

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni

Nota II: La generalizzazione del problema del Saint-Venant (*)

MICHELE CAPURSO

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Università di Napoli

Lavoro eseguito con il contributo del CNR
Testo ricevuto il 14 dicembre 1963

1 - Premesse.

Nella Nota I [6] si è impostato su basi del tutto generali il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile a sezione trasversalmente indeformabile soggette a forze ed azioni distorcenti agenti con legge del tutto generica. Il problema è stato ricondotto alla integrazione di un'unica equazione integro-differenziale lineare alle derivate parziali involvente la componente assiale dello spostamento $w(z, s)$ dei punti della superficie media della parete sottile costituente la trave. A tale funzione risultano poi legate per semplice quadratura i tre parametri dello spostamento trasversale della sezione $u_0(z)$, $v_0(z)$, $\varphi_0(z)$ coincidenti rispettivamente con le due traslazioni secondo x ed y del centro di taglio $O \equiv (x_0, y_0)$ della sezione, e con la rotazione della sezione sempre rispetto ad O .

Di tali equazioni si vuol ora dare soluzione supponendo nulle le azioni distorcenti interne:

$$(1) \quad \varepsilon_z^*, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z,$$

e ritenendo nulle le azioni esterne agenti sulla superficie laterale del solido:

$$(2) \quad \overline{p_z}, \overline{p_x}, \overline{p_y}, \overline{m_z}.$$

(*) Lavoro presentato dal prof. ELIO GIANGRECO, O. di tecnica delle costruzioni, Università, Napoli.

Il solido è dunque caricato esclusivamente sulle due basi estreme $z = 0$ e $z = l$ da un sistema di forze:

$$(3) \quad p_{0z}(s), F_{0x}, F_{0y}, M_{0z},$$

sulla base $z = 0$, e

$$(4) \quad p_{lz}(s), F_{lx}, F_{ly}, M_{lz},$$

sulla base $z = l$.

Fatta la convenzione di ritenere positive le forze agenti secondo il verso dei semiassi positivi e le coppie rotanti in senso levogiro fra le (3) e le (4) devono sussistere necessariamente le sei relazioni fondamentali dell'equilibrio dei corpi rigidi:

$$(5) \quad \begin{cases} F_{0x} + F_{lx} = 0, & M_{0x} + M_{lx} - F_{ly} l = 0, \\ F_{0y} + F_{ly} = 0, & M_{0y} + M_{ly} + F_{lx} l = 0, \\ F_{0z} + F_{lz} = 0, & M_{0z} + M_{lz} = 0, \end{cases}$$

ove si sono indicate con:

$$(6) \quad \begin{cases} F_{0z} = \int_A p_{0z} dA, & F_{lz} = \int_A p_{lz} dA, \\ M_{0x} = \int_A p_{0z} y dA, & M_{lx} = \int_A p_{lz} y dA, \\ M_{0y} = - \int_A p_{0z} x dA, & M_{ly} = - \int_A p_{lz} x dA, \end{cases}$$

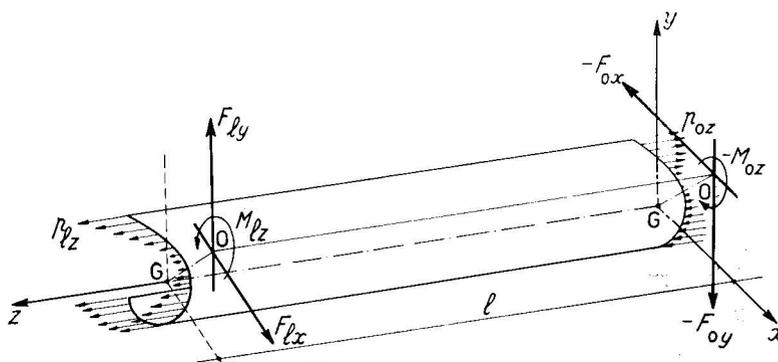


FIG. 1 - Le condizioni di carico della trave.

le risultanti secondo z e i momenti risultanti secondo x ed y delle azioni assiali esterne $p_{0z}(s)$ e $p_{lz}(s)$ (Fig. 1).

Con le posizioni fatte le caratteristiche trasversali della sollecitazione $T_x(z)$, $T_y(z)$, $M_z(z)$ risultano funzioni costanti; più precisamente si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} T_x(z) = F_{lx} = \text{cost} \\ T_y(z) = F_{ly} = \text{cost} \\ M_z(z) = M_{lz} = \text{cost} \end{cases}$$

e pertanto le trasformate lineari (50) della Nota I assumono l'aspetto:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\tau}_x(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{11} F_{lx} + D_{12} F_{ly} + D_{13} M_{lz} \} = \bar{\tau}_{lx} = \text{cost} \\ \bar{\tau}_y(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{12} F_{lx} + D_{22} F_{ly} + D_{23} M_{lz} \} = \bar{\tau}_{ly} = \text{cost} \\ \bar{\tau}_z(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{13} F_{lx} + D_{23} F_{ly} + D_{33} M_{lz} \} = \bar{\tau}_{lz} = \text{cost} \end{aligned} \right.$$

essendo D e D_{ik} noti coefficienti dipendenti esclusivamente dalla geometria della sezione trasversale (Cfr. Nota I).

L'equazione fondamentale (53) della Nota I, tenendo conto di quanto detto sulle azioni distorcenti (1) e sui carichi di superficie (2), si scrive pertanto nella forma:

$$(9) \quad \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} \cdot dA - \frac{d^2 y}{ds^2} \cdot \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} \cdot dA + \\ - \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \cdot \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} \cdot dA = \frac{1}{G} \left(\bar{\tau}_{lx} \frac{d^2 x}{ds^2} + \bar{\tau}_{ly} \frac{d^2 y}{ds^2} + \bar{\tau}_{lz} \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \right)$$

ove $x(z)$, $y(z)$ e $\omega_z(z)$ sono rispettivamente le due funzioni parametriche della curva direttrice e la funzione d'ingobbimento torsionale, e $X(s)$, $Y(s)$, $\Omega_z(s)$ le rispettive trasformate lineari:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{11} x(s) + D_{12} y(s) + D_{13} \omega_z(s) \} \\ Y(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{12} x(s) + D_{22} y(s) + D_{23} \omega_z(s) \} \\ \Omega_z(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{13} x(s) + D_{23} y(s) + D_{33} \omega_z(s) \} \end{aligned} \right.$$

Le (51) della Nota I porgono peraltro:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} \cdot dA + \frac{\bar{\tau}_{lx}}{G} \\ \frac{dv_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} \cdot dA + \frac{\bar{\tau}_{ly}}{G} \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} \cdot dA + \frac{\bar{\tau}_{lz}}{G} \end{aligned} \right.$$

mentre le relazioni di elasticità (54) della Nota I divengono:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{zs} = GL(w) + \bar{\tau}_{lx} \frac{dx}{ds} + \bar{\tau}_{ly} \frac{dy}{ds} + \mathfrak{N}_{lx} r \end{array} \right.$$

essendo r la minima distanza del generico punto dal centro di taglio O , e $L(w)$ l'operatore lineare:

$$(13) \quad L(w) = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{dy}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA - r \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA.$$

Le condizioni ai limiti longitudinali relative alla equazione fondamentale (9) sono espresse dalle (56) della Nota I nella forma:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{1-\nu^2}{E} p_{0z} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=l} = \frac{1-\nu^2}{E} p_{lz} \end{array} \right.$$

mentre le condizioni trasversali si distinguono nella forma (59-a) della Nota I.

$$(15-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [L(w)]_{s=s_1} = - \bar{\tau}_{lx} \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_1} - \bar{\tau}_{ly} \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_1} - \mathfrak{N}_{lx} r(s_1) \\ [L(w)]_{s=s_2} = - \bar{\tau}_{lx} \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_2} - \bar{\tau}_{ly} \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_2} - \mathfrak{N}_{lx} r(s_2) \end{array} \right.$$

per le sezioni aperte a direttrice continua delimitata da due generatrici estreme di ascissa curvilinea $s = s_1$ ed $s = s_2$, e nella forma (59-b) della Nota I:

$$(15-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\partial w}{\partial s} ds = 0 \\ \int \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds = 0 \end{array} \right.$$

per le sezioni chiuse a direttrice continua.

Come nella Nota I le travi di parete sottile di sezione composta a direttrice discontinua vengono trattate in appendice come estensione dei due casi fondamentali sopracitati.

2 - La soluzione della equazione fondamentale 9 per i casi delle sezioni a direttrice continua.

La soluzione della equazione fondamentale (9) può porsi, secondo noti procedimenti, nella forma:

$$(16) \quad w(z, s) = w_0(z, s) + w_1(z, s)$$

essendo $w_1(z, s)$ un qualsiasi integrale particolare della equazione completa scelto colla sola condizione di soddisfare le condizioni trasversali (15) (a o b a seconda del tipo di sezione), e $w_0(z, s)$ l'integrale generale dell'omogenea associata soddisfacente ancora le condizioni trasversali (15). Alla funzione $w(z, s)$, espressa come somma dell'integrale particolare e di quello generale sarà poi richiesto il soddisfacimento delle condizioni longitudinali (14).

La soluzione, condotta per tal via acquista peraltro un particolare significato fisico: la funzione $w_0(z, s)$ rispecchia infatti il comportamento della trave caricata esclusivamente sulle due basi estreme da azioni longitudinali:

$$p_{0z}^{(0)}(s), p_{1z}^{(0)}(s)$$

agenti sempre nel rispetto dell'equilibrio globale del solido, e la funzione $w_1(z)$ il comportamento della trave soggetta alle azioni trasversali.

$$F_{1x}, F_{1y}, M_{1z}$$

oltre alle azioni normali $p_{0z}^{(1)}$ e $p_{1z}^{(1)}$ necessarie per l'equilibrio globale, la cui distribuzione resta del tutto arbitraria.

In particolare, quindi, facendo riferimento alle azioni reali espresse dalle (3) e dalle (4), all'integrale generale dell'omogenea associeremo le distribuzioni di azioni normali:

$$(17) \quad \begin{cases} p_{0z}^{(0)} = p_{0z} - \frac{F_{1x} l}{I_y} \cdot x - \frac{F_{1y} l}{I_x} \cdot y \\ p_{1z}^{(0)} = p_{1z} \end{cases}$$

e all'integrale particolare le azioni normali :

$$(18') \quad p_{0z}^{(1)} = \frac{F_{1x} l}{I_y} x + \frac{F_{1y} l}{I_x} y, p_{1z}^{(1)} = 0,$$

e trasversali :

$$(18'') \quad F_{1x}, F_{1y}, M_{1z}.$$

3 - Il calcolo dell'integrale generale della omogenea associata alla (9).

Tale problema, come si è detto, è intimamente connesso con quello dell'equilibrio elastico di una trave di parete sottile caricata in corrispondenza delle sue due basi estreme dalle sole azioni longitudinali (Fig. 2):

$$p_{0z}^{(0)}(s), p_{1z}^{(0)}(s)$$

comunque distribuite sulle sezioni estreme nel solo rispetto delle tre condizioni di equilibrio globale alla traslazione lungo z e alla rotazione intorno ad x ed y :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_A p_{0z}^{(0)} dA + \int_A p_{lz}^{(0)} dA &= 0 \\ \int_A p_{0z}^{(0)} x dA + \int_A p_{lz}^{(0)} x dA &= 0 \\ \int_A p_{0z}^{(0)} y dA + \int_A p_{lz}^{(0)} y dA &= 0 \end{aligned} \right.$$

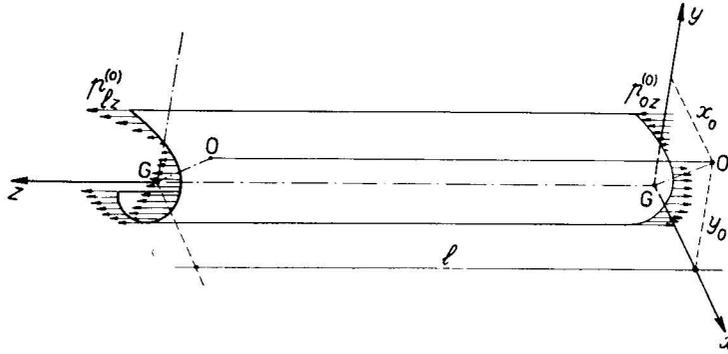


Fig. 2 - Le condizioni di carico relative all'integrale generale dell'equazione omogenea.

L'equazione fondamentale relativa a tale tipo di sollecitazione è dunque, per quanto detto:

$$(20) \quad \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} - \frac{d^2 x}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_0}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{d^2 y}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_0}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \\ - \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_0}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 0$$

ed è connessa alle condizioni trasversali omogenee:

$$(21-a) \quad \left\{ \begin{aligned} [L(w_0)]_{s=s_1} &= 0 \\ [L(w_0)]_{s=s_2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

se la sezione è aperta, ed alle condizioni

$$(21-b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\partial w_0}{\partial s} ds &= 0 \\ \int \frac{\partial w_0}{\partial s^2} ds &= 0 \end{aligned} \right.$$

se la sezione è chiusa.

Le condizioni longitudinali sono invece espresse dalle relazioni non omogenee:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)_{z=0} &= - \frac{1-\nu^2}{E} P_{0z}^{(0)} \\ \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)_{z=l} &= \frac{1-\nu^2}{E} P_{lz}^{(0)} \end{aligned} \right.$$

Della (20) esaminiamo soluzioni del tipo:

$$w_0(z, s) = \varphi(z) \cdot \Phi(s)$$

Per queste si ha:

$$(24) \quad - \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{d^2\varphi}{dz^2} \cdot \Phi(s) + \varphi(z) \left\{ \frac{d^2\Phi}{ds^2} - \frac{d^2x}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA + \right. \\ \left. - \frac{d^2y}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA - \frac{d^2\omega_z}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right\} = 0,$$

e pertanto, indicando con β^2 un parametro arbitrario:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{1-\nu}{2} \beta^2 \varphi &= 0, \\ \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \beta^2 \Phi - \frac{d^2x}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{d^2y}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \\ &- \frac{d^2\omega_z}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 0. \end{aligned} \right.$$

Facendo le posizioni:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \beta \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}, \\ L(\Phi) &= \frac{d\Phi}{ds} - \frac{dx}{ds} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{dy}{ds} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA - r \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA, \end{aligned} \right.$$

le (25) si scrivono in forma compatta:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \alpha^2 \varphi &= 0, \\ \frac{dL}{ds} + \beta^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le condizioni ai limiti trasversali (21) impongono peraltro:

$$(28-a) \quad \begin{cases} \varphi(z) [L(\Phi)]_{s=s_1} = 0 \\ \varphi(z) [L(\Phi)]_{s=s_2} = 0 \end{cases}$$

se la sezione è aperta, è:

$$(28-b) \quad \begin{cases} \varphi(z) \int \frac{d\Phi}{ds} ds = 0 \\ \varphi(z) \int \frac{d^2\Phi}{ds^2} ds = 0 \end{cases}$$

se la sezione è chiusa:

In entrambi i casi, escludendo la soluzione banale $\varphi(z) = 0$ le condizioni trasversali sono del tipo lineare omogeneo nella sola funzione incognita Φ .

Osservando peraltro che l'equazione:

$$(29) \quad \frac{d}{ds} [L(\Phi)] + \beta^2 \Phi = 0$$

è di tipo autoaggiunto, tale equazione, connessa con le condizioni ai limiti omogenee (28-a) o (28-b) ammette soluzioni differenti dalla banale $\Phi(s) = 0$ solo in corrispondenza di particolari valori del parametro β ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$) (autovalori) dedotti come radici della relativa equazione caratteristica.

La soluzione (23) del problema omogeneo può pertanto porsi nella forma:

$$(30) \quad w_0(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \Phi_n(s)$$

essendo $\Phi_n(s)$ la soluzione della (29) associata all'autovalore ennesimo β_n e φ_n la corrispondente funzione di z dedotta dalla (27) secondo la relazione:

$$(31) \quad \frac{d^2\varphi_n}{dz^2} - \alpha_n^2 \varphi_n = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_n = \beta_n \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$$

Le $\Phi_n(s)$ costituiscono per noti teoremi un sistema chiuso e completo di funzioni ortogonali e cioè tali da soddisfare le proprietà:

$$(32) \quad \int_A \Phi_n \Phi_m dA = \begin{cases} = 0 & \text{se } n \neq m \\ \neq 0 & \text{se } n = m \end{cases}$$

3.1 – Il calcolo degli autovalori β_n e delle corrispondenti autofunzioni Φ_n s.

L'equazione (29) scritta in forma esplicita ha l'aspetto:

$$(33) \quad \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \beta^2 \Phi = \frac{d^2x}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA + \frac{d^2y}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \frac{d^2\omega_z}{ds^2} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \frac{d\Omega_z}{ds} dA.$$

Facendo le posizioni:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = C_x \\ \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = C_y \\ \int_A \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = C_z \end{array} \right.$$

la (33) assume la forma:

$$(35) \quad \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \beta^2 \Phi = C_x \frac{d^2x}{ds^2} + C_y \frac{d^2y}{ds^2} + C_z \frac{d^2\omega_z}{ds^2}$$

ed il suo integrale generale assume pertanto l'aspetto:

$$(36) \quad \Phi(s) = \Phi_0(s) + C_x \Phi_x(s) + C_y \Phi_y(s) + C_z \Phi_z(s)$$

essendo Φ_0 l'integrale generale dell'omogenea:

$$(37) \quad \frac{d^2\Phi_0}{ds^2} + \beta^2 \Phi_0 = 0$$

e Φ_x, Φ_y, Φ_z tre qualsiasi integrali particolari delle equazioni:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Phi_x}{ds^2} + \beta^2 \Phi_x = \frac{d^2x}{ds^2} \\ \frac{d^2\Phi_y}{ds^2} + \beta^2 \Phi_y = \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{d^2\Phi_z}{ds^2} + \beta^2 \Phi_z = \frac{d^2\omega_z}{ds^2} \end{array} \right.$$

Le (34) consentono peraltro di esplicitare le tre costanti C_x, C_y, C_z in funzione della $\Phi_0(s)$ ed in definitiva in funzione delle due costanti indeterminate che in essa compaiono. Facendo infatti le posizioni:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = \int_A \frac{d\phi_x}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA - 1 \\ b_{22} = \int_A \frac{d\phi_y}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA - 1 \\ b_{33} = \int_A \frac{d\phi_z}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA - 1 \\ b_{12} = \int_A \frac{d\phi_y}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA ; \quad b_{21} = \int_A \frac{d\phi_x}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA \\ b_{13} = \int_A \frac{d\phi_z}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA ; \quad b_{31} = \int_A \frac{d\phi_x}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \\ b_{23} = \int_A \frac{d\phi_z}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA ; \quad b_{32} = \int_A \frac{d\phi_y}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \end{array} \right.$$

le (34) pongono il sistema:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} C_x + b_{12} C_y + b_{13} C_z = - \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA \\ b_{21} C_x + b_{22} C_y + b_{23} C_z = - \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA \\ b_{31} C_x + b_{32} C_y + b_{33} C_z = - \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \end{array} \right.$$

che, indicando al solito con B il determinante dei coefficienti della matrice quadrata dei b_{ik} e con B_{ik} il minore complementare del generico elemento b_{ik} fornisce le soluzioni:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x = - \frac{1}{B} \left\{ B_{11} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA + B_{21} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + B_{31} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right\} \\ C_y = - \frac{1}{B} \left\{ B_{12} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA + B_{22} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + B_{32} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right\} \\ C_z = - \frac{1}{B} \left\{ B_{13} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA + B_{23} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + B_{33} \int_A \frac{d\phi_0}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right\} \end{array} \right.$$

Operando pertanto le trasformazioni lineari:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_x(s) = \frac{1}{B} \{ B_{11} \Phi_x(s) + B_{12} \Phi_y(s) + B_{13} \Phi_z(s) \} \\ \psi_y(s) = \frac{1}{B} \{ B_{21} \Phi_x(s) + B_{22} \Phi_y(s) + B_{23} \Phi_z(s) \} \\ \psi_z(s) = \frac{1}{B} \{ B_{31} \Phi_x(s) + B_{32} \Phi_y(s) + B_{33} \Phi_z(s) \} , \end{array} \right.$$

L'integrale generale (36) della forma fondamentale (33) assume l'aspetto definitivo:

$$(43) \quad \Phi(s) = \Phi_0(s) - \psi_x(s) \cdot \int_A \frac{d\Phi_0}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \psi_y(s) \cdot \int_A \frac{d\Phi_0}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \\ - \psi_z(s) \cdot \int_A \frac{d\Phi_0}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA$$

essendo per la (37):

$$(44) \quad \Phi_0(s) = A \sin \beta s + B \cos \beta s$$

e ψ_x, ψ_y, ψ_z note funzioni dell'ascissa curvilinea s .

Definito nella forma (43) l'integrale generale della equazione lineare omogenea (33) le due condizioni ai limiti omogenee (28) scritte nella forma:

$$(45-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\Phi) = 0 \quad \text{per } s = s_1 \\ L(\Phi) = 0 \quad \text{per } s = s_2 \end{array} \right.$$

per le sezioni aperte, e

$$(45-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{d\Phi}{ds} ds = 0 \\ \int \frac{d^2\Phi}{ds^2} ds = 0 \end{array} \right.$$

per le sezioni chiuse, forniscono il sistema lineare omogeneo nelle due incognite A e B :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{11}(\beta) A + f_{12}(\beta) B = 0 \\ f_{21}(\beta) A + f_{22}(\beta) B = 0 \end{array} \right.$$

la cui equazione caratteristica:

$$(47) \quad f_{11}(\beta) f_{22}(\beta) - f_{12}(\beta) f_{21}(\beta) = 0$$

dà con le sue radici gli autovalori $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ richiesti.

In corrispondenza di ciascun autovalore β_n è quindi definibile a meno di un fattore arbitrario la corrispondente autofunzione $\Phi_n(s)$. Il fattore arbitrario può definirsi o tramite la condizione di normalità:

$$(48) \quad \int_A \Phi_n^2 dA = 1$$

ovvero assegnando unitario il valore di una qualsiasi delle tre costanti C_x, C_y, C_z .

Le condizioni di ortogonalità delle autofunzioni $\Phi_n(s)$ possono ora dimostrarsi senza avvalersi di noti teoremi.

Osservando infatti che per la generica Φ_n le (34) e (35) forniscono:

$$(49) \quad \frac{d^2\Phi_n}{ds^2} + \beta_n^2 \Phi_n = C_{nx} \frac{d^2x}{ds^2} + C_{ny} \frac{d^2y}{ds^2} + C_{nz} \frac{d^2\omega_z}{ds^2},$$

essendo:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{nx} = \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{dX}{ds} dA, \\ C_{ny} = \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{dY}{ds} dA, \\ C_{nz} = \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \frac{d\Omega_z}{ds} dA, \end{array} \right.$$

si ha moltiplicando la (49) per $\Phi_m(s)$ ed integrando in tutta l'area:

$$(50-a) \quad \int_A \left\{ \frac{d^2\Phi_n}{ds^2} - C_{nx} \frac{d^2x}{ds^2} - C_{ny} \frac{d^2y}{ds^2} - C_{nz} \frac{d^2\omega_z}{ds^2} \right\} \Phi_m(s) dA + \beta_n^2 \int_A \Phi_n \Phi_m dA = 0.$$

La (50), tenendo conto delle condizioni trasversali (45) scritte indifferentemente nella forma *a* o *b*, può scriversi:

$$(51) \quad - \int_A \left\{ \frac{d\Phi_n}{ds} - C_{nx} \frac{dx}{ds} - C_{ny} \frac{dy}{ds} - C_{nz} \frac{d\omega_z}{ds} \right\} \frac{d\Phi_m}{ds} dA + \beta_n^2 \int_A \Phi_n \Phi_m dA = 0.$$

che, ricordando le inverse delle (10):

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(s) = d_{11} X(s) + d_{12} Y(s) + d_{13} \Omega_z(s), \\ y(s) = d_{12} X(s) + d_{22} Y(s) + d_{23} \Omega_z(s), \\ \omega_z(s) = d_{13} X(s) + d_{23} Y(s) + d_{33} \Omega_z(s), \end{array} \right.$$

e le espressioni (46) della Nota I dei coefficienti d_{ik} , assume l'aspetto definitivo:

$$(53) \quad - \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \cdot \frac{d\Phi_m}{ds} dA + \beta_n^2 \int_A \Phi_n \Phi_m dA + \Delta_{m \cdot n} = 0$$

avendo indicato con $\Delta_{m \cdot n}$ la forma simmetrica in $m \ n$:

$$(54) \quad \Delta_{m \cdot n} = d_{11} C_{nx} C_{mx} + d_{22} C_{ny} C_{my} + d_{33} C_{nz} C_{mz} + d_{12} (C_{nx} C_{my} + C_{ny} C_{mx}) + d_{13} (C_{nx} C_{mz} + C_{nz} C_{mx}) + d_{23} (C_{ny} C_{mz} + C_{nz} C_{my}).$$

La (53) mostra con evidenza le proprietà di ortogonalità delle funzioni Φ_n che restano pertanto dimostrate in via diretta.

3.2 - Le autofunzioni corrispondenti all'autovalore degenere $\beta = 0$.

L'equazione omogenea (33) connessa con le condizioni ai limiti omogenee (45) scritte indifferentemente nella forma a o b ammette sempre come prima radice dell'equazione caratteristica (47):

$$(55) \quad \beta = 0$$

A tale radice corrispondono tre autofunzioni di carattere particolare che possono facilmente essere dedotte dalla (33) stessa ricordando le proprietà caratteristiche delle trasformazioni lineari (52) che impongono il verificarsi delle condizioni (49'') della Nota I:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = 1; \quad \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = 0; \quad \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 0 \\ \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = 0; \quad \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = 1; \quad \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 0 \\ \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = -\frac{D_{13}}{D} \frac{I_p}{q}; \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = -\frac{D_{13}}{D} \frac{I_p}{q}; \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 1 - \frac{D_{33}}{D} \frac{I_p}{q}. \end{array} \right.$$

Le tre autofunzioni corrispondenti all'autovalore degenere (55) risultano pertanto essere:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1^{(0)} = C_1 \\ \Phi_2^{(0)} = C_2 x(s) \\ \Phi_3^{(0)} = C_3 y(s) \end{array} \right.$$

essendo C_1, C_2, C_3 tre costanti arbitrarie (1).

(1) È opportuno notare che contrariamente a quanto potrebbe pensarsi, la funzione:

$$(58) \quad \Phi(s) = C \omega_z(s)$$

Ponendo unitarie le costanti (57) assumono pertanto l'aspetto:

$$(61) \quad \Phi_1^{(0)} = 1, \quad \Phi_2^{(0)} = x(s), \quad \Phi_3^{(0)} = y(s)$$

A tali funzioni risultano accoppiate per la (31) tre funzioni della sola z che indicate coi simboli $w_z(z)$, $\varphi_y(z)$, $\varphi_x(z)$ derivano per la (55) dalle relazioni:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w_z}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_y}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_x}{dz^2} = 0 \end{array} \right.$$

3.3 - *L'interpretazione fisica della soluzione dell'omogenea associata alla equazione fondamentale (9).*

Da quanto premesso, risulta chiaro che la soluzione della equazione omogenea (20) può scriversi, separando nella (30) le autofunzioni corrispondenti all'autovalore degenero dalle restanti, nella forma:

$$(63) \quad w_0(z, s) = w_z(z) - \varphi_y(z) x(s) + \varphi_x(z) y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \Phi_n(s)$$

non è soluzione (33) essendo per le (56)

$$(59) \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \frac{dX}{ds} dA \neq 0, \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \frac{dY}{ds} dA \neq 0, \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \frac{d\Omega_z}{ds} dA \neq 1.$$

La (58) risulterebbe infatti soluzione della (33) solo nel caso che si avesse $I_p/q = 0$ e cioè che la trave non fosse in grado di assorbire un momento torcente costante. In effetti però per le travi a sezione aperta essendo i rapporti:

$$(60) \quad \frac{D_{13}}{D} \frac{I_p}{q} \approx 0, \quad \frac{D_{23}}{D} \frac{I_p}{q} \approx 0, \quad \frac{D_{33}}{D} \frac{I_p}{q} \approx 0,$$

compare sempre per le sezioni aventi $\omega_z(s) \neq 0$, una prima radice β_1 , dell'equazione caratteristica (57), molto prossima a zero la cui corrispondente autofunzione $\Phi_1(s)$ risulta quasi coincidente con la $\omega_z(s)$.

essendo le funzioni $w_z, \varphi_y, \varphi_x, \dots, \varphi_n$ legate alle equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w_z}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_y}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^2 \varphi_x}{dz^2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 \varphi_n}{dz^2} - \alpha_n^2 \varphi_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

e le funzioni:

$$(65) \quad 1, x(s), y(s), \varphi_n^i(s) \quad i=1, \dots, \infty$$

una serie di funzioni ortogonali dedotte come autofunzioni di una particolare equazione omogenea di tipo autoaggiunto.

È immediato dedurre dalla (63) la generalizzazione del concetto di gradi di libertà longitudinali della sezione trasversale della trave.

Ai parametri di spostamento classici $w_z, \varphi_y, \varphi_x$ (corrispondenti analiticamente al-

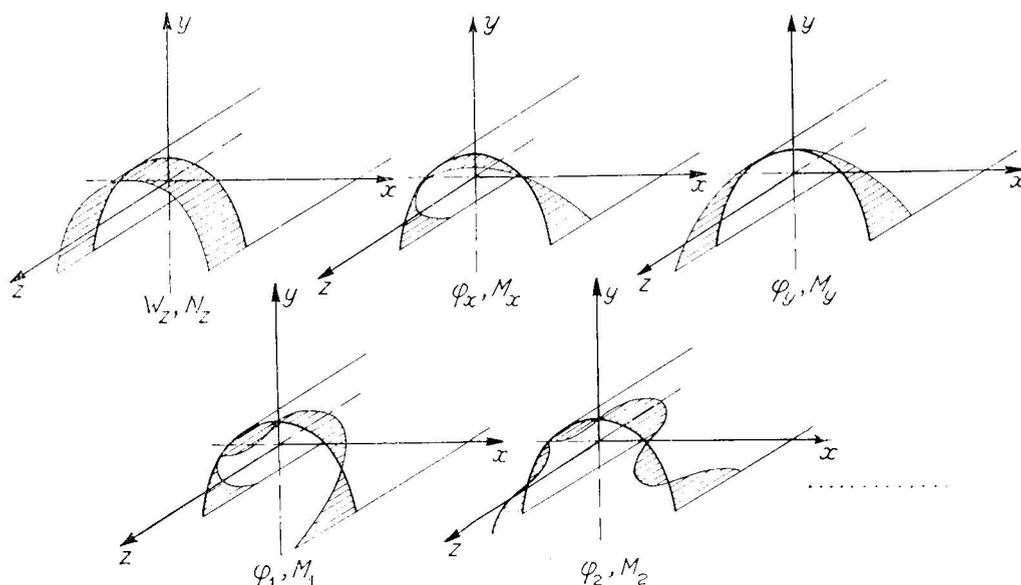


FIG. 3 - I parametri dello spostamento e della sollecitazione nella generica sezione trasversale di una trave di parete sottile.

l'autovalore degenere $\beta = 0$ e fisicamente a uno spostamento rigido secondo z e due rotazioni secondo x ed y , si aggiungono infatti infiniti ulteriori parametri di spostamento φ_n corrispondenti analiticamente agli autovalori β_n diversi da zero, e fisicamente a particolari leggi di ingobbimento della sezione trasversale coincidenti con le funzioni $\Phi_n(s)$ (Fig. 3).

La stessa generalizzazione si ritrova poi ovviamente nei parametri di forza e quindi nelle caratteristiche della sollecitazione legate alla componente speciale di tensione σ_z . Dalla prima delle (12) si ha infatti:

$$(66) \quad \sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{dw_z}{dz} - \frac{d\varphi_y}{dz} x(s) + \frac{d\varphi_x}{dz} y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\varphi_n}{dz} \Phi_n(s) \right\}$$

che, facendo le posizioni:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N_z = \int_A \sigma_z dA; & A = \int_A dA \\ M_y = - \int_A \sigma_z x dA; & I_y = \int_A x^2 dA \\ M_x = \int_A \sigma_z y dA; & I_x = \int_A y^2 dA \\ \dots\dots\dots \\ M_n = \int_A \sigma_z \Phi_n dA; & I_n = \int_A \Phi_n^2 dA \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

assume l'aspetto:

$$(68) \quad \sigma_z = \frac{N_z}{A} - \frac{M_y}{I_y} x(s) + \frac{M_x}{I_x} y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{I_n} \Phi_n(s)$$

essendo i parametri di forza legati ai corrispondenti parametri di spostamento dalle relazioni:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dw_z}{dz} = \frac{1 - \nu^2}{EA} \cdot N_z \\ \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{1 - \nu^2}{EI_y} \cdot M_y \\ \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{1 - \nu^2}{EI_x} \cdot M_x \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\varphi_n}{dz} = \frac{1 - \nu^2}{EI_n} \cdot M_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

La (58) generalizza quindi il concetto di caratteristiche della sollecitazione introducendo al fianco delle classiche caratteristiche di sforzo normale N_z e momento flettente M_x ed M_y legate sempre all'autovalore degenere $\beta = 0$, le nuove caratteristiche M_n legate a particolari distribuzioni autoequilibrate di tensioni normali che indicheremo col nome di 'momenti ingobbanti' precisando tuttavia che il termine momento è usato impropriamente essendo, come già detto, tali distribuzioni di tensioni a risultante e momento risultante nullo. Le (69), sostituite nelle (64) forniscono peraltro le equazioni d'equilibrio:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_z}{dz} = 0, \\ \frac{dM_y}{dz} = 0, \\ \frac{dM_x}{dz} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dM_n}{dz} - \alpha_n^2 \int M_n dz = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

che, per derivazione, possono scriversi ancora nella forma:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_z}{dz} = 0, \\ \frac{d^2M_y}{dz^2} = 0, \\ \frac{d^2M_x}{dz^2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2M_n}{dz^2} - \alpha_n^2 M_n = 0. \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Le condizioni ai limiti da connettere alle (71) derivano peraltro dalle (22) che in termini di tensioni si scrivono:

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(s, 0) = -p_{oz}^{(0)}(s) \\ \sigma_z(s, l) = p_{lz}^{(0)}(s) \end{array} \right.$$

e quindi per la (68):

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_z(0)}{A} - \frac{M_y(0)}{I_y} x + \frac{M_x(0)}{I_x} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(0)}{I_n} \Phi_n = -p_{0z}^{(0)} \\ \frac{N_z(l)}{A} - \frac{M_y(l)}{I_y} x + \frac{M_x(l)}{I_x} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(l)}{I_n} \Phi_n = p_{lz}^{(0)}. \end{array} \right.$$

Facendo peraltro le posizioni:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_{0z} = \int_A p_{0z}^{(0)} dA ; & F_{lz} = \int_A p_{lz}^{(0)} dA \\ M_{0y} = - \int_A p_{0z}^{(0)} x dA ; & M_{ly} = - \int_A p_{lz}^{(0)} x dA \\ M_{0x} = \int_A p_{0z}^{(0)} y dA ; & M_{lx} = \int_A p_{lz}^{(0)} y dA \\ M_{0n} = \int_A p_{0z}^{(0)} \Phi_n dA ; & M_{ln} = \int_A p_{lz}^{(0)} \Phi_n dA \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

e ricordando che per l'equilibrio globale del solido deve risultare:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{0z} + F_{lz} = 0 \\ M_{0y} + M_{ly} = 0 \\ M_{0x} + M_{lx} = 0 \end{array} \right.$$

le condizioni ai limiti relative alle (71) potranno porsi nella forma:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N_z(l) = F_{lz} , & \\ M_y(l) = M_{ly} , & M_y(0) = - M_{0y} = M_{ly} , \\ M_x(l) = M_{lx} , & M_x(0) = - M_{0x} = M_{lx} , \\ \dots\dots\dots & \\ M_n(l) = M_{ln} , & M_n(0) = - M_{0n} . \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \\ \dots\dots\dots & \end{array} \right.$$

3.4 - Le deformazioni della trave legate al sistema di carico associato alla equazione omogenea (20).

I parametri dello spostamento della sezione trasversale della trave sono nella loro totalità determinati dagli ∞ parametri longitudinali:

$$(77) \quad w_z(z), \varphi_y(z), \varphi_x(z) \{ \varphi_n(z) \}_{n=1, \dots, \infty}$$

e dai tre parametri trasversali:

$$(78) \quad u_0(z), v_0(z), \varphi_0(z) .$$

Determinate quindi per la trave le ∞ caratteristiche longitudinali:

$$(79) \quad N_z(z), M_y(z), M_x(z), \{ M_n(z) \}_{n=1, \dots, \infty}$$

essendo nulle per ipotesi le tre trasversali:

$$(80) \quad T_x(z), T_y(z), M_z(z);$$

gli ∞ parametri dello spostamento resteranno legati a tali caratteristiche tramite le (59) e le (11).

Queste ultime peraltro, tenendo conto della nullità delle (80), si scriveranno nella forma:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot \frac{dX}{dz} dA \\ \frac{dv_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot \frac{dY}{dz} dA \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot \frac{d\Omega_z}{dz} dA \end{aligned} \right.$$

e, tenendo conto della (34), (56) e (63), nell'aspetto definitivo:

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= \varphi_y(z) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nx} \varphi_n(z) \\ \frac{dv_0}{dz} &= - \varphi_x(z) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{ny} \varphi_n(z) \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nz} \varphi_n(z) \end{aligned} \right.$$

avendo posto, in conformità con le (34):

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{nx} &= \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA \\ C_{ny} &= \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA \\ C_{nz} &= \int_A \frac{d\Phi_n}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA . \end{aligned} \right.$$

Le espressioni generalizzate delle ∞ caratteristiche del movimento possono quindi nel presente caso raggrupparsi nelle relazioni:

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_0}{dz} = \varphi_y(z) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nz} \varphi_n(z) \\ \frac{dv_0}{dz} = -\varphi_x(z) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{ny} \varphi_n(z) \\ \frac{d\varphi_0}{dz} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_{nz} \varphi_n(z) \\ \frac{dw_z}{dz} = \frac{1-\nu^2}{EA} N_z \\ \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{1-\nu^2}{EI_y} M_y \\ \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{1-\nu^2}{EI_x} M_x \\ \frac{d\varphi_n}{dz} = \frac{1-\nu^2}{EI_n} M_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \end{array} \right.$$

essendo $N_z, M_x, M_y, \dots, M_n$ le caratteristiche generalizzate della sollecitazione note attraverso le (71) e le (74).

3.5 - I casi semplici di sollecitazione corrispondenti alla trave caricata sulle due basi estreme da due sistemi di pressioni longitudinali $p_{0z}^{(0)}$ $p_{1z}^{(0)}$.

Da quanto precede appare in maniera evidente che il problema della determinazione del regime di tensioni e di deformazione per una trave di parete sottile caricata esclusivamente sulle basi estreme da due sistemi di pressioni longitudinali $p_{0z}^{(0)}(s)$ e $p_{1z}^{(0)}(s)$ possa studiarsi per sovrapposizione di ∞ casi di sollecitazione semplice di cui 3 coincidenti con i casi classici di sforzo normale, momento flettente secondo x e momento flettente secondo y ed ∞ di 'momento ingobbante' secondo le rispettive Φ_n .

Riportiamo nel seguito un breve esame delle varie caratteristiche semplici della sollecitazione con le relative espressioni dei parametri dello spostamento delle componenti speciali di tensione, dell'energia elastica.

3.5.1 - Estensione semplice.

È il caso corrispondente all'applicazione sulle due basi estreme di due distribuzioni di pressioni costanti (Fig. 4).

$$(85) \quad p_{1z} = \frac{N_z}{A} ; \quad p_{0z} = -\frac{N_z}{A}$$

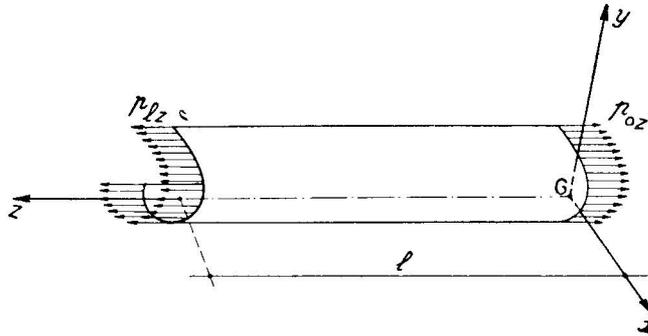


FIG. 4 - Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di sforzo normale centrato N_z .

Dalle (74) l'unica caratteristica differente da zero risulta pertanto essere uno sforzo normale N_z costante e corrispondentemente si ha per gli ∞ parametri dello spostamento della sezione:

$$(86) \quad \begin{cases} u_0 = v_0 = \varphi_0 = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_1 = \dots = \varphi_n = \dots = 0 \\ w_z = -\frac{1 - \nu^2}{EA} N_z \cdot z \end{cases}$$

Ogni sezione si conserva piana e trasla dalla quantità w_z . Lo spostamento relativo tra le due basi estreme è dunque:

$$(87) \quad \Delta l = \frac{1 - \nu^2}{EA} N_z \cdot l$$

e lo stato tensionale nella parete è dato dalle relazioni:

$$(88) \quad \sigma_z = \frac{N_z}{A}, \quad \tau_{zs} = 0.$$

L'energia elastica espressa come lavoro esterno è quindi:

$$(89) \quad W_z = \frac{1}{2} N_z \Delta l = \frac{1 - \nu^2}{2EA} \cdot N_z^2 l.$$

3.5.2 - Flessione semplice secondo $x(y)$.

È il caso dell'applicazione sulle due basi estreme di due distribuzioni di pressioni proporzionali a $x(s)$ ($y(s)$) (Fig. 5) aventi quindi le espressioni:

$$(90) \quad \begin{cases} p_{lx} = -\frac{M_x}{I_x} y, & p_{ox} = -\frac{M_x}{I_x} y \\ \left(p_{ly} = -\frac{M_y}{I_y} x, & p_{oy} = \frac{M_y}{I_y} x \right) \end{cases}$$

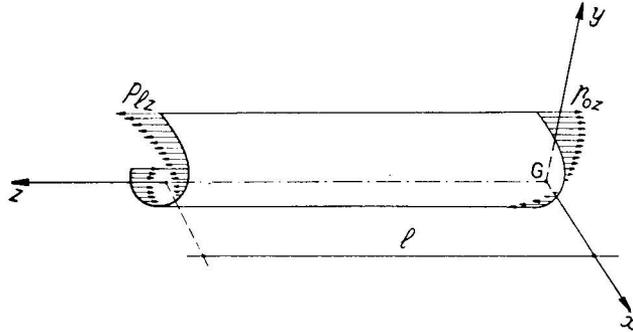


Fig. 5 - Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di momento flettente M_x .

L'unica caratteristica differente da zero risulta pertanto essere un momento flettente $M_x (M_y)$ costante e quindi i parametri dello spostamento delle sezioni trasversali risultino dati da:

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \varphi_0 = w_z = \varphi_y = \varphi_1 = \dots = \varphi_n = \dots = 0 \quad (v_0 = \varphi_x = 0) \\ v_0 = -\frac{1 - \nu^2}{2 E I_x} \cdot M_x z^2 \quad \left(u_0 = \frac{1 - \nu^2}{2 E I_y} \cdot M_y z^2 \right) \\ \varphi_x = \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot M_x z \quad \left(\varphi_y = \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot M_y z \right) \end{array} \right.$$

Ogni sezione si conserva piana, ruota intorno all'asse $x (y)$ della quantità $\varphi_x (\varphi_y)$ e si sposta nel piano $yz (xz)$ della quantità $v_0 (u_0)$.

La rotazione relativa fra le due basi estreme vale quindi:

$$(92) \quad \Delta \varphi_x = \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot M_x l, \quad \left(\Delta \varphi_y = \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot M_y l \right)$$

lo spostamento relativo è:

$$(92') \quad \Delta v_0 = -\frac{1 - \nu^2}{2 E I_x} \cdot M_x l^2 \quad \left(\Delta u_0 = \frac{1 - \nu^2}{2 E I_y} \cdot M_y l^2 \right)$$

e lo stato tensionale è espresso dalle relazioni:

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad \left(\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x \right) \\ \tau_{zs} = 0 \quad \quad \quad (\tau_{zs} = 0) \end{array} \right.$$

L'energia elastica espressa come lavoro esterno è quindi:

$$(94) \quad \begin{aligned} W_x &= \frac{1}{2} M_x \Delta \varphi_x = \frac{1 - \nu^2}{2 E I_x} \cdot M_x^2 l \\ \left(W_y &= \frac{1}{2} M_y \Delta \varphi_y = \frac{1 - \nu^2}{2 E I_y} \cdot M_y^2 l \right) \end{aligned}$$

3.5.3 – Ingobbimento semplice secondo Φ_n .

È il caso dell'applicazione sulle due basi estreme di due distribuzioni di pressioni proporzionali a $\Phi_n(s)$ (Fig. 6) aventi pertanto le espressioni:

$$(95) \quad p_{1z} = \frac{M_{1n}}{I_n} \Phi_n ; \quad p_{0z} = - \frac{M_{0n}}{I_n} \Phi_n$$

Una prima differenza sostanziale fra la sollecitazione d'ingobbimento semplice e le precedenti risiede pertanto nella non necessarietà dell'eguaglianza delle azioni esterne M_{0n} ed M_{1n} .

Essendo infatti le (95) a risultante e momento risultante nullo l'entità dei due para-

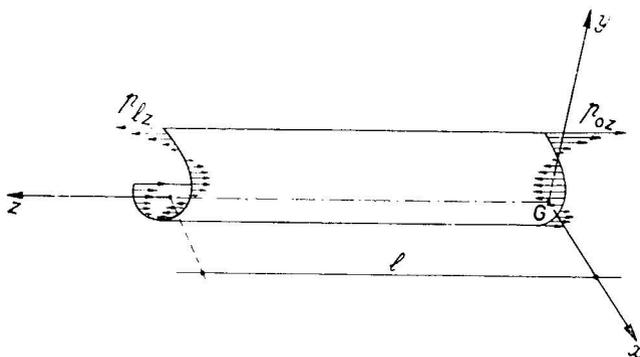


FIG. 6 – Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di momento ingobbante M_n .

metri M_{0n} e M_{1n} può essere fissata arbitrariamente senza turbare le condizioni di equilibrio globale del solido.

L'unica caratteristica differente da zero è quindi il momento ingobbante M_n che peraltro, a differenza dei casi precedenti, risulta per le (71) funzione di z secondo la espressione:

$$(96) \quad M_n(z) = M_{1n} \frac{\sinh \alpha_n z}{\sinh \alpha_n l} + M_{0n} \frac{\sinh \alpha_n (l - z)}{\sinh \alpha_n l}$$

essendo α_n direttamente legato all'autovalore β_n associato alla funzione d'ingobbimento $\Phi_n(s)$ dalla relazione:

$$(97) \quad \alpha_n = \beta_n \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}}$$

con ν coefficiente di Poisson del materiale di cui è costituita la parete sottile.

Dall'esame della (96) è immediato rilevare che il momento ingobbante interno conseguente all'applicazione di due momenti ingobbanti esterni M_{0n} ed M_{1n} sulle basi $z = 0$ e $z = l$, mentre assume in corrispondenza di tali basi valori eguali alle azioni esterne va

poi smorzandosi con legge quasi-esponenziale procedendo dalle basi verso l'interno del solido.

Tale smorzamento è peraltro tanto più sensibile quanto più elevato è il valore di α_n e dunque l'autovalore β_n associato alla corrispondente funzione d'ingobbimento $\Phi_n(s)$ (Fig. 7).

Avendo quindi ordinato gli autovalori in successione crescente $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ potremo dire che il momento ingobbante di maggiore penetrazione sarà quello corrispondente al primo autovalore non nullo β_1 e quindi alla funzione d'ingobbimento $\Phi_1(s)$.

Per poter stabilire un termine di paragone fra le distanze di estinzione dalle basi estreme dei successivi momenti ingobbanti converremo di indicare come distanza d'estin-

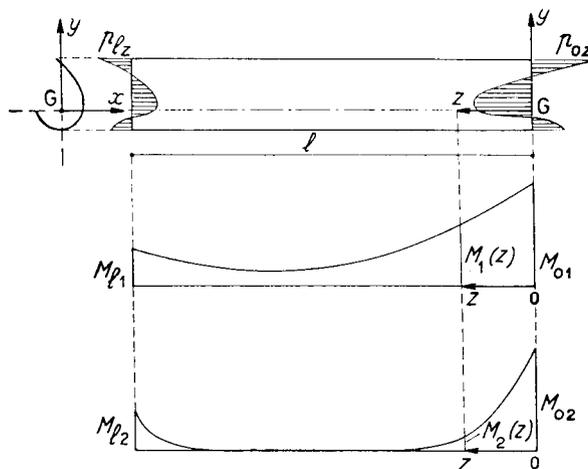


FIG. 7 - Le leggi di variazione dei momenti ingobbanti M_n con l'ascissa longitudinale z .

zione d_n relativa al momento ingobbante ennesimo M_n la distanza dalle basi estreme per cui il rapporto fra il momento M_n interno ed il valore M_{0n} esterno si riduce ad un millesimo.

Nell'ipotesi che il solido sia di lunghezza infinita ovvero, anche se risulta:

$$(98) \quad l \gg d_n$$

si può dare forma esplicita alla distanza d'estinzione d_n .

In tale ipotesi infatti la (96), in prossimità della base $z = 0$, può scriversi con buona approssimazione nella forma:

$$(99) \quad M_n = M_{0n} e^{-\alpha_n z}$$

e si ha pertanto per la distanza d'estinzione d_n :

$$(100) \quad \frac{1}{1000} = e^{-\alpha_n d_n}$$

che fornisce quindi:

$$(101) \quad d_n \approx \frac{6,91}{\alpha_n}$$

In conformità con quanto detto prima si trova per $l = \infty$, ovvero anche se è verificata la relazione (98), che la distanza d'estinzione d_n è inversamente proporzionale ad α_n e dunque al corrispondente autovalore β_n .

Tenendo presente peraltro che nell'equazione caratteristica (47) entrano in gioco esclusivamente i parametri caratteristici della sezione trasversale e che l'autovalore β_n è dimensionalmente rappresentato da una lunghezza alla meno uno, facendo la posizione:

$$(102) \quad \beta_n = \frac{\lambda_n}{h}$$

essendo λ_n un adimensionale e h una generica dimensione media della sezione trasversale della trave si ha, tenendo presente la (97):

$$(103) \quad d_n = \frac{6,91}{\lambda_n} \cdot \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot h$$

in perfetto accordo col postulato del SAINT-VENANT che prevede che la distanza d'estinzione relativa a distribuzioni autoequilibrate di carico sia influenzata esclusivamente dalle dimensioni della sezione trasversale della trave.

La massima distanza d'estinzione sarà dunque data da:

$$(104) \quad d_1 = \frac{6,91}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot h$$

essendo:

$$\lambda_1 = \beta_1 h$$

Per tutte le sollecitazioni d'ingobbimento semplice per le quali risulti:

$$(105) \quad l < d_n$$

potremo quindi concludere che il momento ingobbante interessa effettivamente tutta la lunghezza della trave.

Vedremo infatti che nella maggioranza dei casi, per sezioni aperte aventi $\omega_2 \neq 0$, per la prima sollecitazione d'ingobbimento semplice la distanza d'estinzione d_1 è dell'ordine di centinaia di volte la dimensione media h e pertanto che tale sollecitazione investe tutto lo sviluppo della trave provocando ovunque stati tensionali di notevole entità. Tor-

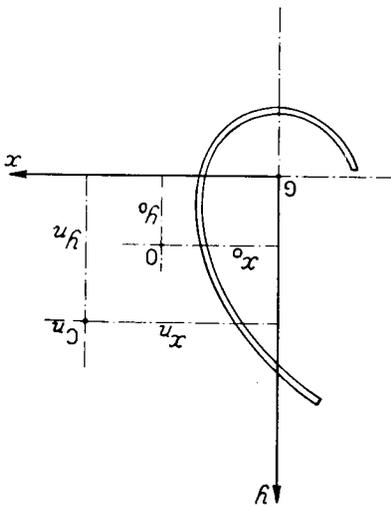


Fig. 8 - Il centro di rotazione della sezione trasversale relativo alla sollecitazione di momento ingobbante M_n .

nando per ora all'esame dei parametri dello spostamento associati alla sollecitazione di ingobbimento ennesima osserviamo che per le (69) e (71) si ha:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n &= \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{EI_n}{I} \cdot \frac{\alpha_z^n}{I} \cdot \frac{dM_n}{dz} \\
 u_0 &= - \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{EI_n}{C} \cdot \frac{\alpha_z^n}{M_n} \\
 v_0 &= - \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{EI_n}{C} \cdot \frac{\alpha_z^n}{M_n} \\
 \phi_0 &= - \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{EI_n}{C} \cdot \frac{\alpha_z^n}{M_n} \\
 w_z = \phi_x = \phi_y = \dots = \phi_1 = \dots = \phi_{n-1} = \phi_{n+1} = \dots = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Il movimento della generica sezione è dunque rappresentato da un ingobbimento del tipo $\Phi^n(s)$ avente ampiezza ϕ^n e da una rotazione nel piano xy di ampiezza ϕ_0 intorno al centro C_n di coordinate (Fig. 8):

$$\left. \begin{aligned}
 x_n &= x_0 - \frac{C}{C^n} \\
 y_n &= y_0 + \frac{C}{C^n}
 \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

essendo x_0 e y_0 le coordinate del centro di taglio O della sezione.

L'ingobbimento delle due basi estreme vale:

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{0n} &= \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{M_{ln} - M_{0n} \cosh \alpha_n l}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} \\ \varphi_{ln} &= \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{M_{ln} \cosh \alpha_n l - M_{0n}}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} \end{aligned} \right.$$

e gli spostamenti relativi nel piano xy :

$$(109) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0 &= - \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \\ \Delta v_0 &= - \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{ny}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \\ \Delta \varphi_0 &= - \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \end{aligned} \right.$$

Lo stato di tensione nella parete è espresso dalle relazioni:

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M_n}{I_n} \Phi_n \\ \tau_{zs} &= - \frac{1}{I_n'} \frac{dM_n}{dz} \cdot \frac{d\omega_n}{ds} \end{aligned} \right.$$

essendo, in conformità con le (26) e (83)

$$(111) \quad \frac{d\omega_n}{ds} = - \frac{1}{\beta_n^2} L(\Phi_n) = - \frac{1}{\beta_n^2} \left\{ \frac{d\Phi_n}{ds} - C_{nx} \frac{dx}{ds} - C_{ny} \frac{dy}{ds} - C_{nz} r \right\}$$

(Se la sezione trasversale della trave è aperta, accanto alle (110) bisogna tener presente l'esistenza delle tensioni tangenziali $\bar{\tau}_{zs}$ distribuite alla SAINT-VENANT che equilibrano torsionalmente le τ_{zs} espresse dalle (110)₂).

L'energia elastica W_n calcolata sempre come lavoro esterno porge:

$$(112) \quad \begin{aligned} W_n &= \frac{1}{2} (M_{ln} \varphi_{ln} - M_{0n} \varphi_{0n}) = \\ &= \frac{1 - \nu^2}{2 E I_n} \left\{ \frac{M_{ln}^2 \cosh \alpha_n l - 2 M_{0n} M_{ln} + M_{0n}^2 \cosh \alpha_n l}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} \right\}. \end{aligned}$$

3.6 - *L'interpretazione fisica della proprietà di ortogonalità delle autofunzioni.*

Si è dimostrato nel paragrafo 3.1 che la serie di funzioni della sola s :

$$1, x(s), y(s), \{\Phi_n(s)\}_{n=1, \dots, \infty} \quad (113)$$

costituisce un sistema di funzioni ortogonali.

Tale proprietà si traduce fisicamente nel principio di sommabilità dei lavori elementari relativi agli ∞ casi di sollecitazione semplice longitudinale in cui può decomporci il caso generale. Nel caso generale infatti l'energia elastica totale espressa sotto forma di lavoro esterno si scrive:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_A dA \int_0^L p_{(0)}^{z_0}(s) w_0(s, l) ds + \frac{1}{2} \int_A dA \int_0^L p_{(0)}^{x_0}(s) w_0(s, 0) ds \quad (114)$$

Tenendo presente peraltro che sia le azioni esterne $p_{(0)}^{z_0}$ e $p_{(0)}^{x_0}$ che la componente w_0 dello spostamento possono ottenersi per sovrapposizione delle azioni elementari relative ai vari casi semplici di sollecitazione può scriversi:

$$\left. \begin{aligned} p_{(0)}^{z_0} &= \frac{N}{z} \frac{A}{M^u} \frac{I^u}{M^x} x + \frac{I^u}{M^x} y + \sum_{i=1}^u \frac{I^u}{M^{0i}} \Phi^i \\ p_{(0)}^{x_0} &= \frac{N}{z} \frac{A}{M^u} \frac{I^u}{M^x} x + \frac{I^u}{M^x} y + \sum_{i=1}^u \frac{I^u}{M^{0i}} \Phi^i \\ w_0(s, 0) &= w_0^{z_0} - p_{(0)}^{z_0} x + p_{(0)}^{x_0} y + \sum_{i=1}^u p_{(0)}^{0i} \Phi^i \\ w_0(s, l) &= w_0^{z_0} - p_{(0)}^{z_0} x + p_{(0)}^{x_0} y + \sum_{i=1}^u p_{(0)}^{0i} \Phi^i \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Da tali espressioni, ricordando le proprietà di ortogonalità delle (113) si ha quindi per W_0 :

$$W_0 = \frac{1}{2} \left\{ N \Delta l + M^u \Delta p^u + M^x \Delta p^x + \sum_{i=1}^u (M^{0i} p^{0i} - M^{0i} p^{0i}) \right\} \quad (116)$$

avendo posto :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta l &= w_0^{z_0} - w_0^{x_0} \\ \Delta p^u &= p_{(0)}^{x_0} - p_{(0)}^{z_0} \\ \Delta p^x &= p_{(0)}^{z_0} - p_{(0)}^{x_0} \end{aligned} \right.$$

La (116) consente di affermare che l'energia elastica w_0 relativa alla trave di parete sottile caricata da un sistema di forze assiali sulle due basi estreme può ottenersi per

somma delle energie elementari relative agli ∞ casi di sollecitazione semplice longitudinale componenti il caso reale. Si ha perciò:

$$(116') \quad W_0 = W_z + W_y + W_x + \sum_{n=1}^{\infty} W_n$$

essendo $W_z, W_y, W_x, \dots, W_n, \dots$ riportate nelle formule (89) (94) (112).

Il principio di sommabilità può anche enunciarsi nella forma duale: ' Il lavoro mutuo relativo a due generiche sollecitazioni semplici longitudinali è sempre nullo '.

4 - Il calcolo dell'integrale particolare dell'equazione completa.

Si è già detto che tale calcolo è intimamente connesso con il problema dell'equilibrio elastico della trave di parete sottile caricata sulle due basi estreme (Fig. 9) dal sistema di azioni trasversali:

$$(117) \quad F_{lx}, F_{ly}, M_{lz}$$

oltre che dal sistema di azioni longitudinali

$$(117') \quad p_{0z}^{(1)} = \frac{F_{lx} l}{I_y} x + \frac{F_{ly} l}{I_x} y, \quad p_{lz}^{(1)} = 0$$

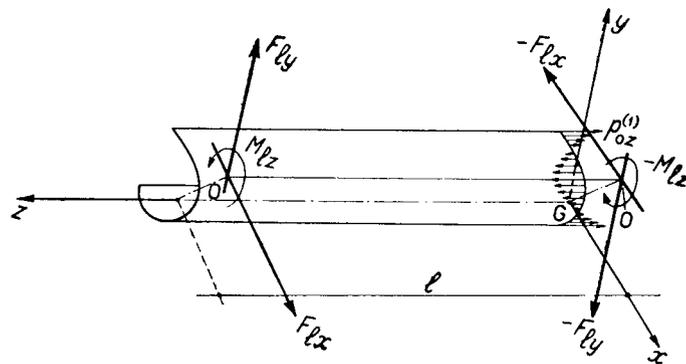


FIG. 9 - Le condizioni di carico relative all'integrale particolare dell'equazione completa.

L'equazione fondamentale di cui si cerca l'integrale particolare è:

$$(118) \quad \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} - \frac{d^2 x}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{d^2 y}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA +$$

$$- \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \int_A \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = - \frac{1}{G} \left(\tau_{lx} \frac{d^2 x}{ds^2} + \tau_{ly} \frac{d^2 y}{ds^2} + \varpi_{lz} \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \right)$$

All'integrale particolare è richiesto il solo soddisfacimento delle condizioni trasversali (15) scritte nella forma (a) per travi a sezione aperta e (b) per travi a sezione chiusa.

Il problema della ricerca di tale integrale particolare si presenta di particolare semplicità tenendo presente che il caso elastico cui si riferisce non è altro che la combinazione lineare di tre classici casi di sollecitazione semplice: taglio e flessione secondo x , taglio e flessione secondo y , torsione.

À tal uopo è opportuno introdurre, come già si è fatto per la torsione (Cfr. Nota I) le due funzioni $\omega_x(s)$ e $\omega_y(s)$ che indicheremo come funzioni d'ingobbimento tagliate secondo x e secondo y . In analogia con la funzione di ingobbimento torsionale $\omega_z(s)$, tali funzioni rappresenteranno fisicamente l'ingobbimento della sezione trasversale per effetto di forze taglianti di particolare entità.

Deriveremo tali funzioni dalle relazioni:

$$(119) \quad \frac{d^2\omega_x}{ds^2} = x(s) ; \quad \frac{d^2\omega_y}{ds^2} = y(s)$$

giustificando a posteriori tali posizioni, e collegheremo le (119) alle condizioni ai limiti

$$(120-a) \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{d\omega_x}{ds} \right)_{s=s_1} = 0 ; & \quad \left(\frac{d\omega_x}{ds} \right)_{s=s_2} = 0 \\ \left(\frac{d\omega_y}{ds} \right)_{s=s_1} = 0 ; & \quad \left(\frac{d\omega_y}{ds} \right)_{s=s_2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

per sezioni trasversali monocomesse (aperte), e

$$(120-b) \quad \left. \begin{aligned} \int \frac{d\omega_x}{ds} ds = 0 ; & \quad \int \frac{d\omega_y}{ds} ds = 0 \\ \int \frac{d^2\omega_x}{ds^2} ds = 0 ; & \quad \int \frac{d^2\omega_y}{ds^2} ds = 0 \end{aligned} \right\}$$

per sezioni trasversali biconnesse (chuse).

Le (119), connesse alle (120) scritte nella forma (a) o (b) definiscono le funzioni $\omega_x(s)$ e $\omega_y(s)$ a meno di una costante arbitraria, come è semplice verificare tenendo presente che le condizioni (120) sia nella forma (a) che nella forma (b) si riducono effettivamente ad una soltanto. In conformità con quanto già fatto per ω_z introdurremo pertanto le due condizioni ausiliarie:

$$(120-c) \quad \int_V \omega_x dA = 0 ; \quad \int_V \omega_y dA = 0$$

che consentono di definire univocamente le suddette funzioni.

Le $\omega_x(s)$ ed $\omega_y(s)$ godono peraltro di particolari proprietà derivanti dalla scelta degli assi di riferimento x ed y come assi principali d'inerzia e del centro di rotazione O come centro di taglio della sezione della trave.

È immediato infatti dimostrare ricordando le (43) della Nota I che tali funzioni verificano le relazioni:

$$(121) \left\{ \begin{array}{l} \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} dA = -I_y; \quad \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} dA = 0; \quad \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{d\omega_z}{ds} dA = 0 \\ \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} dA = 0; \quad \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} dA = -I_x; \quad \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{d\omega_z}{ds} dA = 0 \end{array} \right.$$

da esse è poi semplice risalire con le (10) alle relazioni con le funzioni inverse $X(s)$ $Y(s)$ ed $\Omega_z(s)$, che riportate in uno con quelle già trovate per la ω_z ed espresse dalla (56)₃ danno il quadro completo:

$$(122) \left\{ \begin{array}{l} \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = -\frac{D_{11}}{D} I_y; \quad \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = -\frac{D_{12}}{D} I_y; \quad \int_A \frac{d\omega_x}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = -\frac{D_{13}}{D} I_y \\ \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = -\frac{D_{12}}{D} I_x; \quad \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = -\frac{D_{22}}{D} I_x; \quad \int_A \frac{d\omega_y}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = -\frac{D_{23}}{D} I_x \\ \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA = -\frac{D_{13}}{D} \cdot \frac{I_p}{q}; \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA = -\frac{D_{23}}{D} \frac{I_p}{q}; \quad \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = 1 - \frac{D_{33}}{D} \frac{I_p}{q} \end{array} \right.$$

È ora immediato verificare che l'integrale particolare del sistema completo (118) può porsi nella forma:

$$(123) \quad w_1(z, s) = \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot F_{lx} \cdot z \left(\frac{z}{2} - l \right) x(s) + \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot F_{ly} z \left(\frac{z}{2} - l \right) y(s) + \\ - \frac{F_{lx}}{G I_y} \omega_x(s) - \frac{F_{ly}}{G I_x} \omega_y(s) - \frac{q M_{lz}}{G I_p} \omega_z(s).$$

Sostituendo infatti tale espressione nella (118) e tenendo presenti le (8), le (36), le (119) e le (122) si verifica facilmente che la (123) soddisfa la (118).

Le tensioni in corrispondenza della superficie media della parete sottile risultano pertanto espresse, in conformità con le (12) dalle relazioni:

$$(124) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{F_{lx}}{I_y} (z - l) x(s) + \frac{F_{ly}}{I_x} (z - l) y(s) \\ \tau_{zs} = -\frac{F_{lx}}{I_y} \frac{d\omega_x}{ds} - \frac{F_{ly}}{I_x} \frac{d\omega_y}{ds} - \frac{q M_{lz}}{I_p} \left(\frac{d\omega_z}{ds} - r \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

(2) Per le sezioni monoconnesse risultando per la (31) della Nota I:

$$\frac{d\omega_z}{ds} - r = 0$$

le τ_{zs} provocate dal momento torcente M_z sono nulle in perfetto accordo colla teoria del SAINT-VENANT

mentre i parametri del movimento trasversale u_0, v_0, φ_0 dalle (11), si scrivono:

$$(125) \quad \left. \begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1 - \nu^2}{z} \cdot F_{12} \cdot \frac{E I \nu}{z^2} \left(l - \frac{3}{z} \right) \\ v_0(z) &= \frac{1 - \nu^2}{z} \cdot F_{12} \cdot \frac{E I \nu}{z^2} \left(l - \frac{3}{z} \right) \\ \varphi_0(z) &= \frac{G I \nu}{b} M_z \cdot z \cdot \end{aligned} \right\}$$

Dalle (124) si trae peraltro:

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z(s, 0) &= - \frac{F_{12} l}{F_{12} l} x(s) - \frac{I \nu}{F_{12} l} y(s) \\ \sigma_z(s, l) &= 0 \end{aligned} \right.$$

per cui l'integrale particolare (123) soddisfa non soltanto le condizioni trasversali (15) ma anche le condizioni longitudinali:

$$(127) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z(s, 0) &= - p_{(1)}^z(s) \\ \sigma_z(s, l) &= p_{(1)}^z(s) \end{aligned} \right.$$

È peraltro interessante esprimere la componente $w(z, s)$ come combinazione lineare degli ∞ gradi di libertà longitudinali $w_z, \varphi^n, \varphi^x, \varphi^n$ della sezione trasversale della trave e cioè nella forma:

$$w_1(z, s) = w_z - \varphi^n x + \varphi^x y + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n \Phi^n$$

secondo la quale il momento torcente esterno è assorbito tutto dalle tensioni τ_{zs} (24) della Nota I, nulle in corrispondenza della fibra media.

Se la sezione è biconnessa essendo per la (33) della Nota I:

$$\frac{dw_z}{ds} - r = - \frac{l}{f}$$

il momento torcente esterno M_z viene assorbito dalle tensioni:

$$\tau_{zs} = \frac{b M_z}{f} \cdot \frac{l}{f} = \frac{I \nu}{M_z} \cdot \frac{l}{f} = \frac{2 G l}{M_z}$$

classiche della soluzione di BREDT e SAINT-VENANT.

Facendo pertanto le posizioni:

$$(128) \left\{ \begin{aligned} \chi_x &= -\frac{A}{I_y^2} \int_A \omega_x x \, dA ; & \chi_y &= -\frac{A}{I_x^2} \int_A \omega_y y \, dA \\ \chi_{xy} &= -\frac{A}{I_x I_y} \int_A \omega_x y \, dA = -\frac{A}{I_x I_y} \int_A \omega_y x \, dA \\ & \dots \dots \dots \\ \chi_{nx} &= -\frac{A}{I_y I_n} \int_A \omega_x \Phi_n \, dA ; & \chi_{ny} &= -\frac{A}{I_x I_n} \int_A \omega_y \Phi_n \, dA ; & \chi_{nz} &= -\frac{A}{q I_p I_n} \int_A \omega_z \Phi_n \, dA \end{aligned} \right.$$

e ricordando che:

$$(129) \left\{ \begin{aligned} \int_A \omega_x \, dA &= \int_A \omega_y \, dA = \int_A \omega_z \, dA = 0 \\ \int_A \omega_x x \, dA &= \int_A \omega_y y \, dA = 0 \end{aligned} \right.$$

i parametri dello spostamento longitudinale assumono l'aspetto:

$$(130) \left\{ \begin{aligned} w_z &= 0 \\ \varphi_y &= -\frac{1-\nu^2}{E I_y} \cdot F_{lx} z \left(\frac{z}{2} - l \right) - \frac{\chi_x F_{lx}}{G A} - \frac{\chi_{xy} F_{ly}}{G A} \\ \varphi_x &= \frac{1-\nu^2}{E I_x} \cdot F_{ly} z \left(\frac{z}{2} - l \right) + \frac{\chi_{xy} F_{lx}}{G A} + \frac{\chi_y F_{ly}}{G A} \\ & \dots \dots \dots \\ \varphi_n &= \frac{\chi_{nx} F_{lx}}{G A} + \frac{\chi_{ny} F_{ly}}{G A} + \frac{\chi_{nz} M_{lx}}{G A} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned} \right.$$

Le (130) congiunte con le (125) forniscono un panorama completo degli ∞ movimenti della sezione trasversale della trave nelle condizioni di carico cui si riferisce l'integrale particolare.

4.1 - I casi di sollecitazione corrispondenti all'integrale particolare (123).

Si è già detto che l'integrale particolare della (118) è ottenuto per sovrapposizione di tre casi particolari di sollecitazione definiti come trasversali e coincidenti rispettivamente con i casi di flessione e taglio secondo x , flessione e taglio secondo y , torsione.

Esaminiamo singolarmente ciascuno di tali casi:

4.1.1 - Flessione e taglio secondo x .

È il caso illustrato in Fig. 10. La trave pertanto è soggetta sulle due basi estreme oltre alle due forze trasversali T_x e T_y , alle tensioni normali:

$$p_{0z} = \frac{T_x l}{I_y} x, \quad p_{0z} = 0 \tag{131}$$

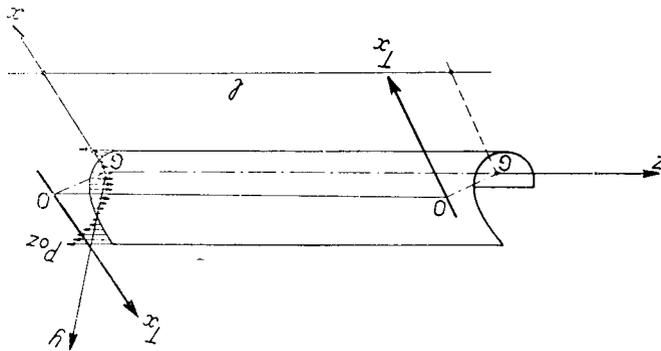


Fig. 10 - Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di flessione e taglio T_x .

Delle ∞ caratteristiche longitudinali e trasversali:

$$T_x, T_y, N_z, M_x, M_y, M_z, M_n \quad (n = 1, \dots, \infty)$$

sono differenti da zero T_x e il momento flettente:

$$M_y = T_x (l - z). \tag{132}$$

I corrispondenti parametri dello spostamento risultano essere:

$$\left. \begin{aligned} w_z &= v_0 = \varphi_0 = 0 \\ u_0 &= \frac{1 - \nu^2}{z} \cdot T_x \frac{2}{l} \left(l - \frac{z}{3} \right) \\ \varphi_x &= \frac{GA}{T_x} \chi_{xy} \\ \varphi_y &= - \frac{EI_y}{1 - \nu^2} T_x z \left(\frac{2}{z} - l \right) - \frac{GA}{T_x} \chi_{xy} \\ \varphi_n &= \frac{GA}{T_x} \chi_{nx} \end{aligned} \right\} \tag{133} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

La generica sezione trasversale della trave trasla nel piano xz della quantità u_0 , ruota intorno all'asse y di φ_y e intorno all'asse x di φ_x e s'ingloba secondo le varie forme $\varphi_n(s)$ delle quantità φ_n .

Lo stato tensionale nella parete è espresso dalle relazioni:

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x \\ \tau_{zs} = - \frac{T_x}{I_y} \frac{d\omega_x}{ds} \end{array} \right.$$

L'energia elastica è espressa dalla relazione:

$$\bar{W}_x = \frac{1}{2} [T_x \Delta u_0 - M_y(0) \varphi_{0y}]$$

e pertanto, essendo per le (133);

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0 = \frac{1 - \nu^2}{3 E I_y} T_x \cdot l^3 \\ \varphi_{0y} = - \frac{\chi_x T_x}{G A} \end{array} \right.$$

dalla espressione:

$$(135) \quad \bar{W}_x = \left[\frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{\chi_x l}{2 G A} \right] \cdot T_x^2$$

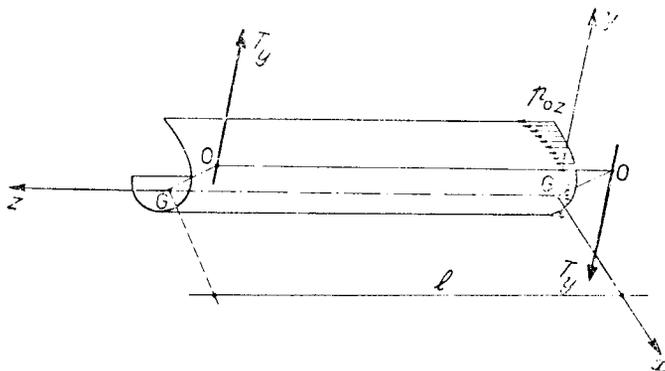


FIG. 11 - Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di flessione e taglio T_v .

4.1.2 - Flessione e taglio secondo y .

È il caso illustrato in Fig. 11. Le azioni esterne sono date dalle forze T_y e $-T_y$ e dalle tensioni normali:

$$(136) \quad p_{0z} = \frac{T_y l}{I_x} y, \quad p_{0x} = 0$$

Le caratteristiche della sollecitazione differenti da zero sono T^n ed il momento flettente:

$$M^x = -T^n (l - z) \quad (137)$$

I parametri del movimento della sezione sono:

$$\left. \begin{aligned} w^z &= u_0 = v_0 = \varphi_0 = 0 \\ a_0 &= \frac{1 - \nu^2}{z} \cdot T^n \cdot \frac{EI^x}{2} \left(l - \frac{2}{3} \right) \\ \varphi^x &= \frac{1 - \nu^2}{z} \cdot T^n \cdot \frac{EI^x}{2} \left(\frac{2}{z} - l \right) + \frac{GA}{\chi^n T^n} \\ \varphi^n &= - \frac{GA}{\chi^{2n} T^n} \\ \varphi^{2n} &= \frac{GA}{\chi^{2n} T^n} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (138)$$

Lo stato tensoriale nella parete è dato da:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^z &= \frac{M^x}{I^x} \cdot \eta \\ \tau_{zs} &= - \frac{I^x}{T^n} \cdot \frac{ds}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

e l'energia elastica:

$$\frac{W^n}{T^n} = \left[\frac{1 - \nu^2}{I^x} \cdot \frac{EI^x}{l^3} + \frac{6}{l^3} \cdot \frac{GA}{\chi^n l} \right] T^n \quad (140)$$

4.1.3 - Torsione.

È il caso illustrato in Fig. 12. Le uniche azioni sollecitanti le due basi estreme sono i due momenti torcenti M^z e $-M^z$. Delle ∞ caratteristiche della sollecitazione, la unica differente da zero risulta quindi essere il momento torcente M^z .

I parametri generalizzati dello spostamento della sezione trasversale sono dunque:

$$\left. \begin{aligned} w^z &= u_0 = v_0 = \varphi^x = \varphi^n = 0 \\ \varphi_0 &= \frac{GI^p}{M^z} \cdot z \\ \varphi^{2n} &= \frac{GA}{\chi^{2n} M^z} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (141)$$

Il movimento della sezione trasversale è dunque individuato da una rotazione di ampiezza φ_0 intorno all'asse dei centri di taglio O e da infiniti ingobbimenti costanti di ampiezza φ_n secondo le funzioni $\Phi_n(s)$.

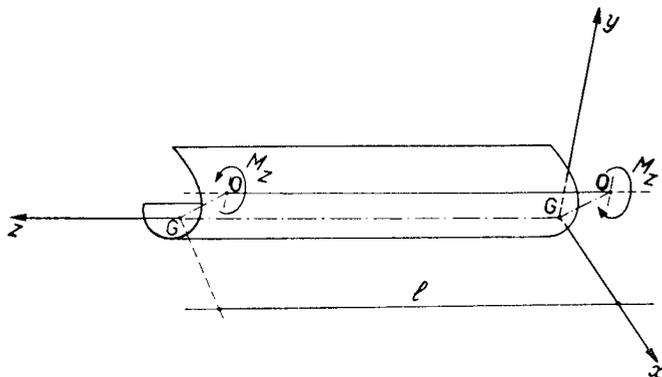


FIG. 12 - Le condizioni di carico relative alla sollecitazione di torsione M_z .

Lo stato tensionale nella parete è espresso dalle relazioni:

$$(142) \quad \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{zs} = \frac{q M_z}{I_p} \left(\frac{d\omega_z}{ds} - r \right) \end{cases}$$

che vanno riguardate tenendo conto delle precisazioni fatte nella Nota (2).

L'energia elastica assume l'aspetto:

$$(143) \quad \bar{W}_z = \frac{1}{2} M_z \Delta\varphi_0 = \frac{q l}{2 G I_p} \cdot M_z^2 .$$

4.3 - L'energia elastica relativa alla presenza contemporanea delle tre caratteristiche trasversali della sollecitazione.

L'energia elastica che si accumula nel solido quando questo è soggetto alle tre azioni trasversali T_x , T_y , M_z oltre che al sistema di pressioni longitudinali:

$$p_{0z}^{(1)} = \frac{T_y l}{I_x} y(s) + \frac{T_x l}{I_y} x(s)$$

agenti sulla base $z = 0$ può calcolarsi al solito sotto la forma del lavoro esterno:

$$(144) \quad W_1 = \frac{1}{2} (T_x \Delta u_0 + T_y \Delta v_0 + M_z \Delta\varphi_0) + \frac{1}{2} \int_A p_{0z}^{(1)} w_1(s, 0) dA$$

essendo $\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta \varphi_0$ gli spostamenti trasversali relativi fra le due sezioni d'estremità deducibili dalle (125) e:

$$w_1(s, 0) = w_z(0) - \varphi_y(0) x + \varphi_x(0) y + \sum_{i=1}^n \varphi^n(0) \Phi^n$$

lo spostamento assiale del generico punto della base $z = 0$ deducibile dalle (130).

La (144) sviluppata ed ordinata fornisce:

$$(145) \quad W_1 = \left[1 - \nu^2 \frac{EI^y}{I^x} \cdot \frac{6}{I^2} + \frac{2GA}{\chi^y l} \right] T_z^x + \left[1 - \nu^2 \frac{EI^x}{I^y} \cdot \frac{6}{I^2} + \frac{2GA}{\chi^x l} \right] T_z^y +$$

$$+ \frac{2GI^y}{b l} \cdot M_z^z + \frac{\chi^{xy} GA}{\chi^{xy} l} T_z^x T_z^y$$

che tenendo presenti le espressioni (135), (140), (143) può scriversi:

$$(146) \quad \underline{W}_1 = \underline{W}^x + \underline{W}^y + \underline{W}^z + \underline{W}^{xy}$$

avendo posto:

$$(147) \quad \underline{W}^{xy} = \frac{GA}{\chi^{xy} l} T_z^x T_z^y$$

Per le sollecitazioni trasversali non è dunque valido il principio di sommabilità dei lavori dei lavori essendo diverso da zero il lavoro mutuo delle due sollecitazioni taglianti espresso dalla (147).

5 - Il lavoro mutuo relativo all'accoppiamento delle sollecitazioni trasversali con quelle longitudinali.

Si consideri il solido soggetto una volta, al sistema di forze trasversali T^x, T^y, M^z e di pressioni sulla base $z = 0$ (Fig. 9):

$$p_{(1)}^{z0} = \frac{T^x l}{J^x} y + \frac{T^y l}{J^y} x$$

e una volta soggetto alle sole distribuzioni di pressioni sulle basi $z = 0$ e $z = l$ (Fig. 2):

$$\left. \begin{aligned} p_{(0)}^{z0} &= -\frac{V}{N^z} + \frac{I^y}{M^y} x - \frac{I^x}{M^x} y + \sum_{i=1}^n \frac{I^i}{M^i} \Phi^i \\ p_{(0)}^{zl} &= -\frac{V}{N^z} + \frac{I^y}{M^y} x - \frac{I^x}{M^x} y - \sum_{i=1}^n \frac{I^i}{M^i} \Phi^i \end{aligned} \right\}$$

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze per gli spostamenti provocati dal secondo potrà quindi scriversi:

$$(148) \quad W_{10} = (T_x \Delta u_0^{(0)} + T_y \Delta v_0^{(0)} + M_z \Delta \varphi_0^{(0)}) + \int_A p_{0z}^{(1)} w_0(s, 0) dA$$

e quindi, tenendo presente che per le formule prima riportate per gli ∞ casi di sollecitazione longitudinale:

$$(149) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0^{(0)} &= \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot \frac{l^2}{2} M_y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nx}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \\ \Delta v_0^{(0)} &= - \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot \frac{l^2}{2} M_x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{ny}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \\ \Delta \varphi_0^{(0)} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} (M_{ln} - M_{0n}) \\ w_0(s, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \frac{M_{ln} - M_{0n} \cosh \alpha_n l}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} \cdot \varphi_n(s) \end{aligned} \right.$$

$$(150) \quad W_{1,0} = \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot \frac{l^2}{2} T_x M_y - \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot T_y M_x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \nu^2}{E I_n} \cdot \left\{ \frac{C_{nx}}{\alpha_n^2} T (M_{ln} - M_{0n}) + \frac{C_{ny}}{\alpha_n^2} T_y (M_{ln} - M_{0n}) + \frac{C_{nz}}{\alpha_n^2} M_z (M_{ln} - M_{0n}) \right\}$$

Alla stessa espressione si può giungere considerando il lavoro compiuto dal secondo sistema di forze per gli spostamenti provocati dal primo. Si ha così:

$$(151) \quad W_{0,1} = \int_A p_{0z}^{(0)} w_1(s, 0) dA + \int_A p_{1z}^{(0)} w_1(s, l) dA$$

e quindi tenendo presenti le (130):

$$(151') \quad W_{0,1} = \frac{1 - \nu^2}{E I_y} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot T_x M_y - \frac{1 - \nu^2}{E I_x} \cdot \frac{l^2}{2} T_y M_x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\chi_{nx} T_x}{G A} (M_{ln} + - M_{0n}) + \frac{\chi_{ny} T_y}{G A} (M_{ln} - M_{0n}) + \frac{\chi_{nz} M_z}{G A} (M_{ln} - M_{0n}) \right\}$$

Per il teorema di Betti dovendo essere:

$$W_{1,0} = W_{0,1}$$

si traggono le eguaglianze:

$$(152) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\chi_{nz}}{GA} &= \frac{EI_n}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\alpha_n^2}{C} \\ \frac{\chi_{ny}}{GA} &= \frac{EI_n}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\alpha_n^2}{C} \\ \frac{\chi_{nz}}{GA} &= \frac{EI_n}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\alpha_n^2}{C} \end{aligned} \right\}$$

6 - Il caso generale del solido nelle condizioni più generiche di carico.

Ritornando al caso generale del solido caricato dall'insieme di carichi longitudinali e trasversali illustrate in Fig. 1 le ∞ caratteristiche della sollecitazione risulteranno date dalle relazioni:

$$(153) \quad \left. \begin{aligned} N^z &= F^{tz}; & M^z &= M^z \\ M^x &= M^{tx} + F^{tx}(z-l); & T^y &= F^{ty} \\ M^y &= M^{ty} - F^{ty}(z-l); & T^z &= F^{tz} \\ M^n &= M^{tn} \frac{\sinh \alpha_n z}{\sinh \alpha_n l} + M^{on} \frac{\sinh \alpha_n (l-z)}{\sinh \alpha_n l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots$$

$(n = 1, 2, \dots, \infty)$

essendo F^{tz} , F^{tx} , F^{ty} , M^z le azioni trasversali applicate sulla base $z = l$ e F^{tz} , M^x , M^y , M^n , M^{on} le azioni longitudinali legate alle due generiche distribuzioni di pressioni p_{0z} e p_{0x} dalle relazioni:

$$(154) \quad \left. \begin{aligned} F^{tz} &= \int_V p_{0z} dA; & M^x &= - \int_V p_{0x} x dA; & M^{tz} &= \int_V p_{0z} y dA \\ M^{tn} &= \int_V p_{0z} \Phi^n dA; & M^{on} &= - \int_V p_{0z} \Phi^n dA \end{aligned} \right\}$$

Corrispondentemente lo stato di tensione nell'ambito della parete sottile sarà:

$$(155) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{N^z}{A} - x \frac{M^x}{M^n} + y \frac{M^y}{M^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^n}{M^n} \Phi^n \\ \tau_{zs} &= - \frac{F^{tz}}{T^n} \frac{d\omega_x}{ds} - \frac{I^x}{T^n} \frac{ds}{d\omega_y} - \frac{I^y}{T^n} \frac{ds}{d\omega_z} \left(- \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^n}{M^n} \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\omega_n} \end{aligned} \right\}$$

I parametri generalizzati dello spostamento sono espressi peraltro dalle relazioni:

$$(156) \left\{ \begin{aligned}
 u_0(z) &= \frac{1-\nu^2}{E I_y} \left\{ M_{ly} \frac{z^2}{2} + F_{lx} \frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{GA} M_n(z) \\
 v_0(z) &= \frac{1-\nu^2}{E I_x} \left\{ -M_{lx} \frac{z^2}{2} + F_{ly} \frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{ny}}{GA} M_n(z) \\
 \varphi_0(z) &= \frac{q M_{lz}}{G I_p} \cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nz}}{GA} M_n(z) \\
 w_z(z) &= \frac{1-\nu^2}{EA} F_{lz} \cdot z \\
 \varphi_y(z) &= \frac{1-\nu^2}{E I_y} \left\{ M_{ly} z - F_{lx} z \left(\frac{z}{2} - l \right) \right\} - \frac{\chi_x F_{lx}}{GA} - \frac{\chi_{xy} F_{ly}}{GA} \\
 \varphi_x(z) &= \frac{1-\nu^2}{E I_x} \left\{ M_{lx} z + F_{ly} z \left(\frac{z}{2} - l \right) \right\} + \frac{\chi_{xy} F_{lx}}{GA} + \frac{\chi_y F_{ly}}{GA} \\
 \dots \dots \dots \\
 \varphi_n(z) &= \frac{1-\nu^2}{E I_n} \left\{ M_{ln} \frac{\cosh \alpha_n z}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} - M_{0n} \frac{\cosh \alpha_n (l-z)}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} \right\} + \\
 &+ \frac{\chi_{nx}}{GA} \cdot F_{lx} + \frac{\chi_{ny}}{GA} \cdot F_{ly} + \frac{\chi_{nz}}{GA} M_{lz} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right.$$

essendosi operate nelle prime tre relazioni, le sostituzioni consentite dalle (152).

L'energia elastica W assume infine l'aspetto:

$$(157) \left\{ \begin{aligned}
 W &= \frac{1-\nu^2}{2EA} l F_{lz}^2 + \frac{1-\nu^2}{2EI_x} l M_{lx}^2 + \frac{1-\nu^2}{2EI_y} l M_{ly}^2 + \left\{ \frac{1-\nu^2}{EI_x} \frac{l^3}{6} + \frac{\chi_y l}{2GA} \right\} F_{lx}^2 + \\
 &+ \left\{ \frac{1-\nu^2}{EI_y} \frac{l^3}{6} + \frac{\chi_x l}{2GA} \right\} F_{ly}^2 + \frac{1-\nu^2}{2EI_y} l^2 F_{lx} M_{ly} - \frac{1-\nu^2}{2EI_x} l^2 F_{ly} M_{lx} + \\
 &+ \frac{\chi_{xy} l}{2GA} l \cdot F_{lx} F_{ly} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\nu^2}{2EI_n} \cdot \frac{\cosh \alpha_n l}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} [M_{ln}^2 + M_{0n}^2] + \right. \\
 &- \frac{1-\nu^2}{EI_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n \sinh \alpha_n l} M_{0n} M_{ln} + \frac{\chi_{nx}}{GA} F_{lx} [M_{ln} - M_{0n}] + \\
 &\left. + \frac{\chi_{ny}}{GA} F_{ly} [M_{ln} - M_{0n}] + \frac{\chi_{nz}}{GA} M_{lz} [M_{ln} - M_{0n}] \right\}
 \end{aligned} \right.$$

7 - L'estensione del problema al caso delle travi a direttrice discontinua e spessore costante a tratti.

Con riferimento alla generica trave di parete sottile formata da n elementi a direttrice continua e spessore costante si è data nella Nota I l'espressione della equazione fondamentale per la determinazione della componente dello spostamento w nel generico tratto z_{estimo} . Con riferimento alla omogenea associata alla forma fondamentale (53') dalla Nota I:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1-p}{2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} - \int_{s_i}^{A_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} dA_i + \\ & - \frac{\partial^2 y_i}{\partial s_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial s_i} dA_i - \frac{\partial^2 w_{zi}}{\partial s_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \int_{s_i}^{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} d\Omega_{zi} dA_i = 0 \end{aligned} \right\} (158)$$

connessa alle condizioni trasversali di continuità della funzione w_i e del flusso delle tensioni tangenziali $L_i(w_i)$ in corrispondenza dei punti di saldatura di due o più elementi trasversali, la soluzione può porsi sempre nella forma:

$$(159) \quad w_i = \varphi(z) \Phi(s_i)$$

essendo $\varphi(z)$ legato all'equazione:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{\varphi}{1-p} = 0$$

e $\Phi(s_i)$ esprimibile nella forma:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s_i) &= \Phi_0(s_i) - \psi_0^x(s_i) - \int_{s_i}^{A_i} \frac{d\Phi_0^x}{dX_i} ds_i + \\ & - \psi_0^y(s_i) - \int_{s_i}^{A_i} \frac{d\Phi_0^y}{dY_i} ds_i - \psi_0^z(s_i) - \int_{s_i}^{A_i} \frac{d\Phi_0^z}{dZ_i} ds_i \end{aligned} \right\} (160)$$

ove:

$$(161) \quad \Phi_0^0 = A_i \sin \beta s_i + B_i \cos \beta s_i$$

e $\psi_0^x, \psi_0^y, \psi_0^z$ sono definite in base alle funzioni $\Phi_0^x, \Phi_0^y, \Phi_0^z$ integrali particolari delle (38) per l'elemento z_{estimo} , sempre in base alle relazioni lineari:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0^x(s_i) &= \frac{B}{1} \{ B_{11} \Phi_0^x(s_i) + B_{12} \Phi_0^y(s_i) + B_{13} \Phi_0^z(s_i) \} \\ \psi_0^y(s_i) &= \frac{B}{1} \{ B_{21} \Phi_0^x(s_i) + B_{22} \Phi_0^y(s_i) + B_{23} \Phi_0^z(s_i) \} \\ \psi_0^z(s_i) &= \frac{B}{1} \{ B_{31} \Phi_0^x(s_i) + B_{32} \Phi_0^y(s_i) + B_{33} \Phi_0^z(s_i) \} \end{aligned} \right\} (162)$$

ove i coefficienti B_{ik} rappresentano ancora i minori complementari degli elementi b_{ik} di una matrice quadrata del terzo ordine di cui B rappresenta il determinante dei coefficienti.

Gli elementi b_{ik} della matrice sono peraltro espressi dalle relazioni:

$$(163) \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_x^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dX_i}{ds_i} dA_i - 1 \\ b_{22} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_y^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dY_i}{ds_i} dA_i - 1 \\ b_{33} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_z^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{d\Omega_{zi}}{ds_i} dA_i - 1 \\ \\ b_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_y^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dX_i}{ds_i} dA_i ; \quad b_{21} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_x^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dY_i}{ds_i} dA_i \\ b_{13} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_z^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dX_i}{ds_i} dA_i ; \quad b_{31} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_x^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{d\Omega_{zi}}{ds_i} dA_i \\ b_{23} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_z^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{dY_i}{ds_i} dA_i ; \quad b_{32} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{d\Phi_y^{(i)}}{ds_i} \cdot \frac{d\Omega_{zi}}{ds_i} dA_i . \end{array} \right.$$

La funzione fondamentale (160) resta quindi definita a meno delle $2n$ costanti: A_i , B_i , ($i = 1, 2, \dots, n$).

Le condizioni trasversali prima citate si traducono peraltro nelle condizioni di continuità delle funzioni $\Phi^{(i)}$ e del flusso delle funzioni $t_i L_i(\Phi^{(i)})$ che esplicitate in funzione dei $2n$ coefficienti A_i , B_i forniscono un sistema lineare omogeneo in tali coefficienti, il cui determinante porge l'equazione caratteristica determinatrice degli autovalori β .

È superfluo ricordare che anche in questo caso l'equazione caratteristica ammette come prima radice l'autovalore degenero $\beta = 0$ cui corrispondono le tre autofunzioni particolari 1 , $x(s)$, $y(s)$. Per tutto il resto le considerazioni fatte sulla generalizzazione dei gradi di libertà della sezione trasversale e sulle caratteristiche della sollecitazione si estendono senza alcuna variante al caso in esame.

È solo opportuno ricordare che le funzioni d'ingobbimento tagliante ω_x e ω_y verranno sempre definite dalle:

$$(164) \quad \frac{d^2\omega_{xi}}{ds_i^2} = x_i(s_i) ; \quad \frac{d^2\omega_{yi}}{ds_i^2} = y_i(s_i)$$

e connesse con le condizioni trasversali di continuità delle funzioni stesse e del flusso $t_i d\omega_i/ds_i$ in corrispondenza di ogni nodo di saldatura di due o più elementi consecutivi, oltre che alla condizione ausiliaria:

$$(165) \quad \sum_n^k \int_{\omega^{x_i}} dA_i = 0 ; \quad \sum_n^k \int_{\omega^{y_i}} \omega^{y_i} dA_i = 0 .$$

8 - Conclusioni.

Dalla trattazione precedentemente svolta appare manifestamente che può istituirsi una teoria rigorosa delle travi di parete sottile generalizzando il concetto di gradi di libertà della sezione trasversale e di caratteristiche della sollecitazione ad essi commessi. Ai sei classici gradi di libertà considerati nella teoria tecnica si aggiungono pertanto infiniti ulteriori gradi di libertà associati a particolari forme d'ingobbimento della sezione trasversale che si sviluppano o per l'applicazione di particolari sistemi di forze autoequilibrate definite come 'momenti ingobbanti', o per effetto delle sollecitazioni trasversali di taglio e torsione.

Tale generalizzazione è fondamentale nello studio delle travi di parete sottile per la soluzione di problemi di notevole interesse teorico quali il calcolo del regime tensionale in prossimità di vincoli o di forze concentrate, dello stato di tensione in presenza di azioni distorcenti di qualsiasi natura, e non ultimo delle localizzazioni di tensione in prossimità di aperture o fori. È fondamentale poi in tutti i casi di solidi a sezione indeformabile la cui lunghezza sia dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni medie della sezione trasversale. Tali problemi verranno affrontati e risolti nelle Note successive del presente lavoro premettendo però nella Nota III degli indispensabili esempi di calcolo delle funzioni caratteristiche $\varphi^n(s)$ associate ai gradi di libertà prima citati, per alcuni tipi di sezione di comune applicazione nell'ambito delle costruzioni civili ed industriali.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] B. Z. VLASOV: *Thin-walled elastic beams* (Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1961). [Publ. for the National Science Foundation, Washington, D.C.].
- [2] S. TIMOSHENKO: « Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open section, in *Journal Franklin Institute* (1945).
- [3] VON KÁRMÁN & CHRISTENSEN: « Methods of analysis for torsion with variable twist », in *Journal of the Aeronautical sciences*, vol. 11, n. 2, (1964).
- [4] VON KÁRMÁN & WEI ZANG CHIEN: « Torsion with variable twist », in *Journal of the aeronautical sciences*, 13 (1946).
- [5] M. CAPURSO: « La trattazione di Jourawski per le sezioni pluriconnesse », in *Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, s. 4, vol. 28, (1961).
- [6] M. CAPURSO: « Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota I: La teoria rigorosa e le equazioni fondamentali », in *Ric. sci.*, 34 (II-A), vol. 6, 213 (1964).

RIASSUNTO

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota II: La generalizzazione del problema del Saint-Venant.

(Lavoro scientifico originale)

Si affronta il problema della soluzione dell'equazione fondamentale delle travi di parete sottile a sezione trasversalmente indeformabile, soggette sulle due basi estreme a distribuzioni di forze del tutto generiche. La soluzione viene ricondotta all'integrazione di una serie di equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie e a coefficienti costanti, ognuna legata a un particolare problema elastico definibile come caso di sollecitazione semplice. I sei classici casi del SAINT-VENANT vengono pertanto ritrovati come casi particolari di sollecitazioni appartenenti ad una serie di casi semplici di sollecitazione ognuno dei quali legato ad una particolare caratteristica e ad un particolare grado di libertà della sezione trasversale della trave. La soluzione resta quindi svincolata dall'accettazione del principio del SAINT-VENANT e viene quindi definita rigorosamente in ogni punto del solido in esame.

La riproduzione del Riassunto è autorizzata, citando l'autore e il periodico.

RÉSUMÉ

Sur le calcul des voiles longues à parois minces soumises à forces et à distorsions. Note II: La généralisation du problème de Saint-Venant.

(Mémoire scientifique original)

On poursuit la solution de l'équation fondamentale des voiles longues à parois minces et à profil indéformable, soumises à des forces quelconques appliquées aux extrémités.

La résolution est reconduite à l'intégration d'un nombre infini d'équations différentielles ordinaires et linéaires, à coefficients constants, chacune relative à un problème de sollicitation simple. On retrouve les six cas de SAINT-VENANT comme des cas particuliers de sollicitations simples, chacun correspondant à une particulière coordonnée généralisée de la section transversale de la tige.

On parvient pourtant à la solution du problème rigoureusement en tous points de la tige, faisant abstraction du principe de SAINT-VENANT.

La reproduction du Résumé est autorisée, en faisant référence à l'auteur et au périodique.

SUMMARY

Theory of thin-walled elastic beams of general cross-section subjected to loads and dislocations. Note II: Saint-Venant's problem for thin-walled elastic beams.

A solution is offered of the fundamental equation for a thin-walled elastic beam loaded only on the two opposite bases, by general distribution of forces. The solution is obtained by integration of infinite linear differential equations, every one correspondent to a particular degree of freedom of the cross-section of the beam. The six classical degrees of freedom of SAINT-VENANT'S theory are obtained as six particular cases of a general class of degrees of freedom, every one correspondent to a well-defined warping of the beam's cross-section. SAINT-VENANT'S postulate is neglected and the state of stress in every point of the structural element is defined.

The reproduction of the *summary*, mentioning author and periodical, is authorized.

ZUSAMMENFASSUNG

Über die Berechnung der Träger von dünnen Wänden in Gegenwart von Kräften und Verzerrungen. II. Mitteilung: Die Verallgemeinerung des Problems von Saint-Venant.

Man tritt dem Problem der Lösung der fundamentalen Gleichungen der Träger dünner Wände mit transversal umformbarer Sektion, die an den beiden extremen Basen einer allgemeinen Kräfteverteilung ausgesetzt sind, gegenüber. Die Lösung wird auf die Integration einer Reihe von verschiedenen Differentialgleichungen mit gewöhnlichen Ableitungen und konstanten Koeffizienten zurückgeführt, von denen jede an ein besonderes elastisches Problem gebunden ist, was man als einen einfachen Beschleunigungsfall definieren kann. Die sechs klassischen Fälle von SAINT-VENANT werden deshalb als besondere Beschleunigungsfälle wiedergefunden, die zu einer Serie von einfachen Beschleunigungsfällen gehören, von denen jeder an eine besondere Charakteristik und einen besonderen Grad von Freiheit der transversalen Sektion des Trägers gebunden ist. Die Lösung bleibt also losgelöst von der Annahme des Prinzips von SAINT-VENANT und wird deshalb in jedem Punkt des zu prüfenden Körpers genauestens definiert.

Die Wiedergabe der *Zusammenfassung* mit Quellenangabe (Verfasser und Zeitschrift) ist gestattet.

(*Wissenschaftliche Originalarbeit*)