x\beta_x+\varepsilon_y\alpha_y\beta_y+\varepsilon_z\alpha_z\beta_z)+\gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z-\alpha_z\beta_y)+$$

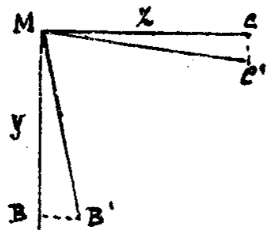
$$\gamma_{zx}(\alpha_z\beta_x+\alpha_x\beta_z)+\gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y+\alpha_y\beta_x) \qquad (8)$$

cioè: lo scorrimento mutuo di due rette ortogonali è una funzione lineare delle sei componenti di deformazione e bilineare dei coseni direttori dei due elementi.

In particolare per $\alpha_x=1 \quad \alpha_y=\alpha_z=0$, dalla (7) si ricava $\varepsilon_a=\varepsilon_x$, ed analogamente per gli altri due assi, cioè: le prime tre delle componenti di deformazione (6) sono i coefficienti di dilatazione lineare dei tre elementi di retta distesi secondo i tre assi coordinati.

Ponendo $\alpha_y = 1$ $\alpha_z = \alpha_x = 0$ e $\beta_z = 1$ $\beta_x = \beta_y = 0$ si ha dalla (8) $\gamma_{ab} = \gamma_{yz}$ ed analogamente per γ_{zx} e γ_{xy} : cioè le ultime tre delle (6) rappresentano gli scorrimenti mutui degli elementi distesi lungo gli assi coordinati presi due a due (*)

(*) La relazione $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ e le due analoghe possono dimostrarsi per via sintetica. Prima della deformazione in M siano xyz gli assi coordinati (y e z nel piano della figura).



Consideriamo il punto C sull'asse z: le sue coordinate sono $\xi = \eta = 0$ $\zeta = MC$; le coordinate di B, sull'asse y sono: $\xi = \zeta = 0$ $\eta = MB$. Dopo la deformazione C sarà passato in C', B in B'. Lo spostamento CC' misurato nella direzione y si ottiene dalla 2ª delle (1): $\eta' = CC' = \frac{\partial v}{\partial z}\zeta$, analogamente lo spostamento BB' misurato nella direzione z sarà $\frac{\partial w}{\partial y}\eta = BB'$, si ricava quindi:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{CC'}{MC} + \frac{BB'}{MB} = tg\, C\hat{M}C' + tg\, B\hat{M}B' \cong C\hat{M}C' + B\hat{M}B'$$

questa relazione dimostra l'assunto perchè il 1° membro secondo la (4ª delle (6) è γ_{yz} e l'ultimo rappresenta la variazione dell'angolo $B\hat{M}C$ formato dagli assi coordinati y e z.

Si è dimostrato che ogni deformazione è individuata dalle sei componenti di deformazione; non è però vero l'inverso, cioè prese ad arbitrio le sei componenti di deformazione, in generale esse non corrispondono ad una deformazione possibile e ciò perchè le grandezze definite dalle (6) devono soddisfare delle condizioni che sono necessarie e sufficienti per la continuità delle u, v, w. Queste condizioni dette di congruenza saranno determinate poco più innanzi.

*

* *

Dimostriamo il seguente teorema:

Se in ogni punto del corpo continuo sono nulle tutte le componenti di deformazione, il corpo subisce uno spostamento rigido.

Anzitutto osserviamo che se un corpo subisce uno spostamento rigido, cioè si sposta senza cambiare di forma, deve essere nullo il coefficiente di dilatazione lineare per ogni direzione, cioè per qualsiasi valore di $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$, per conseguenza nella (7) debbono essere identicamente nulli i coefficienti $\varepsilon_x \ldots\ldots \gamma_{yz} \ldots\ldots$

Inversamente supponiamo che siano uguali a zero le componenti della deformazione in ogni punto del corpo continuo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (9)$$

Le prime tre relazioni mostrano che $u\ v\ w$ sono rispettivamente indipendenti da $x\ y\ z$. Dall'essere $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ si trae $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ cioè è $\frac{\partial u}{\partial y}$ indipendente da x.

Derivando l'ultima delle (9) rispetto ad y si ottiene:

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ da cui, per essere } \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

si trova $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ cioè $\frac{\partial u}{\partial y}$ è indipendente da y. Dalla penultima delle (9) derivando rispetto a z: $0=\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ma $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0$ come si vede derivando la 4ª delle (9), quindi

$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}=0$ cioè $\frac{\partial u}{\partial y}$ è indipendente anche da z. Sarà quindi $\frac{\partial u}{\partial y}=$ costante, cioè u dipende linearmente da y, analogamente si dimostra che u dipende linearmente da z.

Simili conclusioni si traggono per v e w, cioè v dipende linearmente da x e z, e w da y ed x. Tenendo, infine, conto delle ultime tre delle (9), si vede che le tre componenti di spostamento debbono essere della forma:

$$\begin{aligned} u &= u + qz - ry \\ v &= v + rx - pz \qquad\qquad (10) \\ w &= w + py - qx \end{aligned}$$

dove u, v, w, p, q, r sono costanti in tutto il corpo. Le equazioni (10) dimostrano l'assunto.

*

* *

Dalla dimostrazione fatta segue immediatamente che due deformazioni caratterizzate ovunque dalle stesse componenti $\varepsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ non differiscono che per uno spostamento rigido.

Indicando infatti con u' v' w' e u'' v'' w'' le componenti di spostamento relative alle due deformazioni, per le ipotesi fatte si avrà: $\varepsilon_x=\frac{\partial u'}{\partial x}=\frac{\partial u''}{\partial x}$ e due analoghe

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}=\frac{\partial w''}{\partial y}+\frac{\partial v''}{\partial z} \text{ e due analoghe.}$$

Se consideriamo gli spostamenti $u = u'' - u' \ldots$ poichè essi verificano le (9) si trae che lo spostamento differenza dei due spostamenti dati è uno spostamento rigido.

*

* *

Le equazioni (7) ed (8) sono da applicarsi quando, volendo mutare la terna di assi coordinati ortogonali $x\ y\ z$, pur conservando la stessa origine, sia necessario conoscere i valori delle $\varepsilon_{x'} \ldots \gamma_{x'y'} \ldots$ per i nuovi assi $x'\ y'\ z'$ in funzione delle $\varepsilon_x \ldots \gamma_{xy} \ldots$ degli antichi assi e dei coseni direttori degli assi $x'\ y'\ z'$.

*

* *

Spostamento rigido e deformazione pura di una particella.

Quadriche di deformazione e di dilatazione.

Introduciamo le tre nuove grandezze funzioni delle coordinate di M:

$$2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad 2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{11}$$

ed esprimiamo le derivate delle componenti di spostamento mediante le (6) e le (11)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} - 2r - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ cioè } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} - r, \text{ così}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} + q \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} + r \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} - p \tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} - q \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} + p \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z$$

Riferiamo ora l'intorno deformato agli assi, paralleli a quelli coordinati, condotti per il punto M (nella sua posizione prima della deformazione) e determiniamo le proiezioni sui tre assi del segmento AA' che rappresenta lo spostamento di A: Sarà:

$$\delta\xi = u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta = u + \varepsilon_x\xi + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - r\right)\eta + \left(\frac{1}{2}\gamma_{zx} + q\right)\zeta$$

e due analoghe.

Se si pone

$$2\Psi(\xi\eta\zeta) = \varepsilon_x\xi^2 + \varepsilon_y\eta^2 + \varepsilon_z\zeta^2 + \gamma_{yz}\eta\zeta + \gamma_{zx}\zeta\xi + \gamma_{xy}\xi\eta \qquad (13)$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \delta\xi &= u + q\zeta - r\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \\ \delta\eta &= v + r\xi - p\zeta + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \qquad (14) \\ \delta\zeta &= w + p\eta - q\xi + \frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} \end{aligned}$$

Le formule precedenti ci mostrano che ciascuno degli incrementi $\delta\xi$ si può considerare scomposto in due parti:

$$\delta\xi = \delta_0\xi + \delta_1\xi \quad \text{ecc} \qquad (15)$$

avendo posto:

$$\delta_0\xi = u + q\zeta - r\eta \qquad (16)$$

ed altre due analoghe e

$$\delta_1\xi = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \qquad (17)$$

ed altre due analoghe.

Lo spostamento δ_0 è uno spostamento rigido, come mostrano le (16) dimostrate in meccanica razionale per gli spostamenti istantanei ed applicabili qui, perchè trattasi di spostamenti piccolissimi. Le u v w sono le componenti della traslazione, p q r quelle della rotazione della particella che si sposta rigidamente.

Lo spostamento δ_1 rappresenta la *deformazione pura*.

Le componenti di questa deformazione pura sono le derivate parziali della funzione Ψ definita dalla (13), tale funzione sarà detta: *potenziale della deformazione*(+)

(+) La proprietà caratteristica del potenziale della deformazione è che la sua derivata presa secondo una direzione qualsiasi di coseni direttori $\alpha_x\, \alpha_y\, \alpha_z$ rappresenta lo spostamento secondo quella direzione. (Ricordiamo che data una funzione $\Psi(\xi\eta\zeta)$ di tre variabili indipendenti, cioè una quantità della quale sono dati i valori in ogni punto dello spazio, si intende per derivata in una data direzione il limite del rapporto tra l'incremento che subisce la funzione quando da un punto M si passa ad un punto M' e la grandezza h del segmento MM', nella ipotesi che, fissato M, si faccia tendere M' ad M in una data direzione definita dai coseni direttori $\alpha_x\, \alpha_y\, \alpha_z$. Si ha: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Psi(\xi+\alpha_x h,\ \eta+\alpha_y h,\ \zeta+\alpha_z h)-\Psi(\xi\eta\zeta)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\alpha_x \Psi'(\xi+\theta\alpha_x h \ldots\ldots)+\alpha_y \Psi'(\xi+\theta\alpha_y h, \ldots\ldots)+\alpha_z \Psi'(\xi+\theta\alpha_z h, \ldots\ldots)\right]=$$
$$= \alpha_x \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\alpha_y\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}+\alpha_z\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}$$

dove le derivate parziali, supposte continue si intendono calcolate in M. Essendo $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi}=\delta_1\xi, \ldots\ldots$ la relazione scritta dimostra l'assunto).

L'equazione $\Psi = \text{cost}$ rappresenta una superfice equipotenziale di deformazione, attribuendo diversi valori alla costante si avrà una serie di superfici equipotenziali.

Lo spostamento δ_1 di un punto generico A risulta normale alla superfice equipotenziale di deformazione passante per esso (*)

Le superfice equipotenziali, come mostra l'equazione (13) sono quadriche aventi centri in M, esse si dicono *quadriche di deformazione*. Tali quadriche hanno tutte lo stesso cono asintotico definito dalla $\Psi = 0$, e gli stessi assi.

Lungo le generatrici del cono asintotico si ha $\varepsilon_a = 0$, come mostra la (7), perciò esso è detto **cono delle dilatazioni nulle**. Se è reale, esso divide gli elementi intorno ad M in due classi:

(*) Basta ricordare che i coseni direttori della normale alla superfice equipotenziale per il punto $\xi\,\eta\,\zeta$ sono:

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right)^2}} \;\ldots\ldots\ldots$$

essendo poi le componenti della deformazione pura: $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \ldots$ risulterà la componente dello spostamento sulla normale:

$$\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right)^2}$$

ma il secondo membro rappresenta proprio lo spostamento, dunque ecc. ecc.

gli uni si allungano, gli altri si accorciano (infatti ε, funzione continua dei coseni direttori, non può mutare segno senza annullarsi quando le α_x α_y α_z variano in modo continuo), in tal caso le quadriche sono iperboloidi.

Se il cono è immaginario, ε conserva sempre lo stesso segno e le quadriche sono ellissoidi.

I punti situati sugli assi, dovendo spostarsi normalmente alle quadriche restano ortogonali dopo la deformazione, cioè gli scorrimenti mutui secondo detti assi presi due a due sono nulli. Tali assi si dicono: *assi principali della deformazione relativi al punto M.*

Assumendoli come assi coordinati, ed indicando con $\xi_* \; \eta_* \; \zeta_*$ le nuove coordinate del punto generico A, le equazioni delle quadriche assumono la "forma canonica", diventano cioè:

$$2\Psi = \varepsilon_{x*}\xi_*^2 + \varepsilon_{y*}\eta_*^2 + \varepsilon_{z*}\zeta_*^2 = \text{cost}$$

quindi, secondo le (17) $\delta_1 \xi_* = \varepsilon_{x*}\xi_*$ e due analoghe, cioè un punto qualunque si sposta parallelamente agli assi principali di quantità proporzionali alle sue coordinate riferite agli assi stessi; i coefficienti di proporzionalità $\varepsilon_{x*}, \ldots$ si dicono *coefficienti di dilatazione principali.*

Si trova che la deformazione pura consta di tre dilatazioni semplici parallelamente a tre assi ortogonali.

Indicando con ρ un semidiametro di una quadrica di deformazione, le coordinate del suo estremo sono: $\xi = \rho\alpha_x, \ldots$ sostituendo questi valori nella (13), e ricordando la (7) si ottiene $\rho^2 \varepsilon_a = \text{cost}$; cioè una qualunque delle quadriche di deformazione è tale che i suoi semidiametri risultano proporzionali a $\frac{1}{\sqrt{\pm \varepsilon_a}}$, ricordando questa proprietà le quadriche di deformazione si dicono pure quadriche di dilatazione.

I semiassi delle dette quadriche sono proporzionali a

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{x*}}} \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{y*}}} \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{z*}}}$$

Ricordiamo esplicitamente che gli assi principali si trasformano in sè stessi per effetto della deformazione pura δ_1; quindi a meno dello spostamento rigido δ_0: quest'ultimo trasporta l'origine in M' ed imprime alla terna una rotazione di componenti $p\ q\ r$, intorno ad M'.

Risulta ancora che una sfera di centro **M** e di raggio piccolissimo r, per la deformazione si trasforma in un ellissoide avente per assi quelli principali trasportati con lo spostamento δ_0 e per semiassi: $r(1+\varepsilon_{x*})\ r(1+\varepsilon_{y*})\ r(1+\varepsilon_{z*})$

*

* *

Ricerca degli assi e delle dilatazioni principali=.

Un punto A, situato a distanza <u>uno</u> dal punto M, sta su uno degli assi principali di deformazione se il suo spostamento δ_1, dovuto alla deformazione pura, è diretto secondo il raggio vettore **MA**, ossia se per le coordinate di A:

$$\delta_1 \xi = \varepsilon_a \xi \qquad \delta_1 \eta = \varepsilon_a \eta \qquad \delta_1 \zeta = \varepsilon_a \zeta$$

essendo ε_a il coefficiente di dilatazione lineare secondo MA.

Secondo la (13) e le (17) potremo scrivere:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_a)\xi + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\eta + \tfrac{1}{2}\gamma_{zx}\zeta = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\xi + (\varepsilon_y - \varepsilon_a)\eta + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\zeta = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma_{zx}\xi + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\eta + (\varepsilon_z - \varepsilon_a)\zeta = 0 \qquad (18)$$

Poichè questo sistema di equazioni lineari omogenee deve essere soddisfatto per valori non tutti nulli di $\xi\ \eta\ \zeta$: deve essere nullo il determinante di coefficienti.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_a & \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \tfrac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_a & \tfrac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{zx} & \tfrac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

La precedente è una equazione di terzo grado in ε_a, essa ha le tre radici tutte reali, come è noto dall'algebra (equazione secolare) e come deriva dal fatto che essa determina gli assi di una quadrica a centro. Le tre radici sono le dilatazioni principali. Sostituendole una alla volta nelle (18) si ottengono i rapporti $\xi : \eta : \zeta$ che con l'equazione $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, ci danno i coseni direttori dei singoli assi principali. (Essendosi scelto A alla distanza I, ξ, η, ζ sono proprio i coseni direttori).

Dalla teoria delle equazioni algebriche si ha la nota relazione fra radici e coefficiente del termine che contiene ε_a^2, mutato di segno:

$$\varepsilon_{x*} + \varepsilon_{y*} + \varepsilon_{z*} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (20)$$

il 2° membro è dunque indipendente dalla orientazione degli assi esso è quindi detto: invariante lineare di deformazione.

Questo invariante ha un significato interessante, come si rileva dal paragrafo seguente.

*

* *

Coefficiente di dilatazione cubica.

Consideriamo il solito parallelepipedo elementare, rettangolo di spigoli d_x d_y d_z, e quindi di volume $dx \times dy \times dz$.

Tale volume varierà, in seguito alla deformazione, solo perchè varia la distanza fra le facce opposte, non per gli scorrimenti che subiscono le facce una rispetto all'altra.

Trascurando quantità infinitesime di ordine superiore le distanze fra le facce opposte del parallelepipedo deformato sono eguali agli spigoli dilatati, cioè esse saranno:

$$dx(1+\varepsilon_x) \quad dy(1+\varepsilon_y) \quad dz(1+\varepsilon_z)$$

Il volume del parallelepipedo sarà quindi:

$$dx(1+\varepsilon_x)\times dy(1+\varepsilon_y)\times dz(1+\varepsilon_z) = dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

questa relazione mostra che la variazione unitaria del volume nel punto M è data dalla somma delle dilatazioni lineari secondo tre direzioni ortogonali.

Questa variazione unitaria di volume è detta: *coefficiente di dilatazione cubica nel punto M*.

*

* *

Condizioni di congruenza.

Determiniamo le condizioni di congruenza cui si è fatto cenno più sopra: determiniamo cioè le condizioni necessarie e sufficienti alla esistenza e continuità delle u, v, w e delle p, q, r.

Se esiste ed è definita la funzione u delle coordinate $x\ y\ z$, si ha:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz$$

ricordando le (6) le (11) e le (12) si ha pure:

$$du = \varepsilon_x\, dx + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy} - r\right) dy + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{zx} + q\right) dz$$

È noto che affinchè il 2° membro sia un differenziale esatto sono necessarie e sufficienti le relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy} - r\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{zx} + q\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{zx} + q\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy} - r\right)$$

le quali, tenendo conto che per le (11) si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$ si trasformano così:

$$2\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}$$

$$2\frac{\partial q}{\partial x} = 2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x}$$

$$2\frac{\partial r}{\partial x} = -2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}$$

Altre sei equazioni analoghe si hanno per l'esistenza di v e w.

Esprimendo il differenziale totale dp e sostituendo a $\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$ i valori ora trovati si hanno le relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-2\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y}\right)$$

eseguendo le derivazioni e riducendo si ha:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}$$

$$2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$

con permutazioni circolari si ottengono altre due equazioni simili alla prima, ed un altro simile alle due ultime equazioni ora scritte: in tutte sei equazioni necessarie e sufficienti all'esistenza di u v w..