

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni

Nota IV: L'effetto dei carichi trasversali sulle sollecitazioni e gli spostamenti delle travi di parete sottile (*)

MICHELE CAPURSO

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Università di Napoli

Lavoro eseguito con il contributo del CNR

Testo ricevuto il 19 febbraio 1964

1 - Premessa.

La soluzione rigorosa del problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile fornita nella Nota II per il caso dei carichi agenti sulle sole basi terminali consente peraltro di studiare nelle stesse ipotesi dei casi più complessi di sollecitazione fra i quali primeggia il problema dei carichi localizzati sulla superficie laterale del solido. In sostanza si tratta di individuare l'effettivo regime tensionale che si desta nella parete per effetto di azioni diffuse o concentrate agenti sulla superficie laterale della trave con legge tutt'affatto generica.

Tale regime resta individuato dalle componenti speciali di tensione σ_z , τ_{zs} e, nel solo caso delle sezioni monoconnesse, dal momento torcente interno (Nota I, (25)):

$$(1) \quad \overline{M}_t = \frac{G I_p}{q} \frac{d\varphi_0}{dz}$$

cui si associa la distribuzione di tensioni tangenziali $\bar{\tau}_{zs}$ sviluppantesi secondo la classica legge lineare delle sezioni sottili monoconnesse della teoria del SAINT-VENANT.

Per la definizione di tali funzioni è fondamentale la ricerca delle componenti dello spostamento $w(z, s)$, $u_0(z)$, $v_0(z)$, $\varphi_0(z)$ che caratterizzano univocamente il moto del generico punto della sezione trasversale della trave.

(*) Lavoro presentato dal prof. ELIO GIANGRECO, O. di tecnica delle costruzioni, Università, Napoli.

Fra queste assume importanza predominante la prima che, per quanto ampiamente illustrato nella Nota II può porsi nella forma:

$$(2) \quad w(z, s) = w_0(z, s) + w_1(z, s)$$

essendo:

$$(3) \quad w_0(z, s) = w_z(z) - \varphi_y(z) x(s) + \varphi_x(z) y(s)$$

l'aliquota di spostamento caratterizzante il moto rigido longitudinale della generica sezione, e

$$(4) \quad w_1(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \Phi_n(s)$$

l'aliquota di spostamento caratterizzante la legge d'ingobbimento della sezione trasversale della trave. La definizione in tale spirito dei parametri del movimento conduce infatti in perfetta dualità alla definizione dei parametri di forza: $\sigma_z(z, s)$, $T_x(z)$, $T_y(z)$, $M_z(z)$ che caratterizzano univocamente il regime tensionale nella parete. Fra questi predomina ancora la σ_z che, come si è visto, può porsi nella forma:

$$(5) \quad \sigma_z(z, s) = \sigma_{0z}(z, s) + \sigma_{1z}(z, s)$$

essendo:

$$(6) \quad \sigma_{0z} = \frac{N_z}{A} - \frac{M_y}{I_y} x(s) + \frac{M_x}{I_x} y(s)$$

l'aliquota di tensione normale associata alla risultante longitudinale delle azioni esterne sollecitanti la trave, e:

$$(7) \quad \sigma_{1z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{I_n} \Phi_n(s)$$

l'aliquota di tensione associata alla presenza di azioni esterne autoequilibrate sollecitanti le basi terminali.

Non è inopportuno ricordare che, in assenza di carichi di superficie, la distribuzione delle caratteristiche fittizie M_n resta vincolata all'equazione lineare (Nota II, (71)):

$$(8) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = 0$$

α_n essendo un parametro (dimensionalmente una lunghezza alla meno uno) strettamente collegato alla corrispondente forma d'ingobbimento $\Phi_n(s)$.

Il problema vien qui condotto considerando inizialmente il caso delle azioni solitarie localizzate in corrispondenza di una generica sezione trasversale. Per semplice estensione si ritrova poi il caso delle azioni comunque diffuse sulla superficie laterale fornendo al procedimento la più completa generalità.

2 - Il calcolo delle tensioni d'ingobbimento in prossimità delle sezioni sedi di carichi concentrati.

Uno dei problemi più complessi dell'elasto-statica è il calcolo dello stato di tensione effettivo in prossimità di azioni superficiali di notevole entità e, al limite, concentrate in particolari punti di una struttura.

Per quanto attiene al caso delle travi di parete sottile a sezione trasversalmente indeformabile, il problema risulta in generale riportabile al calcolo del regime tensionale in prossimità di una generica sezione sede di applicazione delle forze trasversali: P_x , P_y , M_z e della distribuzione di carichi longitudinali $q_z(s)$ agenti parallelamente all'asse geometrico per unità di lunghezza della direttrice della sezione (Fig. 1).

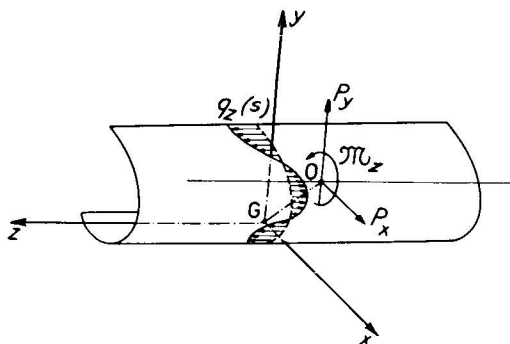


FIG. 1 - Schema delle azioni esterne applicate nella sezione $z = 0$.

Per queste ultime, in conformità con quanto esposto nella Nota II, è lecito assumere lo sviluppo:

$$(9) \quad \frac{q_z(s)}{t} = \frac{P_z}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{I_n} \Phi_n$$

t essendo lo spessore della parete e P_z , M_y , M_x , M_n , i coefficienti dello sviluppo alla Fourier:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_z = \int_A \frac{q_z}{t} dA, \\ M_y = - \int_A \frac{q_z}{t} x dA, \\ M_x = \int_A \frac{q_z}{t} y dA, \\ \dots \dots \dots \\ M_n = \int_A \frac{q_z}{t} \Phi_n dA \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Porremo quindi:

$$(11) \quad \frac{q_z(z)}{t} = \frac{q_{0z}(s)}{t} + \frac{q_{1z}(s)}{t}$$

separando al solito dalla distribuzione lineare:

$$(12) \quad \frac{q_{0z}(s)}{t} = \frac{P_z}{A} - \frac{\mathcal{M}_y}{I_y} x + \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} y$$

associata alla risultante delle q_z , la distribuzione:

$$(13) \quad \frac{q_{1z}(s)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_n}{I_n} \Phi_n$$

a carattere autoequilibrato.

Indicando col simbolo Δ la differenza in $z = 0$ fra le caratteristiche relative al tronco di trave di ascissa positiva e le caratteristiche relative al tronco di ascissa negativa, in tale sezione dovranno verificarsi le condizioni di equilibrio e congruenza:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tau_z + \frac{q_z}{t} = 0 & \Delta w = 0 \\ \Delta T_x + P_x = 0 & \Delta u_o = 0 \\ \Delta T_y + P_y = 0 & \Delta v_o = 0 \\ \Delta M_z + \mathcal{M}_z = 0 & \Delta \varphi_o = 0 \end{array} \right.$$

le cui prime due per le (3), (5) e (12) si possono scindere nelle quattro relazioni:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \sigma_{0z} + \frac{q_{0z}}{t} = 0 & \Delta w_o = 0 \\ \Delta \sigma_{1z} + \frac{q_{1z}}{t} = 0 & \Delta w_1 = 0 \end{array} \right.$$

Accoppiando pertanto le prime due delle (15) con le ultime tre delle (14) e tenendo presenti le (3), (6) e (12) si ottengono le sei classiche condizioni di equilibrio e di congruenza della teoria elementare della trave:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta N_z + P_z = 0 & \Delta w_z = 0 \\ \Delta M_y + \mathcal{M}_y = 0 & \Delta \varphi_y = 0 \\ \Delta M_x + \mathcal{M}_x = 0 & \Delta \varphi_x = 0 \\ \Delta T_x + P_x = 0 & \Delta u_o = 0 \\ \Delta T_y + P_y = 0 & \Delta v_o = 0 \\ \Delta M_z + \mathcal{M}_z = 0 & \Delta \varphi_o = 0 \end{array} \right.$$

Le (16) fondamentali per il calcolo delle sei classiche caratteristiche della sollecitazione e dei sei parametri del movimento rigido della sezione trasversale della trave, non verranno per il momento prese in considerazione, riservandoci di tornare su di esse quanto prima.

È invece opportuno occuparsi inizialmente delle ultime due delle (15), che costituiscono nel loro insieme le condizioni di equilibrio per la parte autoequilibrata delle azioni esterne $q_z(s)$ e di congruenza per quanto riguarda l'ingobbimento della sezione $z = 0$.

Tali condizioni, mai prese finora in considerazione nella teoria delle travi di parete sottile, sono infatti le uniche che consentono di determinare correttamente il regime di tensione locale in prossimità di carichi concentrati ed in particolare quei valori esasperati delle tensioni che proprio in prossimità di tali zone costituiscono spesso una notevole insidia per la sicurezza della struttura.

Tali relazioni esplicitate in conformità con le (4), (7) e (13), si trasformano nelle infinite condizioni lineari:

$$(17) \quad \Delta M_n + M_n = 0; \quad \Delta q_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Giova a questo punto ricordare che, in conformità con le (Nota II, (106)) e (Nota II, (130)) può dedursi quale legame fra l'ingobbimento $q_n(z)$ della sezione secondo la funzione $\phi_n(s)$, e le caratteristiche generalizzate della sollecitazione, la relazione:

$$(18) \quad q_n = \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{dM_n}{dz} = \frac{\chi_{nx}}{G A} T_x = \frac{\chi_{ny}}{G A} T_y = \frac{\chi_{nz}}{G A} M_z$$

La (18), tenendo peraltro presenti le (Nota II, (152)), può scriversi nella forma:

$$(19) \quad q_n = \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{dM_n}{dz} = C_{nx} T_x = C_{ny} T_y = C_{nz} M_z$$

C_{nx} , C_{ny} , C_{nz} essendo i coefficienti caratteristici della funzione d'ingobbimento ennesima ϕ_n espressi dalle (Nota II, (50)) secondo le relazioni:

$$(20) \quad \begin{cases} C_{nx} = \int_A \frac{d\phi_n}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA \\ C_{ny} = \int_A \frac{d\phi_n}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA \\ C_{nz} = \int_A \frac{d\phi_n}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \end{cases}$$

La seconda della (17) assume pertanto l'aspetto:

$$(21) \quad \Delta \left(\frac{dM_n}{dz} \right) - C_{nz} \Delta T_x - C_{ny} \Delta T_y - C_{nz} \Delta M_z = 0 .$$

Facendo quindi la posizione:

$$(22) \quad \frac{dM_n}{dz} = T_n ,$$

e tenendo presenti le (16), le (17) assumono pertanto l'aspetto definitivo:

$$(23) \quad \Delta M_n + \mathcal{M}_n = 0 , \quad \Delta T_n + P_n = 0 , \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

avendo posto:

$$(24) \quad P_n = C_{nx} P_x + C_{ny} P_y + C_{nz} \mathcal{M}_z .$$

Non è superfluo far notare che la seconda delle (23), pur sembrando simbolicamente una relazione di equilibrio, è nella realtà una ben precisa condizione di congruenza che esprime l'eguaglianza degli ingobbimenti della trave in corrispondenza della sezione $z = 0$.

Le (23) non sono tuttavia sufficienti in generale per la definizione della caratteristica d'ingobbimento M_n che, dovendo soddisfare in entrambi i tratti in cui la trave è suddivisa dalla sezione $z = 0$ alla (8), richiede quattro e non due sole condizioni ai limiti. Facendo riferimento però al caso in cui la sezione $z = 0$ è posta a distanza notevole dalle basi estreme, in pratica superiore alla più forte distanza d'estinzione d_1 , è lecito, in virtù dello smorzamento, assumere per M_n l'espressione:

$$(25) \quad \begin{cases} M_n(z) = A_n e^{-\alpha_n z} & \text{per } z > 0 \\ M_n(z) = B_n e^{\alpha_n z} & \text{per } z < 0 \end{cases}$$

potendosi ora ricavare A_n e B_n dalle (23) nella forma:

$$A_n = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) ,$$

$$B_n = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) .$$

Il momento d'ingobbimento (25) assume pertanto l'aspetto:

$$(26) \quad \begin{cases} M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) e^{-\alpha_n z} & (z > 0) \\ M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) e^{\alpha_n z} & (z < 0) \end{cases}$$

Le (26) teoricamente rigorose per distanze infinite della sezione $z = 0$ dalle basi estreme, sono in realtà sufficientemente esatte per tutte le onde per cui è verificata la relazione:

$$(27) \quad \begin{cases} \xi \geq d_n \\ \xi' \geq d_n \end{cases}$$

se ξ e ξ' sono le distanze dell'origine dalle basi estreme, e d_n è la distanza d'estinzione della relativa onda di ingobbimento.

Posto che tali condizioni siano verificate per ogni n , le sollecitazioni locali destan-tesi in prossimità della sezione singolare $z = 0$ assumono per la (7) l'aspetto:

$$(28) \quad \begin{cases} \sigma_{1z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) \frac{\phi_n(s)}{I_n} e^{-\alpha_n z} & (z > 0) \\ \sigma_{1z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) \frac{\phi_n(s)}{I_n} e^{\alpha_n z} & (z < 0) \end{cases}$$

e al loro fianco sono da considerarsi ancora le τ_{zs} ed, eventualmente le $\bar{\tau}_{zs}$ associate al momento $\bar{M}_t$. Per le prime tenendo presente la (Nota II, (110)) si ha:

$$(29) \quad \begin{cases} \tau_{1zs} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 I_n} (P_n - \alpha_n \mathcal{M}_n) \frac{d\omega_n}{ds} e^{-\alpha_n z} & (z > 0) \\ \tau_{1zs} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 I_n} (P_n + \alpha_n \mathcal{M}_n) \frac{d\omega_n}{ds} e^{\alpha_n z} & (z < 0) \end{cases}$$

per le seconde, nel solo caso delle sezioni monoconnesse, è sufficiente la definizione del momento torcente interno (1) che, nel presente caso, assume per la (Nota II, (106)) la forma:

$$(30) \quad \begin{cases} \bar{M}_{1t} = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) \frac{e^{-\alpha_n z}}{I_n} & (z > 0) \\ \bar{M}_{1t} = - \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) \frac{e^{\alpha_n z}}{I_n} & (z < 0) \end{cases}$$

Alle tensioni locali così calcolate vanno poi aggiunte quelle classiche relative alle sei caratteristiche tradizionali N_z , M_x , M_y , T_x , T_y , M_z . Se il solido è vincolato isostaticamente alcuna difficoltà si presenta in tale determinazione, mentre se il solido è vincolato iperstaticamente, essendo le reazioni iperstatiche influenzate dalle caratteristiche d'ingobbimento M_n , il calcolo risulta più laborioso e verrà esposto nel seguito.

Nel caso che il solido sia di lunghezza rilevante tuttavia le sollecitazioni locali come può desumersi dalle (28) e seguenti, sono del tutto indipendenti dalle condi-

zioni di vincolo della trave che può pertanto essere indifferentemente di tipo isostatico o iperstatico.

Se invece il solido risulta essere di lunghezza limitata e cioè tale che per qualche onda d'ingobbimento le (27) non sono verificate, le (26) rappresentano soltanto una soluzione equilibrata e congruente nell'interno del solido che non rispecchia però le effettive sollecitazioni d'ingobbimento a causa delle onde di perturbazione provenienti dalle due basi estreme.

In tal caso infatti la generica onda M_n può porsi nella forma più generale.

$$(31) \quad \begin{cases} M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) e^{-\alpha_n z} + M_{on}(z) & (z > 0) \\ M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) e^{\alpha_n z} + M_{on}(z) & (z < 0) \end{cases}$$

essendo:

$$(32) \quad M_{on}(z) = A_n e^{-\alpha_n z} + B_n e^{\alpha_n z}$$

l'integrale generale della (8) che consente di soddisfare le condizioni ai limiti non verificate dalla (26), sulla cui definizione si tornerà fra poco.

3 - Il calcolo delle tensioni d'ingobbimento per carichi comunque diffusi sulla superficie laterale della trave.

Le tensioni aggiuntive (7):

$$\sigma_{1z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{I_n} \phi_n(s)$$

non sono ovviamente da attribuirsi esclusivamente alla presenza di azioni localizzate in particolari sezioni trasversali della trave, ma anche alla presenza di azioni comunque diffuse sulla superficie laterale della trave.

Si noti infatti che supponendo la sezione caricata alla generica ascissa ξ , anziché all'ascissa 0, le (26) forniscono:

$$(33) \quad \begin{cases} M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} - \mathcal{M}_n \right) e^{-\alpha_n (z-\xi)} & (z > \xi) \\ M_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{\alpha_n} + \mathcal{M}_n \right) e^{\alpha_n (z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases}$$

e ricordando la posizione (24) possono scriversi nella forma:

$$(34) \quad M_n(z) = P_x H_{nx}(z, \xi) + P_y H_{ny}(z, \xi) + \mathcal{M}_z H_{nz}(z, \xi) + \mathcal{M}_n G_n(z, \xi).$$

essendo le funzioni H_{nx} , H_{ny} , H_{nz} , G_n definite dai nuclei esponenziali:

$$(35) \quad \left. \begin{aligned} H_{nx}(z, \xi) &= \begin{cases} \frac{C_{nx}}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n(z-\xi)} & (z > \xi) \\ \frac{C_{nx}}{2\alpha_n} e^{\alpha_n(z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases} \\ H_{ny}(z, \xi) &= \begin{cases} \frac{C_{ny}}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n(z-\xi)} & (z > \xi) \\ \frac{C_{ny}}{2\alpha_n} e^{\alpha_n(z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases} \\ H_{nz}(z, \xi) &= \begin{cases} \frac{C_{nz}}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n(z-\xi)} & (z > \xi) \\ \frac{C_{nz}}{2\alpha_n} e^{\alpha_n(z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases} \\ G_n(z, \xi) &= \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-\alpha_n(z-\xi)} & (z > \xi) \\ \frac{1}{2} e^{\alpha_n(z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

fisicamente coincidenti con le funzioni d'influenza del momento ingobbante M_n nella generica sezione all'ascissa z associate a carichi viaggianti di tipo P_x , P_y , $\mathcal{M}_z$ ed $\mathcal{M}_n$, per travi di lunghezza illimitata.

Posto pertanto di assumere l'origine degli assi su una sezione generica del solido e supponendo di indicare con:

$$p_x(z), p_y(z), m_z(z), m_n(z)$$

le generiche distribuzioni di carichi trasversali e di momenti ingobbanti esterni M_n (Fig. 2), la caratteristica di ingobbimento interna $M_n(z)$ assumerà l'aspetto:

$$(36) \quad \begin{aligned} M_n(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{nx}(z, \xi) p_x(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} H_{ny}(z, \xi) p_y(\xi) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} H_{nz}(z, \xi) m_z(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_n(z, \xi) m_n(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

La (36), facendo la posizione:

$$(37) \quad p_n(z) = C_{nx} p_x(z) + C_{ny} p_y(z) + C_{nz} m_z(z)$$

può peraltro scriversi nella forma più semplice:

$$(38) \quad M_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z, \xi) p_n(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH_n}{d\xi} m_n(\xi) d\xi$$

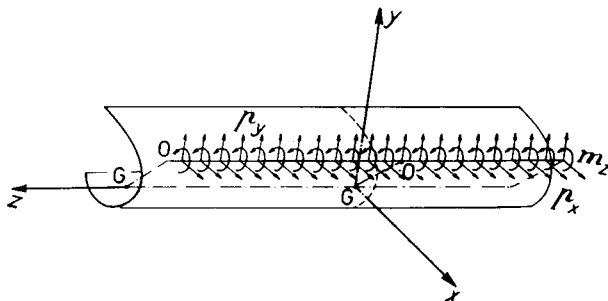


FIG. 2 - Schema dei carichi sollecitanti la trave.

avendo indicato con $H_n(z, \xi)$ il nuovo nucleo esponenziale:

$$(39) \quad H_n(z, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha_n} e^{-\alpha_n(z-\xi)} & (z > \xi) \\ \frac{1}{2\alpha_n} e^{\alpha_n(z-\xi)} & (z < \xi) \end{cases}$$

Posto pertanto che per ogni n risulti

$$(40) \quad l \geq 2 d_n$$

le tensioni normali d'ingobbimento nella zona centrale della trave possono dedursi secondo le (7) essendo i momenti d'ingobbimento $M_n(z)$ espressi con ottima approssimazione dalle (38). A tali tensioni sono ancora da associarsi le tensioni tangenziali τ_{zs} ed, eventualmente, le $\bar{\tau}_{zs}$ dipendenti dal momento $\bar{M}_t$ espresso dalla (1).

Per le prime, ponendo in analogia con la (Nota II, (110)):

$$(41) \quad \tau_{1zs} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(z)}{I_n} \cdot \frac{d\omega_n}{ds}$$

si rileva immediatamente, essendo per le (Nota II, (35) e (111)):

$$(42) \quad \frac{d^2\omega_n}{ds^2} = \phi_n(s),$$

la (84) assume l'aspetto definitivo:

$$(96) \quad \psi_x(s_2) = \frac{1}{th} \left\{ \frac{6l}{h} \cdot \frac{s_2}{h} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \left[\sin \frac{\pi s_2}{h} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{2s_2}{h} \right) \right] \right\}$$

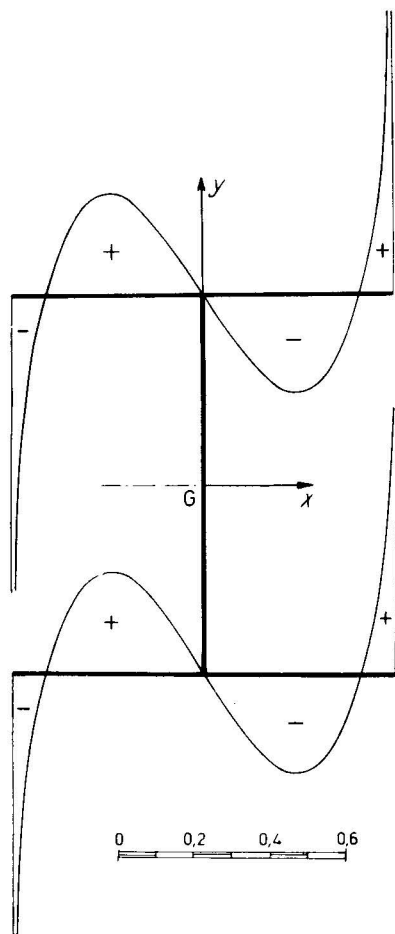


FIG. 5 - L'andamento delle tensioni normali d'ingobbimento nella sezione di mezzeria dovute alla forza P_x (Diagramma della funzione $\frac{2th}{P_x} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \sigma_{12m}$).

Molto più immediata è la determinazione delle tensioni tangenziali τ_{zs} e del momento interno M_t , essendo già noto dalle (Nota III, (85)) che:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{ds_2} = \frac{1}{2ht} \\ \frac{I_p}{q} \frac{D_{13}}{D} = 0. \end{array} \right.$$

che per il soddisfacimento puntuale della relazione di equilibrio:

$$(43) \quad \frac{\partial \sigma_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{1zs}}{\partial s} + \frac{p_{1z}}{t} = 0$$

riguardante la porzione autoequilibrata di azioni assiali esterne e di tensioni interne, deve risultare:

$$(44) \quad \frac{dM_n}{dz} - T_n + m_n = 0$$

Per le seconde, essenziali nel solo caso delle sezioni sottili monoconnesse, si ha per estensione della (Nota II, (106)):

$$(45) \quad \overline{M}_{1t} = - \frac{1 - \nu}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} \cdot \frac{T_n(z)}{I_n}$$

Anche in questo caso ovviamente alle tensioni così calcolate, almeno nel caso del solido di lunghezza rilevante, vanno aggiunte quelle relative alle sei caratteristiche classiche.

Il problema risolto così in generale per il solido lungo e cioè tale da rispettare per ogni n , e in particolare per $n = 1$, la (40) risulta invece incompleto se per qualche onda d'ingobbimento la (40) non è verificata.

In tal caso la (38) risulta infatti essere solamente una soluzione equilibrata e congruente nell'interno del solido ma non rispecchia le effettive sollecitazioni d'ingobbimento essendo influenzata dalle onde di perturbazione provenienti dalle basi estreme. È allora necessario dare aspetto generale alla soluzione ponendo:

$$(46) \quad M_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z, \xi) p_n(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH_n}{d\xi} m_n(\xi) d\xi + M_{0n}(z)$$

con M_{0n} espresso sempre dalla (32).

La (46) rappresenta la forma più generale del momento ingobbante ennesimo in una trave soggetta ai carichi di superficie p_x, p_y, m_z e ai momenti ingobbanti

$$(47) \quad m_n = \int_A \frac{p_z}{t} \phi_n dA$$

provocati dai carichi assiali $p_z(z, s)$.

Non è superfluo notare che per la particolare forma del nucleo H_n la (46) soddisfa la relazione:

$$(48) \quad \frac{d^3 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = - p_n(z) - \frac{dm_n}{dz}$$

che rappresenta l'equazione fondamentale del momento d'ingobbimento ennesimo in presenza di carichi di superficie.

La (48), tenendo presente la posizione (44) può scriversi peraltro nella forma:

$$(49) \quad \frac{dT_n}{dz} - \alpha_n^2 M_n + p_n = 0$$

che pur avendo l'aspetto di equazione d'equilibrio rappresenta la condizione di congruenza per le deformazioni di ingobbimento conseguenti all'applicazione dei carichi esterni.

Ciò risulta infatti osservando che per le (19) e (22) la espressione dell'ingobbimento φ_n può porsi nella forma:

$$(50) \quad \varphi_n(z) = \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ T_n - C_{nx} T_x - C_{ny} T_y - C_{nz} M_z \right\},$$

e che peraltro per evidenti condizioni di equilibrio [Cfr. (Nota II, (69))]:

$$(51) \quad \frac{d\varphi_n}{dz} = \frac{1 - \nu^2}{E I_n} M_n.$$

Derivando pertanto la (50) ed eguagliandola alla (51) si ottiene:

$$(52) \quad \frac{dT_n}{dz} - C_{nx} \frac{dT_x}{dz} - C_{ny} \frac{dT_y}{dz} - C_{nz} \frac{dM_z}{dz} = \alpha_n^2 M_n$$

da cui, tenendo presenti le condizioni di equilibrio:

$$(53) \quad \frac{dT_x}{dz} + p_x = 0 \quad \frac{dT_y}{dz} + p_y = 0 \quad \frac{dM_z}{dz} + m_z = 0$$

e la posizione (37), si trae con semplicità la (49).

4 - Il calcolo delle sollecitazioni d'ingobbimento nel caso generale del solido di lunghezza limitata comunque caricato e vincolato isostaticamente.

Nei due paragrafi precedenti le tensioni d'ingobbimento sono state calcolate con riferimento al caso del solido di lunghezza illimitata o più generalmente nel caso che siano rispettate le condizioni (27) e (40) per ciascuna onda d'ingobbimento. Si è visto infatti che ove tali limitazioni non siano rispettate compare un'onda di perturbazione $M_{on}(z)$ dipendente dalle condizioni ai limiti sulle basi estreme della trave.

Volendo pertanto operare nella più completa generalità, supporremo soltanto che

il solido sia vincolato isostaticamente e cioè in modo tale che le sole equazioni classiche dell'equilibrio del concio elementare:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dN_z}{dz} + p_z = 0, & \frac{dM_z}{dz} + m_z = 0 \\ \frac{dM_y}{dz} + m_y = -T_x, & \frac{dT_x}{dz} + p_x = 0 \\ \frac{dM_x}{dz} + m_x = T_y, & \frac{dT_y}{dz} + p_y = 0 \end{array} \right.$$

siano sufficienti per la determinazione delle sei caratteristiche tradizionali della sollecitazione.

La conoscenza di tali caratteristiche, ristretta anzi per i casi più comuni alle sole tre trasversali T_x , T_y , M_z , consente infatti di determinare univocamente le infinite ulteriori caratteristiche d'ingobbimento M_n in assoluto rigore tenendo conto della influenza dei vincoli applicati alle basi estreme.

Per la determinazione di queste si hanno infatti a disposizione le equazioni:

$$(55) \quad \frac{dM_n}{dz} + m_n = T_n, \quad \frac{dT_n}{dz} + p_n = \alpha_n^2 M_n$$

formalmente simili a quelle della flessione e taglio, unificabili peraltro nella (48):

$$(56) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = -p_n - \frac{dm_n}{dz}.$$

La (56) valida per ogni tratto della trave in cui p_n , e dunque p_x , p_y , m_z sono funzioni continue, e così anche dm_n/dz , richiede due condizioni ai limiti per la sua soluzione.

Per quanto concerne le due basi estreme distingueremo per semplicità due soli casi limiti:

- <1> Sezioni libere d'ingobbarsi;
- <2> Sezioni costrette a mantenersi piane.

Per le prime detto p_z l'eventuale carico assiale su di esse agente ed H_n il corrispondente momento d'ingobbimento esterno:

$$(57) \quad H_n = \int_A p_z \phi_n dA$$

le condizioni ai limiti corrispondenti, a seconda che si tratti della base $z = 0$ o $z = l$ saranno

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M_n = -H_{0n} & \text{per } z = 0 \\ M_n = H_{ln} & \text{per } z = l \end{array} \right.$$

Per le seconde, indicando con R_x , R_y , H_z le reazioni del vincolo secondo gli assi x ed y e di torsione intorno a O , posto:

$$(59) \quad R_n = C_{nx} R_x + C_{ny} R_y + C_{nz} H_z$$

le condizioni ai limiti saranno:

$$(60) \quad \begin{cases} T_n = -R_n & \text{per } z = 0 \\ T_n = R_n & \text{per } z = l \end{cases}$$

esprimendo tali condizioni, in conformità con la (50) la nullità dell'ingobbimento φ_n della corrispondente sezione.

Per quanto concerne invece eventuali sezioni singolari di applicazione di carichi concentrati o di discontinuità delle azioni diffuse le condizioni relative assumeranno lo aspetto già espresso nelle (23):

$$(61) \quad \begin{cases} \Delta M_n + \mathcal{M}_n = 0 \\ \Delta T_n + P_n = 0 \end{cases}$$

Si è così nelle condizioni di integrare nella più completa rigorosità la (56) nelle condizioni più generiche di carico.

Nel paragrafo seguente si esamina, in applicazione a quanto esposto, un caso pratico di notevole interesse.

5 - Un esempio di calcolo del regime tensionale in un caso particolare di carico.

In applicazione a quanto esposto in precedenza si consideri il caso di una trave di lunghezza $L = 2l$, caricata in mezzzeria dalle azioni trasversali: P_x , P_y , $\mathcal{M}_z$ e i cui vin-

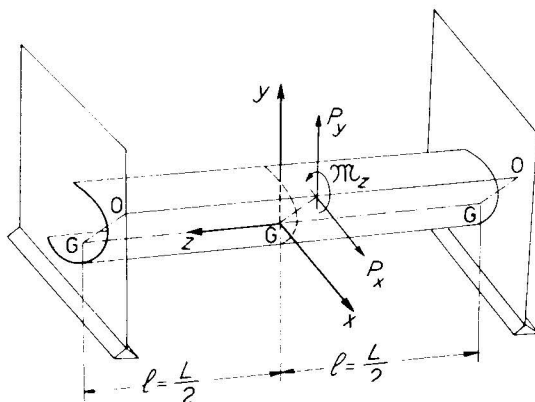


FIG. 3 - Le condizioni di carico e di vincolo della trave.

coli esterni siano tali da impedire qualsiasi movimento delle sezioni terminali nel proprio piano, lasciando invece completa libertà agli spostamenti longitudinali w (Fig. 3).

La struttura, iperstatica torsionalmente per vincoli esterni, è in effetti isostatica in considerazione della simmetria geometrica e di carico. Le caratteristiche tradizionali della sollecitazione nel tratto $0-l$ risultano infatti espresse dalle relazioni:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N_z = 0 & M_z = -\frac{\mathcal{M}_z}{2} \\ M_y = -\frac{P_x}{2}(l-z) & T_x = -\frac{P_x}{2} \\ M_x = \frac{P_y}{2}(l-z) & T_y = -\frac{P_y}{2} \end{array} \right.$$

Le caratteristiche d'ingobbimento M_n , T_n restano invece per la (56) legate al soddisfacimento dell'equazione:

$$(63) \quad \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = 0$$

connessa con le condizioni ai limiti:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{ll} T_n = -\frac{P_n}{2} & \text{per } z = 0 \\ M_n = 0 & \text{per } z = l \end{array} \right.$$

che pertanto fornisce:

$$(65) \quad M_n = \frac{P_n}{2} \frac{\sinh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} \quad T_n = -\frac{P_n}{2} \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l}$$

È immediato rilevare che per $\alpha_n l > 6,91$, e quindi per $l \geq d_n$, le (65) sono ottimamente approssimate dalle più semplici:

$$(66) \quad M_n = \frac{P_n}{2 \alpha_n} \cdot e^{-\alpha_n z} \quad T_n = -\frac{P_n}{2 \alpha_n} \cdot e^{-\alpha_n z}$$

classiche della trave di lunghezza illimitata.

In possesso delle espressioni di tutte le caratteristiche della sollecitazione è ora possibile risalire ai valori delle tensioni interne. Ricordando infatti le (Nota II, (155)) si ha nel caso in esame:

⟨1⟩ Tensioni normali σ_z :

$$(67) \quad \sigma_z = \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{l-z}{I_y} x(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l-z)}{I_n \cosh \alpha_n l} \Phi_n(s) \right\} +$$

$$+ \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{l-z}{I_x} y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{12y}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l-z)}{I_n \cosh \alpha_n l} \Phi_n(s) \right\} +$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_n} \frac{\sinh \alpha_n (l-z)}{I_n \cosh \alpha_n l} \Phi_n(s) \right\}.$$

⟨2⟩ Tensioni tangenziali τ_{zs} :

$$(68) \quad \tau_{zs} = \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{1}{I_y} \frac{d\omega_x}{ds} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} \right\} +$$

$$+ \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{1}{I_x} \frac{d\omega_y}{ds} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} \right\} +$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ \frac{q}{I_p} \left(\frac{d\omega_z}{ds} - r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} \right\}.$$

⟨3⟩ Momento torcente interno $\overline{M}_t$ (soltanto per sezioni monoconnesse):

$$(69) \quad \overline{M}_t = \frac{P_x}{2} \cdot \frac{1-r}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx} C_{nz}}{\alpha_n^2 I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} +$$

$$+ \frac{P_y}{2} \cdot \frac{1-r}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny} C_{nz}}{\alpha_n^2 I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} +$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ -1 + \frac{1-r}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \frac{C_{nz}^2}{\alpha_n^2 I_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\cosh \alpha_n l} \right\}.$$

Di tali espressioni particolare interesse rivestono i valori relativi alla sezione di mezzeria nella quale massimo è il grado di sollecitazione della struttura.

Ponendo pertanto nelle tre precedenti espressioni $z = 0$ si ottiene:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{zm} &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{l}{I_y} x(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{l}{I_x} y(s) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \right\} + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_n I_n} \phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \\ \tau_{zsm} &= \frac{P_x}{2} \left\{ \frac{1}{I_y} \frac{d\omega_x}{ds} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{I_n} \frac{d\omega_n}{ds} \right\} + \frac{P_y}{2} \left\{ \frac{1}{I_x} \frac{d\omega_y}{ds} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{I_n} \frac{d\omega_n}{ds} \right\} + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ \frac{q}{I_p} \left(\frac{d\omega_z}{ds} - r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{I_n} \frac{d\omega_n}{ds} \right\} \\ \overline{M}_{tm} &= \frac{P_x}{2} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx} C_{ny}}{\alpha_n^2 I_n} + \frac{P_y}{2} \cdot \frac{1-v}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny} C_{nz}}{\alpha_n^2 I_n} + \\ &\quad + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \left\{ -1 + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{I_p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}^2}{\alpha_n^2 I_n} \right\}. \end{aligned} \right.$$

A tali valori, caratterizzanti il grado di costrizione del materiale posto in prossimità della sezione di mezzzeria della trave, può darsi forma più semplice relativamente però alle sole ultime due espressioni e quindi ai soli sforzi tangenziali.

Ricordando infatti l'espressione fondamentale (Nota I, (54)) delle tensioni tangenziali:

$$(71) \quad \tau_{zs} = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \frac{dX}{ds} dA - \frac{dy}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \right. \\ \left. - r \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right\} + \tau_x \frac{dx}{ds} + \tau_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{M}_z \frac{d\omega_z}{ds}$$

dovendosi nel caso in esame avere per ovvie ragioni di simmetria:

$$(72) \quad w(s) = 0 \quad \text{per } z = 0$$

ed essendo quindi in conseguenza:

$$(73) \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{per } z = 0$$

si trae dalla (71):

$$(74) \quad \tau_{zsm} = \tau_x \frac{dx}{ds} + \tau_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{M}_z \frac{d\omega_z}{ds}$$

Ricordando pertanto le trasformazioni lineari (Nota I, (49)) e (Nota I, (50)), la (74) assume l'aspetto:

$$(75) \quad \tau_{zsm} = T_x \frac{dX}{ds} + T_y \frac{dY}{ds} + M_z \frac{d\Omega_z}{ds}$$

ed infine per le (62):

$$(76) \quad \tau_{zsm} = -\frac{P_x}{2} \frac{dX}{ds} - \frac{P_y}{2} \frac{dY}{ds} - \frac{\mathcal{M}_z}{2} \frac{d\Omega_z}{ds}$$

che rappresenta il limite a cui tende l'espressione delle τ_{zsm} riportata nelle (70).

Identicamente operando, tenendo presente l'espressione (1) per il momento torcente interno $\overline{M}_t$ e l'ultima delle (Nota I, (48)) scritta per $\vartheta_z = 0$, si trae per la (73):

$$(77) \quad \overline{M}_{tm} = -\frac{P_x}{2} \frac{I_p D_{13}}{q D} - \frac{P_y}{2} \frac{I_p D_{23}}{q D} - \frac{\mathcal{M}_z}{2} \frac{I_p D_{33}}{q D}$$

In definitiva facendo le posizioni:

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_x(s) &= \frac{l}{I_y} x(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nx}}{\alpha_n I_n} \cdot \Phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \\ \psi_y(s) &= \frac{l}{I_x} y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ny}}{\alpha_n I_n} \Phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \\ \psi_z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nz}}{\alpha_n I_n} \Phi_n(s) \operatorname{tgh} \alpha_n l \end{aligned} \right.$$

le (70) assumono l'aspetto definitivo:

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{zm} &= \frac{P_x}{2} \psi_x + \frac{P_y}{2} \psi_y + \frac{\mathcal{M}_z}{2} \psi_z \\ \tau_{zsm} &= -\frac{P_x}{2} \frac{dX}{ds} - \frac{P_y}{2} \frac{dY}{ds} - \frac{\mathcal{M}_z}{2} \frac{d\Omega_z}{ds} \\ \overline{M}_{tm} &= -\frac{P_x}{2} \frac{I_p D_{13}}{q D} - \frac{P_y}{2} \frac{I_p D_{23}}{q D} - \frac{\mathcal{M}_z}{2} \frac{I_p D_{33}}{q D} \end{aligned} \right.$$

Giova notare che nei punti singolari della sezione trasversale della trave quali i bordi liberi o punti angolosi interni la seconda delle (79) spesso non soddisfa le rispettive con-

dizioni di nullità delle tensioni tangenziali e di continuità del flusso degli sforzi tangenziali $t_i \tau_{zsi}$, e pertanto, in conformità con la condizione indefinita d'equilibrio puntuale:

$$(80) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} = 0$$

tendendo ivi $\partial \tau_{zs} / \partial s$ all'infinito le corrispondenti tensioni normali ed il rispettivo gradiente $\partial \sigma_z / \partial z$ tendono ad assumere valore infinito.

5.1 - Un'applicazione numerica per la sezione a I.

A chiarimento di quanto esposto si prende in esame il caso della sezione a I doppiamente simmetrica (Fig. 4) per il quale nella Nota III si sono fornite le equazioni caratteristiche determinatrici degli autovalori e la tabellazione delle prime nove autofunzioni $\Phi_n(s)$.

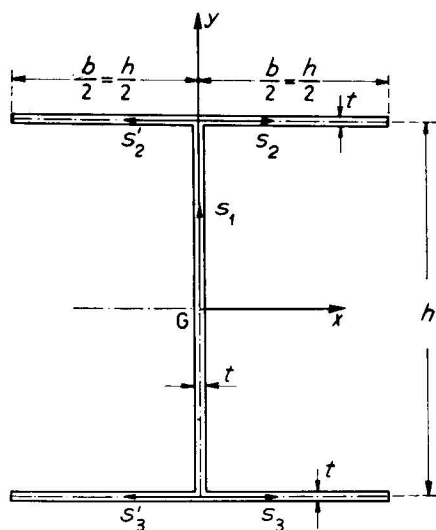


FIG. 4 - Il caso della sezione a I.

Per ovvie ragioni di semplicità considereremo separatamente le tre condizioni di carico relative all'applicazione delle forze P_x e P_y e del momento torcente $\mathcal{M}_z$.

5.1.1 - Il calcolo delle tensioni in mezzeria provocate dal carico concentrato P_x .

Dalle (79) si deduce:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{zm} &= \frac{P_x}{2} \psi_x \\ \tau_{zsm} &= -\frac{P_x}{2} \frac{dX}{ds} \\ \overline{M}_{tm} &= -\frac{P_x}{2} \frac{I_p}{q} \frac{D_{13}}{D} \end{aligned} \right.$$