

## **Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni**

**Nota V: Le distorsioni (\*)**

**MICHELE CAPURSO**

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Università di Napoli

*Lavoro eseguito con il contributo del CNR  
Testo ricevuto il 19 febbraio 1964*

### **1 - Premessa.**

Nelle Note precedenti si è impostato in linea del tutto generale il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni agenti genericamente sull'elemento strutturale.

Esaurito il capitolo forze per le quali in particolare si è fornita soluzione completa e definitiva nella Nota IV, si vuol ora affrontare il problema analogo e, sotto molti aspetti duale, delle distorsioni.

Per queste ultime giova notare che esse costituiscono uno degli aspetti di maggior rilievo nell'elastostatica delle strutture sottili anche se spesso trascurato soprattutto per la difficoltà di un'impostazione generale del problema che, ovviamente, non è questa volta trattabile, neanche in via approssimata, per estensione della teoria del SAINT-VENANT.

È pertanto opportuno fornire una teoria generale del calcolo degli stati di tensione associati a generiche azioni distorcenti per poter essere in grado di conoscere nella realtà il grado di sicurezza di una struttura sottile quando questa sia soggetta ad azioni esterne deformanti che non comprendono le sole forze ma anche le distorsioni.

Sull'importanza di queste ultime nel campo delle travi di parete sottile è inutile soffermarsi; per rendersene conto basta pensare a tutte le azioni distorcenti causate dalle saldature o insite nel processo stesso di produzione dei profilati metallici.

---

(\*) Lavoro presentato dal prof. ELIO GIANGRECO, O. di tecnica delle costruzioni, Università, Napoli.

In analogia con quanto già svolto nella Nota IV il problema verrà quindi affrontato inizialmente ricercando il regime tensionale locale nelle zone prossime ad una generica sezione sede di deformazioni impresse esternamente. Per estensione si esaminerà poi il caso generale delle distorsioni diffuse con legge continua sulla struttura, particolarizzando poi i risultati per il caso delle travi immerse in campi termici disuniformi. Alcuni esempi di particolare rilievo mostreranno la semplicità di applicazione della teoria proposta.

## 2 - Il calcolo delle autotensioni in prossimità delle sezioni sedi di deformazioni impresse.

Si consideri la generica trave di parete sottile di Fig. 1 e sia  $Gxyz$  la terna di riferimento ad origine  $G$  baricentrica ed assi  $x$  ed  $y$  coincidenti con gli assi principali d'inerzia della sezione di cui  $O$  rappresenti il centro di taglio.

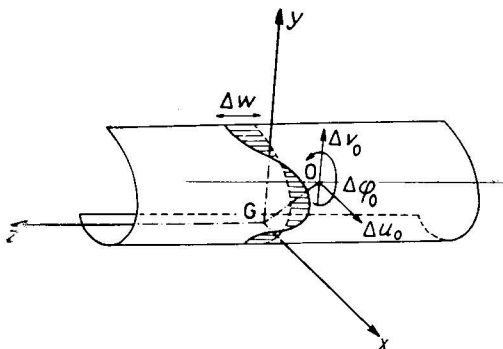


FIG. 1 - Schema delle azioni distorcenti esterne nella sezione  $z = 0$ .

Detti al solito  $u_0, v_0, \varphi_0$  i tre parametri dello spostamento rigido trasversale della sezione della trave e  $w$  lo spostamento assiale del generico punto della superficie media, si pensi di imprimere ai due tronchi della trave suddivisi dalla sezione  $z = 0$  un moto relativo caratterizzato dai tre parametri trasversali:

$$(1) \quad \Delta u_0, \Delta v_0, \Delta \varphi_0,$$

e dal moto relativo longitudinale:

$$(2) \quad \Delta w(s)$$

funzione generica dell'ascissa curvilinea  $s$  del punto della sezione  $z = 0$ .

Dette al solito:

$$(3) \quad 1, x(s), y(s), \left\{ \Phi_n(s) \right\}_{n=1, \dots, \infty}$$

le coordinate generalizzate del punto della sezione trasversale, la (2) può esprimersi per sviluppo in serie nella forma:

$$(4) \quad \Delta w(s) = \Delta w_z - \Delta \varphi_y x(s) + \Delta \varphi_x y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varphi_n \Phi_n(s)$$

essendo:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta w_z &= \frac{1}{A} \int_A \Delta w(s) \, dA \\ \Delta \varphi_y &= -\frac{1}{I_x} \int_A \Delta w(s) x(s) \, dA \\ \Delta \varphi_x &= \frac{1}{I_y} \int_A \Delta w(s) y(s) \, dA \\ \Delta \varphi_n &= \frac{1}{I_n} \int_A \Delta w(s) \Phi_n(s) \, dA \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \right.$$

i coefficienti dello sviluppo alla Fourier della funzione della sola  $s$  (2).

Di questi ultimi, i primi tre caratterizzano il moto relativo rigido longitudinale fra le due parti del solido e, accoppiati con i tre trasversali (1), definiscono l'aliquota di distorsione esterna che risulta essere congruente nel senso che conserva la planeità della sezione  $z = 0$  e dunque, in assenza di vincoli esterni o nei casi isostatici, non induce alcuno stato di autotensione nella struttura. Gli infiniti ulteriori coefficienti caratterizzano, invece, tramite la somma:

$$(6) \quad \Delta w'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \varphi_n \Phi_n(s)$$

l'aliquota di distorsione esterna non congruente e dunque la parte che induce lo stato di autotensione nella struttura.

Ricordando infatti che nella Nota IV si è pervenuti al legame (Cfr. Nota IV, (50)):

$$(7) \quad \varphi_n = \frac{1 - \nu^2}{E I_n \alpha_n^2} [T_n - C_{nx} T_x - C_{ny} T_y - C_{nz} M_z],$$

ove:

$$(8) \quad T_n = \frac{dM_n}{dz} + m_n,$$

essendo nel nostro caso:

$$(9) \quad T_x = T_y = M_z = m_n = 0,$$

la presenza di un ingobbimento relativo  $\Delta \varphi_n$  in  $z = 0$  fra le due parti della trave, si traduce per la (7) nella relazione:

$$(10) \quad \Delta T_n = \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \Delta \varphi_n \quad \text{per } z = 0$$

In tale sezione deve peraltro essere verificata la relazione di equilibrio:

$$(11) \quad \Delta\sigma_z(s) = 0$$

che, per essere:

$$(12) \quad \sigma_z(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(z)}{I_n} \Phi_n(s),$$

essendo nulle le tre caratteristiche longitudinali  $N_z$ ,  $M_y$ ,  $M_x$ , si traduce nelle relazioni:

$$(13) \quad \Delta M_n = 0 \quad \text{per } z = 0$$

Le (10) e (13) non sono tuttavia sufficienti per pervenire alla definizione delle caratteristiche d'ingobbimento  $M_n$  che, dovendo in entrambi i tronchi della trave soddisfare l'equazione:

$$(14) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = 0$$

richiedono quattro e non due sole condizioni ai limiti.

Facendo riferimento però alla trave di lunghezza indefinita, riducibile peraltro in pratica al caso molto meno restrittivo che risulti:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \geq d_n \\ \xi' \geq d_n \end{array} \right.$$

$\xi$  e  $\xi'$  essendo le ascisse delle due sezioni terminali della trave e  $d_n$  la distanza d'estinzione della componente d'ingobbimento ennesima, è lecito in virtù dello smorzamento assumere per  $M_n$  l'espressione:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M_n(z) = A_n e^{-\alpha_n z} & \text{per } z > 0 \\ M_n(z) = B_n e^{\alpha_n z} & \text{per } z < 0 \end{array} \right.$$

Le (10) e le (13) sono pertanto sufficienti per determinare le costanti  $A_n$  e  $B_n$  ed, in conformità si ricava quindi:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M_n(z) = -\frac{E I_n \alpha_n}{2(1-\nu^2)} \Delta q_n e^{-\alpha_n z} & \text{per } z > 0, \\ M_n(z) = -\frac{E I_n \alpha_n}{2(1-\nu^2)} \Delta q_n e^{\alpha_n z} & \text{per } z < 0, \end{array} \right.$$

e conseguentemente:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_n(z) = \frac{E I_n \alpha_n^2}{2(1-\nu^2)} \Delta \varphi_n e^{-\alpha_n z} \quad \text{per } z > 0, \\ T_n(z) = -\frac{E I_n \alpha_n^2}{2(1-\nu^2)} \Delta \varphi_n e^{\alpha_n z} \quad \text{per } z < 0. \end{array} \right.$$

Nel caso, pertanto, che le (15) siano verificate, tenendo presenti le espressioni:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(z)}{I_n} \Phi_n(s) \\ \tau_{zs} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(z)}{I_n} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} \\ \bar{M}_t = -\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(z)}{I_n} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} \end{array} \right.$$

caratteristiche del regime di tensioni interne globalmente equilibrato associato alle sollecitazioni d'ingobbimento, si ha, riferendosi per semplicità al solo tronco di ascissa  $z \geq 0$ :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = -\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \Delta \varphi_n}{2} \Phi_n(s) e^{-\alpha_n z} \\ \tau_{zs} = -\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \Delta \varphi_n}{2} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} e^{-\alpha_n z} \\ \bar{M}_t = -\frac{G I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz} \Delta \varphi_n}{2} e^{-\alpha_n z} \end{array} \right.$$

Giova ricordare che il termine  $\bar{M}_t$  rappresenta, per le sole sezioni sottili monoconnesse, il momento risultante della classica distribuzione, lineare lungo lo spessore, di tensioni tangenziali  $\bar{\tau}_{zs}$ , necessaria per equilibrare torsionalmente la distribuzione, costante lungo lo spessore, delle  $\tau_{zs}$  espresse dalle (20)<sub>2</sub>.

Le (20), nel caso che siano rispettate per ogni  $n$  le (15) rappresentano nel loro insieme lo stato di autotensione che si genera nella struttura per effetto della distorsione impressa nella sezione  $z = 0$ .

È evidente che nel caso che il solido abbia lunghezza limitata, o che in pratica per alcune onde non siano rispettate le (15), le (17) assumono l'aspetto più generale:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_n(z) = -\frac{E I_n \alpha_n}{2(1-\nu^2)} \Delta \varphi_n e^{-\alpha_n z} + M_{0n}(z) \quad \text{per } z > 0 \\ M_n(z) = -\frac{E I_n \alpha_n}{2(1-\nu^2)} \Delta \varphi_n e^{\alpha_n z} + M_{0n}(z) \quad \text{per } z < 0 \end{array} \right.$$

essendo  $M_{0n}$  l'onda di perturbazione proveniente dalle basi estreme analiticamente espressa dall'integrale generale dell'omogenea (14), la cui esplicitazione verrà, di caso in caso, fornita nel seguito per le travi di lunghezza limitata.

Giova notare che il regime di autotensioni (20) comporta l'esistenza di tensioni tangenziali anche nella sezione  $z = 0$  che, per il caso della lunghezza illimitata, risulta essere di simmetria geometrica. Ciò, che potrebbe sembrare in contrasto con la logica, è invece facilmente intuibile ove si pensi alle azioni mutue trasmesse dagli indispensabili irrigidimenti trasversali, alla parete sottile costituente la trave.

### 3 - Il calcolo delle autotensioni per distorsioni agenti con legge continua lungo l'asse geometrico della trave.

Il sorgere degli stati di autotensione non è legato ovviamente al solo caso delle distorsioni impresse in una generica sezione e dunque di carattere concentrato, ma anche all'esistenza di azioni distorcenti diffuse, agenti cioè con legge continua sulla struttura.

Queste ultime possono essere nel caso più generale caratterizzate dalle tre funzioni della sola  $z$  :

$$(22) \quad \vartheta_x(z), \vartheta_y(z), \vartheta_z(z),$$

coincidenti rispettivamente con due scorrimenti di carattere tagliante secondo  $x$  ed  $y$  e da una torsione intorno all'asse dei centri di taglio  $O$  e dalle componenti della deformazione estensionale:

$$(23) \quad \varepsilon_z^p(z, s), \varepsilon_s^p(z, s),$$

rispettivamente nella direzione delle generatrici e delle direttrici della superficie cilindrica costituente la trave.

Le (23), come si è visto nella Nota I, sono peraltro unificabili, nell'unico effetto distorcente globale:

$$(24) \quad \varepsilon_z^*(z, s) = \varepsilon_z^p(z, s) + \nu \varepsilon_s^p(z, s)$$

$\nu$  essendo il coefficiente di contrazione trasversale del materiale di cui è formata la trave.

Alla (24) può darsi peraltro per sviluppo in serie l'aspetto:

$$(25) \quad \varepsilon_z^*(z, s) = \lambda_z(z) - \mu_y(z) x(s) + \mu_x(z) y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z) \varphi_n(s)$$

essendo al solito:

$$\begin{aligned}
 \lambda_z(z) &= \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_z^*(z, s) \, dA \\
 \mu_y(z) &= - \frac{1}{I_x} \int_A \varepsilon_z^*(z, s) y(s) \, dA \\
 \mu_x(z) &= \frac{1}{I_y} \int_A \varepsilon_z^*(z, s) x(s) \, dA \\
 \mu_n(z) &= \frac{1}{I_n} \int_A \varepsilon_z^*(z, s) \Phi_n(s) \, dA \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

i coefficienti dello sviluppo alla Fourier della funzione di  $s$  e  $z$  (24).

Di questi i primi tre, accoppiati con i tre trasversali (22), caratterizzano ancora la aliquota di distorsione interna che risulta essere congruente nel senso che conservando sempre le sezioni trasversali piane induce, in assenza di vincoli esterni o nei casi isostatici, solo deformazioni nel solido ma non autotensione. Per tale aliquota risultano infatti verificate le relazioni:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{du_0}{dz} &= \vartheta_x(z) + \gamma_y & \frac{dq_y}{dz} &= \mu_y \\
 \frac{dv_0}{dz} &= \vartheta_y(z) - \gamma_x & \frac{dq_x}{dz} &= \mu_x \\
 \frac{dq_0}{dz} &= \vartheta_z(z) & \frac{dw_z}{dz} &= \lambda_z
 \end{aligned} \right\}
 \tag{27}
 \end{aligned}$$

La restante parte:

$$\varepsilon_z^{*'}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z) \Phi_n(s)
 \tag{28}$$

caratterizza invece l'aliquota non congruente di distorsione interna e dunque la causa dello stato di autotensione nella struttura.

Per il calcolo del regime di autotensioni provocato dalla (28) è peraltro comodo utilizzare, supponendo al solito la trave di lunghezza illimitata, i risultati ottenuti nel para-

grafo precedente. Si noti infatti che se la distorsione concentrata  $\Delta q_n$  agisce alla generica ascissa  $\xi$  anziché nell'origine  $z = 0$ , le (17) forniscono:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M_n(z) = - \frac{E I_n \alpha_n}{2 (1 - \nu^2)} \Delta q_n e^{-\alpha_n (z - \xi)} & \text{per } z > \xi \\ M_n(z) = - \frac{E I_n \alpha_n}{2 (1 - \nu^2)} \Delta q_n e^{\alpha_n (z - \xi)} & \text{per } z < \xi \end{array} \right.$$

che peraltro possono scriversi nella forma:

$$(30) \quad M_n(z) = \Delta q_n K_n(z, \xi)$$

essendo  $K_n(z, \xi)$  espresso dalla funzione:

$$(31) \quad K_n(z, \xi) = \left\{ \begin{array}{ll} - \frac{E I_n \alpha_n}{2 (1 - \nu^2)} e^{-\alpha_n (z - \xi)} & \text{per } z > \xi \\ - \frac{E I_n \alpha_n}{2 (1 - \nu^2)} e^{\alpha_n (z - \xi)} & \text{per } z < \xi \end{array} \right.$$

fisicamente coincidente con la linea d'influenza del generico momento ingobbante  $M_n$  nella generica sezione all'ascissa  $z$  per una distorsione viaggiante di tipo  $\Delta q_n$ .

Se pertanto, in luogo di una distorsione concentrata  $\Delta q_n$ , agisce sulla struttura una distorsione del tipo  $\mu_n(z)$  diffusa con legge generica, il momento ingobbante ennesimo assume l'aspetto:

$$(32) \quad M_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(z, \xi) \mu_n(\xi) d\xi$$

Le (32), teoricamente rigorose per il solido di lunghezza infinita, sono nella realtà sufficientemente approssimate per il solido di lunghezza finita a partire da una distanza dalle basi estreme pari a quella di estinzione  $d_n$  della corrispondente onda d'ingobbimento  $M_n$ .

Se pertanto risulta per ogni  $n$ :

$$(33) \quad l \gg 2 d_n$$

le (32) forniscono nella zona centrale della trave valori sufficientemente esatti per il calcolo del regime di autotensioni.

Il problema risolto così in generale per il solido lungo e cioè tale che sia rispettata per ogni  $n$ , e in particolare per  $n = 1$ , la (33), risulta invece incompleto se per qualche onda d'ingobbimento la (33) non risulta essere verificata.



In tal caso infatti la soluzione (32) assume l'aspetto:

$$(34) \quad M_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(z, \xi) \mu_n(\xi) d\xi + M_{0n}(z)$$

essendo  $M_{0n}(z)$  l'integrale generale dell'omogenea (14), fisicamente coincidente con un'onda di perturbazione proveniente dalle due basi estreme del solido.

La (34) che rappresenta la forma più generale del momento ingobbante ennesimo associato a una distorsione di tipo  $\mu_n(z)$  rappresenta peraltro la soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea:

$$(35) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \mu_n(z)$$

fondamentale per il calcolo dei momenti ingobbanti provocati dalle distorsioni non congruenti  $\mu_n(z)$ .

La (35), può peraltro scindersi nelle due relazioni equivalenti:

$$(36) \quad \frac{dM_n}{dz} = T_n, \quad \frac{dT_n}{dz} - \alpha_n^2 M_n - \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \mu_n = 0$$

rispettivamente di equilibrio e di congruenza.

Alla seconda delle (36) si può infatti pervenire osservando che per la (7) e le (9)

$$(37) \quad \varphi_n = \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{T_n}{\alpha_n^2}$$

ed inoltre che per ovvie condizioni di equilibrio deve risultare soddisfatta la relazione:

$$(38) \quad M_n = \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{d\varphi_n}{dz} - \mu_n \right\}.$$

#### 4 - Il calcolo delle autotensioni nel caso generale del solido di lunghezza limitata.

Nei due paragrafi precedenti il regime di autotensioni è stato calcolato con riferimento al caso del solido di lunghezza illimitata, o più generalmente nel caso che siano verificate le condizioni (15) o (33). Si è visto infatti che ove tali limitazioni non siano rispettate compare un'onda di perturbazione  $M_{0n}(z)$  le cui due costanti dipendono dalle condizioni ai limiti sulle due basi estreme della trave.

Volendo pertanto operare nella più completa generalità, nella sola ipotesi che il solido sia vincolato isostaticamente, o al limite libero e in assenza di forze esterne, all'equazione fondamentale (35):

$$(39) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \mu_n(z)$$

valida per ogni tratto della trave in cui  $\mu_n(z)$  risulta essere funzione continua, bisogna collegare due condizioni ai limiti atte a definirne univocamente la soluzione.

Per quanto concerne le due basi estreme distingueremo pertanto i due soli casi limiti già introdotti nella Nota precedente:

<a> Sezioni libere d'ingobbarsi ;

<b> Sezioni costrette a mantenersi piane.

Nel primo caso, le condizioni ai limiti si traducono nell'annullamento delle tensioni normali  $\sigma_z$  e dunque nelle relazioni:

$$(40) \quad M_n = 0$$

scritte in corrispondenza della relativa base.

Nel secondo caso invece le condizioni ai limiti dovendo imporre la nullità degli ingobbimenti  $q_n$  si traducono per le (37) nelle relazioni:

$$(41) \quad T_n = 0$$

scritte sempre in corrispondenza della relativa base.

Per quanto concerne invece eventuali sezioni intermedie di applicazione di distorsioni concentrate o di discontinuità delle azioni diffuse  $\mu_n(z)$  le relative condizioni conservano l'aspetto (10) e (13):

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta M_n = 0 \\ \Delta T_n = \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \Delta q_n \end{array} \right.$$

essendo  $\Delta q_n$  l'eventuale componente ennesima della distorsione concentrata ivi agente.

Le (40), (41) e (42) consentono pertanto d'integrare nella più completa rigorosità la (39) per distorsioni agenti nelle condizioni più generiche.

## 5 - Alcuni esempi di calcolo delle autotensioni provocate da una distorsione uniformemente distribuita lungo la trave.

In applicazione a quanto esposto è interessante sviluppare alcuni esempi di calcolo delle autotensioni provocate da particolari tipi di distorsioni. Facendo riferimento ad esempio al caso della trave immersa in un campo termico tale che ogni suo punto passi

dalla temperatura iniziale  $t_0$  costante in ogni punto, alla temperatura  $t(z, s)$  variabile da punto a punto, si ha indicando con:

$$(43) \quad \Delta t(z, s) = t(z, s) - t_0$$

la variazione di temperatura in ogni punto:

$$(44) \quad \varepsilon_z^p(z, s) = \varepsilon_s^p(z, s) = \gamma \Delta t(z, s)$$

essendo  $\gamma$  il coefficiente di dilatazione lineare del materiale di cui è costituita la trave. La (24) fornisce pertanto:

$$(45) \quad \varepsilon_z^*(z, s) = (1 + \nu) \gamma \Delta t(z, s)$$

dalla quale è poi immediato, tenendo presente lo sviluppo (25) passare alle componenti  $\mu_x, \mu_y, \dots, \mu_n, \dots$

Supponendo ad esempio  $\Delta t$  indipendente dall'ascissa  $z$  di riferimento della sezione trasversale, risultando in conseguenza le componenti (26) indipendenti da  $z$ , l'equazione fondamentale (39) assume l'aspetto:

$$(46) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = \frac{E I_n \alpha_n^2}{1 - \nu^2} \mu_n$$

la cui soluzione risulta definita dalla relazione:

$$(47) \quad M_n = \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \mu_n + A_n \sinh \alpha_n z + B_n \cosh \alpha_n z$$

ove le costanti  $A_n$  e  $B_n$  vanno definite in base alle condizioni ai limiti sulle basi  $z = 0$  e  $z = l$

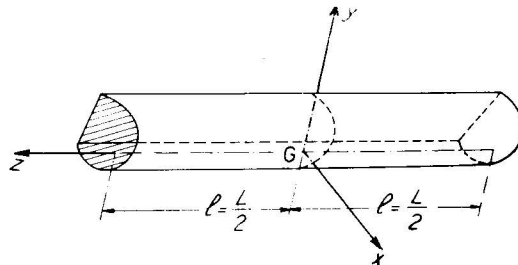


FIG. 2 - Sistema cartesiano di riferimento per la trave.

Assumendo pertanto il riferimento di Fig. 2 e supponendo che le due basi estreme siano irrigidite da due piastre che impediscano l'ingobbimento di tali sezioni, le condizioni ai limiti:

$$(48) \quad T_n = 0 \quad \text{per} \quad z = \pm l$$

porgono:

$$(49) \quad A_n = B_n = 0.$$

Si ha pertanto per la (19)<sub>1</sub>:

$$(50) \quad \sigma_z = - \frac{E}{1 - \nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \Phi_n(s)$$

e quindi in definitiva per la (28):

$$(51) \quad \sigma_z = - \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_z^{*'}(s)$$

essendo per le (25) e (26):

$$(52) \quad \varepsilon_z^{*'}(s) = \varepsilon_z^*(s) - \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_z^*(s) \, dA - \frac{x(s)}{I_y} \int_A \varepsilon_z^*(s) x(s) \, dA - \frac{y(s)}{I_x} \int_A \varepsilon_z^*(s) y(s) \, dA$$

Nel caso in esame, tenendo presente l'espressione (45), può porsi quindi:

$$(53) \quad \sigma_z = - \frac{E \gamma}{1 - \nu} \Delta t'(s)$$

essendo:

$$(54) \quad \Delta t'(s) = \Delta t(s) - \frac{1}{A} \int_A \Delta t(s) \, dA - \frac{x(s)}{I_y} \int_A \Delta t(s) x(s) \, dA - \frac{y(s)}{I_x} \int_A \Delta t(s) y(s) \, dA.$$

Se invece le due sezioni estreme sono libere d'ingobbarsi, dovendo risultare:

$$(55) \quad M_n(z) = 0 \quad \text{per } z \pm l$$

si ottiene dalla (47):

$$A_n = 0$$

$$(56) \quad B_n = \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{\cosh \alpha_n l} \cdot \mu_n$$

e quindi in definitiva:

$$(57) \quad M_n(z) = - \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha_n z}{\cosh \alpha_n l} \right\} \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \mu_n$$

Riferendosi pertanto al valore massimo verificantesi per  $z = 0$  si ha:

$$(58) \quad M_{n \max} = - \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh \alpha_n l} \right\} \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \mu_n.$$

È semplice peraltro rendersi conto che per i normali rapporti tra lunghezza e dimensioni medie della trave risulta essere:

$$(59) \quad \cosh \alpha_n l \gg 1$$

per ogni  $n$ , e dunque:

$$(60) \quad M_{n \max} \approx - \frac{E I_n}{1 - \nu^2} \mu_n$$

Fanno eccezione però le travi di sezione monoconnessa dotate d'ingobbimento torsionale  $\omega_z$  per le quali la prima onda d'ingobbimento risulta molto poco smorzata e dunque non soddisfacente in genere la (59).

Le autotensioni normali massime potranno pertanto scriversi in questo caso nella forma:

$$(61) \quad \sigma_{z \max} = - \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \Phi_n(s) - \frac{\mu_1 \Phi_1(s)}{\cosh \alpha_1 l} \right\}.$$

Si ha quindi in definitiva:

$$(62) \quad \sigma_{z \max} = - \frac{E}{1 - \nu^2} \bar{\varepsilon}_z(s)$$

essendo:

$$(63) \quad \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_z(s) = \varepsilon_z^*(s) - \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_z^*(s) dA - \frac{x(s)}{I_y} \int_A \varepsilon_z^*(s) x(s) dA + \\ - \frac{y(s)}{I_x} \int_A \varepsilon_z^*(s) y(s) dA - \frac{\Phi_1(s)}{I_1 \cosh \alpha_1 l} \int_A \varepsilon_z^*(s) \Phi_1(s) dA \end{aligned}$$

Riferendosi pertanto al caso della variazione termica potrà porsi per la (45):

$$(64) \quad \sigma_{z \max} = - \frac{E \gamma}{1 - \nu} \bar{\Delta t}(s)$$

essendo:

$$(65) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta t}(s) = \Delta t(s) - \frac{1}{A} \int_A \Delta t(s) dA - \frac{x(s)}{I_y} \int_A \Delta t(s) x(s) dA + \\ - \frac{y(s)}{I_x} \int_A \Delta t(s) y(s) dA - \frac{\Phi_1(s)}{I_1 \cosh \alpha_1 l} \int_A \Delta t(s) \Phi_1(s) dA \end{aligned}$$

### 6 - Un esempio di calcolo delle autotensioni conseguenti a una distorsione concentrata per una trave di sezione a I.

Particolarmente interessante si presenta il calcolo delle autotensioni provocate da effetti distorcenti concentrati in una sezione della struttura. Il calcolo sviluppato in via teorica per la trave di lunghezza illimitata si vuol ora applicare al caso della trave di sezione a I doppiamente simmetrica (Fig. 3) per il quale nella Nota III si sono fornite le equazioni caratteristiche determinatrici dei parametri necessari per la definizione dei coefficienti di smorzamento  $\alpha_n$  delle funzioni d'ingobbimento  $\Phi_n$  e delle relative norme  $I_n$ .

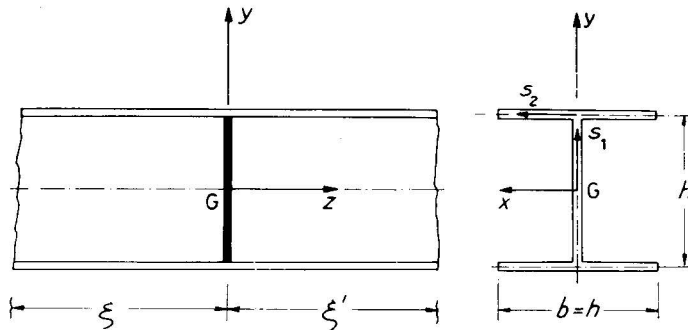


FIG. 3 - Sezione longitudinale e trasversale della trave.

La distorsione concentrata al solito nella sezione  $z = 0$ , si pensa realizzata da uno spostamento relativo costante di ampiezza  $c$  fra i punti appartenenti all'anima della trave. Tale distorsione può peraltro pensarsi fisicamente realizzata nella fase di raffreddamento di un cordone di saldatura verticale che colleghi, testa a testa, le due lastre metalliche costituenti l'anima di una trave composta. Assumendo pertanto in conformità con la Nota III i riferimenti locali  $s_1$  e  $s_2$ , la suddetta distorsione risulta analiticamente espressa dalle relazioni:

$$(66) \quad \begin{cases} \Delta w(s_1) = -c \\ \Delta w(s_2) = 0 \end{cases}$$

la cui ultima vale ovviamente per entrambe le piattabande.

Tenendo presente la doppia simmetria di tale funzione lo sviluppo in serie (4) interessa le sole funzioni doppiamente simmetriche (Nota III, (79)) caratterizzate per le (Nota III, (88)), (Nota III, (91)) e (Nota III, (95)) dalle espressioni:

$$(67) \quad \begin{cases} \Phi'_n(s_1) = \cos \frac{2n\pi}{h} s_1 \\ \Phi'_n(s_2) = (-1)^n \cos \frac{2n\pi}{h} s_2 \\ \Phi''_n(s_1) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \\ \Phi''_n(s_2) = -\frac{(-1)^n}{2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \\ (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \end{matrix}$$

È immediato rendersi conto, che tutte le onde di tipo  $\Phi'_n$  risultano essere ortogonali alla distorsione impressa (66), per cui i coefficienti dello sviluppo in serie (4) risultano forniti dalle relazioni:

$$(68) \quad \Delta q_n = \frac{1}{I''_n} \int_A \Delta w(s) \Phi''_n(s) dA = - (-1)^n \frac{8c}{3(2n+1)\pi}$$

essendo, com'è peraltro semplice verificare:

$$(69) \quad I''_n = \int_A \Phi''_n{}^2(s) dA = \frac{3}{4} t h.$$

Tenendo presente peraltro che:

$$(70) \quad \alpha''_n = \frac{(2n+1)\pi}{h} \sqrt{\frac{1-r}{2}}$$

si ha dalla prima delle (20):

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z(z, s_1) &= \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{4c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \cdot e^{-\alpha''_n z} \\ \sigma_z(z, s_2) &= - \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{2c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \cdot e^{-\alpha''_n z} \end{aligned} \right.$$

Analogamente operando, e ricordando inoltre che dalle (67) può trarsi con semplicità:

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega''_n}{ds_1} &= \frac{h}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \\ \frac{d\omega''_n}{ds_2} &= \frac{(-1)^n \cdot h}{2(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \end{aligned} \right.$$

si ottiene dalla seconda delle (20):

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{zs}(z, s_1) &= G \cdot \frac{4c}{3h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \cdot e^{-\alpha''_n z} \\ \tau_{zs}(z, s_2) &= G \cdot \frac{2c}{3h} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \cdot e^{-\alpha''_n z} \end{aligned} \right.$$

Le (71) e (73) rappresentano il regime di autotensioni provocato dalla distorsione concentrata impressa, nell'ipotesi che siano verificate le relazioni:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \geq 3,72 h \\ \xi' \geq 3,72 h \end{array} \right.$$

essendo per le (Nota III, (115))  $3,72, h$  la distanza d'estinzione relativa alla prima onda d'ingobbimento  $\Phi_1''$ .

In tale ipotesi, è interessante definire la legge di distribuzione delle tensioni (71) e (73) in corrispondenza della sezione di applicazione dell'effetto distorcente,  $z = 0$ . Si ha pertanto:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(0, s_1) = \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{4c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \\ \sigma_z(0, s_2) = - \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{2c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \\ \tau_{zs}(0, s_1) = G \frac{4c}{3h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi}{h} s_1 \\ \tau_{zs}(0, s_2) = G \cdot \frac{2c}{3h} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} s_2 \end{array} \right.$$

e, peraltro, tenendo presente le relazioni:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos (2n+1)x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sin (2n+1)x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin (2n+1)x = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \cos (2n+1)x = 0 \end{array} \right.$$

si perviene in definitiva alle espressioni:

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(0, s_1) = \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{2c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{2s_1}{h} \right) \\ \sigma_z(0, s_2) = - \frac{E}{1-r^2} \cdot \frac{c}{3h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{h} s_2 \\ \tau_z(0, s_1) = \tau_z(0, s_2) = 0. \end{array} \right.$$



Nella Fig. 4 è illustrato l'andamento delle tensioni normali  $\sigma_z$  sul profilo della sezione trasversale della trave. Giova notare che tali tensioni tendono a raggiungere valori infinitamente grandi in corrispondenza dei nodi d'attacco dell'anima alle sole ove, pertanto, massimo si presenta il pericolo di rottura locale in mancanza di adattamento plastico.

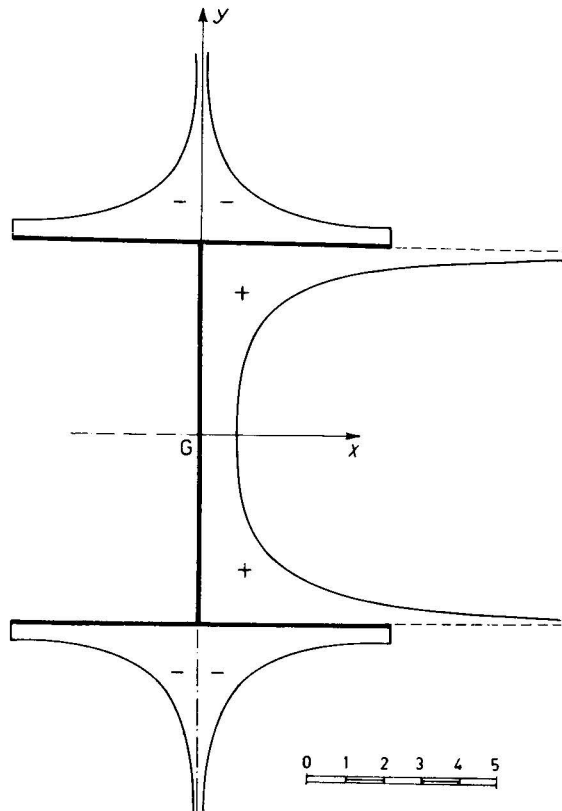


FIG. 4 - L'andamento delle autotensioni nella sezione di mezzeria

[Diagramma della funzione:  $\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{3h}{2c} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \sigma_z(0, s)$ ].

**7 - Il calcolo dei parametri dello spostamento rigido della sezione trasversale per effetto delle distorsioni.**

I parametri dello spostamento rigido della sezione trasversale della trave:

$$(78) \quad u_0, v_0, \varphi_0, w_z, \varphi_x, \varphi_y,$$

sono ovviamente influenzati dalla presenza del regime di autotensioni nell'interno della struttura e dunque anche dalla parte non congruente della distorsione agente su di essa.

Restando sempre nell'ipotesi di isostaticità e di assenza di forze esterne, i legami fra le (78) e le distorsioni agenti restano questa volta espressi dalle relazioni:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{du_0}{dz} = \varphi_y + \vartheta_x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{GA} T_n, & \frac{d\varphi_y}{dz} = \mu_y \\ \frac{dv_0}{dz} = -\varphi_x + \vartheta_y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{GA} T_n, & \frac{d\varphi_x}{dz} = \mu_x \\ \frac{dw_0}{dz} = \vartheta_z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{GA} T_n, & \frac{dw_z}{dz} = \lambda_z \end{array} \right.$$

essendo  $T_n$  il gradiente del momento d'ingobbimento ennesimo  $M_n$  legato dalla (39) alla componente ennesima della distorsione interna.

Le (79) connesse con le condizioni ai limiti relative ai vincoli applicati alla struttura consentono peraltro di pervenire con estrema semplicità alla definizione del movimento rigido della generica sezione trasversale della trave. Se la trave è iperstatica la soluzione può facilmente ottenersi sovrapponendo i risultati della presente Nota con quelli ottenuti nella Nota precedente per il caso delle forze.

## 8 - Conclusioni.

La trattazione svolta nelle cinque Note in cui si è articolato lo studio, costituisce la soluzione rigorosa, nell'ambito dell'elasticità lineare del problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile a direttrice trasversalmente indeformabile comunque sollecitate da forze di superficie ed azioni distorcenti. Abbandonata infatti l'ipotesi di scorrimento nullo sulla fibra media della parete, classica della trattazione approssimata di Vlasov Timoshenko della torsione delle travi in parete sottile di sezione aperta, il problema è stato ripreso dalle origini conservando solo, in comune con tale teoria, la classica ipotesi d'indeformabilità trasversale della direttrice.

Eliminata pertanto qualsiasi distinzione in linea teorica per la trattazione delle travi a sezione aperta da quella delle travi a sezione chiusa o pluriconnessa, si è fornita nella Nota I l'impostazione del problema, naturalmente non più ristretto al solo caso della torsione, ma nella sua forma più generale comprensiva dunque degli aspetti statici collegati alla presenza di forze e distorsioni di carattere generico.

In particolare tutto il problema è stato ricondotto alla soluzione di una particolare equazione integrodifferenziale lineare alle derivate parziali involvente la funzione  $w(z,s)$  coincidente con la componente assiale dello spostamento dei punti della superficie media.

Nella Nota II, preso in considerazione il caso del solido soggetto a forze interessanti le due sole basi terminali, di tale equazione, questa volta omogenea, si è data soluzione rigorosa procedendo per separazione delle variabili e formulando così l'equazione fon-

damentale determinatrice delle coordinate generalizzate della sezione trasversale della trave. Tali coordinate, espresse peraltro dalla serie illimitata di funzioni ortogonali:

$$(80) \quad 1, x, y(s), \left\{ \Phi_n(s) \right\}_{n=1, \dots, \infty}$$

conducono peraltro, come si è visto, a una generalizzazione dei gradi di libertà della sezione della trave il cui spostamento longitudinale può esprimersi infatti nella forma:

$$(81) \quad w(z, s) = w_z(z) - \varphi_y(z) x(s) + \varphi_x(z) y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \Phi_n(s)$$

chiaramente ottenuta come combinazione lineare delle (80). Alla generalizzazione dei gradi di libertà corrisponde peraltro, come si è dimostrato, una identica generalizzazione delle caratteristiche della sollecitazione, affiancandosi alle sei tradizionali caratteristiche nella teoria elementare, ulteriori infinite caratteristiche definite come momenti di ingobbimento  $M_n$  aventi andamento tanto più smorzato quanto più alto è l'indice distintivo  $n$ . Non è inutile ricordare che, nel caso delle sezioni monoconnesse dotate di ingobbimento torsionale, fra tali caratteristiche aggiuntive predomina per il bassissimo coefficiente di smorzamento la prima che peraltro risulta essere sensibilmente coincidente con la nuova caratteristica di Vlasov-Timoshenko comunemente nota come *bimomento*.

Nella Nota III in applicazione a quanto svolto in linea teorica si sono sviluppati alcuni esempi pratici di calcolo delle coordinate generalizzate della sezione per alcuni tipi di sezione trasversale di comune impiego nelle costruzioni leggere.

Tale calcolo, di semplice applicazione per sezioni di forma generica, consente peraltro una volta note le espressioni delle funzioni coordinate e dei relativi coefficienti caratteristici di smorzamento, di risolvere casi di notevole interesse teorico ed applicativo con estrema semplicità.

In tal senso nella Nota IV si è data soluzione completa al problema della trave comunque vincolata e soggetta a carichi di superficie comunque agenti. Si ricordano in particolare i risultati ottenuti per il caso dei carichi concentrati, per i quali un esempio numerico ha messo chiaramente in luce alcune singolarità notevoli non deducibili ovviamente avvalendosi di teorie approssimate. Lo stesso può dirsi per i risultati relativi al calcolo del regime di autotensioni associate da generiche azioni distorcenti sviluppati in via completa nella presente Nota.

La vastità dell'argomento non ha consentito tuttavia di trattare tanti casi di eguale interesse che sono necessariamente stati esclusi per ragioni di snellezza.

Ricorderemo fra questi, questioni di carattere teorico quali il regime tensionale in prossimità di fori, problemi di dinamica e di stabilità, ed esempi di carattere pratico quali le travi di sezione pluriconnessa, che con l'impostazione fornita, possono essere agevolmente affrontati.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] B. Z. VLASOV: *Thin-walled elastic beams* (Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1961). [Publ. for the National Science Foundation, Washington, D. C.].
- [2] S. TIMOSHENKO: «Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open section», in *Journal Franklin Institute* (1945).
- [3] VON KÁRMÁN & CHRISTENSEN: «Methods of analysis for torsion with variable twist», in *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 11, n. 2 (1964).
- [4] VON KÁRMÁN & WEI ZANG CHIEN: «Torsion with variable twist», in *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 13 (1946).
- [5] G. P. TOLSTOV: *Fourier series* (Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962).
- [6] M. CAPURSO: «La trattazione di Jourawski per le sezioni pluriconnesse», in *Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, ser. 4, vol. 28 (1961).
- [7] M. CAPURSO: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota I: La teoria e le equazioni fondamentali», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 6, 213 (1964).
- [8] —: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota II: La generalizzazione del problema del Saint-Venant», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 6, 241 (1964).
- [9] —: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota III: Complementi analitici: il calcolo delle funzioni caratteristiche per alcuni tipi di travi di parete sottile di comune imiego», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 7, 5 (1964).
- [10] —: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota IV: L'effetto dei carichi trasversali sulle sollecitazioni e spostamenti delle travi di parete sottile», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 7, 43 (1964).
-

#### RIASSUNTO

**Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota V: Le distorsioni.**

*(Lavoro scientifico originale)*

Si affronta il problema del calcolo delle sollecitazioni e degli spostamenti per le travi di parete sottile soggette a generiche azioni distorcenti interne.

Il problema viene risolto, sia nel caso di distorsioni di tipo concentrato, che nel caso di distorsioni agenti con legge continua generica. Viene puntualizzato il caso della trave immersa in un campo termico disuniforme e si svolge un esempio numerico per il caso di un particolare tipo di distorsione da saldatura.

Chiudono la Nota alcune considerazioni di carattere generale.

La riproduzione del *Riassunto* è autorizzata, citando l'autore e il periodico.

#### RÉSUMÉ

**Sur le calcul des voiles longues à parois minces soumises à forces et à distorsions. Note V: Les distorsions.**

*(Mémoire scientifique original)*

On calcule les tensions et les déplacements pour une tige à parois minces soumise à distorsions générales.

Le problème est résolu dans le cas des distorsions concentrées et dans le cas des distorsions continues. On étudie particulièrement le problème de la tige soumise à l'action d'un champ thermique disuniforme; on développe un exemple numérique pour le cas des distorsions données par les soudures.

On termine l'étude avec quelques conclusions générales.

La reproduction du *Résumé* est autorisée, en faisant référence à l'auteur et au périodique.

#### SUMMARY

**Theory of thin-walled elastic beams of general cross-section subjected to loads and dislocations. Note V: Dislocations.**

*(Original scientific paper)*

We calculate stresses and displacements in thin-walled elastic beams subject to generical dislocations.

The problem is solved for generical distributed dislocations and also for concentrated ones, with special reference to dislocations caused by the presence of thermal fields.

A numerical example is developed for a dislocation caused by welding. Some general conclusions are set out at the end.

The reproduction of the *Summary*, mentioning author and periodical, is authorized.

## ZUSAMMENFASSUNG

**Über die Berechnung der Träger von dünnen Wänden in Gegenwart von Kräften und Verzerrungen. V. Mitteilung: Die Verbiegungen.***(Wissenschaftliche Originalarbeit)*

Es wird das Problem der Kalkulation der Beanspruchung und der Verschiebungen für Träger dünner Wände in Angriff genommen, die allgemeinen inneren Aktionen ausgesetzt sind, die zu Verbiegungen führen können.

Das Problem wird gelöst, sowohl im Falle der konzentrierten Verbiegungen als auch im Falle der Verbiegungen, die mit allgemeinem fortlaufendem Gesetz agieren. Es wird hervorgehoben der Fall des Trägers, der in ein ungleiches thermisches Feld getaucht wurde; es folgt ein Zahlenbeispiel für eine besondere Art von Verbiegung durch Lötung.

Zum Schluss einige Betrachtungen allgemeinen Charakters.

Die Wiedergabe der *Zusammenfassung* mit Quellenangabe (Verfasser und Zeitschrift) ist gestattet.

---