

essendo per la (78):

$$(82) \quad \psi_x(s) = \frac{l}{I_y} x(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh}_n \alpha l$$

Le autofunzioni  $\phi_n(s)$  relative al caso in esame sono tabellate nella Nota III alla Tab. 8.

Vi è peraltro da osservare che se risulta soddisfatta la relazione:

$$(83) \quad l \geq 1,30 h$$

essendo per le (Nota III, (115))  $1,30 h$  la distanza d'estinzione relativa all'onda di massima penetrazione  $\phi_1(s)$  alla (82) può sostituirsi con ottima approssimazione la più semplice:

$$(84) \quad \psi_x(s) = \frac{l}{I_y} x(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s)$$

risultando per ogni  $n$ :

$$(85) \quad \operatorname{tgh} \alpha_n l \approx 1$$

Posto che la (83) risulti soddisfatta, è fondamentale per la definizione delle  $\sigma_{zn}$  pervenire alla formulazione della somma:

$$(86) \quad \bar{\psi}_x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s)$$

ove la generica componente  $\phi_n(s)$  e il relativo parametro  $\alpha_n$ , ponendo  $b = h$  e  $C_x = 1$ , risultano per le (Nota III, (102)) (Nota III, (103)) e (Nota III, (93)) definite dalle relazioni:

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_n(s_2) = \frac{h}{2} \frac{\sin \frac{2 \lambda_n}{h} s_2}{\sin \lambda_n} \\ \alpha_n = \frac{2 \lambda_n}{h} \left| \frac{1-r}{2} \right. \\ C_{nx} = 1 \end{array} \right.$$

essendo  $\lambda_n$  la generica radice ennesima dell'equazione trascendente:

$$(88) \quad \lambda \cos \lambda - \sin \lambda = 0 .$$

Le prime nove radici della (88), le corrispondenti funzioni  $\phi_n(s)$  e le rispettive norme  $I_n$  sono riportate nella Tab. 8. È però da osservarsi che tali valori, in considerazione

della lenta convergenza della serie (86) sono del tutto insufficienti per definire la somma  $\bar{\psi}_x(s)$ . Essi risultano invece essenziali per la definizione del regime tensionale a piccole distanze della sezione  $z = 0$  in ragione dello smorzamento sempre più elevato delle onde d'ingobbimento di indice più alto. Volendo però definire il regime tensionale in  $z = 0$  è necessario ricorrere ad altri criteri. In tal senso osservando che le radici della (88) possono porsi con buona approssimazione sotto la forma:

$$(89) \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

si trae per le (87) l'espressione:

$$(90) \quad \begin{cases} \phi_n(s_2) = \frac{h}{2} (-1)^n \sin \frac{2n+1}{h} \pi s_2 \\ \alpha_n = \frac{2n+1}{h} \pi \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \end{cases}$$

e corrispondentemente per la norma  $I_n$ :

$$(91) \quad I_n = \frac{t h^3}{4}$$

La funzione  $\bar{\psi}_x(s_2)$  risulta pertanto per la (86) definita dalla somma:

$$(92) \quad \bar{\psi}_x(s_2) = \frac{2}{\pi t h} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{2n+1}{h} \pi s_2}{2n+1}$$

che tenendo presente la relazione:

$$(93) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin (2n+1)x}{(2n+1)} = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

porge con semplicità:

$$(94) \quad \bar{\psi}_x(s_2) = -\frac{2}{\pi t h} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left\{ \sin \frac{\pi s_2}{h} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{2s_2}{h} \right) \right\}$$

Tenendo presente peraltro che:

$$(95) \quad \begin{cases} x(s_2) = s_2 \\ I_\nu = 2 \cdot \frac{t h^3}{12} \end{cases}$$

Le tensioni interne nella sezione  $z = 0$  restano pertanto definite dalle relazioni:

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{zm} &= \frac{P_x}{2th} \left\{ \frac{6l}{h} \cdot \frac{s_2}{h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left[ \sin \frac{\pi s_2}{h} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{2s_2}{h} \right) \right] \right\} \\ \tau_{zsm} &= -\frac{P_x}{4th} \\ \overline{M}_{tm} &= 0 \end{aligned} \right.$$

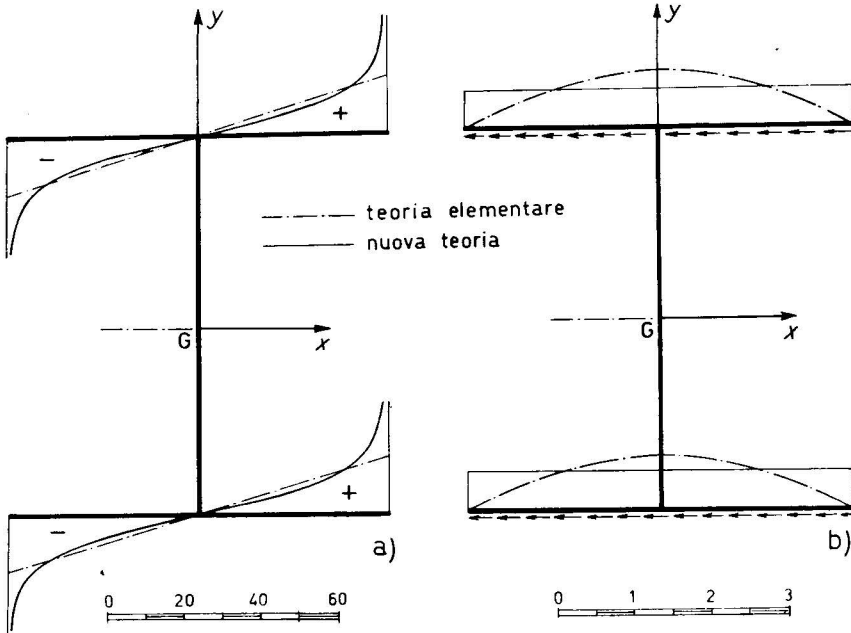


FIG. 6 - L'andamento delle tensioni normali e tangenziali nella sezione di mezzeria dovute alla forza  $P_x$  (a: diagramma della funzione  $\frac{2th}{P_x} \sigma_{zm}$ ; b: diagramma della funzione  $\frac{2th}{P_x} \tau_{zsm}$ ).

Per le prime giova notare che al termine classico della teoria elementare:

$$(99) \quad \sigma_{0zm} = \frac{P_x}{2th} \frac{6l}{h} \frac{s_2}{h}$$

dipendente linearmente dal rapporto  $\frac{l}{h}$ , si aggiunge il termine:

$$(100) \quad \sigma_{1zm} = -\frac{P_x}{2th} \left\{ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left[ \sin \frac{\pi}{h} s_2 + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2s_2}{h} \right) \right] \right\}$$

indipendente dal suddetto rapporto.

In Fig. 5 è appunto riportato l'andamento di tali tensioni correttive sulla sezione trasversale della trave. In Fig. 6 riferendosi al rapporto  $l/h = 5$  e ponendo  $\nu = 0,3$  è riportato invece l'andamento delle tensioni totali  $\sigma_{zm}$  e delle tensioni tangenziali  $\tau_{zsm}$ .

È fondamentale osservare che le tensioni normali correttive già per valori piuttosto bassi del rapporto  $l/h$  sono di entità piuttosto modesta rispetto alle classiche tensioni lineari della teoria elementare, eccezione fatta per le zone prossime ai bordi delle quali invece, nella ipotesi di elasticità lineare indefinita, le tensioni aggiuntive tendono a valori infinitamente grandi. Per le tensioni tangenziali  $\tau_{zsm}$  è invece immediato rilevare che si verifica nella realtà, per la sezione di mezzzeria, quella equiripartizione cui spesso si fa riferimento per i calcoli ritenuti approssimati e che invece in effetti risultano essere molto più vicini al vero dei risultati della teoria elementare.

### 5.1.2 - Il calcolo delle tensioni in mezzzeria provocate dal carico concentrato $P_y$ .

Dalle (79) si deduce:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zm} = \frac{P_y}{2} \psi_y \\ \tau_{zsm} = -\frac{P_y}{2} \frac{dY}{ds} \\ \bar{M}_{tm} = -\frac{P_y}{2} \frac{I_p}{q} \frac{D_{2,3}}{D} \end{array} \right.$$

essendo per le (78):

$$(102) \quad \psi_y(s) = \frac{l}{I_x} y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l$$

Anche in questo caso per

$$(103) \quad l \geq 2,37 h$$

(Cfr. Nota III, (115)) risultando per ogni  $n$ :

$$(104) \quad \operatorname{tgh} \frac{\alpha_n l}{n} \approx 1$$

alla (102) si può dare la forma più semplice:

$$(105) \quad \psi_y(s) = \frac{l}{I_x} y(s) + \bar{\psi}_y(s)$$

essendo:

$$(106) \quad \bar{\psi}_y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{\alpha_n I_n} \cdot \Phi_n(s).$$

Le autofunzioni  $\Phi_n(s)$  e i corrispondenti parametri  $\alpha_n$  facendo le posizioni  $b = h$ ,  $C_y = 1$ , risultano per le (Nota III, (99)) (Nota III, (100)) e (Nota III, (96)), definiti dalle relazioni:

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_n(s_1) = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2\lambda_n}{h} s_1}{\sin \lambda_n} \\ \Phi_n(s_2) = \frac{h}{2} \frac{\cos \lambda_n \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right)}{\cos \lambda_n} \\ \alpha_n = \frac{2\lambda_n}{h} \sqrt{\frac{1-r}{2}} \\ C_{ny} = 1 \end{array} \right.$$

essendo  $\lambda_n$  la generica radice ennesima della equazione trascendente:

$$(108) \quad \lambda (3 \cos 2\lambda - 1) - \sin 2\lambda = 0$$

Le prime nove radici della (108), le corrispondenti autofunzioni  $\Phi_n(s)$  e le relative norme  $I_n$  sono riportate nella Nota III alla Tab. 7.

Anche in questo caso tuttavia la funzione  $\bar{\psi}_y(s)$  resta insufficientemente definita arrestando la somma (106) al nono termine, per cui si ricorre ancora a criteri approssimati. In tal senso osservando che la (108) indicando con  $\vartheta_0$  la più piccola radice dell'equazione:

$$(109) \quad 3 \cos 2\lambda - 1 = 0$$

presenta una doppia serie di radici esprimibili in forma sufficientemente approssimata secondo le relazioni:

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_n = n \pi - \vartheta_0 \\ \lambda''_n = n \pi + \vartheta_0 \end{array} \right.$$

risultando per ogni  $n$ :

$$(111) \quad I'_n = I''_n = \frac{3}{4} t h^3$$

la (106) assume con semplici trasformazioni l'aspetto:

$$(112) \left\{ \begin{aligned} \bar{\psi}_\nu(s_1) &= \frac{2}{3th} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 - \vartheta_0^2} \left\{ n \pi \sin \frac{2\vartheta_0 s_1}{h} \cos \frac{2n\pi s_1}{h} + \right. \\ &\quad \left. - \vartheta_0 \cos \frac{2\vartheta_0 s_1}{h} \sin \frac{2n\pi s_1}{h} \right\} \\ \bar{\psi}_\nu(s_2) &= \frac{2}{3th} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - \vartheta_0^2} \left\{ n \pi \cos \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \frac{2n\pi s_2}{h} + \vartheta_0 \sin \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \sin \frac{2n\pi s_2}{h} \right\} \end{aligned} \right.$$

Alle (112), tenendo presente che:

$$(113) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_0 &= 0,611 \\ \sin \vartheta_0 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cos \vartheta_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right.$$

e trascurando  $\vartheta_0^2$  rispetto a  $n^2 \pi^2$  può darsi somma. Ricordando infatti che:

$$(114) \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx &= -\ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx &= -\int_0^x \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx &= -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx &= -\int_0^x \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) dx, \end{aligned} \right.$$

le (112) assumono l'aspetto:

$$(115) \left\{ \begin{aligned} \bar{\psi}_v(s_1) &= \frac{2}{3th} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \sin \frac{2\vartheta_0 s_1}{h} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{3}}{\pi h} \vartheta_0 \cos \frac{2\vartheta_0 s_1}{h} \int_0^{s_1} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) ds_1 \right\}, \\ \bar{\psi}_v(s_2) &= -\frac{2}{3th} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \left[ \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{\pi h} \sqrt{\frac{3}{2}} \vartheta_0 \sin \left[ \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \cdot \int_0^{s_2} \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) ds_2 \left\} . \end{aligned} \right.$$

Tenendo peraltro presente che:

$$(116) \left\{ \begin{aligned} y(s_1) &= s_1 \\ y(s_2) &= \frac{h}{2} \\ I_x &= \frac{7th^3}{12} \end{aligned} \right.$$

la (102) può porsi nella forma definitiva:

$$(117) \left\{ \begin{aligned} \psi_v(s_1) &= \frac{1}{th} \left\{ \frac{12l}{7h} \cdot \frac{s_1}{h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu)}} \left[ \sin \frac{2\vartheta_0 s_1}{h} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\vartheta_0}{h} \cos \frac{2\vartheta_0}{h} s_1 \int_0^{s_1} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) ds_1 \right] \right\}, \\ \psi_v(s_2) &= \frac{1}{th} \left\{ \frac{6l}{7h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{3(1-\nu)}} \left[ \cos \left[ \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\vartheta_0}{h} \sin \left[ \vartheta_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \cdot \int_0^{s_2} \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) ds_2 \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Risultando peraltro per le (Nota III, (85)):

$$\frac{dY}{ds_1} = \frac{1}{ht}$$

$$\frac{dY}{ds_2} = 0$$

$$\frac{I_p}{q} \frac{D_{23}}{D} = 0$$

e (101) assumono l'aspetto definitivo:

$$(118) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zm}(s_1) = \frac{P_y}{2th} \left\{ \frac{12l}{7h} \cdot \frac{s_1}{h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu)}} \left[ \sin \frac{2\partial_0 s_1}{h} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\partial_0}{h} \cos \frac{2\partial_0 s_1}{h} \int_0^{s_1} \ln \left( 2 \cos \frac{\pi s_1}{h} \right) ds_1 \right] \right\} \\ \sigma_{zm}(s_2) = \frac{P_y}{2th} \left\{ \frac{6l}{7h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{3(1-\nu)}} \left[ \cos \left[ \partial_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\partial_0}{h} \sin \left[ \partial_0 \left( \frac{2s_2}{h} - 1 \right) \right] \cdot \int_0^{s_2} \ln \left( 2 \sin \frac{\pi s_2}{h} \right) ds_2 \right] \right\} \\ \tau_{zsm}(s_1) = - \frac{P_y}{2th} \\ \tau_{zsm}(s_2) = 0 \\ \bar{M}_{tm} = 0. \end{array} \right.$$

Analogamente a quanto già osservato precedentemente, nell'espressione delle tensioni normali  $\sigma_{zm}$ , affianco al termine classico della teoria elementare dipendente linearmente dal rapporto  $l/h$  compare un termine correttivo del tutto indipendente dal suddetto rapporto.

In Fig. 7 è appunto riportato l'andamento di tali tensioni correttive sul profilo della trave, mentre in Fig. 8 assumendo ancora  $l/h = 5$  e  $\nu = 0,3$  è riportato l'andamento delle tensioni normali e tangenziali totali.

Anche in questo caso è fondamentale osservare che le tensioni normali correttive sono di entità molto modesta rispetto a quelle derivanti dalla teoria elementare, ecce-



zione fatta per le zone di saldatura dell'anima alle piattabande dove invece tendono a valori infinitamente grandi.

Per le tensioni tangenziali invece si rileva ancora un assorbimento integrale della anima sulla quale il taglio viene ad equipartirsi secondo un diagramma uniforme.

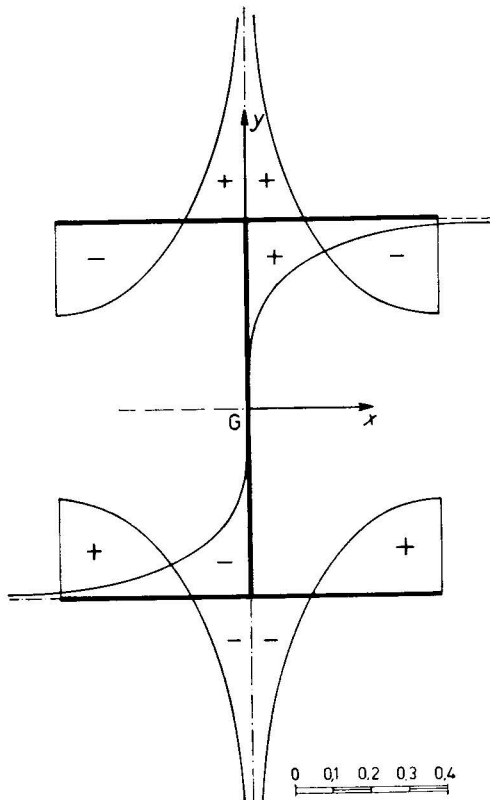


FIG. 7 - L'andamento delle tensioni normali d'ingobbimento nella sezione di mezzeria dovute alla forza  $P_y$  (Diagramma della funzione  $\frac{2th}{P_y} \frac{3}{2} \left| \frac{1-\nu}{2} \sigma_{12m} \right.$ ).

5.1.3 - Il calcolo delle tensioni in mezzeria provocate dal momento torcente  $M_z$ .

Dalle (79) si ha:

$$(119) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{zm} &= + \frac{M_z}{2} \psi_z \\ \tau_{zsm} &= - \frac{M_z}{2} \frac{d \Omega_z}{d s} \\ \overline{M}_{tm} &= - \frac{I_p}{q} \frac{D_{33}}{D} \frac{M_z}{2} \end{aligned} \right\}$$

essendo per la (78):

$$(120) \quad \psi_z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l$$

Le autofunzioni relative al caso in esame sono quelle tabellate nella Nota III alle Tab. 8 e 9 giova notare che fra tali autofunzioni la prima, all'incirca coincidente con la funzione d'ingobbimento torsionale  $\omega_z(s)$ , si presenta con un fattore di smorzamento

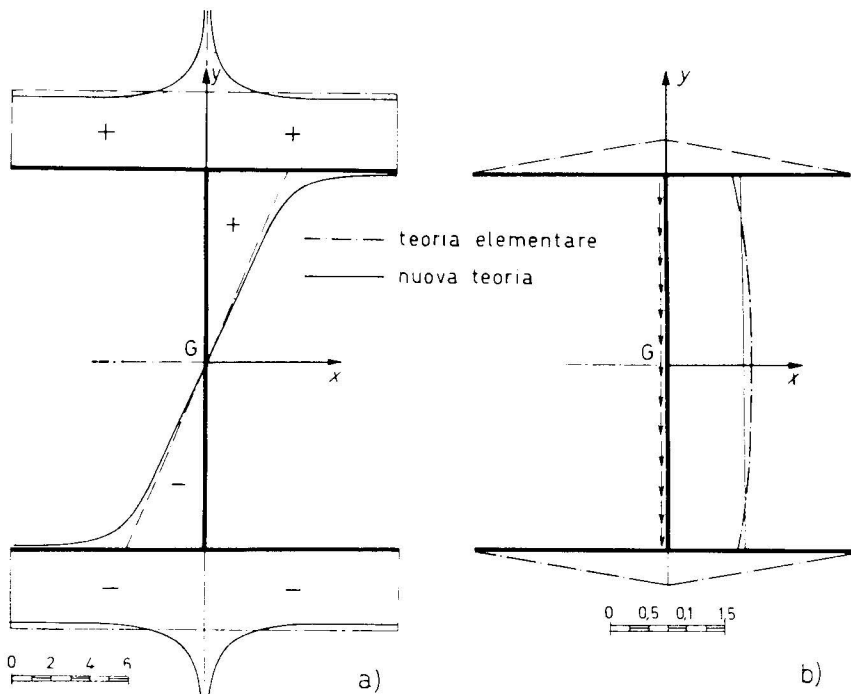


FIG. 8 - L'andamento delle tensioni norm. e tangenz. nella sezione di mezzeria dovuta alla forza  $P_y$ .  
(a: diagramma della funzione  $\frac{2th}{P_y} \sigma_{zm}$ ; b: diagramma della funzione  $\frac{2th}{P_y} \tau_{zsm}$ ).

bassissimo e dipendente peraltro dal rapporto  $t/h$  fra spessore a altezza della sezione. Tutte le successive viceversa hanno fattori di smorzamento piuttosto elevati e pressoché indipendenti dal rapporto  $t/h$ .

Se risulta pertanto verificata la relazione:

$$(121) \quad l \geq 1,30 h$$

essendo per la (Nota III, (116))  $1,30 h$  la distanza d'estinzione relativa alla seconda onda d'ingobbimento, alla (120) può darsi l'aspetto semplificato:

$$(122) \quad \psi_z(s) = \frac{C_1}{\alpha_1 I_1} \phi_1(s) \operatorname{tgh} \alpha_1 l + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha_n I_n} \phi_n(s)$$

essendo con ottima approssimazione verificata per ogni  $n$  (ad esclusione di  $n = 1$ ) la relazione:

$$(123) \quad \operatorname{tgh} \alpha_n t \approx 1$$

Si osserva peraltro che ponendo  $b = h$  e  $C_z = 1$  si ha per le (Nota III, (107)), (Nota III, (108)) e (Nota III, (96)):

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_n(s_2) = - \frac{h^2}{4} (1 + 2k^2) \frac{\sin \frac{2\lambda_n}{h} s_2}{\sin \lambda_n} \\ \alpha_n = \frac{2\lambda_n}{h} \sqrt{\frac{1-v}{2}} \\ C_{nz} = 1 \end{array} \right.$$

essendo  $k = \frac{t}{h}$  e  $\lambda_n$  la generica radice ennesima della equazione trascendente:

$$(125) \quad \lambda \cos \lambda - \frac{1}{1 + 2k^2} \sin \lambda = 0$$

Alle radici della (125) può darsi forma sufficientemente approssimata secondo le relazioni:

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = k \sqrt{6} \\ \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (n = 2, 3, 4, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

per cui le funzioni  $\phi_n$  e i relativi parametri  $\alpha_n$  possono scriversi nella forma approssimata

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1(s_2) = - \frac{h^2}{4} (1 + 2k^2) \frac{2s_2}{h} \\ \alpha_1 = \frac{2k}{h} \sqrt{\frac{1-v}{3}} \\ \phi_n(s_2) = - \frac{h^2}{4} (1 + 2k^2) (-1)^n \sin \frac{2n-1}{h} \pi s_2 \\ \alpha_n = \frac{2n-1}{h} \pi \sqrt{\frac{1-v}{2}} \quad (n = 2, 3, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

essendosi posto in considerazione dell'eseguità della radice  $\lambda_1$ , per gli usuali valori del rapporto  $k$ :

$$(128) \quad \frac{\sin \frac{2 \lambda_1}{h} s_2}{\sin \lambda_1} \approx \frac{2 s_2}{h}$$

Dalle (127) si trae peraltro per le corrispondenti norme  $I_n$ :

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 \approx \frac{t h^5}{24} (1 + 2 k^2)^2 \\ I_n \approx \frac{t h^5}{16} (1 + 2 k^2)^2 \quad (n = 2, 3, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

e quindi in definitiva la funzione (122) assume l'aspetto:

$$(130) \quad \psi_z(s_2) = -\frac{4}{th^2} \cdot \frac{1}{1 + 2k^2} \sqrt{\frac{2}{1-r} \left| \frac{6}{4k} \right.} \cdot \frac{s_2}{h} \operatorname{tgh} \left( \frac{2kl}{h} \left| 3(1-r) \right. \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin \frac{2n-1}{h} \pi s_2}{2n-1} \left\{ \right.$$

Alla (130) tenendo presente la (93) può darsi con semplici trasformazioni, la forma.

$$(131) \quad \psi_z(s_2) = -\frac{4}{th^2} \cdot \frac{1}{1 + 2k^2} \sqrt{\frac{2}{1-r} \left| \frac{6}{4k} \right.} \cdot \frac{s_2}{h} \operatorname{tgh} \left( \frac{2kl}{h} \left| 3(1-r) \right. \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi s_2}{h} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{2 s_2}{h} \right) \right] \left\{ \right.$$

Per il calcolo delle tensioni tangenziali, risulta invece dalle (Nota III, (85)) per  $b = h$  e  $\frac{t}{h} = k$ .

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega_z}{ds_2} = -\frac{1}{(1 + 2k^2) th^2} \\ \frac{I_p}{q} \cdot \frac{D_{33}}{D} = \frac{2k^2}{1 + 2k^2} \end{array} \right.$$

Le (119) assumono pertanto l'aspetto:

$$\begin{aligned}
 (133) \quad \sigma_{zm} &= -\frac{\mathcal{M}_z}{2th^2} \cdot \frac{4}{1+2k^2} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left\{ \frac{6}{4k} \cdot \frac{s_2}{h} \operatorname{tgh} \left( \frac{2kl}{h} \sqrt{3(1-\nu)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi s_2}{h} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{2s_2}{h} \right) \right] \right\} \\
 \tau_{zsm} &= \frac{\mathcal{M}_z}{2th^2} \frac{1}{1+2k^2} \\
 \bar{M}_{tm} &= -\frac{\mathcal{M}_z}{2} \frac{2k^2}{1+2k^2}
 \end{aligned}$$

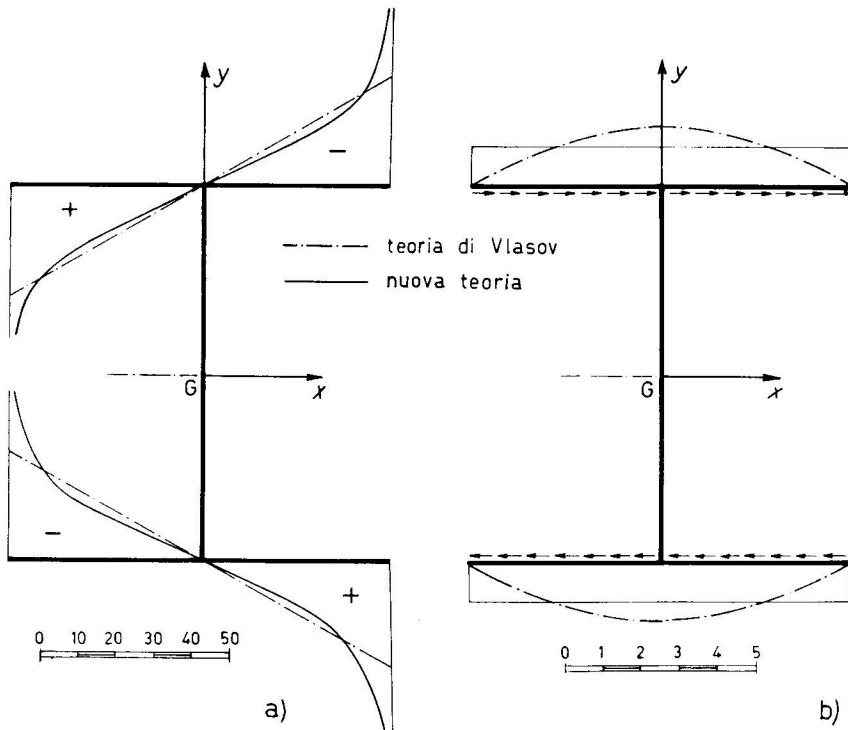


Fig. 9 - L'andamento delle tensioni norm. e tangenz. nella sez. di mezzeria dovute alla coppia  $\mathcal{M}_z$ .  
 (a: diagramma della funzione  $\frac{2th^2}{\mathcal{M}_z} \sigma_{zm}$ ; b: diagramma della funzione  $\frac{2th^2}{\mathcal{M}_z} \tau_{zsm}$ ).

Anche in questo caso giova notare che le tensioni normali  $\sigma_{zm}$  possono decomporre in una parte dipendente dal rapporto  $l/h$  e dal rapporto  $k = t/h$ , ed in una seconda parte pressoché indipendente dai detti rapporti.

Le prime coincidono all'incirca con le tensioni desumibili dalla *teoria delle aree settoriali* di Vlasov-Timoshenko, le altre costituiscono il termine aggiuntivo necessario per la congruenza dello spostamento longitudinale della sezione di mezzeria.

In Fig. 9 sono riportate le leggi di variazione delle tensioni normali e tangenziali assumendo:

$$\frac{l}{h} = 5, \quad \frac{t}{h} = 0.02, \quad r = 0,3.$$

Anche in questo caso si rileva che per quanto attiene alle tensioni normali  $\sigma_{zm}$  lieve è la differenza dalla distribuzione desumibile secondo la teoria delle aree settoriali, eccezione fatta per le prossime ai bordi estremi della sezione ove invece tali tensioni tendono a valori infinitamente grandi. Differenza sostanziale si rileva invece nella distribuzione delle tensioni tangenziali per le quali alla distribuzione parabolica della teoria del Vlasov si sostituisce un andamento uniforme come già riscontrato per il caso del carico agente secondo l'asse  $x$ .

## 6 - Il calcolo degli spostamenti e delle rotazioni per il caso del solido isostatico.

Nei paragrafi precedenti si è giunti alla definizione delle caratteristiche generalizzate della sollecitazione nelle condizioni più generiche di carico e di vincolo limitandosi tuttavia al solo caso delle travi isostatiche. Volendo estendere la teoria al caso generale delle travi iperstatiche è necessario pervenire alla formulazione dei legami fra le caratteristiche dello spostamento rigido della sezione

$$(134) \quad u_0, v_0, q_0, w_z, q_y, q_x$$

e le caratteristiche generalizzate della sollecitazione:

$$(135) \quad T_x, T_y, M_z, N_z, M_x, M_y, \dots, M_n, T_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

Per pervenire a tali relazioni, ricordando l'espressione:

$$(136) \quad w(z, s) = w_z(z) + q_y(z) x(s) + q_x(z) y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z) \Phi_n(s)$$

esprimibile peraltro per la (50) nella forma:

$$(137) \quad w(z, s) = w_z + q_y x(s) + q_x y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \\ \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ T_n - C_{nx} T_x - C_{ny} T_y - C_{nz} M_z \right\} \Phi_n(s),$$

è sufficiente sostituire tale espressione nelle relazioni di equilibrio e di congruenza:

$$\begin{aligned}
 N_z &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial z} dA \\
 M_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial z} x dA \\
 M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial z} y dA \\
 T_x &= G \left\{ \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \frac{dx}{ds} dA - d_{11} \frac{du_0}{dz} + d_{12} \frac{dv_0}{dz} + d_{13} \frac{dq_0}{dz} \right\} \\
 T_y &= G \left\{ \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \frac{dy}{ds} dA - d_{12} \frac{du_0}{dz} + d_{22} \frac{dv_0}{dz} + d_{23} \frac{dq_0}{dz} \right\} \\
 M_z &= G \left\{ \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \frac{dw_z}{ds} dA + d_{13} \frac{du_0}{dz} + d_{23} \frac{dv_0}{dz} + d_{33} \frac{dq_0}{dz} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

di immediata interpretazione tenendo presenti le espressioni (Nota I, (23)) delle tensioni interne e le posizioni (Nota I, (46)) per i coefficienti  $d_{ik}$ .

Le (138), ricordando le trasformazioni (Nota I, (49)) e (Nota I, (50)) possono peraltro mettersi nella forma:

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial w}{\partial z} dA &= \frac{1-\nu^2}{E} N_z \\
 \int_A \frac{\partial w}{\partial z} x dA &= -\frac{1-\nu^2}{E} M_y \\
 \int_A \frac{\partial w}{\partial z} y dA &= \frac{1-\nu^2}{E} M_x \\
 \frac{du_0}{dz} &= -\int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA + \frac{1}{GD} \left\{ D_{11} T_x + D_{12} T_y + D_{13} M_z \right\} \\
 \frac{dv_0}{dz} &= -\int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \frac{1}{GD} \left\{ D_{12} T_x + D_{22} T_y + D_{23} M_z \right\} \\
 \frac{dq_0}{dz} &= -\int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA + \frac{1}{GD} \left\{ D_{13} T_x + D_{23} T_y + D_{33} M_z \right\}
 \end{aligned}
 \tag{139}$$

Ricordando inoltre che per le (Nota II, (152)) e (Nota II, (128)):

$$(140) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx}}{\alpha_n^2} \phi_n &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{G A} \phi_n = \frac{\omega_x}{G I_y} + \frac{\chi_x}{G A} x + \frac{\chi_{xy}}{G A} y \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{ny}}{\alpha_n^2} \phi_n &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{G A} \phi_n = \frac{\omega_y}{G I_x} - \frac{\chi_{xy}}{G A} x - \frac{\chi_y}{G A} y \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} \phi_n &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{G A} \phi_n = \frac{q \omega_z}{G I} \end{aligned} \right.$$

la (137) può porsi nella forma:

$$(141) \quad w(z, s) = w_z - q_y x(s) - q_x y(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r^2}{E I_n} \cdot \frac{T_n}{\alpha_n^2} \phi_n(s) + \\ - \frac{T_x}{G} \left( \frac{\omega_x}{I_y} + \frac{\chi_x}{A} x + \frac{\chi_{xy}}{A} y \right) - \frac{T_y}{G} \left( \frac{\omega_y}{I_x} - \frac{\chi_{xy}}{A} x + \frac{\chi_y}{A} y \right) - \frac{q M_z}{G I_p} \omega_z.$$

La (141) sostituita infine nelle (139), tenendo presenti le condizioni di ortogonalità fra le funzioni coordinate  $1, x, y$  e le autofunzioni  $\phi_n$ , le analoghe relazioni con le funzioni a fattore delle caratteristiche trasversali, ed inoltre le (Nota I, (49')) e (Nota II, (83), (122), (152)), porgono le equazioni:

$$(142) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dw_z}{dz} &= \frac{1-r^2}{E A} N_z \\ \frac{dq_y}{dz} &= \frac{1-r^2}{E I_y} M_y \\ \frac{dq_x}{dz} &= \frac{1-r^2}{E I_x} M_x \\ \frac{du_0}{dz} &= q_y + \frac{\chi_x}{G A} T_x + \frac{\chi_{xy}}{G A} T_y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{G A} T_n \\ \frac{dv_0}{dz} &= -q_x + \frac{\chi_{xy}}{G A} T_x + \frac{\chi_y}{G A} T_y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{G A} T_n \\ \frac{dq_0}{dz} &= \frac{q M_z}{G I_p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{G A} T_n \end{aligned} \right.$$

Le (142) costituiscono i richiesti legami fra le caratteristiche generalizzate della sollecitazione ed i parametri del moto rigido della sezione. A queste è opportuno aggiungere in linea concettuale le (50) esprimenti l'analogo legame per gli infiniti parametri d'ingobbimento della sezione.



Giova ricordare per l'applicazione pratica delle (142) le espressioni:

$$(143) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\chi_x}{A} &= -\frac{1}{I_y^2} \int_A \omega_x x \, dA \\ \frac{\chi_y}{A} &= -\frac{1}{I_x^2} \int_A \omega_y y \, dA \\ \frac{\chi_{xy}}{A} &= -\frac{1}{I_x I_y} \int_A \omega_x y \, dA = -\frac{1}{I_y I_x} \int_A \omega_y x \, dA \\ \frac{\chi_{nx}}{A} &= -\frac{1}{I_y I_n} \int_A \omega_x \Phi_n \, dA = -(1 - \nu^2) \frac{G}{E} \cdot \frac{C_{ny}}{\alpha_n^2} \\ \frac{\chi_{ny}}{A} &= -\frac{1}{I_x I_n} \int_A \omega_y \Phi_n \, dA = -(1 - \nu^2) \frac{G}{E} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha} \\ \frac{\chi_{ny}}{A} &= -\frac{q}{I_p I_n} \int_A \omega_z \Phi_n \, dA = -(1 - \nu^2) \frac{G}{E} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} \end{aligned} \right.$$

dedotte dalle (Nota II, (128)) tenendo presenti le relazioni (Nota II, (152)).

### 7 - Un esempio di calcolo dei parametri dello spostamento rigido in un caso particolare di carico.

In applicazione a quanto esposto facendo specifico riferimento al caso già studiato al paragrafo 5 per quanto attiene al regime tensionale (Fig. 3), le relazioni (142) tenendo presenti le espressioni (62) e (65) delle caratteristiche generalizzate della sollecitazione porgono:

$$(144) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dw_z}{dz} &= 0 \\ \frac{d\varphi_y}{dz} &= -\frac{P_x}{2 E I_y} (l - z) \\ \frac{d\varphi_x}{dz} &= \frac{P_y}{2 E I_x} (l - z) \\ \frac{du_0}{dz} &= \varphi_y - \frac{\chi_x P_x}{2 G A} - \frac{\chi_{xy} P_y}{2 G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx} P_n}{2 G A} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \\ \frac{dv_0}{dz} &= -\varphi_x - \frac{\chi_{xy} P_x}{2 G A} - \frac{\chi_y P_y}{2 G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny} P_n}{2 G A} \frac{\cosh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= -\frac{q \mathcal{M}_z}{2 G I_p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz} P_n}{2 G A} \frac{\cosh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \end{aligned} \right.$$

Alle (144) può darsi soluzione osservando che per condizioni di simmetria in  $z = 0$  e di vincolo in  $z = l$  devono essere soddisfatte le condizioni di limiti

$$(145) \quad \begin{cases} w_z = \varphi_y = \varphi_x = 0 & \text{per } z = 0 \\ u_0 = v_0 = \varphi_0 = 0 & \text{per } z = l \end{cases}$$

Le (144), associate alle (145) porgono pertanto le relazioni:

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} w_z &= 0 \\ \varphi_y &= -\frac{P_x}{2 E I_y} z \left( l - \frac{z}{3} \right) \\ \varphi_x &= \frac{P_y}{2 E I_x} z \left( l - \frac{z}{3} \right) \\ u_0 &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \left( \frac{l^3}{3} - \frac{l z}{2} + \frac{z^3}{6} \right) + \frac{\chi_x}{G A} (l - z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{G A} \cdot \frac{C_{nx}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \right\} + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{\chi_{xy}}{G A} (l - z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{G A} \frac{C_{ny}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \right\} + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nx}}{G A} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \\ v_0 &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{\chi_{xy}}{G A} (l - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{G A} \frac{C_{nx}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \right\} + \\ &\quad + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \left( \frac{l^3}{3} - \frac{l z}{2} + \frac{z^3}{6} \right) + \frac{\chi_y}{G A} (l - z) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{G A} \cdot \frac{C_{ny}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \right\} + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{G A} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \\ \varphi_0 &= \frac{P_x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{G A} \cdot \frac{C_{nx}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} + \frac{P_y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{G A} \frac{C_{ny}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \\ &\quad + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ \frac{q}{G I_p} (l - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{G A} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\cosh \alpha_n l} \right\} \end{aligned} \right.$$

Di tali espressioni particolare interesse rivestono i valori degli spostamenti  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\varphi_0$  relativi alla sezione di mezzeria ove massimo è lo scostamento della teoria esposta dal-

la teoria elementare. Ponendo pertanto nelle precedenti relazioni  $z = 0$  e tenendo conto delle (143) si ottiene:

$$(147) \left\{ \begin{aligned} u_{om} &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{1 - \nu^2}{3 E I_y} l^3 + \frac{\chi_x l}{G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx}^2}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \\ &\quad + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{\chi_{xy} l}{G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \frac{C_{nx} C_{ny}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \\ &\quad - \frac{M_z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx} C_{nz}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \\ v_{om} &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{\chi_{xy} l}{G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx} C_{nz}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \\ &\quad + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{1 - \nu^2}{3 E I_x} l^3 + \frac{\chi_y l}{G A} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{ny}^2}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \\ &\quad - \frac{M_z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{ny} C_{nz}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \\ \varphi_{om} &= - \frac{P_x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \frac{C_{nx} C_{nz}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l - \frac{P_x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \frac{C_{ny} C_{nz}}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l + \\ &\quad + \frac{M_z}{2} \left\{ \frac{q l}{G I_p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nz}^2}{\alpha_n^3} \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} \end{aligned} \right.$$

Facendo specifico riferimento al caso della trave a sezione trasversale a  $I$  doppiamente simmetrica già illustrata nei paragrafi precedenti per quanto concerne il regime tensionale in mezzera, avendosi per questa:

$$(148) \left\{ \begin{aligned} A &= 3 t h \\ I_x &= \frac{7 t h^3}{12} \\ I_y &= \frac{t h^3}{6} \\ \frac{I_p}{q} &= t^3 h \\ \chi_x &= \frac{9}{5} \\ \chi_y &= \frac{828}{245} \\ \chi_{xy} &= 0 \end{aligned} \right.$$

si ottiene avvalendosi dei valori approssimati (90), (91), (110), (111), (127), (129) per i valori dei parametri  $\alpha_n$  e delle norme  $I_n$  e tenendo presenti le relazioni: (85), (104) e (123)

$$(149) \left\{ \begin{aligned} u_{om} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{P_x}{2t} \left\{ \frac{2 l^3}{h^3} + \frac{2}{1 - \nu} \cdot \frac{3 l}{5 h} - \frac{4}{\pi^3} \left( \frac{2}{1 - \nu} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right. \\ v_{om} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{P_y}{2t} \left\{ \frac{4 l^3}{7 h^3} + \frac{2}{1 - \nu} \cdot \frac{276 l}{245 h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left( \frac{2}{1 - \nu} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n\pi - \vartheta_0)^3} + \frac{1}{(n\pi + \vartheta_0)^3} \right] \right\} \\ \varphi_{om} &= \frac{1}{G} \cdot \frac{M_z}{2 t^3} \left\{ \frac{l}{h} - \frac{1}{(1 + 2 k^2)^2} \left( \frac{2}{1 - \nu} \right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{1}{2 k \sqrt{6}} \operatorname{tgh} \left( \frac{2 k l}{h} \sqrt{3(1 - \nu)} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{16 k^2}{\pi^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

Nelle (149) giova ricordare che le somme delle serie numeriche ivi riportate possono porsi con buona approssimazione:

$$(150) \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} &\approx 0,0515 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n\pi - \vartheta_0)^3} + \frac{1}{(n\pi + \vartheta_0)^3} \right] &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 \pi^3} \approx \frac{2,4041}{\pi^3} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} &\approx 0,0515 . \end{aligned} \right.$$

Si rileva pertanto che i termini correttivi degli spostamenti, e quindi in definitiva i movimenti conseguenti alle caratteristiche d'ingobbimento, sono per gli usuali rapporti  $l/h$  del tutto trascurabili rispetto ai termini classici della teoria elementare. Fa eccezione al solito il termine associato alla prima caratteristica d'ingobbimento semplice che riporta, all'incirca, i valori della rotazione torsionale a quella deducibile dalla teoria delle aree settoriali di VLASOV-TIMOSHENKO.

## 7 - Conclusioni.

La teoria esposta nella presente Nota fornisce la corretta impostazione del calcolo del regime tensionale nelle travi di parete sottile a sezione trasversalmente indeformabile soggette alle più generiche condizioni di carico e comunque vincolate agli estremi.

Il problema è ridotto in definitiva alla determinazione delle infinite caratteristiche aggiuntive  $M_n$  e  $T_n$  per le quali le equazioni (56) e le condizioni ai limiti (58), (60) e (61) forniscono immediata e semplice soluzione. L'esempio, svolto fino al numero per la trave di sezione a  $I$ , mostra chiaramente come i risultati, per quanto attiene al regime tensionale, possano differire notevolmente da quelli deducibili secondo la teoria elementare delle travi, ovvero anche secondo la più moderna teoria delle aree settoriali di Vlasov-Timoshenko.

Il metodo si presta peraltro allo studio dei casi più generici fra i quali non vanno ignorati quelli relativi alle travi di sezione pluriconnessa non sviluppati numericamente per sole ragioni di spazio.

Esaurito pertanto in linea teorica il problema delle forze resta da affrontare il solo problema delle distorsioni che, in chiusura della teoria generale delle travi di parete sottile, verrà affrontato e risolto nella Nota V.

---

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] B. Z. VLASOV: *Thin-walled elastic beams* (Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1961). [Publ. for the National Science Foundation, Washington, D.C.].
  - [2] S. TIMOSHENKO: «Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open section», in *Journal Franklin Institute* (1945).
  - [3] VON KÁRMÁN & CHRISTENSEN: «Methods of analysis for torsion with variable twist», in *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 11, n. 2 (1964).
  - [4] VON KÁRMÁN & WEI ZANG CHEN: «Torsion with variable twist», in *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 13 (1946).
  - [5] G. P. TOLSTOV: *Fourier series* (Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962).
  - [6] M. CAPURSO: «La trattazione di Jourawski per le sezioni pluriconnesse», in *Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, s. 4, vol. 28 (1961).
  - [7] M. CAPURSO: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota I: La teoria rigorosa e le equazioni fondamentali», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 6, 213 (1964).
  - [8] —: «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota II: La generalizzazione del problema del Saint-Venant», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)** vol. 6, 241 (1964).
  - [9] —: «Sul calcolo delle travi di parete sottile, in presenza di forze e distorsioni. Nota III: Complementi analitici: il calcolo delle funzioni caratteristiche per alcuni tipi di travi di parete sottile di comune impiego», in *Ric. sci.*, **34 (II-A)**, vol. 7, 5 (1964).
-