

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni

Nota III: Complementi analitici: Il calcolo delle funzioni caratteristiche per alcuni tipi di travi di parete sottile di comune impiego (*)

MICHELE CAPURSO

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Università di Napoli

Lavoro eseguito con il contributo del CNR

Testo ricevuto il 19 febbraio 1964

1 - Premessa.

Nella Nota II del presente studio si è dimostrato che il problema dell'equilibrio elastico di una trave di parete sottile soggetta a una generica distribuzione di carichi agenti sulle due basi estreme può essere condotto per sovrapposizione di ∞ casi semplici di sollecitazione, di cui sei classici della trattazione del SAINT-VENANT e ∞ legati a particolari distribuzioni di forze autoequilibrate agenti sulle basi estreme.

Fondamentale per lo studio di tali problemi è la definizione della serie di funzioni ortogonali (Nota II, (65)):

$$(1) \quad 1, x(s), y(s), \{ \Phi_n(s) \}_{(n=1,2,\dots,\infty)}$$

collegate agli ∞ parametri del movimento longitudinale della sezione della trave:

$$(2) \quad w_z(z), \varphi_y(z), \varphi_x(z), \{ \varphi_n(z) \}_{(n=1,2,\dots,\infty)}$$

e dei corrispondenti autovalori:

$$(3) \quad \{ \beta_n \}_{(n=1,2,\dots,\infty)}$$

(*) Lavoro presentato dal prof. ELIO GIANGRECO, O. di tecnica delle costruzioni, Università, Napoli.

(per le prime tre $\beta_n = 0$) caratterizzanti l'andamento delle caratteristiche interne tramite le relazioni di equilibrio:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_z}{dz} = 0 \\ \frac{d^2 M_x}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2 M_y}{dz^2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 M_n}{dz^2} - \frac{1-\nu}{2} \beta_n^2 M_n = 0 \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Tale problema viene qui affrontato in relazione ad alcuni tipi di sezione di comune impiego nell'ambito delle travi di parete sottile, fornendo per alcune di esse delle comode tabellazioni delle funzioni caratteristiche (1) e dei corrispondenti autovalori β_n .

2 - La sezione semicircolare.

È un caso tipico di sezione monoconnessa a direttrice continua (Fig. 1). La posizione del baricentro è individuata dalle coordinate dei punti C e T:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_C = R \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \\ y_T = - \frac{2}{\pi} R \end{array} \right.$$

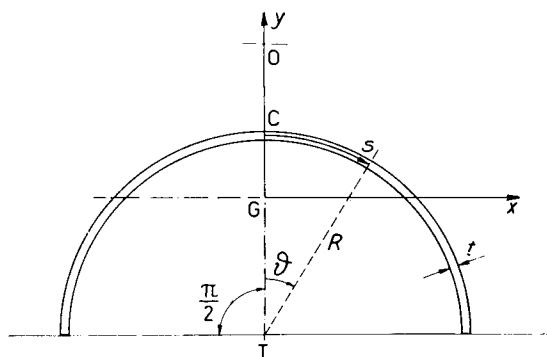


FIG. 1 - La sezione semicircolare: riferimento cartesiano e polare.

la posizione del centro di taglio O dalle due coordinate:

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{2}{\pi} R. \end{cases}$$

La sezione è dotata di un asse di simmetria geometrica che, col riferimento scelto, coincide con l'asse y . Assumendo l'origine dell'ascissa curvilinea s coincidente con C le funzioni caratteristiche (1) si suddividono pertanto in funzioni simmetriche:

$$(7) \quad 1, y(s) \left\{ \Phi_n(s) \right\}_{(n=1, \dots, \infty)}$$

e funzioni emisimmetriche:

$$(8) \quad x(s), \left\{ \Phi_m(s) \right\}_{(m=1, \dots, \infty)}$$

2.1 – Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema del Saint-Venant.

Per lo studio dei sei classici casi semplici di sollecitazione del problema del SAINT-VENANT è fondamentale la definizione delle sei funzioni:

$$(9) \quad \begin{cases} x(s), y(s), r(s) \\ \omega_x(s), \omega_y(s), \omega_z(s). \end{cases}$$

Nel nostro caso risulta, tenendo presenti le (Nota I, (10)) e ponendo $s = R\vartheta$:

$$(10) \quad \begin{cases} x(\vartheta) = R \sin \vartheta \\ y(\vartheta) = R \left(\cos \vartheta - \frac{2}{\pi} \right) \\ r(\vartheta) = R \left(\frac{4}{\pi} \cos \vartheta - 1 \right) \end{cases}$$

e da queste, ricordando le (Nota I, (31)) e (Nota II, (119)), ed inoltre le condizioni ai limiti (Nota I, (35)) e (Nota II, (120-a e c)):

$$(11) \quad \begin{cases} \omega_x(\vartheta) = -R^3 \sin \vartheta \\ \omega_y(\vartheta) = -R^3 \left(\cos \vartheta + \frac{\vartheta^2}{\pi} - \frac{24 + \pi^2}{12\pi} \right) \\ \omega_z(\vartheta) = R^2 \left(\frac{4}{\pi} \sin \vartheta - \vartheta \right). \end{cases}$$

Dalle (10) e (11) è poi immediato risalire alle funzioni inverse $X(\vartheta)$, $Y(\vartheta)$, $\Omega_z(\vartheta)$, che, tenendo presenti le espressioni (Nota I, (49)) e (Nota I, (46)), assumono nel caso attuale l'aspetto:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(\vartheta) = \frac{2}{\pi t} \sin \vartheta \\ Y(\vartheta) = \frac{2}{\pi t} \cos \vartheta \\ \Omega_z(\vartheta) = \frac{\pi}{t R \left(\pi^2 - 8 + \frac{\pi^2 k^2}{3} \right)} \cdot \left(\frac{4}{\pi} \sin \vartheta - \vartheta \right) \end{array} \right.$$

avendo posto:

$$(13) \quad k = \frac{t}{R}.$$

In possesso di tali espressioni è ora possibile passare al calcolo degli autovalori β e delle corrispondenti autofunzioni Φ dell'equazione fondamentale (Nota II, (33)).

2.2 - Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema generalizzato.

In conformità con quanto detto nella Parte seconda, la soluzione della equazione fondamentale (Nota II, (33)), può porsi nella forma:

$$(14) \quad \Phi(s) = \Phi_0(s) + C_x \Phi_x(s) + C_y \Phi_y(s) + C_z \Phi_z(s)$$

essendo nel nostro caso:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0(\vartheta) = A \sin \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta + B \cos \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta \\ \Phi_x(\vartheta) = R \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \sin \vartheta \\ \Phi_y(\vartheta) = R \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \cos \vartheta \\ \Phi_z(\vartheta) = R^2 \frac{4\pi}{\pi^2 - 4\lambda^2} \sin \vartheta \end{array} \right.$$

e avendo posto:

$$(16) \quad \beta = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{R}.$$

Ricordando peraltro che:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} C_x &= \int_A \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = \frac{t}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{d\vartheta} \cdot \frac{dX}{d\vartheta} d\vartheta \\ C_y &= \int_A \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = \frac{t}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{d\vartheta} \cdot \frac{dY}{d\vartheta} d\vartheta \\ C_z &= \int_A \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = \frac{t}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{d\vartheta} \cdot \frac{d\Omega_z}{d\vartheta} d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

la sostituzione della (14) nelle (17) fornisce il sistema:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} C_x + \frac{4\pi R}{\pi^2 - 4\lambda^2} C_z &= -\frac{8\lambda \cos \lambda}{\pi^2 - 4\lambda^2} \cdot \frac{A}{R} \\ \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} C_y &= -\frac{16\lambda^2 \cos \lambda}{\pi(\pi^2 - 4\lambda^2)} \cdot \frac{B}{R} \\ C_z &= \frac{2\pi}{\pi^2 - 8 + \frac{\pi^2 k^2}{3}} \left[\frac{8\lambda \cos \lambda}{\pi^2 - 4\lambda^2} - \sin \lambda \right] \cdot \frac{A}{R^2} \end{aligned} \right.$$

che consente di esplicitare le tre costanti C_x , C_y , C_z in funzione di A e B .

La (Nota II, (26)) fornisce peraltro per la funzione $L(\phi)$:

$$(19) \quad L(\phi) = \frac{d\phi}{ds} - C_x \frac{dx}{ds} - C_y \frac{dy}{ds} - C_z r$$

e quindi per le (10) e (14):

$$(20) \quad L(\phi) = \frac{2\lambda}{\pi R} \left[A \cos \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta - B \sin \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta \right] + C_x \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \cos \vartheta + \\ - C_y \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \sin \vartheta + C_z R \left[\frac{16\lambda^2}{\pi(\pi^2 - 4\lambda^2)} \cos \vartheta + 1 \right].$$

Le due condizioni ai limiti (Nota II, (45-a)) forniscono pertanto per la (20) le due ulteriori relazioni:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{2\lambda}{\pi R} [A \cos \lambda - B \sin \lambda] - \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} C_y + R C_z = 0 \\ \frac{2\lambda}{\pi R} [A \cos \lambda + B \sin \lambda] + \frac{4\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} C_y + R C_z = 0 \end{cases}$$

che associate alle (18) danno luogo alle cinque equazioni lineari omogenee:

$$(22) \quad \begin{cases} C_x = 0 \\ C_y = -\frac{4 \cos \lambda}{\pi} \cdot \frac{B}{R} \\ C_z = -\frac{2 \lambda \cos \lambda}{\pi} \cdot \frac{A}{R^2} \\ A \left\{ \lambda \cos \lambda \left[\frac{\pi^2 - 4 \lambda^2 (\pi^2 - 8)}{\pi^2 (\pi^2 - 4 \lambda^2)} + \frac{k^2}{3} \right] - \sin \lambda \right\} = 0 \\ B \left\{ \lambda \sin \lambda - \frac{8 \lambda^2}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \cos \lambda \right\} = 0 . \end{cases}$$

La funzione ϕ assume pertanto l'aspetto definitivo:

$$(23) \quad \phi(\vartheta) = A \left\{ \sin \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta - \frac{8 \lambda \cos \lambda}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \sin \vartheta \right\} + B \left\{ \cos \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta - \frac{4 \pi \cos \lambda}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \cos \vartheta \right\} .$$

2.2.1 - Le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico.

Dalla (23) è immediato dedurre che le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico sono caratterizzate dalla relazione:

$$A = 0$$

e quindi per le (22) dalle espressioni:

$$(24) \quad \begin{cases} C_x = C_z = 0 \\ C_y = -\frac{4 \cos \lambda}{\pi} \cdot \frac{B}{R} \\ B \left\{ \lambda \sin \lambda - \frac{8 \lambda^2}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \cos \lambda \right\} = 0 . \end{cases}$$

Tali funzioni sono definite a meno di B dalla espressione:

$$(25) \quad \phi(\vartheta) = B \left\{ \cos \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta - \frac{4\pi \cos \lambda}{\pi^2 - 4\lambda^2} \cos \vartheta \right\}$$

e sono differenti da zero solo per quei particolari valori di λ soddisfacenti l'equazione caratteristica:

$$(26) \quad \lambda \sin \lambda - \frac{8\lambda^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \cos \lambda = 0$$

Il fattore arbitrario B può determinarsi imponendo la condizione ausiliare:

$$(27) \quad C_y = 1$$

che, definendo la (26) nella forma:

$$(28) \quad \phi(\vartheta) = R \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4\lambda^2} \left\{ \cos \vartheta - \frac{2\lambda}{\pi \sin \lambda} \cos \frac{2\lambda}{\pi} \vartheta \right\}$$

caratterizza l'andamento delle funzioni d'ingobbimento di tipo simmetrico.

La norma delle (28) assume peraltro il valore:

$$(29) \quad I = \int_A \phi^2 dA = tR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi^2(\vartheta) d\vartheta = tR^3 \cdot \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2 - 4\lambda^2} \right).$$

È immediato rendersi conto che in corrispondenza dell'autovalore degenere $\lambda = 0$ radice della (26), le (28) e (29) forniscono:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_o(\vartheta) &= R \left(\cos \vartheta - \frac{2}{\pi} \right) = y(\vartheta) \\ I_o &= tR^3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) = I_x. \end{aligned} \right.$$

Nella Tab. I sono riportati, in colonna con le prime nove radici diverse da zero della (26), i valori delle norme I_n e i valori assunti dalle funzioni d'ingobbimento ϕ_n in corrispondenza di 11 valori dell'anomalia ϑ presi ad intervalli pari a $\pi/20$ fra i limiti $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi/2$.

2.2.2 - Le funzioni caratteristiche di tipo emisimmetrico.

Tali funzioni discendono dalla (23) per $B = 0$. Dalle (22) si trae quindi:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = C_y = 0 \\ C_z = -\frac{2 \lambda \cos \lambda}{\pi} \cdot \frac{A}{R^2} \\ A \left\{ \lambda \cos \lambda \left[\frac{\pi^2 - 4 \lambda^2 (\pi^2 - 8)}{\pi^2 (\pi^2 - 4 \lambda^2)} + \frac{k^2}{3} \right] - \sin \lambda \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Le corrispondenti funzioni d'ingobbimento hanno quindi l'aspetto:

$$(32) \quad \phi(\vartheta) = A \left\{ \sin \frac{2 \lambda}{\pi} \vartheta - \frac{8 \lambda \cos \lambda}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \sin \vartheta \right\}$$

e sono differenti da zero solo per i particolari valori di λ radici dell'equazione caratteristica:

$$(33) \quad \lambda \cos \lambda \left[\frac{\pi^2 - 4 \lambda^2 (\pi^2 - 8)}{\pi^2 (\pi^2 - 4 \lambda^2)} + \frac{k^2}{3} \right] - \sin \lambda = 0.$$

In particolare è però da osservarsi che, in corrispondenza dell'autovalore $\lambda = 0$ radice dell'equazione (33) la (32) fornisce ancora

$$\phi_0(\vartheta) = 0$$

e non appare pertanto esplicitamente la soluzione

$$(34) \quad \phi_0(\vartheta) = x(\vartheta)$$

che pur restando soluzione del problema resta apparentemente esclusa per il particolare procedimento operativo usato per la determinazione delle (22).

Fatta esclusione per la radice $\lambda = 0$ si può pertanto determinare il fattore arbitrario A ponendo la condizione ausiliaria:

$$(35) \quad C_z = 1$$

che conduce alla espressione definitiva delle funzioni d'ingobbimento emisimmetriche:

$$(36) \quad \phi(\vartheta) = R^2 \frac{4 \pi}{\pi^2 - 4 \lambda^2} \left\{ \sin \vartheta - \frac{\pi^2 - 4 \lambda^2}{8 \lambda \cos \lambda} \sin \frac{2 \lambda}{\pi} \vartheta \right\}$$

valida però solo per $\lambda \neq 0$.

La norma della (36) risulta peraltro:

$$(37) \quad I = t R^5 \pi^3 \left[\frac{2 \lambda - \sin 2 \lambda}{16 \lambda^3 \cos^2 \lambda} - \frac{8}{(\pi^2 - 4 \lambda^2)^2} \right]$$

Unica particolarità notevole rispetto alle funzioni di tipo simmetrico è la dipendenza delle radici dal valore del rapporto $k = t/R$ fra spessore e raggio della sezione sottile.

Nelle Tab. 2 e 3 sono riportati relativamente ai due rapporti:

$$(38) \quad k = 0,01, \quad \text{e} \quad k = 0,1$$

i valori delle prime nove radici della (33), i valori delle corrispondenti norme e delle funzioni d'ingobbimento (36) per i valori già prescelti per l'anomalia ϑ .

2.3 - Alcune considerazioni sui risultati ottenuti.

In conformità con quanto esposto nella Nota II in relazione ai casi di sollecitazione semplice relativi alle caratteristiche M_n definite come *momenti ingobbanti*, è interessante dedurre dall'esame delle radici λ_n delle equazioni caratteristiche (26) e (33) l'andamento delle funzioni $M_n(z)$.

Come si è detto tale andamento è di tipo smorzato essendo lo smorzamento caratterizzato dalla distanza d_n dalle basi estreme in corrispondenza della quale la caratteristica interna M_n si riduce ad un millesimo della corrispondente caratteristica interessante la base stessa.

Di tale distanza si è data nella Nota II l'espressione:

$$(39) \quad d_n = \frac{6,91}{\alpha_n}$$

essendo:

$$(40) \quad \alpha_n = \beta_n \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}}.$$

Nel nostro caso, avendo fatto la posizione (16), la (39) si scrive:

$$(41) \quad d_n = \frac{15,35}{\sqrt{1 - \nu}} \cdot \frac{R}{\lambda_n},$$

ed in particolare ponendo $\nu = 0,3$:

$$(42) \quad d_n = 18,34 \cdot \frac{R}{\lambda_n}.$$

TABELLA 2 — Funzioni d'ingobbimento emisimmetriche rispetto a y ($C_x = C_y = 0$) $\left(\frac{t}{R} = 0,01 \right)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_n	0,082	7,091	10,486	13,751	16,966	20,158	23,336	26,504	29,667
I_n / IR^5	0,037	0,143	0,141	0,140	0,139	0,140	0,140	0,140	0,140
ϑ	$\Phi_1 R^{-2}$	$\Phi_2 R^{-2}$	$\Phi_3 R^{-2}$	$\Phi_4 R^{-2}$	$\Phi_5 R^{-2}$	$\Phi_6 R^{-2}$	$\Phi_7 R^{-2}$	$\Phi_8 R^{-2}$	$\Phi_9 R^{-2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi/20$	0,042	- 0,219	0,262	- 0,300	0,297	- 0,272	0,216	- 0,142	0,051
$2\pi/20$	0,079	- 0,337	0,257	- 0,121	- 0,078	0,231	- 0,301	0,248	- 0,104
$3\pi/20$	0,107	- 0,302	- 0,015	0,245	- 0,285	0,067	0,195	- 0,300	0,148
$4\pi/20$	0,120	- 0,135	- 0,284	0,204	0,139	- 0,298	0,024	0,274	- 0,195
$5\pi/20$	0,115	0,079	- 0,286	- 0,181	0,235	0,177	- 0,239	- 0,192	0,227
$6\pi/20$	0,088	0,234	- 0,021	- 0,293	- 0,215	0,130	0,293	0,054	- 0,262
$7\pi/20$	0,035	0,252	0,242	0,045	- 0,201	- 0,307	- 0,181	0,084	0,278
$8\pi/20$	- 0,046	0,121	0,236	0,287	0,244	0,115	- 0,059	- 0,217	- 0,298
$9\pi/20$	- 0,156	- 0,097	- 0,033	0,408	0,117	0,187	0,245	0,283	0,295
$\pi/2$	- 0,298	- 0,297	- 0,297	- 0,298	- 0,297	- 0,298	- 0,298	- 0,298	- 0,298

È ora immediato rendersi conto dell'ordine di grandezza delle distanze d'estinzione d_n per i vari casi semplici di sollecitazione relativi alle travi di parete sottile a sezione semicircolare. Riferendosi infatti alle prime onde aventi la massima distanza d'estinzione, si ha per le componenti simmetriche con y :

$$(43) \quad d_1 = \frac{18,34}{5,936} R \approx 3,09 R$$

e per le componenti emisimmetriche con y :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{18,34}{0,082} R \approx 223,66 R \quad (k = 0,01) \\ d_1 = \frac{18,34}{0,820} R \approx 22,37 R \quad (k = 0,10) \end{array} \right.$$

L'enorme divario fra le (44) e la (43) resta però limitato alla sola prima componente emisimmetrica. Per la seconda infatti si ha:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_2 = \frac{18,34}{7,091} R = 2,59 R \quad (k = 0,01) \\ d_2 = \frac{18,34}{7,104} R = 2,58 R \quad (k = 0,10). \end{array} \right.$$

e pertanto le distanze d'estinzione rientrano nell'ordine di grandezza di quelle relative alle funzioni simmetriche (43).

Il comportamento anomalo della prima componente emisimmetrica rispetto a tutte le successive emisimmetriche e a tutte le simmetriche, è conseguenza diretta della scarsa rigidità torsionale della trave.

La funzione d'ingobbimento relativa a tale componente coincide infatti quasi esattamente con la funzione d'ingobbimento torsionale $\omega_z(\vartheta)$ ed è quindi collegata ad autovalori molto prossimi a zero e dunque a distanze d'estinzione notevolissime. È immediato perciò rendersi conto che le sollecitazioni dipendenti dal momento ingobbante $M_1(z)$ sono tutt'altro che locali ma investono tutto lo sviluppo della trave alterando notevolmente i risultati della teoria tecnica. Sollecitazioni di tal genere compaiono in tutte le travi di parete sottile a sezione aperta e aventi $\omega_z(s) \neq 0$. Resta giustificato quindi quanto detto sulla *teoria delle aree settoriali* come equivalente della teoria tecnica per le travi di parete sottile di sezione aperta.

TABELLA 3 - Funzioni d'ingobbimento emisimmetriche rispetto a y ($C_x = C_y = 0$) ($\frac{t}{R} = 0,10$).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_n	0,820	7,104	10,495	13,758	16,972	20,162	23,339	26,507	29,670
I_n / I_{ns}	0,039	0,147	0,145	0,145	0,145	0,144	0,144	0,144	0,144
ϑ	$\Phi_1 R^{-2}$	$\Phi_2 R^{-2}$	$\Phi_3 R^{-2}$	$\Phi_4 R^{-2}$	$\Phi_5 R^{-2}$	$\Phi_6 R^{-2}$	$\Phi_7 R^{-2}$	$\Phi_8 R^{-2}$	$\Phi_9 R^{-2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi/20$	0,044	- 0,222	0,266	- 0,305	0,302	- 0,276	0,219	- 0,144	0,052
$2\pi/20$	0,082	- 0,341	0,260	- 0,122	- 0,080	0,235	- 0,305	0,251	- 0,105
$3\pi/20$	0,111	- 0,304	- 0,015	0,249	- 0,290	0,067	0,197	- 0,305	0,150
$4\pi/20$	0,124	- 0,134	- 0,289	0,207	0,142	- 0,302	0,024	0,278	- 0,198
$5\pi/20$	0,118	0,083	- 0,289	- 0,185	0,239	0,180	- 0,242	- 0,196	0,230
$6\pi/20$	0,089	0,239	- 0,019	- 0,297	- 0,220	0,131	0,296	0,056	- 0,266
$7\pi/20$	0,035	0,255	0,247	0,048	- 0,204	- 0,312	- 0,184	0,084	0,283
$8\pi/20$	- 0,048	0,121	0,239	0,292	0,249	0,117	- 0,059	- 0,219	- 0,303
$9\pi/20$	- 0,161	- 0,100	- 0,035	0,040	0,118	0,189	0,248	0,287	0,301
$\pi/2$	- 0,303	- 0,303	- 0,303	- 0,303	- 0,302	- 0,302	- 0,302	- 0,303	- 0,303

3 - La sezione a T.

È un caso tipico di sezione monoconnessa simmetrica (Fig. 2). La posizione del baricentro è individuata dalle coordinate:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_s = \frac{h}{h+b} \cdot \frac{h}{2} \\ y_i = \frac{h+2b}{h+b} \cdot \frac{h}{2} \end{array} \right.$$

la posizione del centro di taglio O dalle coordinate:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_o = 0 \\ y_o = \frac{h}{h+b} \cdot \frac{h}{2} \end{array} \right.$$

La sezione presenta un asse di simmetria geometrica coincidente con l'asse y .

In Fig. 3 sono illustrate le ascisse di riferimento locale per le tre sezioni rettangolari elementari in cui può decomporre la sezione globale.

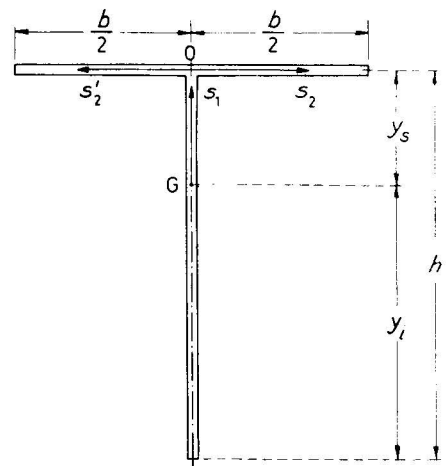
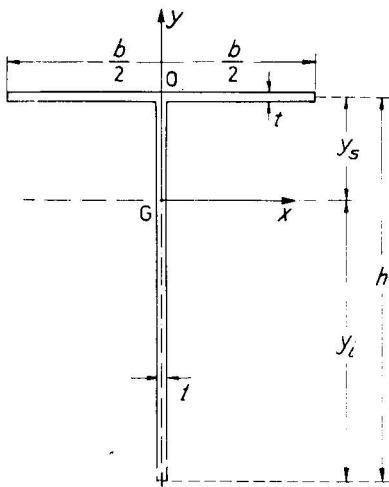


FIG. 2 - La sezione a T: riferimento cartesiano.

FIG. 3 - La sezione a T: riferimenti locali.

Le funzioni caratteristiche in virtù della simmetria potranno essere suddivise in funzioni simmetriche

$$(48) \quad I, y, \left\{ \phi_n \right\}_{(n=1,2,\dots,\infty)}$$

e funzioni emisimmetriche

$$(49) \quad x, \left\{ \phi_m \right\}_{(m=1,2,\dots,\infty)}$$

3.1 – Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema del Saint-Venant.

La definizione delle sei funzioni (9) deve essere, nel presente caso, determinata per ciascuna delle tre sezioni elementari costituenti la sezione globale.

Tenendo presente il riferimento scelto si ha pertanto:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x(s_1) = 0 \\ y(s_1) = s_1 & (y_i \leq s_1 \leq y_s) \\ r(s_1) = 0 \\ \\ x(s_2) = s_2 \\ y(s_2) = y_s & (0 \leq s_2 \leq \frac{b}{2}) \\ r(s_2) = 0 \\ \\ x(s'_2) = -s'_2 \\ y(s'_2) = y_s & (0 \leq s'_2 \leq \frac{b}{2}) \\ r(s'_2) = 0 \end{array} \right.$$

e da queste, ricordando le (Nota II, (164)) e le relative condizioni trasversali:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_x(s_1) = 0 \\ \omega_y(s_1) = \frac{s_1^3 - y_s^3}{6} - \frac{y_s^2}{2} (s_1 - y_s) + C & (y_i \leq s_1 \leq y_s) \\ \omega_z(s_1) = 0 \\ \\ \omega_x(s_2) = \frac{s_2^3}{6} - \frac{b^2}{8} s_2 \\ \omega_y(s_2) = y_s \frac{s_2^2}{2} - y_s \frac{b}{2} s_2 + C & (0 \leq s_2 \leq \frac{b}{2}) \\ \omega_z(s_2) = 0 \\ \\ \omega_x(s'_2) = -\frac{s'^3_2}{6} + \frac{b^2}{8} s'_2 \\ \omega_y(s'_2) = y_s \frac{s'^2_2}{2} - y_s \frac{b}{2} s'_2 + C & (0 \leq s'_2 \leq \frac{b}{2}) \\ \omega_z(s'_2) = 0 \end{array} \right.$$

La costante C che nelle (51) compare nelle espressioni della funzione d'ingobbimento tagliante ω_y si determina con la (Nota II, (165)):

$$(52) \quad \int_A \omega_y dA = 0 ;$$

tale valore non presenta tuttavia alcun interesse ai fini dei calcoli che si svolgeranno e non viene pertanto riportato.

Dalle (50) e (51) è ora immediato risalire alle funzioni inverse X , Y , Ω_z che, tenendo presenti le (Nota I, (49)) e (Nota I, (46)), assumono, nel caso presente, l'aspetto:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(s_1) = 0 \\ Y(s_1) = \frac{s_1}{b h} \\ \Omega_z(s_1) = 0 \end{array} \right. \quad (y_i \leq s_1 \leq y_s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s_2) = \frac{s_2}{b t} \\ Y(s_2) = \frac{y_s}{b t} \\ \Omega_z(s_2) = 0 \end{array} \right. \quad (0 \leq s_2 \leq \frac{b}{2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s'_2) = -\frac{s'_2}{b t} \\ Y(s'_2) = \frac{y_s}{b t} \\ \Omega_z(s'_2) = 0 \end{array} \right. \quad (0 \leq s'_2 \leq \frac{b}{2})$$

3.2 - Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema generalizzato.

Dalle (50) risulta che le funzioni x ed y son lineari o costanti per ciascun elemento componente la sezione, mentre la funzione r è sempre costante per ogni elemento.

Da ciò discende, in conformità con quanto detto nella Nota II, che la funzione ϕ soluzione delle equazioni fondamentali (Nota II, (33)) può porsi nella forma:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(s_1) = A_1 \sin \beta s_1 + B_1 \cos \beta s_1 \\ \phi(s_2) = A_2 \sin \beta s_2 + B_2 \cos \beta s_2 \\ \phi(s'_2) = A'_2 \sin \beta s'_2 + B'_2 \cos \beta s'_2 \end{array} \right.$$

Le relative costanti fondamentali C_x , C_y , C_z assumeranno per le (Nota II, (34)) l'aspetto:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} C_x &= t \int_{y_i}^{y_s} \frac{d\phi}{ds_1} \cdot \frac{dX}{ds_1} ds_1 + t \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\phi}{ds_2} \cdot \frac{dX}{ds_2} ds_2 + t \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\phi}{ds'_2} \cdot \frac{dX}{ds'_2} ds'_2 \\ C_y &= t \int_{y_i}^{y_s} \frac{d\phi}{ds_1} \cdot \frac{dY}{ds_1} ds_1 + t \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\phi}{ds_2} \cdot \frac{dX}{ds_2} ds_2 + t \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\phi}{ds'_2} \cdot \frac{dY}{ds'_2} ds'_2 \\ C_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Volendo separare le soluzioni simmetriche da quelle emisimmetriche basta fare le posizioni:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= C_2 + D_2 \\ A'_2 &= C_2 - D_2 \\ B_2 &= F_2 + H_2 \\ B'_2 &= F_2 - H_2 \end{aligned} \right.$$

per cui le (54) assumono l'aspetto:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(s_1) &= A_1 \sin \beta s_1 + B_1 \cos \beta s_1 \\ \Phi(s_2) &= C_2 \sin \beta s_2 + F_2 \cos \beta s_2 + D_2 \sin \beta s_2 + H_2 \cos \beta s_2 \\ \Phi(s'_2) &= C_2 \sin \beta s'_2 + F_2 \cos \beta s'_2 - D_2 \sin \beta s'_2 - H_2 \cos \beta s'_2 \end{aligned} \right.$$

in cui è evidente la parte simmetrica e la parte emisimmetrica.

3.2.1 - Le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico.

Dalle (57) è immediato dedurre per le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico le relazioni:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(s_1) &= A_1 \sin \beta s_1 + B_1 \cos \beta s_1 \\ \Phi(s_2) &= C_2 \sin \beta s_2 + F_2 \cos \beta s_2 \\ \Phi(s'_2) &= C_2 \sin \beta s'_2 + F'_2 \cos \beta s'_2 \end{aligned} \right.$$

Le costanti caratteristiche ad esse associate assumono pertanto l'aspetto:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} C_x &= C_z = 0 \\ C_y &= \frac{A_1}{h} (\sin \beta y_s - \sin \beta y_i) + \frac{B_1}{h} (\cos \beta y_s - \cos \beta y_i) \end{aligned} \right.$$

per cui l'operatore L si scrive:

$$(60) \quad L = \frac{d\Phi}{ds} - C_v \frac{dy}{ds}.$$

Nel nostro caso si ha quindi:

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1) = A_1 \left[\beta \cos \beta s_1 - \frac{1}{h} (\sin \beta y_s - \sin \beta y_i) \right] + \\ \quad - B_1 \left[\beta \sin \beta s_1 + \frac{1}{h} (\cos \beta y_s - \cos \beta y_i) \right] \\ L(s_2) = C_2 \beta \cos \beta s_2 - F_2 \beta \sin \beta s_2 \\ L(s'_2) = C_2 \beta \cos \beta s'_2 - F_2 \beta \sin \beta s'_2 \end{array} \right.$$

Le condizioni trasversali (Nota II, (45-a)) unite a quelle di continuità del flusso $tL(s)$ e di monodromia della funzione $\Phi(s)$ porgono peraltro:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1)_{s_1=v_i} = 0 \\ L(s_1)_{s_1=v_s} - L(s_2)_{s_2=0} - L(s'_2)_{s'_2=0} = 0 \\ L(s_2)_{s_2=\frac{b}{2}} = 0 \\ \Phi(s_1)_{s_1=v_s} = \Phi(s_2)_{s_2=0} \end{array} \right.$$

e forniscono quindi il sistema lineare omogeneo nelle quattro incognite A_1, B_1, C_2, F_2 :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \left[\beta \cos \beta y_i - \frac{1}{h} (\sin \beta y_s - \sin \beta y_i) \right] - B_1 \left[\beta \sin \beta y_i + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{h} (\cos \beta y_s - \cos \beta y_i) \right] = 0 \\ A_1 \left[\beta \cos \beta y_s - \frac{1}{h} (\sin \beta y_s - \sin \beta y_i) \right] - B_1 \left[\beta \sin \beta y_s + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{h} (\cos \beta y_s - \cos \beta y_i) \right] - 2 \beta C_2 = 0 \\ C_2 \beta \cos \frac{\beta b}{2} - F_2 \beta \sin \frac{\beta b}{2} = 0 \\ A_1 \sin \beta y_s + B_1 \cos \beta y_s - F_2 = 0 \end{array} \right.$$

il cui determinante dei coefficienti eguagliato a zero porge l'equazione trascendente in β :

$$(64) \quad \beta \cos \frac{\beta b}{2} \left[\beta^2 \sin \beta h - \frac{2\beta}{h} (1 - \cos \beta h) \right] + \\ + 2\beta^2 \sin \frac{\beta b}{2} \left[\beta \cos \beta h - \frac{1}{h} \sin \beta h \right] = 0.$$

La determinazione degli autovalori β può condursi quindi numericamente solo per prefissati valori del rapporto b/h . A titolo di esempio si sono calcolate numericamente le prime nove radici della (64) per il rapporto:

$$\frac{b}{h} = 1.$$

In tal caso, facendo la posizione:

$$(65) \quad \beta = \frac{2\lambda}{h}$$

λ essendo un adimensionale, la (64) assume l'aspetto:

$$(66) \quad \lambda^2 \cos \lambda [\lambda \sin 2\lambda - (1 - \cos 2\lambda)] + \lambda^2 \sin \lambda (2\lambda \cos \lambda - \sin 2\lambda) = 0$$

Le funzioni d'ingobbimento Φ corrispondenti alle prime nove radici della (66) (escludendo $\lambda = 0$) sono state tabellate imponendo unitario il valore (59) della costante C_y per le radici 1, 3, 4, 6, 7, 9 ed imponendo unitaria l'ampiezza massima della funzione stessa per le radici 2, 5, 8.

In corrispondenza delle radici 2, 5, 8 infatti, o più in generale dei valori:

$$(67) \quad \lambda_n = \frac{n+1}{3} \pi,$$

radici della (66) per $(n+1)/3$ intero, il valore (59) di C_y indipendentemente dai valori assunti da A_1 e B_1 , si annulla e pertanto risulta ovviamente impossibile avvalersi della condizione $C_y = 1$ per tabellare numericamente le corrispondenti funzioni).

Nella Tab. 4 sono riportate in colonna con le prime nove radici diverse da zero della (66) i valori delle costanti C_{ym} , delle norme I_n e delle funzioni Φ_n in corrispondenza dei

sedici punti segnati in Fig. 4 e disposti ad intervalli pari ad $h/10$. Essendo le funzioni simmetriche rispetto ad y i valori relativi ai punti: N' , O' , P' , Q' , R' sono identici a quelli riportati in tabella per gli omologhi: N , O , P , Q , R .

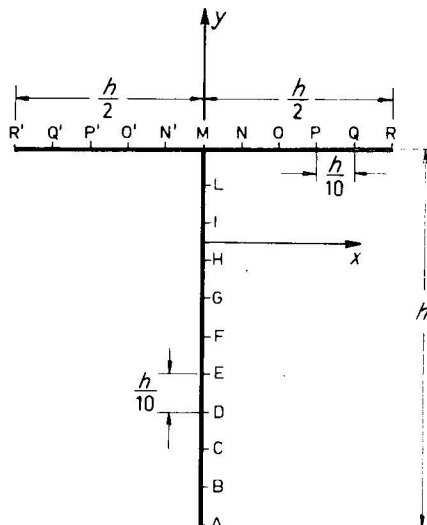


FIG. 4 - La sezione a T: punti discreti per il calcolo numerico.

3.2.2 - Le funzioni caratteristiche di tipo emisimmetrico.

Dalle (57) si deducono per le funzioni caratteristiche di tipo emisimmetrico le relazioni:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(s_1) = 0 \\ \phi(s_2) = D_2 \sin \beta s_2 + H_2 \cos \beta s_2 \\ \phi(s'_2) = -D_2 \sin \beta s'_2 - H_2 \cos \beta s'_2 \end{array} \right.$$

Le costanti caratteristiche ad esse relative assumono pertanto, per le (55), l'aspetto:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = \frac{2D_2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} + \frac{2H_2}{b} \left(\cos \frac{\beta b}{2} - 1 \right) \\ C = C_z = 0 \end{array} \right.$$

L'operatore:

$$L(s) = \frac{d\phi}{ds} - C_x \frac{dx}{ds}$$

TABELLA 4 - Funzioni d'ingobbimento simmetriche rispetto ad y ($C_x = C_z = 0$).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_n	2,037	π	4,013	5,266	2π	7,192	8,431	3π	10,348
C_y	1	0	1	1	0	1	1	0	1
I_n / th^3	0,437	h^{-2}	0,363	0,390	h^{-2}	0,371	0,395	h^{-2}	0,377
punti	$\Phi_1 h^{-1}$	Φ_2	$\Phi_3 h^{-1}$	$\Phi_4 h^{-1}$	Φ_5	$\Phi_6 h^{-1}$	$\Phi_7 h^{-1}$	Φ_8	$\Phi_9 h^{-1}$
A	0,751	- 1,000	- 0,757	- 0,746	1,000	- 0,757	- 0,759	- 1,000	- 0,760
B	- 0,592	- 0,809	- 0,436	- 0,286	0,309	- 0,031	0,146	0,309	0,406
C	- 0,336	- 0,309	0,151	0,462	- 0,809	0,749	0,725	0,809	0,372
D	- 0,026	0,309	0,646	0,744	- 0,809	0,229	- 0,313	- 0,809	- 0,761
E	0,289	0,809	0,747	0,274	0,309	- 0,689	- 0,653	- 0,309	0,357
F	0,557	1,000	0,392	- 0,473	1,000	- 0,411	0,464	1,000	0,420
G	0,733	0,809	- 0,202	- 0,742	0,309	0,580	0,546	- 0,309	- 0,759
H	0,789	0,309	- 0,672	- 0,261	- 0,809	0,564	- 0,589	- 0,809	0,306
I	0,717	- 0,309	- 0,733	0,483	- 0,809	- 0,431	- 0,410	0,809	0,466
L	0,527	- 0,809	- 0,346	0,740	0,309	- 0,678	0,684	0,309	- 0,752
M	0,250	- 1,000	0,252	0,249	1,000	0,252	0,253	- 1,000	0,253
N	0,033	- 0,809	0,391	- 0,227	0,309	0,354	- 0,415	0,309	0,173
O	- 0,190	- 0,309	0,291	- 0,473	- 0,809	- 0,159	- 0,157	0,809	- 0,419
P	- 0,382	0,309	0,013	- 0,241	- 0,809	- 0,396	0,451	- 0,809	0,228
Q	- 0,511	0,809	- 0,272	0,234	0,309	0,054	0,053	- 0,309	0,201
R	- 0,557	1,000	- 0,392	0,473	1,000	0,411	- 0,464	1,000	- 0,420

si scrive quindi nella forma:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1) = 0 \\ L(s_2) = D_2 \left[\beta \cos \beta s_2 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right] - H_2 \left[\beta \sin \beta s_2 + \frac{2}{b} \left(\cos \frac{\beta b}{2} - 1 \right) \right] \\ L(s'_2) = -D_2 \left[\beta \cos \beta s'_2 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right] + H_2 \left[\beta \sin \beta s'_2 + \frac{2}{b} \left(\cos \frac{\beta b}{2} - 1 \right) \right] \end{array} \right.$$

Le condizioni trasversali scritte, sempre nella forma (62) danno luogo pertanto al sistema omogeneo:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 \left[\beta \cos \frac{\beta b}{2} - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right] - H_2 \left[\beta \sin \frac{\beta b}{2} + \frac{2}{b} \left(\cos \frac{\beta b}{2} - 1 \right) \right] = 0 \\ H_2 = 0 \end{array} \right.$$

la cui equazione caratteristica è espressa manifestamente dalla relazione:

$$(72) \quad \beta \cos \frac{\beta b}{2} - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} = 0$$

risolubile indipendentemente dai valori del rapporto b/h .

Facendo pertanto la posizione:

$$(73) \quad \frac{\beta b}{2} = \lambda$$

la (72) si scrive

$$(74) \quad \lambda \cos \lambda - \sin \lambda = 0$$

Nella Tab. 5 sono riportate le prime nove radici diverse da zero di tale equazione e, in colonna con queste, i valori della costante C_x (assunta sempre unitaria), delle norme I_n e delle funzioni d'ingobbimento ϕ_n in corrispondenza dei punti M, N, O, P, Q, R disposti sulla piattabanda ad intervalli pari a $b/10$ (Fig. 4). I punti omologhi relativi alla metà sinistra della piattabanda, per emisimmetria hanno valori eguali e di segno opposto.

In questo caso non si presentano radici dell'equazione caratteristica per le quali risulti $C_x = 0$ e pertanto la tabellazione è stata sempre eseguita imponendo la condizione $C_x = 1$.

3.3 – Considerazioni relative ai risultati.

mentre la prima componente emisimmetrica si estingue a una distanza:

$$(78) \quad d_1 = \frac{5,84}{4,493} h = 1,30 h ,$$

dello stesso ordine di grandezza della prima.

Non appare pertanto in questo caso alcuna funzione d'ingobbimento a basso fattore di smorzamento in quanto la sezione, pur avendo un basso coefficiente di rigidezza tor-

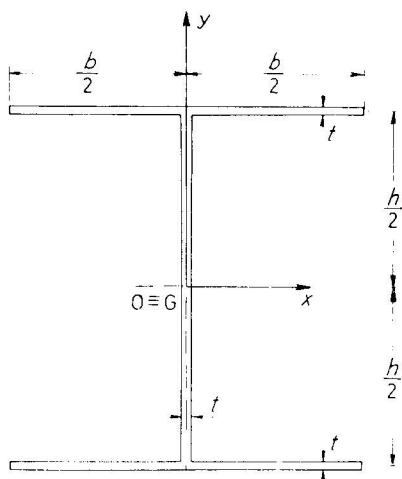


FIG. 5 - La sezione a I: riferimento cartesiano.

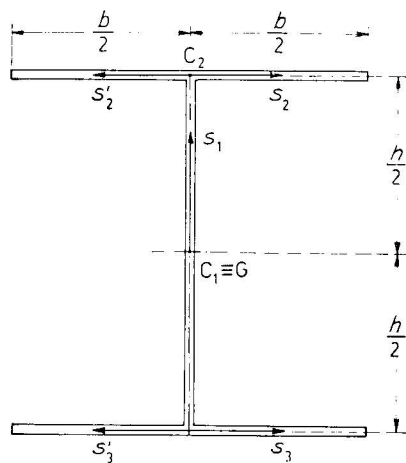


FIG. 6 - La sezione a I: riferimenti locali.

sionale, non si ingobba per effetto di un momento torcente costante risultando quindi $\omega_z = 0$. La teoria tecnica risulta quindi in questo caso sufficientemente approssimata.

4 - La sezione a I.

È un caso classico di sezione monoconnessa a direttrice doppiamente simmetrica (Fig. 5). Per semplicità si riterrà lo spessore t eguale per tutti gli elementi rettangolari componenti la sezione.

In Fig. 6 sono illustrate le ascisse di riferimento locale per le cinque sezioni rettangolari elementari in cui può decomporsi la sezione.

In virtù della doppia simmetria della sezione suddivideremo le funzioni caratteristiche (1) in funzioni doppiamente simmetriche:

$$(79) \quad 1, \phi_n \left\{ \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, \infty \end{matrix} \right.$$

funzioni simmetriche rispetto ad y ed emisimmetriche rispetto ad x :

$$(80) \quad y, \left\{ \Phi_m \right\}_{m=1,2,\dots,\infty}$$

funzioni simmetriche rispetto a x ed emisimmetriche rispetto a y :

$$(81) \quad x, \left\{ \Phi_r \right\}_{r=1,2,\dots,\infty}$$

funzioni doppiamente emisimmetriche:

$$(82) \quad \left\{ \Phi_s \right\}_{s=1,2,\dots,\infty}$$

4.1 - Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema del Saint-Venant.

Le funzioni fondamentali (9) sviluppate per i cinque elementi componenti la sezione globale, assumono l'aspetto:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(s_1) = 0 \\ y(s_1) = s_1, \quad \left(-\frac{h}{2} \leq s_1 \leq \frac{h}{2} \right) \\ r(s_1) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x(s_2) = s_2 \\ y(s_2) = \frac{h}{2}, \quad \left(0 \leq s_2 \leq \frac{b}{2} \right) \\ r(s_2) = -\frac{h}{2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x(s'_2) = -s'_2 \\ y(s'_2) = \frac{h}{2}, \quad \left(0 \leq s'_2 \leq \frac{b}{2} \right) \\ r(s'_2) = \frac{h}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x(s_3) = s_3 \\ y(s_3) = -\frac{h}{2}, \quad \left(0 \leq s_3 \leq \frac{b}{2} \right) \\ r(s_3) = \frac{h}{2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x(s'_3) = -s'_2 \\ y(s'_3) = -\frac{h}{2}, \quad \left(0 \leq s'_3 \leq \frac{b}{2} \right) \\ r(s'_3) = -\frac{h}{2} \end{array} \right.$$

Dalle (83), seguendo gli stessi procedimenti già indicati in precedenza, si trae pertanto per le funzioni di ingobbimento taglianti e torcente $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x(s_1) = 0 \\ \omega_y(s_1) = \frac{s_1^3}{6} - \frac{h}{4} \left(2b + \frac{h}{2} \right) s_1 \\ \omega_z(s_1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x(s_2) = \frac{s_2^3}{6} - \frac{b^2}{8} s_2 \\ \omega_y(s_2) = \frac{h}{4} \left\{ s_2^2 - b s_2 - b h - \frac{h^2}{6} \right\} \\ \omega_z(s_2) = -\frac{h}{2} s_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x(s'_2) = -\frac{s'^2_2}{6} + \frac{b^2}{8} s'^2_2 \\ \omega_y(s'_2) = +\frac{h}{4} \left\{ s'^2_2 - b s'_2 - b h - \frac{h^2}{6} \right\} \\ \omega_z(s'_2) = \frac{h}{2} s'_2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_x(s_3) = \frac{s_3^3}{6} - \frac{b^2}{8} s_3 \\ \omega_y(s_3) = -\frac{h}{4} \left\{ s_3^2 - b s_3 - b h - \frac{h^2}{6} \right\} \\ \omega_z(s_3) = \frac{h}{2} s_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x(s'_3) = -\frac{s'^3_3}{6} - \frac{b^2}{8} s'_3 \\ \omega_y(s'_3) = -\frac{h}{4} \left\{ s'^2_3 - b s'_3 - b h - \frac{h^2}{6} \right\} \\ \omega_z(s'_3) = -\frac{h}{2} s'_3 \end{array} \right.$$

e da queste, ricordando le (Nota I, (49)) e (Nota I, (46)), le espressioni delle funzioni inverse:

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(s_1) = 0 \\ Y(s_1) = \frac{s_1}{th} \\ \Omega_z(s_1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X(s_2) = \frac{s_2}{2bt} \\ Y(s_2) = \frac{1}{2t} \\ \Omega_z(s_2) = -\frac{h s_2}{b t h^2 + 2(2b + h) t^3/3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X(s'_2) = -\frac{s'_2}{2bt} \\ Y(s'_2) = \frac{1}{2t} \\ \Omega_z(s'_2) = \frac{h s'_2}{b t h^2 + 2(2b + h) t^3/3} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} X(s_3) = \frac{s_3}{2bt} \\ Y(s_3) = -\frac{1}{2t} \\ \Omega_z(s_3) = \frac{h s_3}{b t h^2 + 2(2b + h) t^3/3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X(s'_3) = -\frac{s'_3}{2bt} \\ Y(s'_3) = -\frac{1}{2t} \\ \Omega_z(s'_3) = -\frac{h s'_3}{b t h^2 + 2(2b + h) t^3/3} \end{array} \right.$$

4.2 – Il calcolo delle funzioni fondamentali del problema generalizzato.

Anche in questo caso essendo x ed y funzioni lineari, ed r funzione costante delle ascisse locali s_i , la soluzione della equazione fondamentale (Nota II, (33)) si scriverà:

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(s_1) = A_1 \sin \beta s_1 + B_1 \cos \beta s_1 & \left(-\frac{h}{2} \leq s_1 \leq \frac{h}{2} \right) \\ \Phi(s_2) = A_2 \sin \beta s_2 + B_2 \cos \beta s_2 & \left(0 \leq s_2 \leq \frac{b}{2} \right) \\ \Phi(s'_2) = A'_2 \sin \beta s'_2 + B'_2 \cos \beta s'_2 & \left(0 \leq s'_2 \leq \frac{b}{2} \right) \\ \Phi(s_3) = A_3 \sin \beta s_3 + B_3 \cos \beta s_3 & \left(0 \leq s_3 \leq \frac{b}{2} \right) \\ \Phi(s'_3) = A'_3 \sin \beta s'_3 + B'_3 \cos \beta s'_3 & \left(0 \leq s'_3 \leq \frac{b}{2} \right) \end{array} \right.$$

Le costanti fondamentali C_x , C_y , C_z avranno quindi l'aspetto:

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\Phi}{ds_1} \frac{dX}{ds_1} ds_1 + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds_i} \frac{dX}{ds_i} ds_i + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds'_i} \frac{dX}{ds'_i} ds'_i \right] \\ C_y = t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\Phi}{ds_1} \frac{dY}{ds_1} ds_1 + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds_i} \frac{dY}{ds_i} ds_i + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds'_i} \frac{dY}{ds'_i} ds'_i \right] \\ C_z = t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\Phi}{ds_1} \frac{d\Omega_z}{ds_1} ds_1 + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds_i} \frac{d\Omega_z}{ds_i} ds_i + \sum_{i=2,3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{d\Phi}{ds'_i} \frac{d\Omega_z}{ds'_i} ds'_i \right] \end{array} \right.$$

La suddivisione della soluzione generale (86) nelle quattro classi fondamentali (79) (80), (81) e (82) è riportata per semplicità direttamente senza avvalersi di trasformazioni del tipo (56) ovviamente applicabili anche nel caso attuale.

4.2.1 - Le funzioni caratteristiche di tipo doppiamente simmetrico.

È immediato rendersi conto che dalla (86) è estraibile quale soluzione doppiamente simmetrica l'insieme di relazioni:

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(s_1) = B_1 \cos \beta s_1 \\ \Phi(s_2) = C_2 \sin \beta s_2 + F_2 \cos \beta s_2 \\ \Phi(s'_2) = C_2 \sin \beta s'_2 + F_2 \cos \beta s'_2 \\ \Phi(s_3) = C_2 \sin \beta s_3 + F_2 \cos \beta s_3 \\ \Phi(s'_3) = C_2 \sin \beta s'_3 + F_2 \cos \beta s'_3 \end{array} \right.$$

Per le (87) le costanti fondamentali associate a tale soluzione risultano essere:

$$C_x = C_y = C_z = 0$$

e pertanto l'operatore $L(\Phi)$ assume l'aspetto

$$L(\Phi) = \frac{d\Phi}{ds}.$$

Si ha dunque per le (88):

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1) = -B_1 \beta \sin \beta s_1 \\ L(s_2) = C_2 \beta \cos \beta s_2 - F_2 \beta \sin \beta s_2 \\ L(s'_2) = C_2 \beta \cos \beta s'_2 - F_2 \beta \sin \beta s'_2 \\ L(s_3) = C_2 \beta \cos \beta s_3 - F_2 \beta \sin \beta s_3 \\ L(s'_3) = C_2 \beta \cos \beta s'_3 - F_2 \beta \sin \beta s'_3 \end{array} \right.$$

Le condizioni trasversali (Nota II, (45-a)) associate sempre a quelle di continuità del flusso $t L(s)$ e di monodromia della funzione $\Phi(s)$ impongono peraltro le condizioni:

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1)_{s_1=\frac{h}{2}} - L(s_2)_{s_2=0} - L(s'_2)_{s'_2=0} = 0 \\ L(s_2)_{s_2=\frac{b}{2}} = 0 \\ \Phi(s_1)_{s_1=\frac{h}{2}} = \Phi(s_2)_{s_2=0} \end{array} \right.$$

e porgono quindi, in conformità con le (88) e (89), il sistema omogeneo nelle tre incognite B_1, C_2, F_2 :

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 \beta \sin \frac{\beta h}{2} + 2\beta C_2 = 0 \\ C_2 \beta \cos \frac{\beta b}{2} - F_2 \beta \sin \frac{\beta b}{2} = 0 \\ B_1 \cos \frac{\beta h}{2} - F_2 = 0 \end{array} \right.$$

Dalle (91) è immediato trarre quale equazione caratteristica la relazione:

$$(92) \quad \beta^2 \left(\sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta b}{2} + 2 \sin \frac{\beta b}{2} \cos \frac{\beta h}{2} \right) = 0 .$$

La (92) è risolubile numericamente solo per prefissati valori del rapporto b/h . Soffermendoci ancora, a titolo esemplificativo sul rapporto $b/h = 1$, e facendo sempre la posizione:

$$(93) \quad \frac{\beta h}{2} = \lambda ,$$

la (92) si trasforma nella semplicissima equazione trascendente:

$$(94) \quad \lambda^2 \sin 2\lambda = 0$$

le cui radici, com'è noto, sono:

$$(95) \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) .$$

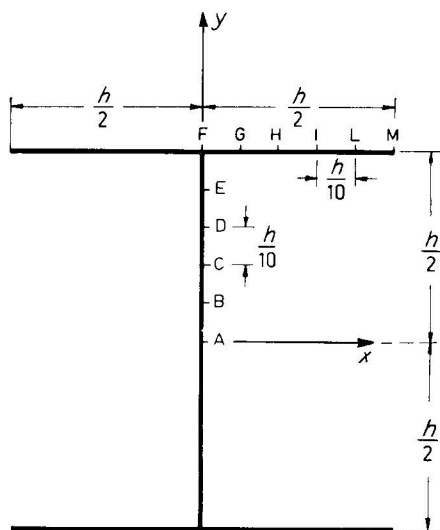


FIG. 7 - La sezione a I: punti discreti per il calcolo numerico.

Le corrispondenti funzioni d'ingobbimento, ponendo unitaria l'ampiezza massima B_1 , sono tabellate nella Tab. 6 per i primi nove valori delle (95) (escludendo la radice $\lambda = 0$), in corrispondenza degli 11 punti riportati in Fig. 7 e disposti sulla sezione con intervalli pari ad $h/10$.

TABELLA 6 - Funzioni d'ingobbimento simmetriche rispetto ad x ed y ($C_x = C_y = C_z = 0$).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_n	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
I_n/th	0,750	1,500	0,750	1,500	0,750	1,500	0,750	1,500	0,750
punti	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9
A	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
B	0,951	0,809	0,588	0,309	0	-0,309	-0,588	-0,809	-0,951
C	0,809	0,309	-0,309	-0,809	-1,000	-0,809	-0,309	0,309	0,809
D	0,588	-0,309	-0,951	-0,809	0	0,809	0,951	0,309	0,588
E	0,309	-0,809	-0,809	0,309	1,000	0,309	-0,809	-0,809	0,309
F	0	-1,000	0	1,000	0	-1,000	0	1,000	0
G	-0,155	-0,809	0,405	0,309	-0,500	0,309	0,405	-0,809	-0,155
H	-0,294	-0,309	0,476	-0,809	0	0,809	-0,476	0,309	0,294
I	-0,405	0,309	0,155	-0,809	0,500	-0,809	0,155	0,309	-0,405
L	-0,476	0,809	-0,294	0,309	0	-0,309	0,294	-0,809	0,476
M	-0,500	1,000	-0,500	1,000	-0,500	1,000	-0,500	1,000	-0,500

4.2.2 - Le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico rispetto ad y ed emisimmetrico rispetto ad x .

Tali funzioni sono del tipo:

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(s_1) = A_1 \sin \beta s_1, \\ \Phi(s_2) = D_2 \sin \beta s_2 + H_2 \cos \beta s_2, \\ \Phi(s'_2) = D_2 \sin \beta s'_2 + H_2 \cos \beta s'_2, \\ \Phi(s_3) = -D_2 \sin \beta s_3 - H_2 \cos \beta s_3, \\ \Phi(s'_3) = -D_2 \sin \beta s'_3 - H_2 \cos \beta s'_3. \end{array} \right.$$

e corrispondentemente si ha per le costanti C_x , C_y , C_z :

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = C_z = 0 \\ C_y = \frac{2A_1}{h} \sin \frac{\beta h}{2} \end{array} \right.$$

L'operatore $L(s)$ si scrive quindi:

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1) = A_1 \left(\beta \cos \beta s_1 - \frac{2}{h} \sin \frac{\beta h}{2} \right) \\ L(s_2) = D_2 \beta \cos \beta s_2 - H_2 \beta \sin \beta s_2 \\ L(s'_2) = D_2 \beta \cos \beta s'_2 - H_2 \beta \sin \beta s'_2 \\ L(s_3) = -D_2 \beta \cos \beta s_3 + H_2 \beta \sin \beta s_3 \\ L(s'_3) = -D_2 \beta \cos \beta s'_3 + H_2 \beta \sin \beta s'_3 \end{array} \right.$$

e pertanto le condizioni (90) scritte in conformità con le (96) e (98) forniscono il sistema omogeneo:

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \left(\beta \cos \frac{\beta h}{2} - \frac{2}{h} \sin \frac{\beta b}{2} \right) - 2 \beta D_2 = 0 \\ D_2 \beta \cos \frac{\beta b}{2} - H_2 \beta \sin \frac{\beta b}{2} = 0 \\ A_1 \sin \frac{\beta h}{2} - H_2 = 0 \end{array} \right.$$

L'equazione caratteristica risulta quindi essere:

$$(100) \quad \beta \cos \frac{\beta b}{2} \left(\beta \cos \frac{\beta h}{2} - \frac{2}{h} \sin \frac{\beta b}{2} \right) - 2 \beta^2 \sin \frac{\beta b}{2} \sin \frac{\beta h}{2} = 0$$

ed in particolare per $b/h = 1$, tenendo presente la posizione (93):

$$(101) \quad 2\lambda [\lambda (3 \cos 2\lambda - 1) - \sin 2\lambda] = 0$$

Le funzioni d'ingobbimento relative alle prime nove radici diverse da zero della (101) sono state tabellate nella Tab. 7 assumendo sempre $C_y = 1$. I valori riportati in corrispondenza degli undici punti illustrati in Fig. 7 possono, tenendo presente la simmetria della funzione rispetto a y e l'emisimmetria rispetto a x , estendersi ai punti simmetrici rispetto a x ed y di quelli prescelti.

4.2.3 - Le funzioni caratteristiche di tipo simmetrico rispetto ad x ed emisimmetrico rispetto ad y .

Funzioni di tal genere risultano essere espresse dalle relazioni:

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(s_1) = 0 \\ \Phi(s_2) = M_2 \sin \beta s_2 \\ \Phi(s'_2) = -M_2 \sin \beta s'_2 \\ \Phi(s_3) = M_2 \sin \beta s_3 \\ \Phi(s'_3) = -M_2 \sin \beta s'_3 \end{array} \right.$$

Le costanti fondamentali C_x , C_y , C_z assumono pertanto l'aspetto:

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = \frac{2M_2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \\ C_y = C_z = 0 \end{array} \right.$$

per cui l'operatore $L(s)$ assume la forma:

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(s_1) = 0 \\ L(s_2) = M_2 \left(\beta \cos \beta s_2 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right) \\ L(s'_2) = -M_2 \left(\beta \cos \beta s'_2 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right) \\ L(s_3) = M_2 \left(\beta \cos \beta s_3 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right) \\ L(s'_3) = -M_2 \left(\beta \cos \beta s'_3 - \frac{2}{b} \sin \frac{\beta b}{2} \right) \end{array} \right.$$

TABELLA 7 - Funzioni d'ingobbimento simmetriche rispetto ad y ed emisimmetriche rispetto ad x
($C_x = 0$, $C_y = 1$, $C_z = 0$).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_n	2,457	3,713	5,638	6,875	8,790	10,024	11,937	13,169	15,081
I_n / th^3	0,707	0,771	0,740	0,785	0,723	0,783	0,757	0,727	0,694
punti	$\Phi_1 h^{-1}$	$\Phi_2 h^{-1}$	$\Phi_3 h^{-1}$	$\Phi_4 h^{-1}$	$\Phi_5 h^{-1}$	$\Phi_6 h^{-1}$	$\Phi_7 h^{-1}$	$\Phi_8 h^{-1}$	$\Phi_9 h^{-1}$
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0,373	-0,625	-0,754	0,892	0,819	-0,818	-0,587	0,420	0,103
C	0,657	-0,921	-0,647	0,347	-0,305	0,688	0,856	-0,735	-0,204
D	0,786	-0,732	0,199	-0,757	-0,706	0,239	-0,661	0,864	0,302
E	0,729	-0,157	0,818	-0,642	0,568	-0,889	0,107	-0,775	-0,396
F	0,499	0,500	0,502	0,507	0,494	0,508	0,505	0,490	0,483
G	0,248	0,586	-0,126	0,433	-0,450	0,101	-0,620	-0,264	-0,523
H	-0,062	0,363	-0,610	-0,339	-0,327	-0,593	0,398	-0,028	0,555
I	-0,357	-0,051	-0,397	-0,565	0,571	0,398	0,039	0,313	-0,578
L	-0,568	-0,438	0,269	0,119	0,114	0,259	-0,455	-0,520	0,592
M	-0,645	-0,594	0,628	0,611	-0,613	-0,615	0,625	0,595	-0,596

e sono associate pertanto alle costanti fondamentali:

$$(108) \quad \begin{cases} C_x = C_y = 0 \\ C_z = - \frac{4h}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} N_2 \sin \frac{\beta b}{2} \end{cases}$$

L'operatore $L(s)$ assume quindi l'aspetto:

$$(109) \quad \begin{cases} L(s_1) = 0 \\ L(s_2) = N_2 \left\{ \beta \cos \beta s_2 - \frac{2h^2}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} \right\} \\ L(s'_2) = - N_2 \left\{ \beta \cos \beta s'_2 - \frac{2h^2}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} \right\} \\ L(s_3) = - N_2 \left\{ \beta \cos \beta s_3 - \frac{2h^2}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} \right\} \\ L(s_3) = N_2 \left\{ \beta \cos \beta s'_3 - \frac{2h^2}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} \right\} \end{cases}$$

Le condizioni trasversali, espresse sempre dalle (90) porgono pertanto la relazione:

$$(110) \quad N_2 \left\{ \beta \cos \frac{\beta b}{2} - \frac{2h^2}{bh^2 + 2(2b+h)t^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} \right\} = 0 ,$$

e quindi l'equazione caratteristica assume l'aspetto:

$$(111) \quad \beta \cos \frac{\beta b}{2} - \frac{2}{b + 2(2b+h)k^2/3} \sin \frac{\beta b}{2} = 0 ,$$

avendo posto:

$$(112) \quad \frac{t}{h} = k .$$

Nelle Tab. 9 e 10 sono infatti riportate per i due valori del detto rapporto, ed in corrispondenza delle prime nove radici diverse da zero della (113), i valori delle relative funzioni d'ingobbimento, calcolate per $C_z = 1$, in corrispondenza dei sei punti F, G, H, I, L, M .

4.3 – Considerazioni relative ai risultati.

Anche in questo caso è interessante osservare il comportamento della trave in relazione alle sollecitazioni d'ingobbimento semplice attraverso i valori delle distanze d'estinzione d_n .

La formula generale di tali distanze resta sempre espressa dalla (75), ed in particolare per $\nu = 0,3$ dalla (76); pertanto, nei quattro casi fondamentali in cui si è suddivisa la soluzione, le componenti di minimo smorzamento sono caratterizzate dai valori delle distanze:

$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \langle 1 \rangle & d_1 = \frac{5,84}{1,571} h = 3,72 h \\ \langle 2 \rangle & d_1 = \frac{5,84}{2,457} h = 2,37 h \\ \langle 3 \rangle & d_1 = \frac{5,84}{4,493} h = 1,30 h \\ \langle 4 \rangle & \left\{ \begin{array}{ll} d_1 = \frac{5,84}{0,049} h = 119,00 h & k = 0,02 \\ d_1 = \frac{5,84}{0,242} h = 24,10 h & k = 0,10 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si ritrova pertanto in questo caso, in conformità con quanto detto in precedenza una particolare funzione d'ingobbimento, più precisamente la prima delle doppiamente emisimmetriche, a bassissimo coefficiente di smorzamento.

La corrispondente distanza d'estinzione, di ordine di grandezza largamente superiore a tutte le altre, è peraltro influenzata in maniera diretta dal rapporto fra spessore t ed altezza h .

Tali anomalie, si riscontrano peraltro solo per tale funzione. Riferendosi infatti alla seconda componente doppiamente emisimmetrica la distanza d'estinzione è pressoché indipendente dal detto rapporto e vale all'incirca:

$$(116) \quad d_1 = 1,30 h$$

rientrando quindi nell'ordine di grandezza previsto dal postulato del SAINT-VENANT.

5 - Conclusioni.

Dall'esame dei tre casi particolari di sezione presi in considerazione nella presente Parte, può trarsi qualche conclusione di interesse pratico nei riguardi del calcolo in regime elastico delle travi di parete sottile.

Facendo infatti specifico riferimento alle travi di sezione aperta può concludersi che, escludendo un particolare caso d'ingobbimento semplice di andamento molto prossimo alla funzione d'ingobbimento torsionale $\omega_z(s)$, tutte le altre sollecitazioni d'ingobbimento semplice si smorzano ad una distanza dalle basi estreme non superiore a tre quattro volte una dimensione media della sezione trasversale della trave.

Il calcolo in regime elastico del sistema di tensioni nell'interno della trave provocate da carichi localizzati sulle due basi terminali può pertanto ritenersi sufficientemente esatto nel corpo centrale della struttura se condotto secondo la teoria delle aree settoriali di Vlasov-Timoshenko.

A questo è però da sovrapporsi un calcolo del regime tensionale locale nelle zone prossime alle testate effettuabile in rigore solo con la teoria completa sviluppata nel presente Studio.

Per le travi a sezione pluriconnessa è semplice intuire, anche se per ragioni di snellezza non si sono sviluppati esempi numerici, che in virtù della robusta rigidità torsionale, non presentandosi sollecitazioni d'ingobbimento semplice a basso smorzamento, la teoria tecnica fornisce risultati sufficientemente esatti nel corpo centrale della trave restando affidate ad un calcolo più esatto solo le zone prossime alle due testate terminali.

Nella Nota seguente, al lume di tali conclusioni, estenderemo la trattazione al solido soggetto a generici sistemi di forze sulla superficie laterale, con particolare riferimento al calcolo del regime tensionale locale in prossimità di vincoli e carichi concentrati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] B. Z. VLASOV: *Thin-walled elastic beams* (Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1961). [Publ. for the National Science Foundation, Washington, D. C.].
- [2] S. TIMOSHENKO: « Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open section », in *Journal Franklin Institute* (1945).
- [3] VON KÁRMÁN & CHRISTENSEN: « Methods of analysis for torsion with variable twist », in *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 11, n. 2 (1964).
- [4] VON KÁRMÁN & WEI ZANG CHIEN: « Torsion with variable twist », in *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 13 (1946).
- [5] M. CAPURSO: « La trattazione di Jourawski per le sezioni pluriconnesse », in *Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, s. 4, vol. 28 (1961).
- [6] M. CAPURSO: « Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota I: La teoria rigorosa e le equazioni fondamentali », in *Ric. sci.*, 34 (II-A), vol. 6, 213 (1964).
- [7] —: « Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota II: La generalizzazione del problema del SAINT-VENANT », in *Ric. sci.*, 34 (II-A), vol. 6, 241 (1964).

RIASSUNTO

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. **Nota III: Complementi analitici: Il calcolo delle funzioni caratteristiche per alcuni tipi di travi di parete sottile di comune impiego.**

(Lavoro scientifico originale)

Si riportano alcuni esempi di calcolo delle autofunzioni $\Phi_n(s)$ e degli autovalori β_n per alcuni tipi di travi di parete sottile di comune impiego nella pratica tecnica.

La riproduzione del *Riassunto* è autorizzata, citando l'autore e il periodico.

RÉSUMÉ

Sur le calcul des voiles longues à parois minces soumises à forces et à distorsions. **Note III: Développements analytiques: Le calcul des coordonnées généralisées pour quelques types de tige d'usage courant.**

(Mémoire scientifique original)

On donne quelques exemples du calcul des fonctions propres $\Phi_n(s)$ et des valeurs propres β_n pour quelques types de tige d'usage courant.

La reproduction du *Résumé* est autorisée, en faisant référence à l'auteur et au périodique.

SUMMARY

Theory of thin-walled elastic beams of general cross-section subjected to loads and dislocations. **Note III: Analytical developments: Warping function calculations for some types of usual thin-walled beams.**

(Original scientific paper)

Eigenfunctions $\Phi_n(s)$ and eigenvalues β_n for some types of usual cross-section of thin-walled elastic beams are calculated.

The reproduction of the *Summary*, mentioning author and periodical, is authorized.

ZUSAMMENFASSUNG

Über die Berechnung der Träger von dünnen Wänden in Gegenwart von Kräften und Verzerrungen. **III. Mitteilung: Analytische Ergänzungen: Berechnung der Funktionen, die charakteristisch für einige Typen von Trägern für gebräuchliche dünne Wände sind.**

(Wissenschaftliche Originalarbeit)

Man gibt einige Kalkulationsbeispiele der Eigenfunktionen $\Phi_n(s)$ und der Eigenwerte β_n für einige Typen von Trägern für dünne Wände, die in der praktischen Technik allgemein gebraucht werden.

Die Wiedergabe der *Zusammenfassung* mit Quellenangabe (Verfasser und Zeitschrift) ist gestattet.