

### CAPITOLO III

#### FONDAMENTI DELLA TEORIA GENERALE DELLE TRAVI

15. L'asse di una trave sarà in generale un arco di curva continua e con tangente continua, ossia di direzione variabile con continuità, senza punti doppi.

Se si considera il sistema di assi ortogonali costituito dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale nel punto generico di una curva sghemba, il moto istantaneo di esso mentre l'origine percorre la curva è composto di una rotazione intorno all'intersezione dei due piani normali infinitamente vicini (retta polare, parallela alla binormale) e di una rotazione intorno alla tangente. È chiaro che, mentre per effetto della prima rotazione l'origine del sistema passa dal punto generico  $P$  al punto  $P'$  infinitamente vicino con sovrapposizione della tangente in  $P$  alla tangente in  $P'$ , per effetto della seconda la normale principale e la binormale in  $P$ , rotando nel loro piano, vengono a sovrapporsi rispettivamente alla normale principale e alla binormale in  $P'$  <sup>(85)</sup>. È noto che l'ampiezza della prima rotazione, rapportata alla distanza  $\overline{PP'}$ , cioè alla lunghezza  $ds$  dell'elemento della curva, si definisce come *curvatura*, e quella della seconda, pure rapportata a  $ds$ , come *torsione* della curva. S'indicherà la curvatura con  $\frac{1}{\rho}$ , essendo  $\rho$  il *raggio di curvatura*, e la torsione con  $\frac{1}{\tau}$ , essendo  $\tau$  il *raggio di torsione*. La curvatura sarà riguardata come quantità essenzialmente positiva, considerando il versore  $\mathbf{n}$  secondo la normale principale rivolto sempre verso il centro di curvatura, com'è detto nella nota <sup>(85)</sup>: la prima rotazione risulta infatti allora sempre dello stesso senso

---

<sup>(85)</sup> Si ricordi che tangente in  $P$  è il limite della corda  $PP'$  per  $P'$  tendente a  $P$ ; piano normale alla curva il piano normale alla tangente; piano osculatore il limite del piano determinato dalla tangente in  $P$  e dal punto  $P'$  tendente a  $P$ . Normale principale è l'intersezione dal piano normale col piano osculatore; binormale la normale a quest'ultimo, evidentemente normale alla tangente e alla normale principale.

La distanza di  $P'$  dal piano generico per la tangente in  $P$  è infinitesimo di

di quella che porta il versore  $t$  secondo la tangente (nell'arbitrario senso di percorrenza della curva) a sovrapporsi al versore  $n$  attraverso l'angolo retto. La torsione può invece risultare dell'uno o dell'altro segno.

Le due rotazioni, di cui è costituito il moto istantaneo dell'accennata terna di assi, sono rappresentate rispettivamente dal vettore  $\frac{1}{\rho} b$ , essendo  $b = t \wedge n$  il versore secondo la binormale applicato lungo la retta polare, e dal vettore  $\frac{1}{\tau} t$  applicato lungo la stessa tangente. Dalla considerazione di tali rotazioni risultano immediatamente le note relazioni di *Frenet* nella forma

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} &= \left( \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau} \right) \wedge b = -\frac{n}{\tau} \\ \frac{dt}{ds} &= \left( \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau} \right) \wedge t = \frac{n}{\rho} \\ \frac{dn}{ds} &= \left( \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau} \right) \wedge n = -\frac{t}{\rho} + \frac{b}{\tau}. \end{aligned} \tag{12}$$

second'ordine come la distanza dalla tangente medesima, essendo un cateto di un triangolo rettangolo di cui questa seconda distanza è ipotenusa. Ma se il piano è quello osculatore, diventa infinitesimo l'angolo tra esso e il piano della tangente e del punto  $P'$ , cioè l'angolo del suddetto triangolo opposto al considerato cateto: quest'ultimo dunque diventa infinitesimo di terz'ordine. (Nella fig. 46  $P'P'_1$  è tale cateto,  $P'P'_2$  l'ipotenusa, quindi l'angolo in  $P'_2$  quello che diviene infinitesimo se  $P'_1$  appartiene al piano osculatore.) Segue evidentemente che la curva attraversa in generale il piano osculatore e la proiezione di essa sul piano  $tb$  della tangente e della binormale (fig. 47) ha in  $P$  un punto di flesso.

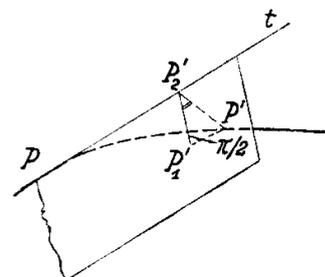


Fig. 46

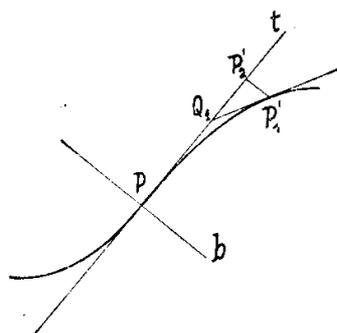


Fig. 47

L'angolo della tangente in  $P'$  col piano osculatore in  $P$ , sempre minore di quello delle due tangenti in tale proiezione (o uguale nel caso che la tangente in  $P'$ , che si proietta in  $P'_1Q_1$ , sia parallela allo stesso piano  $tb$ ) risulta così infinitesimo di second'ordine. Mentre dunque la direzione generica appartenente al piano normale in  $P$  fa col piano normale in  $P'$  un angolo infinitesimo di prim'ordine come l'angolo dei due piani, la direzione della binormale fa col piano medesimo un angolo di second'ordine: essa è pertanto la direzione dell'intersezione dei due piani normali, cioè della retta polare. L'intersezione di quest'ultima col piano osculatore, che è evidentemente un punto dell'intersezione di tale piano col piano normale, cioè un punto della normale prin-

Per la definizione della trave bisogna considerare una terna ortogonale che si sposti invece compiendo solo la prima delle rotazioni istantanee suddette. Si avrà allora che i due assi del piano che si mantiene normale a  $t$  andranno rotando, mentre l'origine percorre la curva, rispetto agli assi  $n$  e  $b$ .

Si considererà da prima nel piano suddetto una superficie fissa col baricentro nell'origine, racchiusa da un contorno che potrà anche essere costituito da più linee chiuse, e si definirà come *trave di sezione costante* (ad asse curvilineo) il solido generato da tale superficie nel moto indicato.

La teoria che qui si espone riguarda solo, tranne un prossimo accenno, le travi dette *di piccola curvatura*, ossia le travi per le quali il raggio di curvatura dell'asse si mantenga in ogni punto abbastanza grande rispetto alla massima dimensione della suddetta superficie piana nella direzione del raggio medesimo (cioè della normale principale dell'asse). In tal modo si conserva per approssimazione una delle proprietà del cilindro, cioè quella del parallelismo delle sezioni normali; mentre un'altra proprietà pure interessante per la statica del cilindro, quella della normalità tra ogni piano tangente alla superficie del cilindro e il piano normale all'asse, si conserva punto per punto esattamente. Per quest'ultima proprietà è da osservare infatti che la traiettoria di ogni punto del contorno della sezione risulta evidentemente normale alla sezione medesima, perciò ogni piano tangente viene a contenere una direzione normale alla sezione nel punto di tangenza. Ogni tronco della trave di lunghezza paragonabile alla suddetta massima dimensione della sezione potrà allora paragonarsi a un tronco di cilindro. Non ha invece importanza per queste considerazioni la grandezza della torsione dell'asse<sup>(86)</sup>.

Quando il contorno della sezione, anzichè mantenersi invariato e fisso nel piano che si mantiene normale alla tangente, cioè rispetto agli assi precedentemente considerati, vada deformandosi durante il moto, o anche

cipale, è il centro di curvatura. Assegnato il senso positivo della tangente secondo un determinato senso di percorrenza della curva, si rivolgerà in ogni caso la normale principale verso il centro di curvatura, e resterà fissato il senso positivo della binormale dalla relazione  $t \wedge n = b$  (onde  $n \wedge b = t$ ,  $b \wedge t = n$ ) essendo  $t$ ,  $n$ ,  $b$  i versori secondo i sensi positivi delle rispettive direzioni. (Risulterà naturalmente la terna oraria o antioraria secondo la rotazione considerata nella definizione del prodotto vettoriale.)

<sup>(86)</sup> La torsione potrebbe in singoli punti essere anche infinita. La rotazione subitanea dell'angolo  $\pi$  della coppia  $n, b$  che si ha in un punto a tangente stazionaria  $\left(\frac{1}{\rho} = 0\right)$  lascia in realtà immutato il piano osculatore. Ma anche un'effettiva rotazione subitanea di quest'ultimo, come nel raccordo di due curve appartenenti a piani diversi, non recherebbe difficoltà per la teoria delle travi.

solo mutando orientazione, in modo che il baricentro della sezione si mantenga coincidente con l'origine degli assi medesimi (cioè il punto che percorre la curva), si avrà la *trave di sezione variabile*. La coppia degli assi principali d'inerzia della sezione andrà questa volta rotando nel proprio piano rispetto alla coppia degli assi suddetti: tale rotazione istantanea rapportata al percorso  $ds$ , fissato il senso positivo con riguardo a quello di  $t$ , si dirà la *torsione della trave* e potrà indicarsi con  $\frac{1}{\tau_t}$ . È chiaro che tale torsione è affatto indipendente dalla torsione dell'asse.

Alla condizione della piccola curvatura viene ad aggiungersi ora quella della *piccola variazione della sezione*, che consiste nell'essere abbastanza grande il raggio  $\tau_t$  rispetto alla massima dimensione della sezione medesima, oltre che abbastanza piccola la variazione di lunghezza di ogni segmento dal baricentro al contorno (segmento individuato dall'inclinazione rispetto agli assi principali d'inerzia), anch'essa rapportata alla distanza  $ds$ . In tali condizioni ogni tronco di lunghezza paragonabile alla massima dimensione della sezione (o eventualmente alla massima delle dimensioni secondo la direzione che in ogni singola sezione venga a coincidere con quella della normale principale dell'asse) potrà ancora paragonarsi a un tronco di cilindro, verificandosi ancora per approssimazione le due proprietà sopra ricordate.

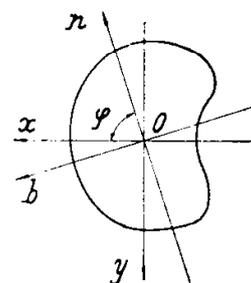


Fig. 48

Detti  $x, y$  gli assi principali d'inerzia,  $i$  e  $j$  i rispettivi versori<sup>(87)</sup>, e detto  $\varphi$  l'angolo che l'asse  $x$  fa con l'asse  $n$  (fig. 48), osservando che  $\frac{1}{\tau_t}$  è la rotazione della coppia  $x, y$  e  $\frac{1}{\tau}$  quella della coppia  $n, b$ , entrambe rispetto agli assi appartenenti alla terna che compie il moto sopra considerato, risulta ovviamente

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau_t} - \frac{1}{\tau}.$$

Con considerazioni analoghe a quelle che hanno condotto alle formule di Frenet, si ha poi

$$\frac{di}{ds} = \left( \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau_t} \right) \wedge i; \quad \frac{dj}{ds} = \left( \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau_t} \right) \wedge j.$$

<sup>(87)</sup> Nel caso di una sezione che si mantenga a raggi d'inerzia uguali bisognerà sostituire agli assi principali altri due assi ortogonali atti a definire l'orientazione della sezione (per esempio nel caso di un quadrato quelli paralleli ai lati, o alle diagonali). Nel caso poi della sezione circolare la torsione della trave può ovviamente essere considerata nulla. (Si avverte che l'indicata generazione del solido va intesa solo come definizione geometrica.)

Ricordando ora la seconda delle (12) e osservando che

$$n = \cos \varphi i - \sin \varphi j,$$

$$b = \sin \varphi i + \cos \varphi j,$$

si ottengono le espressioni

$$\begin{aligned} \frac{di}{ds} &= -\cos \varphi \frac{t}{\rho} + \frac{j}{\tau_t} \\ \frac{dj}{ds} &= \sin \varphi \frac{t}{\rho} - \frac{i}{\tau_t} \\ \frac{dt}{ds} &= \cos \varphi \frac{i}{\rho} - \sin \varphi \frac{j}{\rho}. \end{aligned} \tag{13}$$

**16.** Si definiscono le caratteristiche di sollecitazione della trave allo stesso modo di quelle del cilindro nel problema di Saint-Venant, cioè come componenti secondo gli assi  $t$  (in luogo di  $z$ ),  $x$  ed  $y$  del vettore risultante e del momento risultante rispetto al baricentro della sezione generica delle tensioni agenti sulla faccia positiva della sezione medesima. Le variazioni di esse lungo l'asse della trave non si esprimono così semplicemente come nel caso suddetto, anche perchè non si ammetterà più che il solido sia sollecitato da forze applicate soltanto alle sezioni estreme, ma si considereranno pure forze (di massa e di superficie) applicate lungo tutta la trave. S'indicherà pertanto con

$$r = r_t t + r_x i + r_y j$$

il vettore risultante delle forze applicate in ogni punto della sezione generica valutato per unità di lunghezza dell'asse della trave (vale a dire il vettore risultante delle forze applicate nei punti del tronco elementare compreso tra la sezione considerata e quella nel punto dell'asse a distanza  $ds$ , rapportato alla distanza medesima); con

$$m = m_t t + m_x i + m_y j$$

il momento risultante delle forze stesse (sempre rapportato alla distanza  $ds$ ) rispetto al baricentro della sezione. Detti poi

$$R = N t + T_x i + T_y j$$

il vettore risultante delle tensioni sulla faccia positiva della sezione,

$$M = M_t t + M_x i + M_y j$$

il momento risultante di esse rispetto al baricentro, per l'equilibrio del tronco elementare si hanno le relazioni

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} + \mathbf{r} = 0; \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} - \mathbf{R} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{m} = 0;$$

ossia

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{ds} + r_t\right) \mathbf{t} + \left(\frac{dT_x}{ds} + r_x\right) \mathbf{i} + \left(\frac{dT_y}{ds} + r_y\right) \mathbf{j} + N \frac{d\mathbf{t}}{ds} + T_x \frac{d\mathbf{i}}{ds} + T_y \frac{d\mathbf{j}}{ds} = 0 \\ \left(\frac{dM_t}{ds} + m_t\right) \mathbf{t} + \left(\frac{dM_x}{ds} - T_y + m_x\right) \mathbf{i} + \left(\frac{dM_y}{ds} + T_x + m_y\right) \mathbf{j} + \\ + M_t \frac{d\mathbf{t}}{ds} + M_x \frac{d\mathbf{i}}{ds} + M_y \frac{d\mathbf{j}}{ds} = 0. \end{aligned}$$

Ricordando le (13) si ottiene dunque

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= -r_t + \frac{\cos \varphi}{\rho} T_x - \frac{\sin \varphi}{\rho} T_y \\ \frac{dT_x}{ds} &= -r_x + \frac{1}{\tau_t} T_y - \frac{\cos \varphi}{\rho} N \\ \frac{dT_y}{ds} &= -r_y - \frac{1}{\tau_t} T_x + \frac{\sin \varphi}{\rho} N \\ \frac{dM_t}{ds} &= -m_t + \frac{\cos \varphi}{\rho} M_x - \frac{\sin \varphi}{\rho} M_y \\ \frac{dM_x}{ds} &= -m_x + T_y + \frac{1}{\tau_t} M_y - \frac{\cos \varphi}{\rho} M_t \\ \frac{dM_y}{ds} &= -m_y - T_x - \frac{1}{\tau_t} M_x + \frac{\sin \varphi}{\rho} M_t. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

*Si ammetterà di regola che lo stato di tensione in ogni punto della trave sia quello stesso che si avrebbe come soluzione del problema di Saint-Venant quando si avessero sulla sezione cui il punto appartiene le stesse caratteristiche di sollecitazione<sup>(88)</sup>. Tale criterio può giustificarsi mediante*

<sup>(88)</sup> Si ricordi che mentre per ciascuna delle caratteristiche  $N, T_x, T_y, M_x$  ed  $M_y$  si ha uno stato di tensione ad essa proporzionale (con sole tensioni normali sulla sezione per  $N, M_x$  ed  $M_y$ , con sole tensioni tangenziali per  $T_x$  e  $T_y$ ), un altro determi-

il ragionamento che segue, quando si ricordino le condizioni poste, per le quali ogni tronco di lunghezza paragonabile alle dimensioni della sezione è in realtà poco diverso da un tronco di cilindro.

Considerata la sezione generica che possa riguardarsi come sezione mediana di un tronco di lunghezza doppia di quella suddetta, si penserà il sistema delle forze applicate alla trave scisso in due sistemi equilibrati, il primo dei quali costituito dalle forze applicate al tronco medesimo e dalle reazioni di un sistema di vincoli ausiliari isostatici posti alle estremità di esso tronco, l'altro da tutte le rimanenti forze e dalle reazioni suddette cambiate di segno. È chiaro, se si ricorda anche il principio di Saint-Venant, che le tensioni prodotte da questo secondo sistema di forze nei punti della sezione considerata dipenderanno praticamente solo dalle rispettive caratteristiche di sollecitazione (cioè dalle parti di queste dovute al sistema medesimo), e saranno poco diverse da quelle che si avrebbero per le stesse caratteristiche nella sezione del tronco cilindrico nelle condizioni del problema di Saint-Venant. Poichè un'analogia considerazione non può valere per l'effetto del primo sistema, si conclude che il criterio indicato si fonda anche sulla presunzione che tale « sollecitazione locale » sia piccola rispetto all'effetto complessivo. E si riconosce poi facilmente che anche ciò potrà ammettersi in generale quando sia abbastanza grande il rapporto tra la lunghezza della trave e le dimensioni della sezione di essa <sup>(89)</sup>.

17. S'intende che la soluzione che si trova mediante l'applicazione di tale semplicissimo criterio potrà essere convenientemente corretta dove si dimostri troppo in contrasto con le condizioni di equilibrio o con quelle di congruenza. Si darà qui un esempio di tale correzione e si accennerà ad altri esempi di notevole interesse.

---

nato stato di tensione (con sole tensioni tangenziali) si ha in ragione del momento rispetto all'asse parallelo a  $z$  per il centro di taglio, cioè la combinazione  $M_t' = M_t - x_c T_y + y_c T_x$ , essendo  $x_c, y_c$  le coordinate di tale centro. Solo nel caso della sezione simmetrica rispetto al baricentro (anche se non simmetrica rispetto agli assi  $x$  e  $y$ ) il centro di taglio coincide col baricentro, quindi  $M_t' = M_t$ .

<sup>(89)</sup> Oltre all'esclusione dei tratti estremi della trave, comune al caso del problema di Saint-Venant, è da osservare il nuovo errore che potrà aversi nelle sezioni prossime a quelle in cui agiscono forze o coppie concentrate (naturalmente in senso pratico) di un ordine di grandezza maggiore di quello delle forze e coppie risultanti nel generico tronco sopra considerato. Si tratterà, salvo casi particolarissimi, delle sezioni in cui siano posti vincoli intermedi. Per lunghezza della trave, da raffrontare con le dimensioni della sezione, bisognerà dunque intendere la lunghezza di ogni singolo tratto tra tali vincoli.

Per la variabilità delle dimensioni della sezione possono aversi nella flessione tensioni normali massime maggiori di quelle risultanti dalla soluzione del problema di Saint-Venant. Considerato il caso della fig. 49, *a* con sezione della trave simmetrica rispetto all'asse *y* (fig. 49, *b*) e sollecitata dal momento  $M_x$ , si assuma il valore massimo di  $\sigma_z$  secondo tale soluzione (in uno dei punti di incontro del contorno della sezione con l'asse *y*). Ora è facile osservare che nel punto medesimo non si avrà più  $\tau_{yz} = 0$ , poichè la direzione *y*, normale al contorno nel punto considerato, non è più normale alla superficie del cilindro. Si ragioni infatti sull'equilibrio del cuneo individuato nell'intorno del punto anzidetto dal piano

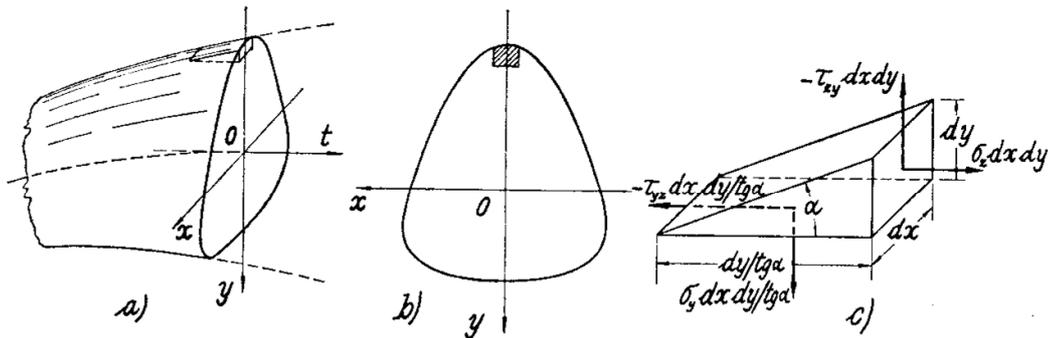


fig. 49

della sezione, da due piani paralleli di giacitura *yt* e da un piano di giacitura *tx* (fig. 49, *a*, *c*). Risulta subito che deve essere  $\tau_{yz} = -\sigma_z \operatorname{tg} \alpha$ , essendo  $\alpha$  l'angolo che la sezione della superficie del solido col piano *yz* fa con l'asse *t* <sup>(90)</sup>. Diventa allora necessaria, sempre per l'equilibrio dello stesso cuneo, anche la tensione normale  $\sigma_y = -\tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha = \sigma_z \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Nel caso della sezione simmetrica rispetto ad *y* potranno poi assumersi secondo la soluzione del problema di Saint-Venant anche le tensioni  $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$  <sup>(91)</sup>; e risultando così una tensione principale nulla, si avranno per le altre due tensioni principali (ricordando per esempio una nota applicazione dei cerchi di Mohr) le espressioni

$$\left. \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_z \{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \pm \sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}\} = \begin{cases} \sigma_z (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \\ 0 \end{cases}$$

<sup>(90)</sup> La risultante delle tensioni  $\tau_{zx}$  sulle due facce parallele del cuneo sarebbe in ogni caso infinitesima d'ordine superiore; e allo stesso modo sparirebbe la risultante delle forze di massa, anche nella successiva relazione d'equilibrio secondo la direzione *y*. È invece qui supposta scarica la superficie della trave.

<sup>(91)</sup> Si ricordi che la  $\tau_{zx}$  risulta nulla in tal caso in ogni punto dell'asse *y*.



Nel caso della sezione a  $\Gamma$  la curvatura dell'asse diventa sensibile quando il raggio di curvatura non superi 2,5 volte l'altezza della sezione.

o anche

$$\sigma'_z = \frac{k}{\rho} (y' - y'_1)$$

dove  $y'$  ed  $y'_1$  sono assunte rispetto all'asse  $x'$  parallelo ad  $x$  e passante per il baricentro  $O'$  della sezione ideale  $\Sigma'$ . Osservando che la  $\sigma'_z$  risulta così espressa come somma di un termine costante e di un termine lineare in  $y'$  e ricordando il paragrafo 13, si conclude che tale tensione si riferisce ad una sollecitazione di tensoflessione interessante la sezione ideale  $\Sigma'$ . Con riguardo a tale sezione si avrà dunque, ricordando la 11')

$$\sigma'_z = \frac{N}{A'} + \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} y',$$

e infine, per la sezione  $\Sigma$

$$\sigma_z = \frac{\rho}{\rho - Y} \left\{ \frac{N}{A'} + \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} y' \right\},$$

dove  $M'_{x'}$  è il momento flettente valutato rispetto all'asse  $x'$ . La superficie rappresentante il diagramma della  $\sigma_z$  risulta pertanto un paraboloide iperbolico equilatero. Nel caso in cui l'asse neutro  $x_1$  sia parallelo all'asse  $b$  si ha

$$\sigma_z = \frac{\rho}{\rho - y} \left\{ \frac{N}{A'} + \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} y' \right\}$$

e il diagramma sopra citato diventa un cilindro a base iperbolica.

Si consideri per semplicità tale ultimo caso e si ponga, per fare un esempio particolarmente significativo, che

la sezione sia simmetrica rispetto all'asse  $n$  (il baricentro  $O'$  di  $\Sigma'$  appartiene in tal caso all'asse  $n$  che (risulta asse principale d'inerzia sia di  $\Sigma$  sia di  $\Sigma'$ ): risulta così una flessione retta sia per  $\Sigma$  sia per  $\Sigma'$  quando il centro di pressione appartenga all'asse  $n$ . Il diagramma della  $\sigma_z$  sarà individuato dalla sua intersezione col piano  $tn$  (o con un piano ad esso parallelo): trattasi di iperbole equilatera che ha per asintoti la parallela a  $t$  per il centro di curvatura e la parallela a  $n$  di equazione

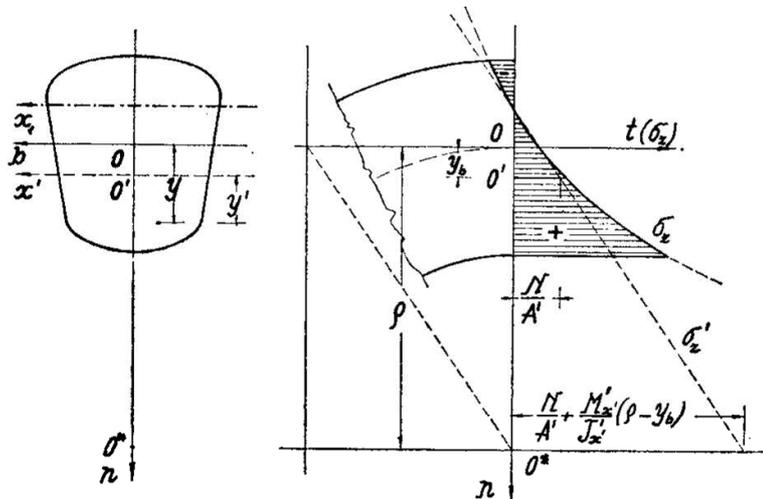


Fig. 51

la parallela a  $n$  di equazione

$$\sigma_z = - \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} \rho.$$

Infatti, se si indica con  $y_b$  l'ordinata del baricentro di  $\Sigma'$  rispetto all'asse  $b$ ,

Ma nel caso della sezione suddetta può verificarsi un altro fenomeno, cioè quello dell'accartocciamento delle ali, che non può trascurarsi (quando non

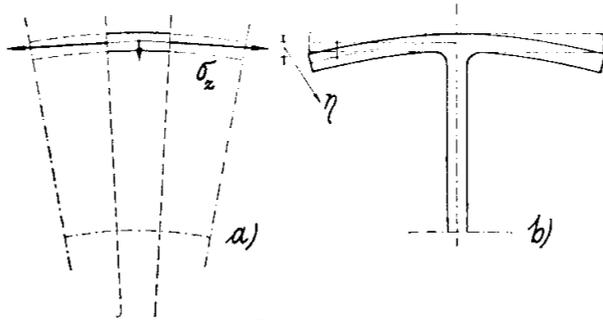


Fig. 52

si provveda a ridurlo mediante appositi accorgimenti costruttivi) nemmeno quando il raggio di curvatura sia alquanto superiore a quello sopra indicato. Infatti per effetto delle risultanti delle  $\sigma_z$ , convergenti (o divergenti), agli estremi di ogni tratto di ciascuna delle ali (fig. 52, a),

queste si inflettono verso l'interno (o verso l'esterno) della sezione. Ne risultano tensioni  $\sigma_x$  (fig. 53), che possono superare le massime  $\sigma_z$ ; inoltre gli spostamenti  $\eta$  nell'ala, pure essi convergenti (o divergenti) nelle diverse sezioni, portano ad una dilatazione  $\varepsilon_z$  di segno opposto a quella corrispondente alla  $\sigma_z$  dell'ala stessa (fig. 52, b). Tale  $\sigma_x$  pertanto non resta più costante sulla larghezza dell'ala medesima, ma dal punto di mezzo (dove  $\eta$  è nulla) va diminuendo verso le estremità, potendo ivi anche risultare cambiata di segno, con conseguente notevole aumento, a parità di momento flettente, del suo valore massimo.

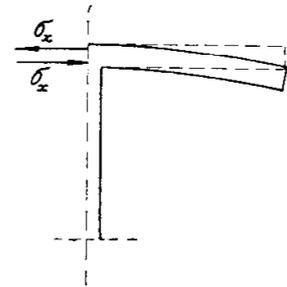


Fig. 53

Considerando come ultimo esempio la stessa sezione a  $\Gamma$ , si osserva come non sia ammissibile l'accennata estensione della soluzione del problema di Saint-Venant nel caso della torsione con momento torcente variabile, pur essendo la trave ad asse rettilineo e di sezione costante (cilindro). In tale estensione infatti la congruenza della deformazione verrebbe a mancare in modo essenziale.

Il caso sopra considerato potrebbe affrontarsi allora estendendo ad esso lo spostamento del Sain-Venant, dato, come è noto (§ 5), dalle com-

dall'espressione della  $\sigma_z$  si ottiene subito

$$\left( \sigma_z + \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} e \right) (e - y) = e \left[ \frac{N}{A'} + \frac{M'_{x'}}{J'_{x'}} (e - y_b) \right].$$

Nella fig. 51 sono indicati sia il diagramma della  $\sigma'_z$  sia il diagramma della  $\sigma_z$ , il cui asintoto parallelo ad  $n$  è stato tracciato per l'intersezione tra l'asse  $t$  (asse  $\sigma_z$ ) e la parallela al primo degli accennati diagrammi mandata dal centro di curvatura (il fattore costante che appare in parentesi nel secondo membro della precedente relazione rappresenta il valore di  $\sigma'_z$  corrispondente al centro di curvatura).

ponenti

$$\zeta = -\omega\vartheta_0, \quad \xi = -\omega zy, \quad \eta = \omega zx.$$

Potrebbe porsi dunque

$$\zeta = -\omega\vartheta_0, \quad \xi = -\Omega y, \quad \eta = \Omega x$$

essendo  $\omega$  variabile con  $z$  e

$$\Omega = \int_0^z \omega dz :$$

si avrebbe così un diverso ingobbamento di ogni sezione (consistente essenzialmente in rotazioni opposte delle due ali intorno all'asse dell'anima), mentre alla deformazione del Saint-Venant verrebbe ad aggiungersi una  $\varepsilon_z$  proporzionale alla funzione  $\vartheta_0$ , e pertanto antisimmetrica rispetto a ciascuno degli assi  $x$  e  $y$  (per la simmetria della sezione). E tale componente  $\varepsilon_z$  da sola costituisce una deformazione non congruente<sup>(93)</sup>.

È da osservare a questo punto come non possa ammettersi senz'altro lo stato di tensione risultante da tale estensione dello spostamento, poichè le  $\sigma_z$  che verrebbero a comparire su ciascun'ala darebbero luogo ad un momento flettente (agente nel piano dell'ala stessa) in generale variabile, non accompagnato da sforzo di taglio, ma equilibrato dall'azione di coppie (aventi la giacitura delle ali) ripartite secondo  $z$  e opposte nei punti corrispondenti delle due ali (vale a dire nei punti appartenenti alla stessa sezione). Basterà a tale proposito richiamare la terza equazione indefinita dall'equilibrio e, restando  $\operatorname{div} \tau = 0$ , considerare la forza di massa che deve ammettersi per l'equilibrio della  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ . Le coppie ripartite cui s'è accennato non possono essere surrogate da coppie trasmesse dall'anima<sup>(94)</sup>,

<sup>(93)</sup> Per una deformazione colla sola  $\varepsilon_z$  le condizioni di congruenza sarebbero soddisfatte ove si avesse

$$\frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x \partial y} = 0,$$

cioè ove la funzione  $\vartheta_0$  fosse una funzione lineare in  $x$  e  $y$ . Ma ciò non può essere per quanto è stato dimostrato nella nota<sup>(22)</sup>.

Per la sezione a  $\sqcap$ , e così per quella a  $\sqsubset$ , la  $\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}$  varia lungo l'asse dell'anima (secondo  $y$ ) tra valori opposti dell'ordine di grandezza dell'altezza della trave (si ricordi l'accennata rotazione delle sezioni delle ali); onde risulta il carattere essenziale della mancata congruenza accennata all'inizio.

<sup>(94)</sup> Attesa la scarsa rigidità dell'anima per una tale sollecitazione, occorrerebbero spostamenti di essa essenzialmente diversi, anche per ordine di grandezza, da quelli considerati.

ma solo da altre forze esterne, evidentemente mancanti in ogni posizione pratica del problema.

Si rende dunque necessaria una modificazione dell'assunto spostamento in modo che risultino aggiunte alle tensioni tangenziali di torsione le tensioni tangenziali costituenti lo sforzo di taglio  $T_x$  equilibrante ogni tronco di ciascun'ala senza le sopra accennate coppie. Si tratterà di una piccola modificazione, per ogni data funzione  $\omega$ , piccoli essendo notoriamente gli spostamenti dovuti alle aggiunte tensioni tangenziali.

È di fondamentale interesse avvertire ora che, a parità di  $\omega$ , il momento torcente potrà risultare sostanzialmente mutato. Tale momento infatti risulta dalla somma di quello dato dalle tensioni tangenziali di torsione di Saint-Venant, proporzionali alla rotazione relativa  $\omega$ , con quello  $-T_x h$  (fig. 54) dato dalle nuove tensioni tangenziali ripartite su ciascun'ala come nel caso della flessione composta. Risulta con sufficiente approssimazione

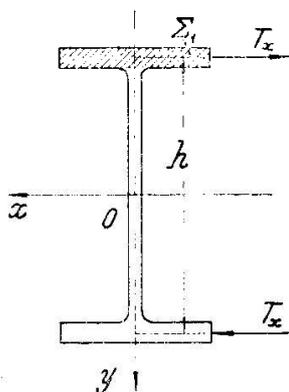


Fig. 54

$$M_t = GJ_t' \omega - EJ_y \frac{h^2}{2} \frac{d^2 \omega}{dz^2}$$

essendo  $GJ_t'$  l'ordinaria rigidezza torsionale e  $J_y$  il massimo momento d'inerzia baricentrico di ciascuna delle ali <sup>(95)</sup>.

È da rilevare infine come la soluzione col suddetto spostamento modificato sia da considerare anche per una trave sollecitata da momento torcente costante, dove per le condizioni di vincolo o per l'effettiva ripartizione delle forze alle basi non sia consentita la semplice soluzione

<sup>(95)</sup> Dato l'interesse del caso che si è voluto richiamare, si ritiene opportuno per chiarimento far seguire all'esposizione sintetica del testo un cenno su una impostazione analitica approssimata del problema.

Considerato dapprima il caso della torsione in regime di Saint-Venant, si assumano le seguenti espressioni approssimate di  $\zeta$  (fig. 54)

$$\zeta = \omega xy$$

$$\zeta = \omega x (\pm h - y)$$

riguardanti rispettivamente l'anima e le ali (inferiore e superiore). La prima può ottenersi dalla condizione approssimata  $\tau_{zx} = 0$  ( $\gamma_{zx} = 0$ ) valida per rettangoli molto allungati (salvo le zone di estremità) e dalla condizione esatta  $\bar{\tau}_{yz} = 0$  ( $\bar{\gamma}_{yz} = 0$ ) riguardanti il valore medio della  $\tau_{yz}$  sullo spessore dell'anima. La seconda discende dalle analoghe condizioni poste per le ali e dalla condizione della continuità alla  $\zeta$  dell'anima. Resta la discontinuità della  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  nel passaggio dell'anima all'ala, come conseguenza delle con-

del Saint-Venant. Varieranno allora le due parti del momento, mantenendosi costante la loro somma. Per esempio nel caso che tutti i punti di una base siano fissi e agiscano all'altra base forze tangenziali costituenti una coppia torcente e ripartite conforme alla soluzione di Saint Venant, si manterrà bensì praticamente lo stesso stato di tensione, e quindi lo spostamento con la rotazione relativa  $\omega$  costante, per un certo tratto (posto che la trave sia abbastanza snella); ma in un tratto successivo, fin quasi alla base vincolata, varrà invece la nuova soluzione con l' $\omega$  variabile.

dizioni assunte e mantenute in tale zona. Ciascuna delle superficie dei tre rettangoli formanti la sezione si trasformerebbe così in un paraboloido iperbolico equilatero; ma la parte essenziale di tale ingobbamento consisterebbe nelle rotazioni degli assi delle ali intorno all'asse  $y$  (fig. 55)

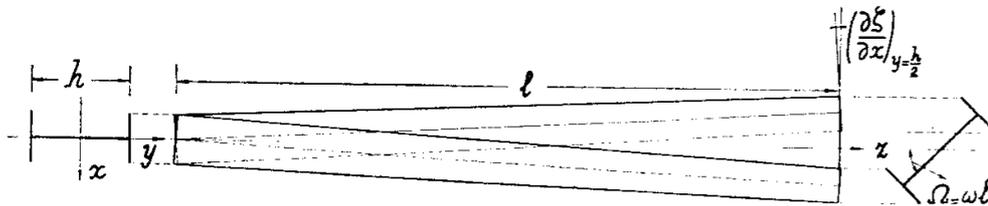


fig. 55

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{y=\pm \frac{h}{2}} = \pm \omega \frac{h}{2}.$$

Passando ora al caso dell' $\omega$  variabile con  $z$ , nei punti degli assi delle ali si ha per la  $\epsilon_z$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \pm \frac{h}{2} \frac{d\omega}{dz} x$$

e quindi, per la  $\sigma_z$  nei punti stessi

$$\sigma_z = \pm E \frac{h}{2} \frac{d\omega}{dz} x$$

(su questo modo d'assumere  $\sigma_z$  si vedano le osservazioni che seguiranno nel testo).

Il momento flettente  $M_y$  che viene ad agire sulle ali risulta allora

$$M_y = - \int_{(\Sigma_1)} \sigma_z x dA = \mp EJ_y \frac{h}{2} \frac{d\omega}{dz};$$

lo sforzo di taglio  $T_x$  risultante delle tensioni tangenziali corrispondenti all'accennata modificazione dello spostamento risulta così

$$T_x = - \frac{dM_y}{dz} = \pm EJ_y \frac{h}{2} \frac{d^2\omega}{dz^2}.$$

Da tale ultima relazione discende subito l'accennata espressione approssimata del momento torcente totale.

L'esempio sopra accennato riguarda il caso della così detta *torsione non uniforme* (concepita in senso esteso se si richiama l'osservazione finale), con riferimento alla particolare sezione a  $\perp$ . Ad analoga conclusione può giungersi quando si consideri ogni altra sezione estesa in forma lineare aperta con piccolo spessore. A tale proposito giova osservare in generale che le espressioni delle componenti di spostamento che s'è detto di estendere non possono restare le stesse quando si ragioni su sezioni non simmetriche rispetto al baricentro (per esempio, la sezione a  $\perp$ ). Da esse infatti risulterebbero in generale tensioni  $\sigma_z$  costituenti momenti  $M_x$  ed  $M_y$  diversi da zero anche per l'intera sezione. Bisogna porre dunque

$$\zeta = -\omega(\vartheta_0 + \bar{y}_c x - \bar{x}_c y), \quad \xi = -\Omega(y - \bar{y}_c), \quad \eta = \Omega(x - \bar{x}_c),$$

aggiungendo un moto rigido di ogni sezione risultante della traslazione

$$\Omega(\bar{y}_c \mathbf{i} - \bar{x}_c \mathbf{j})$$

e della rotazione definita dal vettore applicato

$$\omega(\bar{C} - O') = \omega(\bar{x}_c \mathbf{i} + \bar{y}_c \mathbf{j})$$

passante per il baricentro  $O'$  della sezione medesima, essendo  $\bar{C}$  il punto di essa di coordinate  $\bar{x}_c, \bar{y}_c$ . Tale ultima rotazione è ovviamente da imprimere per non alterare le  $\gamma_{zx}, \gamma_{yz}$ .

Il moto così impresso sarebbe con l' $\omega$  costante un moto rigido dell'intero cilindro, e però non si avrebbe in tal caso che un altro spostamento corrispondente alla medesima deformazione; mentre con l' $\omega$  variabile non rimane più rettilinea ogni retta parallela a  $z$ , ma rimane tale col primo spostamento solo l'asse del cilindro, e col secondo solo la retta passante per il punto  $C$ . Tale retta può chiamarsi allora *asse di torsione*, e *centro di torsione* il punto medesimo.

Dalle condizioni

$$\int_{(\Sigma)} \sigma_z y \, dA = \int_{(\Sigma)} \sigma_z x \, dA = 0$$

si ottiene, risultando  $\sigma_z$  proporzionale a  $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$  per essere  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ,

$$\bar{x}_c = \frac{1}{J_x} \int_{(\Sigma)} y \vartheta_0 \, dA, \quad \bar{y}_c = -\frac{1}{J_y} \int_{(\Sigma)} x \vartheta_0 \, dA.$$

E dovendo anche essere

$$N = \int_{(\Sigma)} \sigma_z dA = 0,$$

dovrà scegliersi la costante indeterminata della  $\vartheta_0$  in modo che risulti

$$\int_{(\Sigma)} \vartheta_0 dA = 0.$$

Per quanto riguarda ora la tensione  $\sigma_z$  potrà assumersi l'espressione

$$\sigma_z = -E \frac{d\omega}{dz} (\vartheta_0 + \bar{y}_c x - \bar{x}_c y),$$

tralasciando la nuova parte (correttiva) della  $\zeta$  (quella che nel caso della sezione a  $\perp$  dà il nuovo incurvamento della sezione di ciascun'ala dovuta al taglio). Con quest'ultima espressione si è ammesso che non sia più  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$  come risultava dal precedente spostamento, ma  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  come nella soluzione generale del problema di Saint-Venant. Considerata così una deformazione di ogni sezione nel proprio piano, non si può più parlare di una determinata rotazione relativa delle sezioni infinitamente vicine, anche se convenzionalmente possa continuarsi a chiamare con tale nome la funzione  $\omega$ . È anzi da avvertire che in tale soluzione pratica non si considera più nemmeno un determinato spostamento di ogni punto; e quanto allo spostamento effettivo, è ovvio che esso non potrà restar determinato dal solo valore del momento torcente nemmeno quando il cilindro sia sollecitato solo alle basi, dipendendo anche in tal caso dalle forze e dagli spostamenti assegnati in ogni punto di ciascuna delle basi medesime. (Per la determinazione della  $\omega$  sono invece notoriamente sufficienti certe condizioni complessive.)

La definizione di centro di torsione si riferisce dunque con esattezza a uno spostamento puramente teorico (quello introdotto più sopra), dal quale si ottiene come unica caratteristica di sollecitazione per ogni sezione un momento torcente risultante da forze esterne praticamente inammissibili. Solo per l'osservata presumibile piccolezza della differenza tra esso (con una conveniente funzione  $\omega$ ) e lo spostamento effettivo in ogni caso di torsione, a sufficiente distanza dalle basi, è da presumere che anche quest'ultimo si manifesti praticamente come rotazione di ogni sezione intorno alla retta definita come asse di torsione.

Si avverta da ultimo come il centro di torsione così teoricamente

definito e avente in pratica l'accennato approssimativo significato, coincida praticamente col già considerato centro di taglio (§ 14) <sup>(96)</sup>.

18. Per una trave vincolata iperstaticamente la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione richiede la considerazione esplicita degli spostamenti <sup>(97)</sup>. E una determinazione approssimata di essi può essere inoltre necessaria in ogni caso per il collaudo <sup>(98)</sup>, e talvolta anche per verificare che non superino certi limiti imposti da ragioni pratiche. Ora è chiaro che non si può parlare di uno spostamento da cui derivi esattamente la deformazione che corrisponde alla tensione determinata secondo il criterio indicato al § 16, poichè essa sarà in generale una deformazione non congruente <sup>(99)</sup>. Occorre dunque un criterio anche per determinare

---

<sup>(96)</sup> Anche il centro di taglio è naturalmente riferito a una condizione ben determinata (nell'uno e nell'altro caso); ma si tratta di condizioni che potrebbero essere anche effettive, occorrendo solo una particolare ripartizione di forze alle basi, e che in ogni caso possono essere praticamente scambiate con quelle effettive a sufficiente distanza dalle basi medesime. Invece le condizioni cui si riferisce il centro di torsione, richiedendo l'applicazione di particolari forze anche lungo tutto il cilindro (forze, ripetesi, praticamente inammissibili), potranno essere in generale abbastanza prossime a condizioni effettive per quanto attiene direttamente allo spostamento, ma non a riguardo dello stato di tensione.

Si può osservare che nel caso di una sezione simmetrica rispetto al baricentro, come la ricordata sezione a  $\Gamma$ , ma come anche quella a  $\sqcap$ , gli spostamenti nella condizione teorica cui si riferisce il centro di torsione risultano per ogni coppia di punti simmetrici, appartenenti a una certa sezione, antimetrici rispetto al piano della sezione medesima (cioè con componenti opposte sulla giacitura di esso piano, e componenti uguali nella direzione ad essa normale). Lo stesso carattere avrà allora evidentemente la tensione su una determinata faccia del medesimo piano; e dovendo tale carattere conservarsi nella tensione effettiva, posto che ad esso si conformino tutte le forze esterne, è chiaro che anche la differenza tra lo spostamento effettivo e quello teorico suddetto dovrà risultare soddisfacente alla condizione medesima, e che pertanto il baricentro non si sposterà nel piano della sezione. Questo resta dunque effettivamente per tali sezioni, s'intende nella dichiarata ipotesi, centro di torsione.

<sup>(97)</sup> E' noto che per un corpo vincolato iperstaticamente si debbono porre condizioni estrinseche, cioè riguardanti le condizioni di vincolo. Sarà conveniente il riferimento ad un sistema principale, ottenuto togliendo i vincoli che possono considerarsi sovrabbondanti; e, riguardando come incognite le reazioni di tali vincoli elementari, si avrà per esse un sistema di altrettante equazioni, esprimenti ciascuna il rispetto di uno dei vincoli medesimi da parte dello spostamento effettivo (cioè quello del sistema principale gravato dalle forze direttamente applicate e da tali incognite reazioni).

<sup>(98)</sup> Si tratta del confronto degli spostamenti che si misurano sotto certe condizioni di carico e quelli calcolati per le condizioni medesime.

<sup>(99)</sup> Può osservarsi che resta verificata in ogni caso la prima delle condizioni di Saint-Venant, cioè quella che riguarda solo la deformazione nel piano della sezione.

uno spostamento, che possa reputarsi non troppo diverso da quello effettivamente prodotto dalle forze sollecitanti la trave. Si assumerà per tale lo spostamento che si ottiene applicando formalmente alla deformazione suddetta lo stesso procedimento fondato nel caso di una deformazione congruente sul teorema dei lavori virtuali, con la considerazione della stessa forza ausiliaria e della tensione prodotta dall'azione di questa sulla trave, o di una tensione che per tale possa assumersi<sup>(100)</sup>. Si può giustificare tale criterio al modo seguente.

La tensione determinata come s'è detto sarà equilibrata con certe forze, che ovviamente non potranno essere troppo diverse da quelle effettive (reazioni comprese) ogni volta che tale criterio di determinazione della tensione risulti accettabile. La differenza tra la tensione medesima e quella effettivamente prodotta da tali forze è equilibrata da forze nulle (coazione elastica nel senso dei corpi liberi); perciò è nullo il lavoro della deformazione ad essa corrispondente per una qual si voglia tensione cui corrisponda una deformazione intrinsecamente congruente, ossia una qual si voglia tensione effettivamente prodotta dall'azione di forze<sup>(101)</sup>. Ciò significa che lo spostamento che si otterrebbe nel modo anzidetto se la tensione corrispondente alle forze ausiliarie fosse esattamente quella da prima indicata è quello effettivamente prodotto dalle forze suddette. Si vede anche che la tensione medesima, essendo richiesta per la corrispondente deformazione la sola congruenza intrinseca, può essere in ogni caso quella prodotta dalla forza ausiliaria agente sulla trave liberata dagli eventuali vincoli iperstatici (sistema principale). In tal modo l'errore nell'espressione dello spostamento sarebbe dunque dovuto soltanto allo scambio delle forze effettive con altre forze poco diverse. Se non che sarà necessario, come s'è accennato, assumere anche per la tensione prodotta dalla forza ausiliaria un'espressione approssimata, e precisamente quella che si ottiene applicando anche per la determinazione di essa lo stesso criterio usato per la tensione effettiva. Si aggiunge così un altro errore,

---

<sup>(100)</sup> Si ricordi che la forza ausiliaria, d'intensità arbitraria, va applicata nel punto cui si riferisce lo spostamento nella direzione della cercata componente di esso e nel senso da considerare positivo per la componente medesima. Quando la deformazione considerata è congruente (quando dunque si applica effettivamente il teorema dei lavori virtuali), la tensione da introdurre nel calcolo, rapportata all'intensità suddetta, deve essere solo equilibrata con tale forza, e con reazioni dei vincoli che la equilibrino: qui è chiaro invece che tensioni diverse soddisfacenti alle indicate condizioni darebbero in generale risultati diversi.

<sup>(101)</sup> Ogni coazione elastica è ortogonale ad ogni deformazione congruente, e così la deformazione corrispondente alla prima è ortogonale alla tensione corrispondente alla seconda.

da presumere anch'esso sempre compatibile ai fini per i quali è richiesta la conoscenza dello spostamento <sup>(102)</sup>.

Si trova subito che lo spostamento così convenzionalmente definito lascia in ogni caso ogni sezione piana, e indeformata anche nel proprio piano. La tensione dovuta a una forza ausiliaria applicata nel punto generico di una sezione normalmente alla sezione medesima risulta infatti secondo il criterio sopra ricordato uguale alla somma di quella dovuta alla stessa forza applicata in un punto fisso della stessa sezione, e di quella dovuta alla coppia costituita da quest'ultima forza e dalla opposta della prima. Siccome tale coppia varia linearmente colla posizione del primo punto, lo spostamento normale alla sezione risulta pure variabile linearmente e la sezione si mantiene pertanto piana. Quanto allo spostamento secondo una direzione appartenente alla sezione, è chiaro poi che esso risulta lo stesso per tutti i punti allineati secondo la direzione medesima (essendo ovviamente le caratteristiche di sollecitazione indipendenti dal punto di applicazione di ogni forza avente una data linea d'azione); perciò risulta nulla la dilatazione secondo ogni direzione della sezione in ogni punto di essa. La sezione si muove così di moto rigido, rotando intorno a un asse normale al proprio piano (moto nel piano medesimo) e intorno a un asse appartenente al piano stesso.

Tale risultato non è esatto nemmeno nel caso più semplice, cioè quello dello stesso problema di Saint-Venant. Esso va accettato dunque solo nel senso che risultano praticamente trascurabili le differenze tra le rotazioni dei diversi elementi superficiali di una stessa sezione rispetto ad una qualsivoglia di esse. In tal senso esso si dimostra una semplice ed ovvia conseguenza dell'ammessa grandezza del rapporto tra la lunghezza dell'asse della trave e le dimensioni delle sezioni <sup>(103)</sup>. Si osservi infatti che, pensata la trave divisa in tronchi di lunghezza paragonabile a tali ultime dimensioni, le differenze tra le rotazioni in punti corrispondenti della prima e della seconda sezione estrema di ogni tronco (con ovvio riferimento, per quanto riguarda la corrispondenza, alla generazione della trave) saranno in generale dell'ordine di grandezza della deformazione. Pertanto la differenza tra le rotazioni nei punti corrispondenti di due sezioni a distanza paragonabile alla lunghezza dell'asse risulterà in generale di tale ordine moltiplicato per il rapporto suddetto, mentre restano dell'ordine medesimo, come le prime considerate, le differenze delle

---

<sup>(102)</sup> Si vedrà che il risultato non muta se si lascia anche affatto indeterminata la ripartizione della tensione normale ausiliaria sulla sezione generica, purchè si mantenga la risultante di essa determinata dalle condizioni d'equilibrio.

<sup>(103)</sup> E' questo l'unico fondamento del già accennato così detto « principio di conservazione delle sezioni piane ».

rotazioni in due punti quali si vogliono di una stessa sezione <sup>(104)</sup>. Perciò una media qualunque delle rotazioni nei punti della sezione può assumere il significato di essa, essendo da riguardare come nulla quando resti dell'ordine stesso della deformazione. E se allora si considerano le differenze degli spostamenti di due punti quali si vogliono di una stessa sezione, è chiaro che la parte essenziale di esse è quella data dalla suddetta rotazione media, dell'ordine di questa per le dimensioni della sezione, restando trascurabile rispetto ad essa la parte dovuta alla diversa rotazione di ogni elemento superficiale, cioè all'ingobbamento della sezione e alla sua deformazione nel proprio piano. Si vede d'altra parte che dalla rotazione relativa di due sezioni si hanno spostamenti dei punti dell'una di esse rispetto all'altra dell'ordine di tale rotazione per una lunghezza paragonabile alla distanza di esse sezioni, sicchè risultano differenze di spostamenti, tra i punti di sezioni a distanza paragonabile alla lunghezza dell'asse, dell'ordine delle massime rotazioni per quest'ultima lunghezza, ossia dell'ordine della deformazione per la lunghezza medesima e per il sopra considerato rapporto di essa alle dimensioni della sezione <sup>(105)</sup>. Potrà dunque assumersi uno spostamento medio dei punti di ogni sezione come spostamento di ognuno di essi, risultando trascurabili a paragone di esso

<sup>(104)</sup> Si definisce come rotazione dell'elemento solido infinitesimo il vettore  $\frac{1}{2} \text{rots}$ , le cui componenti si ottengono integrando certe combinazioni lineari delle derivate delle componenti della deformazione. Se  $\Gamma$  è un numero dell'ordine di grandezza della deformazione, e  $h$  una lunghezza dell'ordine delle dimensioni della sezione, il valore medio delle derivate della deformazione nelle direzioni appartenenti alla sezione medesima è dell'ordine di  $\frac{\Gamma}{h}$ , e l'integrazione lungo un tratto dell'asse, la cui lunghezza sia dell'ordine di  $h$ , dà la suddetta differenza di rotazione dell'ordine di  $\Gamma$ . (Si avverta che la derivata della deformazione nella direzione dell'asse è invece, in media su ogni tratto di lunghezza paragonabile alla lunghezza  $l$  dell'asse, dell'ordine di  $\frac{\Gamma}{l}$ .) La differenza poi tra la suddetta rotazione dell'elemento solido (che è in realtà la rotazione del triedro trirettangolo che si mantiene tale nella deformazione) e la rotazione effettiva di ogni elemento superficiale della sezione è ovviamente anch'essa dell'ordine di  $\Gamma$ .

E' da ricordare infine (si vedano per es. le citate Lezioni di Teoria dell'elasticità) che la differenza tra l'ordine di grandezza della rotazione e quello della deformazione può essere causa d'errore relativo non trascurabile nelle stesse espressioni delle componenti di quest'ultima anche quando si mantengono inferiori all'errore relativo ammissibile. Esempio dell'errore che può aversi così nei risultati è quello osservato al § 3, cap. I, nell'equazione della deformata dell'asse del cilindro inflesso.

<sup>(105)</sup> Cioè, colle indicazioni della nota precedente, dell'ordine di  $\Gamma l \frac{l}{h}$ . Sono invece dell'ordine di  $\Gamma l$  le differenze tra gli spostamenti dei punti di una stessa sezione dovute alla rotazione di questa, e dell'ordine di  $\Gamma h$  quelle dovute alla sua deformazione.

anche le differenze tra gli spostamenti dei punti medesimi dovute alla rotazione di essa sezione. Si considererà così ogni sezione, per quanto riguarda direttamente gli spostamenti (non le derivate di essi) soggetta solo ad una traslazione. Questa sarà da riguardare come nulla dove gli spostamenti si mantengono dell'ordine di grandezza della rotazione per le dimensioni della sezione.

Si dovrà allora abbandonare il concetto delle condizioni di vincolo riguardanti spostamenti di singoli punti, o derivate di spostamenti, per quello delle condizioni riguardanti le suddette traslazioni e rotazioni della sezione. E in tal modo anche nel caso della trave chiusa (cioè avente per asse una linea chiusa), come sono incognite soltanto le sei caratteristiche di sollecitazione di una sezione arbitrariamente scelta, così le condizioni richieste per la monodromia dello spostamento si riducono alle sei espressioni l'annullamento del modo rigido relativo delle due facce della sezione medesima, cioè le sei costanti di ploidromia<sup>(106)</sup>.

Nell'esprimere il lavoro virtuale interno si porrà per approssimazione  $dV = dA ds$ , inteso per  $ds$  l'elemento dell'asse. Si esprimeranno qui gli integrali estesi alla sezione, da integrare poi lungo l'asse medesimo.

La parte espressa per le tensioni normali è

$$\frac{1}{F^*} \int_{(\Sigma)} (\varepsilon_x \sigma_x^* + \varepsilon_y \sigma_y^* + \varepsilon_z \sigma_z^*) dA,$$

essendo distinte con l'asterisco le componenti della tensione ausiliaria, cioè quella dovuta, come sopra è detto, alla forza ausiliaria  $F^*$ <sup>(107)</sup>. Per questa basterà porre in conformità della soluzione di Saint-Venant  $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ , lasciando indeterminata la  $\sigma_z^*$  sotto la condizione di equilibrio con la  $F^*$  e le rispettive reazioni, cioè

$$\int_{(\Sigma)} \sigma_z^* dA = N^*, \quad \int_{(\Sigma)} \sigma_z^* y dA = M_x^*, \quad \int_{(\Sigma)} \sigma_z^* x dA = -M_y^*,$$

dove siano  $N^*$ ,  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ , le caratteristiche di sollecitazione dovute a tale

<sup>(106)</sup> Si ricordi (sempre dall'opera già citata) che in generale tali condizioni andrebbero poste solo dopo quelle riguardanti la continuità delle componenti interiori della tensione e delle sue derivate prime, o della deformazione e delle sue derivate prime, attraverso la sezione considerata.

<sup>(107)</sup> S'intende che questa è la parte dovuta formalmente alle tensioni normali sugli elementi della considerata terna  $x, y, z$ . Rispetto a un cambiamento di assi è ovviamente invariante solo l'intero lavoro.