

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni

Nota I: La teoria rigorosa e le equazioni fondamentali (*)

MICHELE CAPURSO

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Università di Napoli

*Lavoro eseguito con il contributo del CNR
Testo ricevuto il 14 dicembre 1963*

1 - Generalità.

La teoria dell'equilibrio elastico del solido cilindrico caricato esclusivamente in corrispondenza delle due basi estreme da un generico sistema di forze globalmente in equilibrio è stata, nelle classiche ipotesi di omogeneità, isotropia ed elasticità lineare, sviluppata in via rigorosa e completa dal SAINT-VENANT [1, 2].

Tale trattazione costituisce la base della cosiddetta 'teoria tecnica delle travi' nella quale si estendono in via approssimata i risultati particolari del SAINT-VENANT alla totalità dei casi reali riguardanti l'equilibrio elastico di solidi cilindrici comunque caricati e comunque vincolati.

L'estensione fonda le sue premesse su un classico postulato che trae il nome dallo stesso SAINT-VENANT ed è enunciato in forma sintetica nel concetto: «Se un sistema di forze in equilibrio agisce su di una zona limitata S' della superficie S di un corpo i suoi effetti si smorzano allontanandosi da S' e possono ritenersi praticamente nulli ad una distanza ρ che dipende dalla forma di S' e dalle sue dimensioni».

Tale postulato consente infatti di caratterizzare il regime di tensioni e di deformazioni con la sola conoscenza delle sei classiche caratteristiche della sollecitazione associate alle assegnate condizioni di vincolo e di carico del solido in esame, esclusione fatta per le zone prossime a vincoli o a carichi concentrati.

Sul tipo di solido vanno fatte tuttavia alcune indispensabili precisazioni, fra le quali le principali sono:

- <1> Le dimensioni della sezione trasversale siano fra di loro comparabili;
- <2> La lunghezza del solido sia di gran lunga preponderante rispetto alle suddette dimensioni trasversali.

(*) Lavoro presentato dal prof. ELIO GIANGRECO, O. di tecnica delle costruzioni, Università, Napoli.

È il caso classico dunque delle travi a sezione 'compatta' per le quali è ormai nota la buona rispondenza della 'teoria tecnica' con la realtà effettiva.

Non così può dirsi, ed è argomento ormai noto, per i solidi cilindrici a parete sottile.

Tali strutture infatti, note oggi come *thin-walled beams* sono caratterizzate da un triplice ordine di dimensioni ciascuna trascurabile rispetto alla successiva:

- <a> Spessore della parete;
- Dimensione media della sezione trasversale;
- <c> Lunghezza.

Per tali strutture, di sempre più larga diffusione nella pratica tecnica, è stato infatti necessario, specificamente per le sollecitazioni di torsione, generalizzare i risultati del SAINT-VENANT istituendo una nuova teoria, che, seppur approssimata, giustifichi le discordanze verificatesi in sede sperimentale con i risultati della teoria tecnica.

La nuova teoria nota oggi col nome di 'teoria delle aree settoriali' sviluppata inizialmente dal VLASOV [3, 4] e dal TIMOSHENKO [5, 6] per le travi a sezione trasversale monoconnessa, è stata poi generalizzata da KÁRMÁN e CHRISTENSEN [7] per travi a sezione trasversale generica.

Di tale teoria sono ben note le applicazioni al problema della stabilità dell'equilibrio elastico dovute allo stesso VLASOV [3, 4], al WAGNER [8], al KAPPUS [9], al GOODIER [10], etc., i cui risultati sono stati brillantemente confermati dall'esperienza.

Tuttavia, come è stato successivamente osservato da KÁRMÁN e WEI-ZANG-CHIEN [11] la teoria delle aree settoriali rappresenta soltanto il primo termine di un procedimento iterativo la cui convergenza in alcuni casi può essere dubbia.

Tale teoria consiste infatti essenzialmente nella suddivisione del flusso delle tensioni tangenziali provocato dalla caratteristica momento torcente in due parti: il flusso primario classico della teoria del SAINT-VENANT associato alla cosiddetta torsione pura, ed il flusso secondario associato alle tensioni tangenziali legate per l'equilibrio alle tensioni normali provocate dal disuniforme ingobbimento delle sezioni trasversali dovuto al flusso primario.

(La teoria delle aree settoriali, ricade infatti nella classica soluzione del SAINT-VENANT quando l'ingobbimento è costantemente eguale per ogni sezione trasversale).

Tale teoria trascura tuttavia l'ingobbimento dovuto al flusso secondario che in alcuni casi può essere più cospicuo del primario, e può quindi variare sostanzialmente il regime statico, ed inoltre pur migliorando sensibilmente l'esattezza del calcolo del regime di tensioni e deformazioni nell'interno del solido, nulla può dire per le zone situate in prossimità di vincoli o carichi concentrati.

In sostanza può affermarsi che la 'teoria delle aree settoriali' costituisce per le travi a parete sottile ciò che la 'teoria tecnica' costituisce per le travi a sezione compatta, nel senso che le limitazioni imposte ad entrambe le teorie possono ritenersi identiche.

Si è voluto pertanto nella presente Memoria riprendere dalle origini il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile soggette alle più generiche condizioni di carico e ad azioni distorcanti, impostando il problema su basi del tutto generali e rigorose.

La soluzione esatta del problema consente infatti di eliminare le limitazioni legate al postulato del SAINT-VENANT e di definire quindi in assoluto rigore alcuni problemi di notevole interesse teorico ed applicativo, quali:

<1> Il calcolo del regime tensionale nelle zone prossime a carichi concentrati ed a vincoli esterni;

<2> Il calcolo del regime tensionale associato a generiche distribuzioni di carico agenti sulla superficie laterale del solido;

<3> Il calcolo del regime tensionale associato a generiche azioni distorcenti di particolare interesse per lo studio delle azioni termiche o plastiche.

Nella Nota I s'imposterà pertanto in forma generale il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile, fornendo le equazioni fondamentali e le condizioni ai limiti, mentre nelle parti successive verranno presi in esame e risolti di volta in volta i problemi cui si è accennato.

2 - L'ipotesi fondamentale.

L'ipotesi fondamentale che si pone a base del presente studio è quella della indeformabilità trasversale della sezione del profilo.

Tale ipotesi, comune peraltro alla teoria delle aree settoriali ed allo studio del KÁRMÁN, è in genere giustificabile per le travi a parete sottile per la presenza degli irrigidimenti (*shear diaphragms*) che si dispongono in tali strutture per evitare fenomeni di instabilità di forma.

Tali irrigidimenti, com'è noto, vengono in genere realizzati con lastre sottili saldate al profilo a opportuni intervalli al fine d'impedire appunto variazioni di forma della sezione trasversale.

In relazione alla loro sottigliezza può peraltro pensarsi che gli irrigidimenti non presentino alcuna resistenza a deformarsi fuori dal proprio piano e quindi lascino completa libertà alla sezione del profilo d'ingobbarsi.

In quanto segue pertanto si riterrà che il profilo sia uniformemente irrigidito lungo tutta la sua lunghezza e cioè tale che ogni sezione conservi immutata la sua forma durante il movimento associato a generiche azioni deformanti.

3 - Le relazioni cinematiche.

Con riferimento al profilo di Fig. 1 a spessore t costante a sezione trasversale generica, si indichi con G il baricentro e con O il centro di taglio della sezione trasversale.

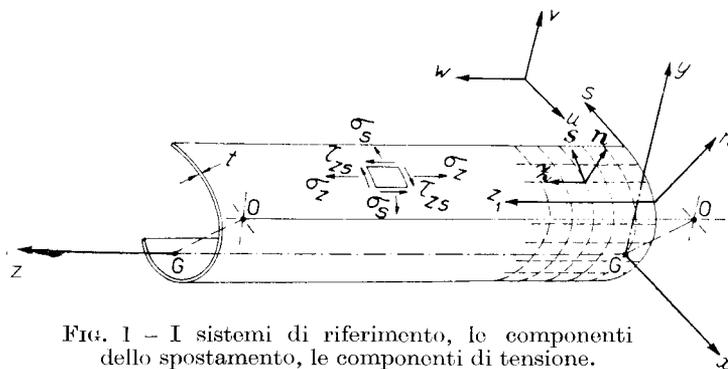


FIG. 1 - I sistemi di riferimento, le componenti dello spostamento, le componenti di tensione.

Si assume come riferimento la terna ortogonale destrorsa avente origine in G , gli assi x e y coincidenti con gli assi principali d'inerzia della sezione trasversale e l'asse z normale baricentrico.

La superficie media del profilo sia inoltre riferita alle due famiglie di linee ortogonali costituite dalle direttrici e generatrici della superficie cilindrica, orientando la normale n alla superficie nel punto generico $P(s, z)$ in modo che la terna di versori (n, s, z) sia una terna destra sovrapponibile con moto rigido alla terna fissa $G x y z$.

L'origine C del riferimento curvilineo sia scelta in un punto arbitrario della base $z = 0$.

Detto $\bar{\rho}$ lo spostamento del generico punto P indicheremo con:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{array} \right.$$

le componenti di tale spostamento secondo gli assi della terna fissa $x y z$, e con:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi(n, s, z) \\ \eta = \eta(n, s, z) \\ \zeta = \zeta(n, s, z) \end{array} \right.$$

le componenti di tale spostamento secondo la terna mobile n, s, z .

Da note relazioni si sa che:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = u \alpha_{x n} + v \alpha_{y n} + w \alpha_{z n} \\ \eta = u \alpha_{x s} + v \alpha_{y s} + w \alpha_{z s} \\ \zeta = u \alpha_{x z_1} + v \alpha_{y z_1} + w \alpha_{z z_1} \end{array} \right.$$

essendo α_{ij} il coseno direttore della retta i rispetto all'asse j , e poiché nel nostro caso:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{x n} = \alpha_{y s} = \frac{dy}{ds} \\ \alpha_{y n} = -\alpha_{x s} = -\frac{dx}{ds} \\ \alpha_{z z'} = 1 \\ \alpha_{z n} = \alpha_{z s} = \alpha_{x z_1} = \alpha_{y z_1} = 0 \end{array} \right.$$

essendo:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array} \right.$$

le equazioni parametriche della curva direttrice, le (3) assumono l'aspetto:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} \\ \eta = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \\ \zeta = w. \end{array} \right.$$

L'ipotesi fondamentale consente peraltro di caratterizzare lo spostamento nel piano xy di ciascun punto della sezione trasversale con tre soli parametri dipendenti solo dalla ascissa z . Indicando infatti con

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_0(z) \\ v_0 = v_0(z) \\ \varphi_0 = \varphi_0(z) \end{array} \right.$$

le due componenti secondo x e y dello spostamento del centro di taglio O e la rotazione della sezione intorno a quest'ultimo, le prime due delle (1) assumono l'aspetto:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_0(z) - \varphi_0(z) (y - y_0) \\ v(x, y, z) = v_0(z) + \varphi_0(z) (x - x_0) \end{array} \right.$$

essendosi indicato con (x_0, y_0) le coordinate nel piano della sezione del centro di taglio O (Fig. 2), e pertanto, per le (6), si ha:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = u_0 \frac{dy}{ds} - v_0 \frac{dx}{ds} - \varphi_0 \left[(y - y_0) \frac{dy}{ds} + (x - x_0) \frac{dx}{ds} \right] \\ \eta = u_0 \frac{dx}{ds} + v_0 \frac{dy}{ds} + \varphi_0 \left[(x - x_0) \frac{dy}{ds} - (y - y_0) \frac{dx}{ds} \right]. \end{array} \right.$$

Osservando peraltro che le quantità:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = (x - x_0) \frac{dy}{ds} - (y - y_0) \frac{dx}{ds} \\ p = (x - x_0) \frac{dx}{ds} + (y - y_0) \frac{dy}{ds} \end{array} \right.$$

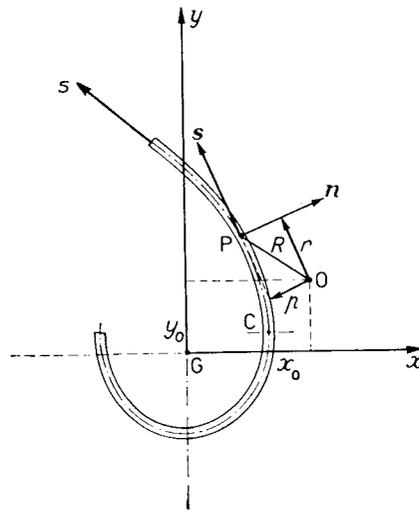


FIG. 2 - La sezione trasversale della trave.

non sono altro che le componenti secondo gli assi s ed n del vettore $R = OP$, le (2) assumono l'aspetto definitivo:

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} \xi &= u_0 \frac{dy}{ds} - v_0 \frac{dx}{ds} - \varphi_0 r \\ \eta &= u_0 \frac{dx}{ds} + v_0 \frac{dy}{ds} + \varphi_0 r \\ \zeta &= w. \end{aligned} \right\}$$

Il movimento di ciascun punto del profilo resta pertanto univocamente definito dalle quattro funzioni:

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} u_0 &= u_0(z) \\ v_0 &= v_0(z) \\ \varphi_0 &= \varphi_0(z) \\ w &= w(n, s, z) \end{aligned} \right\}$$

la cui ultima, in considerazione dell'esiguità dello spessore t , può ritenersi con buona approssimazione indipendente da n e quindi scriversi:

$$(13) \quad w = w(s, z).$$

4 - Le relazioni di elasticità.

Le relazioni che legano le componenti speciali di tensione alle componenti della deformazione elastica nella superficie media della parete sottile possono, nell'ipotesi di trascurabilità della tensione normale σ_n , porsi nella forma:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z^e + \nu \varepsilon_s^e) \\ \sigma_s &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_s^e + \nu \varepsilon_z^e) \\ \tau_{zs} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zs}^e. \end{aligned} \right.$$

Nel caso più generale le componenti della deformazione totale saranno espresse dalle relazioni:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_s^e + \varepsilon_s^p \\ \gamma_{zs} &= \gamma_{zs}^e + \gamma_{zs}^p \end{aligned} \right.$$

e quindi somma delle componenti relative alla deformazione elastica e delle componenti relative ad un generico sistema distorcente di carattere termico, plastico, etc.

Le (14) potranno scriversi quindi:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_s) - \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z^p + \nu \varepsilon_s^p) \\ \sigma_s &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_z) - \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_s^p + \nu \varepsilon_z^p) \\ \tau_{zs} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zs} - \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zs}^p. \end{aligned} \right.$$

L'ipotesi fondamentale consente peraltro di ridurre il numero delle incognite; infatti dovendo necessariamente risultare:

$$(17) \quad \varepsilon_s = 0$$

per essere la sezione indeformabile trasversalmente, la tensione normale σ_s può scriversi nella forma:

$$(18) \quad \sigma_s = \nu \sigma_z - E \varepsilon_s^p$$

mentre gli scorrimenti γ_{zs}^p , derivando sempre da distorsioni necessariamente congruenti con l'ipotesi fondamentale, possono porsi nella forma:

$$(19) \quad \gamma_{zs}^p = \vartheta_x \frac{dx}{ds} + \vartheta_y \frac{dy}{ds} + \vartheta_z r$$

con ϑ_x , ϑ_y e ϑ_z funzioni generiche di z .

Le incognite fondamentali, espresse come componenti speciali di tensione, si riducono pertanto alle due funzioni:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z - \varepsilon_z^*) \\ \tau_{zs} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\gamma_{zs} - \vartheta_x \frac{dx}{ds} - \vartheta_y \frac{dy}{ds} - \vartheta_z r \right) \end{array} \right.$$

ove si è posto:

$$(21) \quad \varepsilon_z^* = \varepsilon_z^p + \nu \varepsilon_x^p.$$

Tenendo peraltro presenti le classiche relazioni:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \gamma_{zs} = \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{array} \right.$$

le (20) si scrivono per le (6) nella forma:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z^* \right] \\ \tau_{zs} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial w}{\partial s} + \left(\frac{du_0}{dz} - \vartheta_x \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{dv_0}{dz} - \vartheta_y \right) \frac{dy}{ds} + \left(\frac{dq_0}{dz} - \vartheta_z \right) r \right] \end{array} \right.$$

ed esprimono le relazioni di elasticità generalizzate per le travi di parete sottile.

Le (23) rappresentano peraltro i valori delle tensioni longitudinali σ_z e trasversali τ_{zs} in corrispondenza della fibra media della parete costituente il profilo.

Nella realtà tali tensioni sono variabili lungo lo spessore t della parete ma in pratica possono ritenersi costanti data l'esiguità di quest'ultimo. Se però il profilo ha sezione trasversale aperta (monoconnessa) è indispensabile considerare insieme alle (23) il flusso di tensioni tangenziali variabili linearmente lungo lo spessore e nulle in corri-

spondenza della fibra media associata alle curvature elastiche di torsione provocate dalla deformazione della trave.

Tali tensioni, classiche della trattazione alla SAINT-VENANT, possono con buona approssimazione porsi nella nota forma:

$$(24) \quad \bar{\tau}_{zs} = 2 G n \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right)$$

essendo n la distanza della generica fibra dalla superficie media, e sono infatti le uniche ad opporsi a una torsione costante della trave e a conferire quindi a quest'ultima la possibilità di equilibrare il momento esterno.

La risultante delle (24) è infatti un momento torcente \bar{M}_z la cui espressione è la ben nota:

$$(25) \quad \bar{M}_z = \frac{G I_p}{q} \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right)$$

essendo I_p/q la costante di rigidità torsionale che, per sezioni a spessore t costante e sviluppo m si scrive:

$$(26) \quad \frac{I_p}{q} = m \frac{t^3}{3}$$

e per sezioni a spessore t_i costante a tratti:

$$(27) \quad \frac{I_p}{q} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{t_i^3}{3}$$

Se il profilo è a sezione chiusa (bi o pluriconnessa) le (24) non sono più necessarie per conferire rigidità torsionale alla trave. Anche nei casi di torsione costante infatti, il momento torcente esterno viene assorbito per la quasi totalità da un flusso di tensioni tangenziali costanti lungo lo spessore rispetto alle quali il contributo delle (24) è del tutto irrilevante.

In tali casi pertanto le (23) sono sufficienti per equilibrare qualsiasi azione esterna e sono pertanto le uniche tensioni che si considerano agenti sulla parete.

5 - Le equazioni indefinite di equilibrio.

Con riferimento al generico elemento $ds \cdot dz$ di parete giacente nell'intorno del punto $P(s, z)$ della superficie media le equazioni di equilibrio da imporre coincidono con le tre condizioni di equilibrio alla traslazione lungo i tre assi della terna locale n, s, z . Di queste tuttavia le prime due, e cioè quelle concernenti l'equilibrio lungo la normale n e la tangente s , divengono inessenziali per l'ipotesi posta circa l'indeforabilità del contorno della sezione trasversale della trave. L'equilibrio puntuale in tali direzioni resta infatti garantito per la presenza delle azioni mutue fra parete ed irrigidimenti che possono anzi per tale via essere calcolate.

Le condizioni di equilibrio pertanto, dette p_z , \bar{p}_x , \bar{p}_y , \bar{m}_z (Fig. 3) rispettivamente il carico puntuale agente in direzione dell'asse z sul generico elemento $ds \cdot dz$ di parete, i

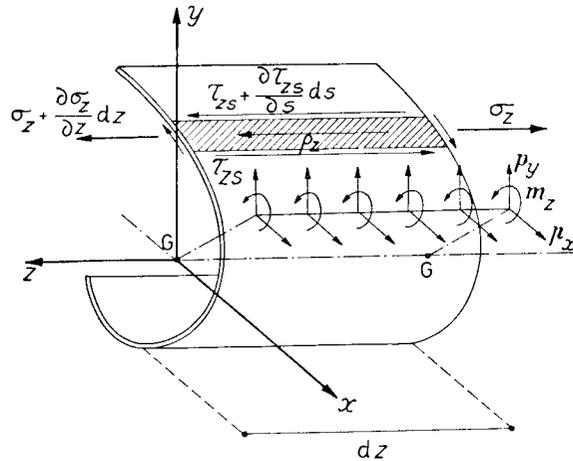


FIG. 3 - Il regime statico del concio elementare.

carichi globali agenti secondo gli assi x ed y sul concio elementare di trave di lunghezza dz , e il momento torcente globale rispetto all'asse dei centri di taglio, si scrivono:

$$(28) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} + \frac{p_z}{t} &= 0 \\ \frac{dT_x}{dz} + \bar{p}_x &= 0 \\ \frac{dT_y}{dz} + \bar{p}_y &= 0 \\ \frac{dM_z}{dz} + \bar{m}_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

essendo T_x , T_y , M_z le risultanti delle tensioni interne τ_{zs} secondo l'asse x ed y e il momento risultante rispetto all'asse dei centri di taglio O .

Queste ultime possono esprimersi pertanto nella forma:

$$(29) \quad \left. \begin{aligned} T_x(z) &= \int_A \tau_{zs} \frac{dx}{ds} dA \\ T_y(z) &= \int_A \tau_{zs} \frac{dy}{ds} dA \\ M_z(z) &= \int_A \tau_{zs} r dA + \bar{M}_z(z) \end{aligned} \right\}$$

essendo \bar{M}_z il momento interno espresso dalla (25) associato alle tensioni τ_{zs} che, per quanto prima esposto, verrà preso in considerazione nel solo caso delle sezioni aperte.

La ultima delle (29) può peraltro assumere un unico aspetto, tanto nel caso delle sezioni aperte che nel caso delle sezioni chiuse o cellulari introducendo il concetto di funzione d'ingobbimento torsionale (*warping function*) associata a deformazioni torsionali costanti.

Tale funzione, che indicheremo col simbolo ω_z rappresenta peraltro la funzione spostamento assiale $w(s)$ dei punti della superficie media della parete della trave quando questa sia soggetta ad una torsione costante a gradiente $d\varphi_0/dz$ unitario negativo.

Nel caso delle travi a sezione aperta tale funzione viene semplicemente ricavata osservando che dovendo essere, conformemente alla soluzione del SAINT-VENANT, $\tau_{zs} = 0$ in corrispondenza della fibra media, la seconda delle (23), per:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = \omega_z(s) \\ \frac{d\varphi_0}{dz} = -1 \\ \frac{du_0}{dz} = \frac{dv_0}{dz} = \vartheta_x = \vartheta_y = \vartheta_z = 0 \end{array} \right.$$

porge la relazione:

$$(31) \quad \frac{d\omega_z}{ds} - r = 0.$$

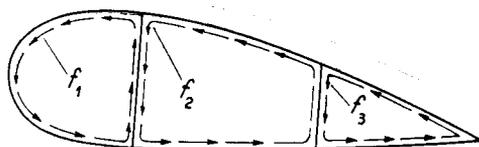


Fig. 4 - Il flusso delle tensioni tangenziali in una sezione cellulare soggetta a torsione.

Per le sezioni chiuse o cellulari invece (Fig. 4) tale funzione si ricava tenendo presente che coincidendo le τ_{zs} con il flusso di tensioni derivanti dalla nota soluzione di del BREDT SAINT-VENANT:

$$(32) \quad \tau_{zs} = -G \frac{f}{t}$$

con f costante di flusso ⁽¹⁾, la seconda delle (23), scritta in conformità delle (30) e (32), fornisce:

$$(33) \quad \frac{d\omega_z}{ds} - r + \frac{f}{t} = 0.$$

Le (31) e (33) consentono quindi, per semplice quadratura di risalire a meno di una costante arbitraria, all'espressione della funzione $\omega_z(s)$. La costante viene in genere eliminata con la condizione ausiliaria:

$$(35) \quad \int_A \omega_z dA = 0.$$

La terza delle (29), può quindi scriversi:

$$(36) \quad M_z = \int_A \tau_{zs} \frac{d\omega_z}{ds} dA + \frac{GI_p}{q} \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right)$$

per le sezioni aperte, e

$$(37) \quad M_z = \int_A \tau_{zs} \frac{d\omega_z}{ds} dA + \int_A \tau_{zs} \frac{f}{t} dA$$

per le sezioni chiuse o cellulari.

(1) Si ricordi che le costanti di flusso f per ogni elemento della sezione cellulare si possono semplicemente ricavare per differenza dalle costanti di flusso parziale f_i e f_k competenti alle due maglie i e k aventi tali elementi in comune.

Le costanti di flusso parziale f_i si ricavano infine dalla condizione di monodromia della $w(s)$ o quindi della ω_z che impone il verificarsi per ogni circuito della relazione:

$$(33') \quad \int_i r ds - \int_i \frac{f}{t} ds = 0$$

che, indicando con Ω_i l'area racchiusa dal circuito i esimo, fornisce:

$$(34) \quad 2 \Omega_i - f_i \alpha_i + \sum_{k=1}^s f_k \alpha_{ik} = 0$$

ove α_i indica la circuitazione geometrica:

$$\alpha_i = \int_i \frac{ds}{t}$$

relativa a tutto il circuito i esimo ed α_{ik} le circuitazioni geometriche parziali dell'elemento in comune fra le maglie i e k .

Le (34) costituiscono un sistema lineare nelle incognite f_i di semplice soluzione. Da queste è poi immediato, per quanto detto, risalire alle costanti f .

Osservando peraltro che per le (23), detto m il numero delle maglie chiuse della sezione trasversale, si ha:

$$\begin{aligned}
 (38) \quad \int_A \tau_{zs} \frac{f}{t} dA &= \int_A \frac{Gf}{t} \left\{ \frac{\partial w}{\partial s} + \left(\frac{du_0}{dz} - \vartheta_x \right) \frac{dx}{ds} + \left(\frac{dv_0}{dz} - \vartheta_y \right) \frac{dy}{ds} + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right) r \right\} dA = \sum_{i=1}^n f_i \int_i G \left\{ \frac{\partial w}{\partial s} + \left(\frac{du_0}{dz} - \vartheta_x \right) \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{dv_0}{dz} - \vartheta_y \right) \frac{dy}{ds} + \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right) r \right\} ds,
 \end{aligned}$$

tenendo presenti le ovvie relazioni:

$$\begin{aligned}
 (39) \quad \int_i r ds &= 2 \Omega_i \\
 \int_i \frac{\partial w}{\partial s} ds &= \int_i \frac{dx}{ds} ds = \int_i \frac{dy}{ds} ds = 0,
 \end{aligned}$$

la (38) fornisce:

$$(40) \quad \int_A \tau_{zs} \frac{f}{t} dA = 2G \sum_{i=1}^n f_i \Omega_i \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right)$$

che facendo la posizione:

$$(41) \quad \frac{I_p}{q} = 2 \sum_{i=1}^n f_i \Omega_i$$

consente di scrivere la (37) nella forma:

$$M_z = \int_A \tau_{zs} \frac{d\omega_z}{ds} dA + \frac{G I_p}{q} \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right)$$

identica a quella già ottenuta per le sezioni aperte ed espressa dalla (36).

Le (29) potranno pertanto scriversi, indipendentemente dal grado di connessione della sezione trasversale della trave nella forma:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} T_x(z) &= \int_A \tau_{zs} \frac{dx}{ds} dA \\ T_y(z) &= \int_A \tau_{zs} \frac{dy}{ds} dA \\ M_z(z) &= \int_A \tau_{zs} \frac{d\omega_z}{ds} dA + \frac{GI_p}{q} \left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \vartheta_z \right) \end{aligned} \right.$$

e risulteranno pertanto legate alla geometria della sezione trasversale tramite le tre funzioni fondamentali:

$$x = x(s) \qquad y = y(s) \qquad \omega_z = \omega_z(s)$$

Per queste è opportuno ricordare che, avendo scelto gli assi x e y come assi principali d'inerzia e il centro di rotazione O come centro di taglio della sezione, sussisteranno sempre le relazioni fondamentali di ortogonalità:

$$(43) \quad \int_A xy \, dA = \int_A x \omega_z \, dA = \int_A y \omega_z \, dA = 0$$

che puntualizzano appunto la particolare scelta degli assi di riferimento e del centro di rotazione.

La ricerca delle coordinate x_0 e y_0 del centro di rotazione O potrà infatti condursi proprio imponendo il verificarsi delle ultime due delle (43), ovvero seguendo il noto procedimento del Jouravsky esteso dallo Scrivente anche al caso delle sezioni sottili pluriconnesse [12].

6 - Le equazioni fondamentali dell'equilibrio elastico della trave di parete sottile a direttrice continua e spessore costante.

Le equazioni fondamentali dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile possono ora derivarsi secondo l'usuale procedimento traducendo in termini di spostamenti le equazioni indefinite di equilibrio (28).

Poiché tuttavia riterremo per ora il solido libero nello spazio e soggetto a un si-

stema di forze globalmente in equilibrio, la conoscenza delle tre caratteristiche trasversali $T_x(z)$, $T_y(z)$, $M_z(z)$ ci consentirà di ridurre le (28) alle più semplici:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} + \frac{p_z}{t} = 0, \\ & \int_A \tau_{zs} \frac{dx}{ds} dA = T_x(z), \\ & \int_A \tau_{zs} \frac{dy}{ds} dA = T_y(z), \\ & \int_A \tau_{zs} \frac{d\omega_z}{ds} dA + \frac{GI_p}{q} \frac{dq_0}{dz} = M_z(z) + \frac{GI_p}{q} \vartheta_z(z). \end{aligned} \right.$$

Le (44) di cui la prima esprime la condizione di equilibrio puntuale nella direzione z , e le tre successive le condizioni di identità fra le risultanti delle tensioni tangenziali interne e le corrispondenti risultanti delle azioni esterne sollecitanti la trave, possono semplicemente esprimersi in funzione dei parametri di spostamento (12) tenendo presenti le relazioni di elasticità (23). Così operando si ha infatti:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{du_0}{dz} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dv_0}{dz} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dq_0}{dz} \frac{dr}{ds} = \\ & = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{p_z}{t} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial \varepsilon_z^*}{\partial z} + \vartheta_x \frac{d^2 x}{ds^2} + \vartheta_y \frac{d^2 y}{ds^2} + \vartheta_z \frac{dr}{ds} \\ & d_{11} \frac{du_0}{dz} + d_{12} \frac{dv_0}{dz} + d_{13} \frac{dq_0}{dz} + \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dx}{ds} dA = \\ & = \frac{2(1+\nu)}{E} T_x + d_{11} \vartheta_x + d_{12} \vartheta_y + d_{13} \vartheta_z \\ & d_{21} \frac{du_0}{dz} + d_{22} \frac{dv_0}{dz} + d_{23} \frac{dq_0}{dz} + \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dy}{ds} dA = \\ & = \frac{2(1+\nu)}{E} T_y + d_{21} \vartheta_x + d_{22} \vartheta_y + d_{23} \vartheta_z \\ & d_{31} \frac{du_0}{dz} + d_{32} \frac{dv_0}{dz} + d_{33} \frac{dq_0}{dz} + \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial s} dA = \\ & = \frac{2(1+\nu)}{E} M_z + d_{31} \vartheta_x + d_{32} \vartheta_y + d_{33} \vartheta_z \end{aligned} \right.$$

avendo fatto le posizioni:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} d_{11} &= \int_A \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 dA, \\ d_{22} &= \int_A \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 dA, \\ d_{33} &= \int_A \frac{d\omega_z}{ds} r dA + \frac{I_p}{q} = \int_A \left(\frac{d\omega_z}{ds} \right)^2 dA + \frac{I_p}{q}, \\ d_{12} &= d_{21} = \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} dA, \\ d_{13} &= d_{31} = \int_A \frac{dx}{ds} r dA = \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\omega_z}{ds} dA,^{(2)} \\ d_{23} &= d_{32} = \int_A \frac{dy}{ds} r dA = \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\omega_z}{ds} dA. \end{aligned} \right.$$

Le (45) costituiscono pertanto le richieste equazioni dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Tale sistema può tuttavia ridursi ad altro di forma più semplice ricavando dalle ultime tre equazioni le funzioni du_0/dz , dv_0/dz , $d\varphi_0/dz$ in funzione delle caratteristiche trasversali T_x , T_y , M_z e dello spostamento assiale w .

A tal fine, indicando con D il determinante dei coefficienti della matrice simmetrica:

$$(47) \quad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}$$

⁽²⁾ Le due ultime e la terza delle (46) risultano verificate in via diretta per le sezioni aperte in virtù della (32), e per le sezioni chiuse o cellulari tenendo presenti la (33) ed inoltre le relazioni:

$$(47') \quad \int_A \frac{f}{t} \cdot \frac{dx}{ds} dA = \int_A \frac{f}{t} \frac{dy}{ds} dA = \int_A \frac{f}{t} \frac{d\omega_z}{ds} dA = 0$$

derivanti dalle ovvie proprietà di continuità delle funzioni $x(s)$, $y(s)$, $\omega_z(s)$.

e con D_{ik} il minore complementare dell'omologo elemento d_{ik} , si ricavano con semplicità dalle ultime tre equazioni del sistema (45) le relazioni:

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= -\frac{1}{D} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \left(D_{11} \frac{dx}{ds} + D_{12} \frac{dy}{ds} + D_{13} \frac{d\omega_z}{ds} \right) dA + \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)}{ED} (D_{11} T_x + D_{12} T_y + D_{13} M_z) + \vartheta_x \\ \frac{dv_0}{dz} &= -\frac{1}{D} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \left(D_{12} \frac{dx}{ds} + D_{22} \frac{dy}{ds} + D_{23} \frac{d\omega_z}{ds} \right) dA + \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)}{ED} (D_{12} T_x + D_{22} T_y + D_{23} M_z) + \vartheta_y \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= -\frac{1}{D} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \left(D_{13} \frac{dx}{ds} + D_{23} \frac{dy}{ds} + D_{33} \frac{d\omega_z}{ds} \right) dA + \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)}{ED} (D_{13} T_x + D_{23} T_y + D_{33} M_z) + \vartheta_z. \end{aligned} \right.$$

Le (48), operando rispettivamente nei secondi membri le trasformazioni lineari ⁽³⁾:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{11} x(s) + D_{12} y(s) + D_{13} \omega_z(s) \} \\ Y(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{12} x(s) + D_{22} y(s) + D_{23} \omega_z(s) \} \\ \Omega_z(s) &= \frac{1}{D} \{ D_{13} x(s) + D_{23} y(s) + D_{33} \omega_z(s) \} \end{aligned} \right.$$

⁽³⁾ Le (49) implicano il verificarsi delle relazioni inverse:

$$(49') \quad \left\{ \begin{aligned} x(s) &= d_{11} X(s) + d_{12} Y(s) + d_{13} \Omega_z(s) \\ y(s) &= d_{12} X(s) + d_{22} Y(s) + d_{23} \Omega_z(s) \\ \omega_z(s) &= d_{13} X(s) + d_{23} Y(s) + d_{33} \Omega_z(s) \end{aligned} \right.$$

ed inoltre è semplice verificare che la sestupla di funzioni:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d\omega_z}{ds} \\ \frac{dX}{ds}, \quad \frac{dY}{ds}, \quad \frac{d\Omega_z}{ds} \end{aligned}$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_x(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{11} T_x(z) + D_{12} T_y(z) + D_{13} M_z(z) \} \\ \tau_y(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{12} T_x(z) + D_{22} T_y(z) + D_{23} M_z(z) \} \\ \vartheta_{\mathcal{R}_z}(z) &= \frac{1}{D} \{ D_{13} T_x(z) + D_{23} T_y(z) + D_{33} M_z(z) \} \end{aligned} \right.$$

si scrivono più semplicemente:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA + \frac{\tau_x(z)}{G} + \vartheta_x(z) \\ \frac{dv_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \frac{\tau_y(z)}{G} + \vartheta_y(z) \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= - \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA + \frac{\vartheta_{\mathcal{R}_z}(z)}{G} + \vartheta_z(z). \end{aligned} \right.$$

L'equazione fondamentale delle travi di parete sottile si deduce pertanto sostituendo nella prima delle (45) le (51) e tenendo inoltre presente che per le (31) o (33) risulta sempre:

$$(52) \quad \frac{d^2\omega_z}{ds^2} = \frac{dr}{ds}.$$

gode delle proprietà:

$$(49'') \quad \left\{ \begin{aligned} \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA &= 1; & \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA &= 0; & \int_A \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA &= 0 \\ \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA &= 0; & \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA &= 1; & \int_A \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA &= 0 \\ \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} dA &= - \frac{D_{13}}{D} \frac{I_p}{q}; & \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} dA &= - \frac{D_{23}}{D} \frac{I_p}{q} \\ & & \int_A \frac{d\omega_z}{ds} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA &= 1 - \frac{D_{33}}{D} \frac{I_p}{q} \end{aligned} \right.$$

semplicemente verificabili tenendo presenti le proprietà dei determinanti e le relazioni (46).

Con tali premesse, ricordando le (49) e (50) si perviene all'equazione integro-differenziale lineare:

$$\begin{aligned}
 (53) \quad & \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{d^2 x}{ds^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{d^2 y}{ds^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \\
 & - \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA = \\
 & = - \frac{1}{G} \left(\frac{p_z}{t} + \bar{\tau}_x \frac{d^2 x}{ds^2} + \bar{\tau}_y \frac{d^2 y}{ds^2} + \varpi \bar{\tau}_z \frac{d^2 \omega_z}{ds^2} \right) + \frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{\partial \varepsilon_z^*}{\partial z}
 \end{aligned}$$

fondamentale per lo studio delle travi di parete sottile a sezione trasversalmente indeformabile soggette a forze ed azioni distorcenti generiche.

In vista delle applicazioni è opportuno pertanto scrivere le relazioni di elasticità (23) in funzione della sola componente assiale dello spostamento $w(z, s)$. Ciò può farsi semplicemente tenendo conto delle (51), e si ha pertanto:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_z(z, s) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left| \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z^* \right| \\
 \tau_{zs}(z, s) &= G \left[\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{dy}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \right. \\
 & \quad \left. - r \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA \right] + \bar{\tau}_x(z) \frac{dx}{ds} + \bar{\tau}_y(z) \frac{dy}{ds} + \varpi \bar{\tau}_z(z) \frac{d\omega_z}{ds}
 \end{aligned} \right.$$

quali espressioni definitive delle relazioni di elasticità per le travi di parete sottile.

Della (53) sono richieste soluzioni soddisfacenti le condizioni ai limiti sulle basi estreme ($z = 0$ e $z = 1$) e le condizioni trasversali dipendenti dal grado di connessione della sezione della trave illustrate nel paragrafo seguente.

7 - Le condizioni ai limiti connesse con l'equazione fondamentale.

Deistingueremo le condizioni ai limiti in condizioni longitudinali riguardanti le basi esterne $z = 0$ e $z = 1$ e condizioni trasversali.

Per le prime, è immediato constatare che, nell'ipotesi di solido libero e soggetto ad un sistema di forze globalmente in equilibrio, tali condizioni dovranno necessariamente imporre l'eguaglianza puntuale fra le azioni esterne $p_{oz}(s)$ e $p_{tz}(s)$ agenti rispettiva-

mente sulle basi $z = 0$ e $z = 1$, e le corrispondenti tensioni normali $\sigma_z(s, 0)$ e $\sigma_z(s, 1)$ e pertanto assumeranno l'aspetto:

$$(55) \quad \begin{cases} \sigma_z(s, 0) = -p_{0z}(s), \\ \sigma_z(s, 1) = p_{1z}(s). \end{cases}$$

Le (55) espresse con le (54) in termini di spostamento daranno quindi:

$$(56) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{1 - \nu^2}{E} p_{0z} + \varepsilon_z^*(s, 0), \\ \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=1} = \frac{E}{1 - \nu^2} p_{1z} + \varepsilon_z^*(s, 1), \end{cases}$$

che costituiranno le due necessarie condizioni longitudinali da associarsi alla equazione fondamentale (53).

È opportuna l'osservazione che sulle basi $z = 0$ e $z = 1$ l'identità puntuale fra azioni esterne e tensioni interne riguarda solo le tensioni normali e non quelle tangenziali τ_{zs} per le quali le (44) garantiscono solo identità globale intesa nell'aspetto delle azioni (forze e momento) risultanti.

Per quanto concerne le basi estreme infatti la differenza puntuale fra azioni esterne p_{zs} e tensioni interne τ_{zs} viene assorbita integralmente dai due irrigidimenti ivi esistenti e non provoca pertanto alcun ulteriore regime di deformazioni e quindi di tensioni neanche nelle zone immediatamente prossime alle due basi stesse.

Le (56) costituiscono pertanto le uniche condizioni longitudinali riguardanti le basi estreme. Per le condizioni trasversali invece il discorso è più complesso dipendendo esse, come si è già detto dal grado di connessione della sezione trasversale.

Le esamineremo pertanto caso per caso in relazione alla forma della direttrice della sezione trasversale.

7.1 - Sezioni aperte a direttrice continua.

Intenderemo per direttrice continua una curva le cui funzioni $x(s)$, $y(s)$ ed $\omega_z(x)$ siano continue sino alle derivate seconde almeno; tali sezioni (Fig. 5) non potranno avere più di due generatrici estreme la cui ascissa curvilinea indicheremo rispettivamente con s_1 ed s_2 . Indicando pertanto con $P_1(z)$ e $P_2(z)$ i carichi tangenziali eventualmente agenti su tali generatrici e con t lo spessore costante della parete, le condizioni trasversali si scriveranno:

$$(57-a) \quad \begin{cases} \tau_{zs}(s_1, z) = - \frac{P_1(z)}{t}, \\ \tau_{zs}(s_2, z) = \frac{P_2(z)}{t}. \end{cases}$$

Le (57), tenendo presenti le (54), e indicando per semplicità con $L(w)$ l'operatore:

$$(58) \quad L(w) = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{dx}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dX}{ds} dA - \frac{dy}{ds} \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{dY}{ds} dA + \\ - r \int_A \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{d\Omega_z}{ds} dA,$$

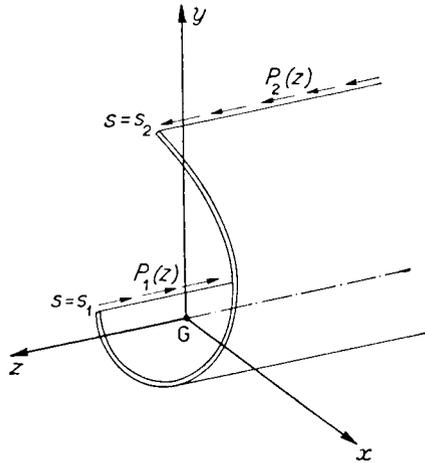


FIG. 5 - Trave di sezione aperta a direttrice continua.

si scrivono pertanto nella forma definitiva:

$$(59-a) \quad \left\{ \begin{aligned} [L(w)]_{s=s_1} &= -\frac{P_1(z)}{Gt} - \tau_z \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_1} - \tau_y \left(\frac{dy}{ds} \right)_{z=z_1} - \mathfrak{N}_z r(s_1), \\ [L(w)]_{s=s_2} &= \frac{P_2(z)}{Gt} - \tau_x \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_2} - \tau_y \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_2} - \mathfrak{N}_z r(s_2). \end{aligned} \right.$$

7.2 - **Sezioni chiuse a direttrice continua.**

Fermo restando quanto detto in 7.1 per la definizione di direttrice continua, per queste sezioni (Fig. 6) le condizioni trasversali saranno espresse come condizioni di continuità per le funzioni $w(z, s)$ e $\tau_{zs}(z, s)$ (t essendo costante) nel campo di definizione dell'ascissa curvilinea s . Tali condizioni che rispecchiano pertanto il doppio aspetto della congruenza e dell'equilibrio si scriveranno nella forma:

$$(57-b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\partial w}{\partial s} ds &= 0 \\ \int \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} ds &= 0 \end{aligned} \right.$$

che, per le (54) e per l'ipotesi di continuità delle funzioni coordinate assumono l'aspetto:

$$(59-b) \quad \left. \begin{aligned} \int \frac{\partial w}{\partial s} ds &= 0 \\ \int \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Le (59), scritte nella forma *a* o *b* in dipendenza del tipo di sezione trasversale, congiunte con le condizioni longitudinali (56), consentono di definire univocamente la soluzione dell'equazione fondamentale (53).

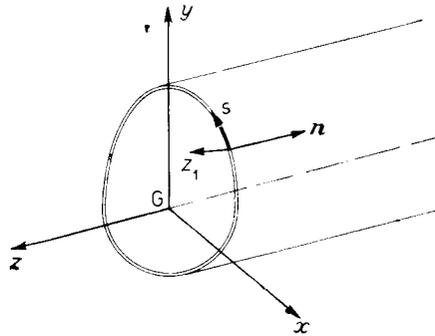


FIG. 6 -- Trave di sezione chiusa a direttrice continua.

8 - L'estensione delle equazioni fondamentali per le travi di parete sottile a direttrice discontinua e spessore costante a tratti.

Nella pratica tecnica le travi di parete sottile son quasi sempre formate dall'unione di più elementi (Fig. 9) ciascuno dei quali può riguardarsi come una trave elementare a direttrice continua e spessore costante.

Indicando pertanto con n il numero degli elementi componenti la trave e con i il generico di essi, i parametri dello spostamento che individueranno il moto di ciascun punto della sezione trasversale della trave saranno le $n + 3$ funzioni:

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} u_0(z) \\ v_0(z) \\ \varphi_0(z) \\ w_i(z, s_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

essendo $w_i(s_i, z)$ lo spostamento assiale del generico punto $p_i(s_i, z)$ della superficie media dell'elemento i^{esimo} .

Indicando pertanto con $x_i(s_i)$, $y_i(s_i)$, $\omega_i(s_i)$, $r_i(s_i)$ le funzioni caratteristiche dell'elemento i^{esimo} e con $X_i(s_i)$, $Y_i(s_i)$, $\Omega_{zi}(s_i)$ le trasformate:

$$(49') \quad \left\{ \begin{aligned} X_i(s_i) &= \frac{1}{D} \left\{ D_{11} x_i(s_i) + D_{12} y_i(s_i) + D_{13} \omega_{zi}(s_i) \right\}, \\ Y_i(s_i) &= \frac{1}{D} \left\{ D_{12} x_i(s_i) + D_{22} y_i(s_i) + D_{23} \omega_{zi}(s_i) \right\}, \\ \Omega_{zi}(s_i) &= \frac{1}{D} \left\{ D_{z1} x_i(s_i) + D_{23} y_i(s_i) + D_{23} \omega_{zi}(s_i) \right\}, \end{aligned} \right.$$

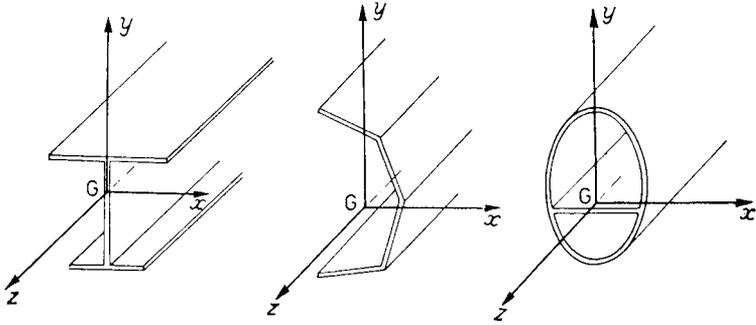


FIG. 7 - Travi di sezione generica a direttrice discontinua.

ove i D_{ik} sono sempre i minori complementari degli elementi d_{ik} del determinante (47) che questa volta scriveremo nella forma:

$$(46') \quad \left\{ \begin{aligned} d_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \left(\frac{dx_i}{ds_i} \right)^2 dA_i, \\ d_{22} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \left(\frac{dy_i}{ds_i} \right)^2 dA_i, \\ d_{33} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \left(\frac{d\omega_{zi}}{ds_i} \right)^2 dA_i \cdot \frac{I_p}{q}, \\ d_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{dx_i}{ds_i} \cdot \frac{dy_i}{ds_i} dA_i, \\ d_{13} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{dx_i}{ds_i} \cdot r_i dA_i, \\ d_{23} &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{dy_i}{ds_i} \cdot r_i dA_i, \end{aligned} \right.$$

le equazioni determinatrici degli spostamenti u_0 , v_0 , φ_0 , ferme restando le espressioni (50) delle forze $\bar{\tau}_x$, $\bar{\tau}_y$, $\varpi\bar{\tau}_z$, assumeranno l'aspetto:

$$(51') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{dX_i}{ds_i} dA_i + \frac{\bar{\tau}_x(z)}{G} + \vartheta_x(z), \\ \frac{dv_0}{dz} &= - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{dY_i}{ds_i} dA_i + \frac{\bar{\tau}_y(z)}{G} + \vartheta_y(z), \\ \frac{d\varphi_0}{dz} &= - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{d\Omega_{zi}}{ds_i} dA_i + \frac{\varpi\bar{\tau}_z(z)}{G} + \vartheta_z(z). \end{aligned} \right.$$

Le n equazioni determinatrici degli spostamenti w_i si scriveranno quindi:

$$(53') \quad \begin{aligned} & \frac{2}{1-r} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial s_i^2} - \frac{d^2 x_i}{ds_i^2} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{dX_i}{ds_i} dA_i + \\ & - \frac{d^2 y_i}{ds_i^2} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{dY_i}{ds_i} dA_i - \frac{d^2 \omega_{zi}}{ds_i^2} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} \cdot \frac{d\Omega_{zi}}{ds_i} dA_i = \\ & = - \frac{1}{G} \left(\frac{p_{zi}}{t_i} + \bar{\tau}_x \frac{d^2 x_i}{ds_i^2} + \bar{\tau}_y \frac{d^2 y_i}{ds_i^2} + \varpi\bar{\tau}_z \frac{d^2 \omega_{zi}}{ds_i^2} \right) + \frac{2}{1-r} \cdot \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{zi}}{\partial z}, \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

ove con t_i si è indicato lo spessore costante dell'elemento i^{esimo} , con $p_{zi}(s_i)$, il carico assiale agente su di esso per unità di superficie e con $\bar{\varepsilon}_{zi}$ la deformazione anelastica su di esso agente.

Le $n + 3$ equazioni costituite dalle (51) e (53) risolvono pertanto in via del tutto generale il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile di sezione generica purché a spessore costante a tratti.

Per definire univocamente le n $w_i(s_i, z)$ alle (53) bisogna accoppiare le condizioni ai limiti longitudinali e trasversali.

Le prime esprimeranno al solito le condizioni di equilibrio:

$$(55') \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{z,i}(s_i, 0) &= -p_{0z,i}(s_i) \\ \sigma_{z,i}(s_i, l) &= p_{lz,i}(s_i) \end{aligned} \right.$$

e tradotte in termini di spostamento daranno:

$$(56') \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial w_i}{\partial z} \right)_{z=0} &= - \frac{1 - \nu^2}{E} p_{0z,i} + \varepsilon_{z,i}^*(s_i, 0) \\ \left(\frac{\partial w_i}{\partial z} \right)_{s=l} &= \frac{1 - \nu^2}{E} p_{lz,i} + \varepsilon_{z,i}^*(s_i, l) \end{aligned} \right.$$

mentre le condizioni trasversali riguarderanno le condizioni di congruenza e di equilibrio in corrispondenza di ogni nodo di attacco di più elementi consecutivi.

Queste ultime pertanto, detto k il numero di elementi innestantisi nel generico nodo, (Fig. 10) si scriveranno :

$$(57') \quad \left\{ \begin{aligned} w_i(s_i, z) &= w_{i+1}(s_{i+1}, z) && i = 1, 2, \dots, (k - 1) \\ \sum_{i=1}^k \left\{ \pm t_i \tau_{zs, i}(s_i, z) \right\} &= P_i(z) \end{aligned} \right.$$

ove si è indicata con s_i l'ascissa curvilinea del nodo nel riferimento relativo all'elemento i^{esimo} e con $p_i(z)$ l'eventuale azione tangenziale esterna agente nel nodo stesso.

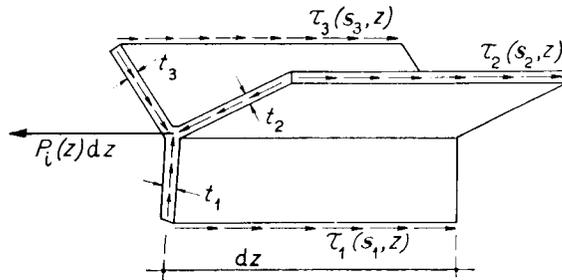


FIG. 8 - Nodo di connessione di più elementi sottili.

Nella sommatoria i segni positivi riguarderanno gli elementi ad ascissa curvilinea concorrente nel nodo e i negativi i restanti elementi.

Le (57) scritte in termini di spostamento daranno pertanto:

$$(59') \quad \left\{ \begin{aligned} w_i(s_i, z) &= w_{i+1}(s_{i+1}, z) && i = 1, 2, \dots, (k - 1) \\ \sum_{i=1}^n \left\{ \pm t_i \left[L_i(w_i) + \tau_x \frac{dx_i}{ds_i} + \tau_y \frac{dy_i}{ds_i} + \mathfrak{M}_z r_i \right]_{s=s_i} \right\} &= \frac{P_i(z)}{t_i} \end{aligned} \right.$$

ed è ovvia la trasformazione nel caso che l'elemento i^{esimo} termini libero anziché saldato ad ulteriori elementi.

9 - Conclusioni.

Dalla trattazione precedentemente svolta risulta chiaramente come il problema dell'equilibrio elastico delle travi di parete sottile trattate come solidi cilindrici a contorno non deformabile trasversalmente sia più complesso di quanto potrebbe pensarsi rifacendosi alla teoria tecnica delle travi o alla più moderna teoria delle aree settoriali del Vlasov.

Il problema risulta infatti in rigore riportabile ad una equazione integrodifferenziale lineare alle derivate parziali nella funzione incognita $w(z, s)$, fisicamente coincidente con la componente assiale dello spostamento dei punti della fibra media della parete.

La soluzione di tale equazione tuttavia non presenta eccessive difficoltà; di essa infatti si darà soluzione generale nelle Note seguenti mostrando la particolare affinità delle soluzioni con quelle derivanti dalle teorie approssimate prima citate ed inoltre mettendo in luce le approssimazioni inevitabili connesse con tali teorie.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- | | |
|---|--|
| [1] B. DE SAINT-VENANT: «Mémoire sur la flexion des prismes, etc.», in <i>Journal de Math. de Liouville</i> , s. 2, t. 1 (1856). | [7] VON KÁRMÁN & CHRISTENSEN: «Methods of analysis for torsion with variable twist», in <i>Journal of the aeronautical sciences</i> , vol. 11, n. 2, (1944). |
| [2] B. DE SAINT-VENANT: «Mémoire sur la torsion des prismes», in <i>Mémoires des savants étrangers</i> , vol. 14 (1856). | [8] H. WAGNER: «Verdrehung und Knickung von offenen Profilen», in <i>25th Anniversary Publication T. Hochschule Daurug</i> , 1929. |
| [3] B. Z. VLASOV: «Torsion et stabilité des tiges à parois minces et à profil ouvert», in <i>Industrie de la construction</i> (1937). | [9] R. KAPPUS: «Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil und elastischem Bereich», in <i>Luftfahrt-Forschung</i> , vol. 14 (1937). |
| [4] B. Z. VLASOV: <i>Thin-walled elastic beams</i> (Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1961). [Publ. for the National Science Foundation, Washington, D.C.]. | [10] J. H. GOODIER: «The buckling of compressed bars by torsion and flexure», in <i>Cornell Univer. Eng. Expt. Sta. Bull.</i> (December, 1944). |
| [5] S. TIMOSHENKO: «Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie», in <i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> , vol. 58 (1910). | [11] VON KÁRMÁN & WEI ZANG CHIEN: «Torsion with variable twist», in <i>Journal of the aeronautical sciences</i> , vol. 13 (1946). |
| [6] S. TIMOSHENKO: «Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open section», in <i>Journal Franklin Institute</i> , vol. 239 (1945). | [12] M. CAPURSO: «La trattazione di Jouravski per le sezioni pluriconnesse», in <i>Rend. Acc. di Scienze fisiche e matematiche di Napoli</i> , s. 4, vol. 28 (1961). |

RIASSUNTO

Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni. Nota I: La teoria rigorosa e le equazioni fondamentali.

(Lavoro scientifico originale)

Nella moderna tecnica costruttiva e particolarmente nel campo delle costruzioni aeronautiche, le travi di parete sottile costituiscono in genere l'elemento fondamentale della struttura portante. Il calcolo del regime tensionale in tali elementi assume pertanto un notevole rilievo e va affrontato nella più completa generalità tenendo presenti azioni esterne di carattere generico nel doppio aspetto delle forze e delle distorsioni.

Il problema risolto in via approssimata da Vlasov e Timoshenko è qui ripreso dalle origini impostandolo su basi rigorose e pervenendo alla corretta formulazione delle equazioni fondamentali e delle relative condizioni ai limiti che traducono analiticamente il fenomeno.

Tale impostazione, svincolata dai limiti imposti alle teorie approssimate dalle stesse ipotesi di base, consente di risolvere alcuni problemi di notevole interesse, quali il calcolo del regime tensionale in prossimità di forze concentrate e di vincoli, dello stato di tensione in presenza di azioni distorcenti di qualsiasi natura e, non ultimo, delle localizzazioni di tensione in prossimità di aperture o fori.

La soluzione di tali problemi, intimamente connessa con la soluzione delle equazioni fondamentali, alla cui formulazione si arresta la presente Nota, è trattata nelle parti successive, nelle quali peraltro appare chiaro il particolare significato fisico dello stesso procedimento risolutivo.

La riproduzione del *Riassunto* è autorizzata, citando l'autore e il periodico.

RÉSUMÉ

Sur le calcul des voiles longues à parois minces soumises à forces et à distorsions. Note I: La théorie exacte et les équations fondamentales.

(Mémoire scientifique original)

Dans la technique moderne des constructions et particulièrement, dans les problèmes d'aéronautique, les voiles longues à parois minces forment, en général, la partie fondamentale de la structure résistante.

Il importe donc de calculer les contraintes qui doivent être étudiées en général en présence de forces et de distorsions.

On a étudié ici rigoureusement le problème, déjà résolu approximativement par Timoshenko et Vlasov, et on détermine d'une façon exacte les équations fondamentales et les conditions correspondantes aux limites.

Cette étude permet de résoudre de nombreux problèmes comme, par exemple, le calcul des contraintes dans la tige en proximité de forces concentrées et de liaisons, la détermination des tensions produites par les distorsions et, en outre, la localisation des contraintes en proximité de trous ou entailles.

La solution de ces problèmes est étudiée dans les parties suivantes.

La reproduction du *Résumé* est autorisée, en faisant référence à l'auteur et au périodique.

SUMMARY

Theory of thin-walled elastic beams of general cross-section subjected to loads and dislocations. Note I: Rigorous theory and fundamental equations.

(Original scientific paper)

In modern structural engineering, and especially in aircraft design, thin-walled beams are widely used in the bearing structure.

A general theory of the elastic equilibrium of thin-walled beams subjected to general loads and dislocations was thus required. The problem, approximately solved by Vlasov and Timoshenko, is considered strictly on the basis of the hypothesis of the indeformability of the transversal cross-section.

The fundamental equations and boundary conditions of a thin-walled beam subjected to general distributions of loads and dislocations are calculated and these equations are applied in some cases of particular interest to the structural designer.

The reproduction of the *Summary*, mentioning author and periodical, is authorized