

CAPITOLO II

SOLLECITAZIONI COMPOSTE

12. Nel capitolo che precede sono stati studiati i casi particolari del problema di Saint-Venant, che si hanno ponendo nella (3) una sola delle costanti diverse da zero: essi riguardano le così dette *sollecitazioni semplici*. Si diranno qui *sollecitazioni composte* gli stati di deformazione e tensione che discendono dalla sovrapposizione di due o più sollecitazioni semplici, ossia dal porre diverse da zero due o più delle costanti che appaiono nella ricordata espressione. Si avverte che lo studio delle sollecitazioni composte verrà limitato a pochi casi di fondamentale importanza applicativa.

Flessione deviata.

Nel paragrafo 4 è stato studiato il caso della flessione semplice, cioè quello che si ottiene ponendo $a_2 \neq 0$ (o anche, con risultati del tutto analoghi, $a_1 \neq 0$). Convieni qui soffermarsi su tale caso per definire, con riguardo alla sezione generica, le rette solitamente indicate come *asse neutro*, *asse di flessione*, *asse di sollecitazione*. Asse neutro è la retta nei punti della quale risulta $\varepsilon_z = 0$ (e quindi $\sigma_z = 0$); esso è rappresentato dall'asse baricentrico parallelo ad x (asse x' della fig. 5) (ossia dall'asse intorno a cui avviene la rotazione relativa della sezione rispetto a quella infinitamente vicina). Definito come *piano di flessione* il piano che contiene l'asse deformato, si dice *asse di flessione* l'intersezione di detto piano col piano della sezione: esso si identifica con l'asse baricentro della sezione parallelo ad y (asse y' della fig. 5). Definito infine come *piano di sollecitazione* il piano della coppia corrispondente al momento risultante, si dice *asse di sollecitazione* l'intersezione di esso col piano della sezione; tale asse coincide coll'asse baricentrico parallelo ad y .

Nel caso studiato dunque l'asse di sollecitazione coincide con l'asse di flessione, risultando così ortogonale all'asse neutro; per tale proprietà il caso medesimo, di flessione semplice, viene anche denominato di *flessione retta*.

Si ponga ora contemporaneamente $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, sovrapponendo così nel cilindro i due stati accennati di flessione semplice. Le (3) divengono

$$\sigma_z = -E(a_1 x + a_2 y), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

È superfluo accennare come risultino ancora nulle le caratteristiche T_x , T_y , M_t , N : le prime tre per la loro dipendenza dalle componenti τ , l'ultima per la scelta dell'asse z . Per i momenti flettenti M_x ed M_y si ha, essendo x e y gli assi principali d'inerzia della sezione,

$$M_x = -Ea_2 J_x, \quad M_y = Ea_1 J_y.$$

Risulta infine

$$\sigma_y = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (9)$$

Le componenti della deformazione sono poi

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right), \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{mE} \left(\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0;$$

e quindi si ottengono (nelle già indicate condizioni del § 2) le seguenti espressioni delle componenti dello spostamento

$$\zeta = \frac{1}{E} \left(\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right) z, \quad \xi = \frac{M_y}{2EJ_y} z^2 - \frac{1}{mE} \left(\frac{M_x}{J_x} xy + \frac{M_y}{J_y} \frac{y^2 - x^2}{2} \right)$$

$$\eta = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2 + \frac{1}{mE} \left(\frac{M_y}{J_y} yx + \frac{M_x}{J_x} \frac{x^2 - y^2}{2} \right).$$

Anche in questo caso converrà analizzare lo spostamento scindendolo in due parti: la prima rappresentata dalle componenti dipendenti da z , dalle quali risulta la deformazione dell'asse del cilindro e la posizione rispetto ad esso delle sezioni piane e indeformate, la seconda dalle componenti dipendenti soltanto da x ed y , relativa alla deformazione di ogni sezione, costante per tutte le sezioni, nel proprio piano. Considerando la prima delle parti accennate si ponga

$$\zeta_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right) z, \quad \xi_1 = \frac{M_y}{2EJ_y} z^2, \quad \eta_1 = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2.$$

Per la proporzionalità di ξ_1 ed η_1 a z^2 l'asse deformato è una cur-

va piana (parabola). Esprimendo le componenti ξ'_1 ed η'_1 secondo gli assi rotati x' ed y' si ha in una sezione generica (fig. 36)⁽⁷³⁾

$$\xi'_1 = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y}{J_y} \cos \widehat{xx'} - \frac{M_x}{J_x} \sin \widehat{xx'} \right) z^2$$

$$\eta'_1 = - \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y}{J_y} \sin \widehat{xx'} + \frac{M_x}{J_x} \cos \widehat{xx'} \right) z^2.$$

L'asse y' è l'asse di flessione se $\xi'_1 = 0$, ossia se

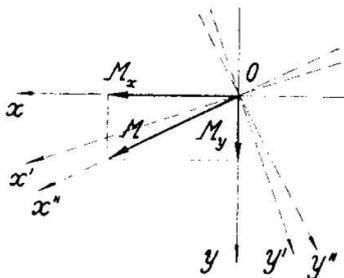


Fig. 36

$$\operatorname{tg} \widehat{xx'} = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y};$$

osservando che

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \widehat{xx''} = \operatorname{tg} \widehat{yy''}$$

(gli assi ortogonali x'' ed y'' sono rispettivamente la retta del momento risultante e l'asse di sollecitazione), si riconosce che la x' è la coniugata di y'' rispetto all'ellisse centrale d'inerzia. Se si ricorda poi che per tale corrispondenza valgono le ovvie relazioni

$$\frac{M_x}{J_x} = \frac{M_{x'}}{J_{x'}} \cos \widehat{xx'}, \quad \frac{M_y}{J_y} = \frac{M_{x'}}{J_{x'}} \sin \widehat{xx'},$$

essendo $M_{x'}$ e $J_{x'}$ rispettivamente la componente del momento risultante secondo la retta x' ed il momento d'inerzia rispetto alla retta stessa, risulta subito

$$\eta'_1 = - \frac{M_{x'}}{2EJ_{x'}} z^2, \quad \zeta_1 = \frac{M_{x'}}{EJ_{x'}} y' z$$

e, per le componenti totali di spostamento

$$\zeta = \frac{M_{x'}}{J_{x'}} y' z, \quad \xi' = - \frac{M_{x'}}{mEJ_{x'}} x' y', \quad \eta' = - \frac{M_{x'}}{2EJ_{x'}} \left(z^2 - \frac{x'^2 - y'^2}{m} \right).$$

⁽⁷³⁾ Nello svolgimento di questo Capitolo gli assi paralleli ad x ed y , da considerare passanti per il baricentro della sezione generica, verranno indicati coi medesimi simboli x ed y ; i simboli x' ed y' saranno attribuiti agli assi della suddetta coppia rotata.

Si riconosce così che nel caso considerato la flessione conserva rispetto alla terna x', y', z le stesse proprietà geometriche della flessione semplice, quando si introduca come momento flettente il momento $M_{x'}$ rispetto all'asse x' . A questo caso quindi potranno attribuirsi tutte le considerazioni geometriche svolte a suo tempo. In particolare la curvatura dell'asse deformato sarà ancora espressa dalla relazione

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{x'}}{EJ_{x'}} ,$$

mentre si richiama la fig. 7 per quanto riguarda la deformazione della sezione generica nel proprio piano.

Per l'unica componente di tensione diversa da zero si ha dalla (9) l'importante relazione

$$\sigma_z = \frac{M_{x'} y'}{J_{x'}} , \quad (10)$$

detta *formula di Navier*, che può anche proporsi nella forma

$$\sigma_z = \frac{M \bar{y}'}{J_{x'}} \quad (75), \quad (10')$$

essendo M il momento risultante (fig. 36) ed \bar{y}' $\bar{J}_{x'}$ le note grandezze valutate rispetto ad x' nella direzione di y'' .

(74) È quasi superfluo avvertire che alle sopra dette conclusioni si può giungere anche direttamente dalla soluzione generale (3) del problema di Saint-Venant, ponendo una sola delle costanti a_1, a_2 diversa da zero, qualora si abbandoni la coincidenza degli assi x ed y con gli assi principali d'inerzia della sezione (quest'ultima posizione è stata assunta nella definizione delle caratteristiche, o parametri, di sollecitazione). Infatti in tal caso, mentre restano valide tutte le relazioni e le considerazioni sulla tensione e sullo spostamento con la sostituzione di $M_{x'}$ e $J_{x'}$ ad M_x e J_x , non è più $M_{y'} = 0$ per non essere gli assi x', y' coniugati nella sopra accennata polarità: il momento $M_{x'}$ è dunque accompagnato da un momento

$$M_{y'} = E a_2 J_{x'y'} = - M_{x'} \frac{J_{x'y'}}{J_{x'}} .$$

Avendosi dunque

$$\widehat{tg yy''} = \frac{M_{y'}}{M_{x'}} = - \frac{J_{x'y'}}{J_{x'}}$$

si conclude che l'asse di sollecitazione y'' normale all'asse x'' del momento M effettivo è il coniugato dell'asse neutro x' nella ricordata polarità.

(75) Ai fini applicativi può essere comodo l'impiego della formula di Navier nella forma (9), con riferimento agli assi principali d'inerzia.

Il caso qui considerato dicesi di *flessione deviata* per la non ortogonalità dell'asse di sollecitazione y'' all'asse neutro x' ($\varepsilon_z = 0, \sigma_z = 0$ per $y' = 0$), ossia per la *deviazione* $\widehat{y'y''}$ del primo degli accennati assi rispetto all'asse di flessione y' . La coincidenza di tali ultimi assi, ossia l'annullarsi della deviazione, si ha nel caso particolare della studiata flessione retta, essendo, come giova ripetere, *l'asse di sollecitazione e l'asse neutro coniugati nella polarità avente l'ellisse centrale d'inerzia come conica fondamentale*.

L'energia potenziale elastica unitaria, espressa in base alla (10), è

$$\varphi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 = \frac{1}{2E} \frac{M_{x'}^2}{J_{x'}^2} y'^2$$

e il lavoro di deformazione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2E} \frac{M_{x'}^2}{J_{x'}^2} \int_0^l dz \int_{(\Sigma)} y'^2 dA = \frac{1}{2} \frac{M_{x'}^2}{EJ_{x'}} l = \frac{1}{2} M_{x'} \Omega' (l),$$

essendo $\Omega' (l)$ la rotazione della sezione estrema ($z = l$) rispetto a quella iniziale ($z = 0$) intorno alla retta parallela ad x' per il punto $z = \frac{l}{2}$.⁽⁷⁶⁾

13. Trazione (o pressione) eccentrica.

Si ponga ora $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, sovrapponendo perciò nel cilindro lo stato di trazione (o compressione) (§ 3) a quello di flessione de-

⁽⁷⁶⁾ Sempre ai fini applicativi possono essere utili le espressioni dell'energia potenziale elastica unitaria e del lavoro di deformazione con riferimento agli assi principali d'inerzia. Si ha in modo ovvio

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right)^2,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_x^2}{J_x} + \frac{M_y^2}{J_y} \right) l = \frac{1}{2} [M_x \Omega_x (l) + M_y \Omega_y (l)]$$

ricordando che

$$\int_{(\Sigma)} xy dA = 0$$

ed essendo $\Omega_x (l)$ ed $\Omega_y (l)$ le componenti della rotazione $\Omega' (l)$.

viata di cui s'è fatto cenno. Essendo ancora $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, risulta in modo ovvio

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (11)$$

Assumendo il riferimento agli assi x', y', z , introdotti nel considerato caso della flessione deviata, si hanno subito (nelle ricordate condizioni del § 2) le seguenti espressioni delle componenti dello spostamento.

$$\zeta = \frac{N}{EA} z + \frac{M_{x'}}{EJ_{x'}} y' z, \quad \xi' = -\frac{N}{mEA} x' - \frac{M_{x'}}{mEJ_{x'}} x' y',$$

$$\eta' = -\frac{N}{mEA} y' - \frac{M_{x'}}{2EJ_{x'}} \left(z^2 - \frac{x'^2 - y'^2}{m} \right) \quad (77).$$

Anche qui conviene ancora scindere lo spostamento in due parti, la prima contenente i termini dipendenti da z , la seconda i termini indipendenti da z . La prima, riguardante la deformazione del cilindro a sezioni piane e indeformate, risulta

$$\zeta_1 = \frac{N}{EA} z + \frac{M_{x'}}{EJ_{x'}} y' z, \quad \xi'_1 = 0; \quad \eta'_1 = -\frac{M_{x'}}{2EJ_{x'}} z^2,$$

mentre la seconda, rappresentante la deformazione di ogni sezione nel proprio piano, ha le componenti

$$\zeta_2 = 0, \quad \xi'_2 = -\frac{N}{mEA} x' - \frac{M_{x'}}{mEJ_{x'}} x' y', \quad \eta'_2 = -\frac{N}{mEA} y' + \frac{M_{x'}}{2mEJ_{x'}} (x'^2 - y'^2).$$

Se si analizza la prima parte si osserva che l'asse neutro della sezione generica (luogo dei punti in cui $\varepsilon_z = 0$ e quindi, dato il sistema di vincoli assunto, $\zeta_1 = 0$) è dato dalla retta

$$y' = -\frac{N}{M_{x'}} \frac{J_{x'}}{A}$$

(77) Si osservi che i primi termini delle espressioni di ξ' ed η' conservano la stessa forma per qualunque coppia di assi x', y' .

parallela ad x' . Si consideri ora il sistema delle forze elementari agenti sulla faccia positiva della sezione generica (fig. 37): la sua risultante sarà una forza di intensità N applicata alla parallela a z passante per C , essendo per il segmento orientato $\overline{OC} = e$

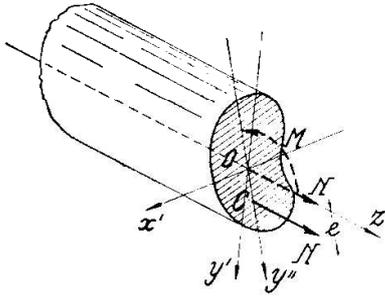


Fig. 37

$$e = \frac{M}{N}.$$

Il punto C verrà indicato come *centro di trazione (o pressione)*. Risulta dunque (fig. 38)

$$e' = \frac{M_{x'}}{N}.$$

Osservando infine che

$$\frac{J_{x'}}{A} = \varrho_{x'}'^2 \quad \left(\frac{\bar{J}_{x'}}{A} = \varrho_{x'}^2 \right),$$

essendo $\varrho_{x'}'$ la proiezione sull'asse y' del semidiametro $\varrho_{x'}$ dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione appartenente ad y'' e ponendo:

$$\frac{\varrho_{x'}'^2}{e'} = d$$

si ha per l'asse neutro

$$y' = -d:$$

ossia l'asse neutro è l'antipolare del centro di trazione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione. ⁽⁷⁸⁾

Assumendo per il riferimento della sezione gli assi $x_1 \equiv n$, y' e ponendo dunque

$$y_1 = y' + d$$

la componente ζ_1 dello spostamento assume la forma

$$\zeta_1 = \frac{M_{x'}}{EJ_{x'}} y_1 z.$$

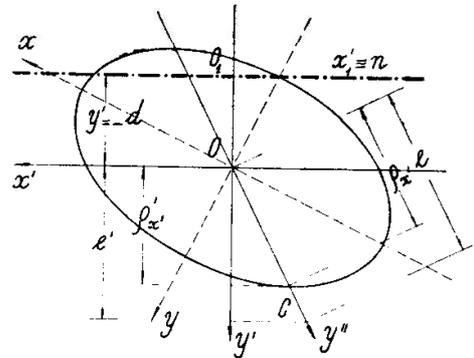


Fig. 38

(78) È quasi superfluo avvertire che l'asse neutro n risulta ortogonale all'asse di sollecitazione y'' solo se il centro C appartiene ad uno degli assi principali d'inerzia (flessione retta). Tale ortogonalità si verifica per qualunque posizione di C quando l'ellisse centrale d'inerzia della sezione si riduce ad un cerchio (casi particolari notevoli di tal genere sono rappresentati dalle sezioni a forma di poligono regolare).

La prima parte dello spostamento risulta così ricondotta alla stessa forma del caso precedente e quindi della flessione retta: basterà riferire il cilindro agli assi x'_1, y' per la sezione di origine e all'asse z_1 parallelo a z per il loro punto d'intersezione. Pertanto alla indicata prima parte dello spostamento sono ancora da estendere le già richiamate considerazioni geometriche del paragrafo 4 (fig. 39).

L'asse z_1 , la cui dilatazione è nulla in ogni punto, si deforma secondo un arco di cerchio il cui raggio vale

$$\frac{EJ_{x'}}{M_{x'}};$$

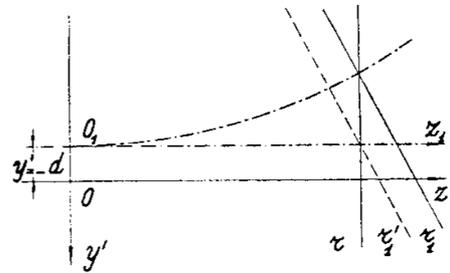


Fig. 39

le rette parallele ad esso (come l'asse z del cilindro) si deformano secondo cerchi concentrici. In particolare nei punti del piano $x'z$ si ha

$$\zeta_1 = \frac{N}{EA} z$$

ossia la stessa componente di spostamento del caso della trazione. L'allungamento totale dell'asse del cilindro risulta dunque

$$\Delta l = \zeta_1 (l) = \frac{N}{EA} l.$$

La seconda parte dello spostamento può ancora a sua volta essere scissa in due, considerando a parte i termini in y' e y'^2 della componente η'_2 , che danno una traslazione di ogni retta della sezione parallela ad x' nella direzione di y' . Considerando tali termini nella forma

$$-\frac{M_{x'}}{2m EJ_{x'}} (y'^2 + 2dy')$$

è agevole rilevare che, mentre restano fisse le rette $y' = 0$ e $y' = -2d$, ogni altra retta ad esse parallela trasla nel senso delle y' positive o negative a seconda che la retta stessa è interna o esterna alla striscia individuata dalle rette fisse medesime.

La parte rimanente dello spostamento è ancora espressa nel piano

(79) Si avverta che le sopra considerate rette parallele ad x' traslano rispetto all'asse neutro in modo del tutto analogo a quello osservato nel caso della flessione (proporzionalità della traslazione relativa, nel senso delle y' negative, al quadrato della distanza).

della sezione $x'y'$ in modo analogo a quello sopra analizzato nel piano $y'z$, salvo il fattore costante $-\frac{1}{m}$. Risulta dunque che le rette parallele ad x' , traslate come sopra s'è indicato, si trasformano in cerchi concentrici, col centro sul semiasse y' opposto a quello cui appartiene il centro dei cerchi secondo cui si deformano le rette parallele all'asse. Il raggio della deformata dell'asse neutro vale dunque

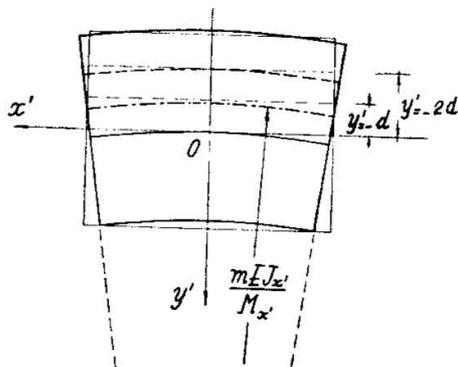


Fig. 40

$$\frac{mEJ_{x'}}{M_{x'}}.$$

Per la componente di tensione σ_z si ha dalla 11) ricordando la 10)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{x'}}{J_{x'}} y' \quad (11')$$

o anche, con le posizioni fatte

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y'}{d} \right). \quad (11'')$$

La precedente può anche scriversi sotto la seguente forma monomia

$$\sigma_z = \frac{N}{S_1} y'_1 \quad (11''')$$

essendo

$$S_1 = Ad$$

il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro $n \equiv x'_1$. Una seconda forma monomia della σ_z può ottenersi dall'ultima, ricordando che il punto C , antipolo dell'asse neutro, è il baricentro del momento statico rispetto allo stesso asse: si ha

$$\sigma_z = \frac{M_{x'_1}}{J_{x'_1}} y'_1$$

o anche, con forma del tutto analoga alla 10),

$$\sigma_z = \frac{M_{x'_1}}{J_{x'_1}} y'_1. \quad (11^{IV})$$

Si osserva infine che la σ_z , variabile linearmente con y'_1 , assume valori dello stesso segno o anche di segno contrario rispetto al segno di

N a seconda che l'asse neutro sia esterno alla sezione o secante la sezione stessa, ossia a seconda che il centro di trazione (o pressione) sia interno o esterno al nocciolo centrale d'inerzia della sezione medesima⁽⁸⁰⁾. In ogni caso nei punti dell'asse baricentrico x' la σ_z assume il valore medio $\frac{N}{A}$, come risulta subito dall'espressione binomia 11).

La fig. 41, riferita a titolo di esempio alla sezione circolare, riguarda il caso di trazione eccentrica con risultante N applicata nei punti C_I e C_{II} rispettivamente esterno e interno al nocciolo centrale d'inerzia.

Un caso particolare di rilevante interesse applicativo riguarda la *pressione eccentrica* nel cilindro costituito di *materiale* così detto *non resistente a trazione*, ossia non idoneo a trasmettere tensioni di trazione ($\sigma_z > 0$), quando il centro di pressione sia esterno al noc-

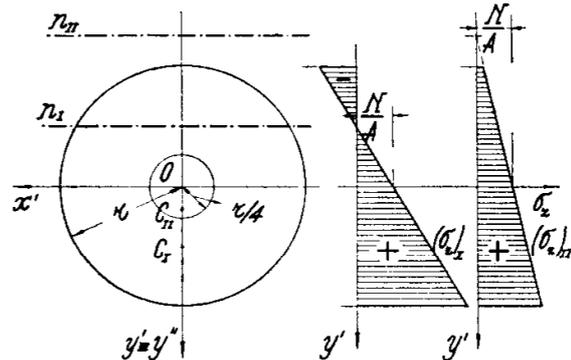


Fig. 41

ciolo centrale d'inerzia e interno alla sezione⁽⁸¹⁾. In tal caso, non potendosi mettere in conto la parte di sezione dove $\sigma_z > 0$, la sezione stessa risulta « parzializzata »: in altre parole l'asse neutro, delimitando la parte di sezione che risulta compressa, individua in tale parte la sezione da reputare efficiente, ossia l'effettiva sezione del cilindro. È chiaro per tanto che l'asse neutro, retta separatrice della suddetta parte attiva da quella inattiva, è determinata dalla condizione che essa risulti l'antipolare del centro di pressione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della medesima parte attiva.⁽⁸²⁾

Un caso in cui la determinazione di tale retta risulta particolarmente facilitata riguarda le sezioni che ammettono un asse di simmetria (in generale obliqua, in particolare ortogonale) (fig. 42) quando il centro

⁽⁸⁰⁾ Per la nozione di nocciolo centrale d'inerzia di una sezione, così come per le costruzioni grafiche riguardanti la determinazione dell'antipolo di una retta assegnata (e dell'antipolare di un punto assegnato) rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, si rimanda a quanto è noto dalla geometria delle masse.

⁽⁸¹⁾ In effetti il materiale qui genericamente indicato sta a rappresentare quei materiali di grande diffusione applicativa, quali calcestruzzi e murature, nei quali la capacità di trasmettere tensioni di trazione è estremamente ridotta rispetto a quella riguardante la trasmissione di tensioni di compressione.

⁽⁸²⁾ La condizione che il centro di pressione sia interno alla sezione risulta ovvia non appena si ricordi che tale centro appartiene alla retta della risultante delle tensioni agenti sulla sezione « effettiva », le quali, come s'è detto, sono tutte dello stesso segno.

di pressione appartenga a tale asse. In tal caso, invero assai frequente, l'asse di simmetria (y'') è il coniugato di qualunque retta avente la direzione della simmetria, individuata dal punto improprio di x' che è il centro dell'omologia affine armonica rappresentante la simmetria medesima, anche rispetto all'ellisse centrale d'inerzia di ciascuna delle parti in cui tale retta divide la sezione (per le parti suddette infatti risulta conservata la simmetria). Risulta così nota a priori la direzione della retta separatrice (asse neutro) che deve essere quella di x' . Tale retta potrà allora essere determinata molto semplicemente mettendo in conto la condizione che il centro di pressione risulti il baricentro del momento statico rispetto ad essa della parte di sezione da essa stessa individuata e comprendente il centro medesimo. Si tratta della condizione (fig. 43)

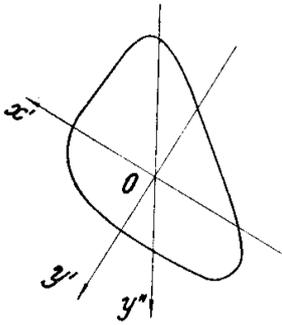


Fig. 42

$$\frac{J_{x'_1}}{S_{x'_1}} = Y'_1,$$

dove Y'_1 è la distanza del centro di pressione dalla retta (asse neutro) (si avverta che nella figura il punto O è il baricentro della sezione « effettiva », tratteggiata).⁽⁸³⁾

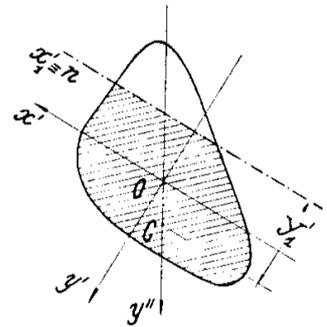


Fig. 43

L'energia potenziale elastica unitaria, espressa in base alla 11'), è

$$\varphi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_{x'}}{J_{x'}} y' \right)^2$$

⁽⁸³⁾ Nel caso indicato la determinazione dell'asse neutro può essere eseguita molto agevolmente e con ottima approssimazione tramite il seguente procedimento grafico.

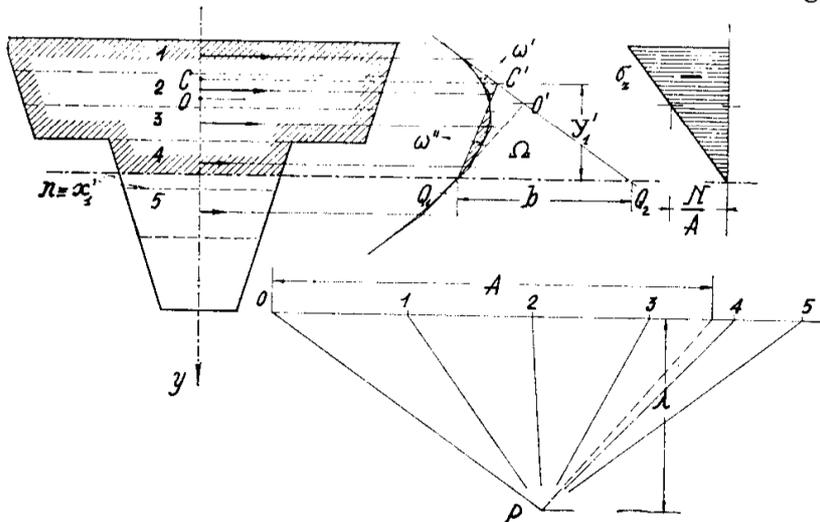


Fig. 44

Considerando il caso più comune della simmetrica retta e in particolare la sezione della fig. 44, sia C il centro di pressione. Divisa la sezione in strisce, a partire dal lembo compresso, con rette aventi la direzione della simmetria (ortogonali all'asse y), si applichino ai baricentri delle strisce stesse forze fittizie proporzio-

e il lavoro di deformazione

$$\mathcal{L} = \int_{(S)} \varphi dV = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} l + \frac{1}{2} \frac{M_{x'}^2}{EJ_{x'}} l = \frac{1}{2} \left\{ NAl + M_{x'} \Omega' (l) \right\}$$

nali alle aree delle strisce medesime, procedendo poi a connettere tali forze con un poligono funicolare di base λ (da considerare nella scala delle aree fissata per la rappresentazione delle forze). Tracciata la curva funicolare, badando al fatto che i lati del poligono sono le tangenti ad essa nei punti di intersezione con le rette dividenti, si proietti, sempre nella direzione della simmetria, il centro C in C' sul primo lato della funicolare e si mandi poi da C' la retta di compenso $C'Q_1$ con la condizione che siano uguali le aree ω', ω'' della figura mistilinea intrecciata distinta in figura con tratteggio. Per il punto Q_1 d'intersezione tra detta retta di compenso e la funicolare passa l'asse neutro n di direzione nota (ortogonale all'asse y). Ciò risulta subito se si osserva che il momento d'inerzia ed il momento statico dell'area della sezione efficiente rispetto alla retta separatrice individuata risultano notoriamente

$$J_{x_1} = 2\lambda\Omega$$

$$S_{x_1} = \lambda b$$

essendo Ω l'area della figura racchiusa dalla funicolare, dal primo lato e dalla retta x'_1 e b la lunghezza del segmento AB intercetto dalla funicolare e dal primo lato sulla stessa retta x'_1 . Essendo anche, per il compenso delle aree

$$\Omega = \frac{1}{2} b Y_1$$

si ha subito

$$\frac{J_{x_1}}{S_{x_1}} = Y_1.$$

Convieni osservare a questo punto la opportunità di diradare adeguatamente le dividenti in modo da ridurre il numero delle strisce, escluse s'intende le zone in cui la sezione presenti rapide variazioni di larghezza. L'applicazione del procedimento ne guadagna in quanto, mentre per un corretto tracciamento della funicolare bastano poche tangenti, vengono a ridursi notevolmente gli errori di graficismo. Il grado di approssimazione della costruzione viene a dipendere così dalla determinazione dei baricentri delle strisce; ma è da rilevare che un errore di tale determinazione, già di per sè poco influente, è apprezzabile solo per le strisce più lontane dalla retta separatrice (prossime al lembo compresso).

Mandando ora da Q_1 la tangente alla funicolare si individua il punto O' di intersezione col primo lato e quindi il baricentro O della sezione efficiente. La parallela a tale tangente mandata dal polo P consente poi di determinare sulla retta delle forze l'area A della suddetta sezione. Noto lo sforzo normale N ($N < 0$) il diagramma della σ_z risulterà subito individuato tramite una qualunque ordinata da calcolare con una delle espressioni 11) (in particolare l'ordinata media $\frac{N}{A}$).

Nel caso particolare, frequentissimo nelle applicazioni, della sezione rettangolare

essendo

$$\int_{(\Sigma)} y' dA = 0$$

ed avendo i simboli Δl ed $\Omega'(l)$ i noti significati. ⁽⁸⁴⁾

14. Al paragrafo 8 e in particolare alla nota ⁽⁴⁷⁾ si è osservato che nel caso del problema di Saint-Venant riguardante la flessione composta lo sforzo di taglio T_y e il momento flettente M_x , necessariamente accoppiati per l'equilibrio, sono indipendenti dal momento torcente M_t . Potrà dunque considerarsi, come s'è accennato, il caso dello stato di sollecitazione dato da essi (con T_y risultante baricentrica in ogni sezione) essendo nullo il momento M_t . Basterà sovrapporre allo studiato caso

premuta eccentricamente in un punto della mediana la determinazione della retta separatrice risulta immediata. Infatti, dato C su y esterno al segmento AB (così detto «terzo medio»), diagonale del nocciolo, si ha subito

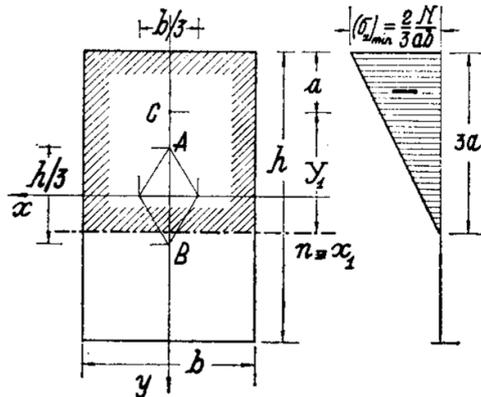


Fig. 45

$$J_{x_1} = \frac{1}{3} b (Y_1 + a)^3, \quad S_{x_1} = \frac{1}{2} b (Y_1 + a)^2$$

e quindi, per la nota condizione,

$$Y_1 = 2a.$$

Risultando $3a$ la distanza dell'asse neutro dal lembo compresso si ha infine

$$(\sigma_z)_{\min} = \frac{2}{3} \frac{N}{ab}.$$

⁽⁸⁴⁾ Anche in questo caso possono essere utili, ai fini applicativi, le espressioni dell'energia potenziale elastica unitaria e del lavoro di deformazione con riferimento agli assi principali d'inerzia della sezione. Si ha ovviamente

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_x^2}{J_x} + \frac{M_y^2}{J_y} \right) l = \frac{1}{2} [N \Delta l + M_x \Omega_x(l) + M_y \Omega_y(l)]$$

per il noto significato dei simboli ed essendo

$$\int_{(\Sigma)} x dA = \int_{(\Sigma)} y dA = 0, \quad \int_{(\Sigma)} xy dA = 0.$$

di flessione composta il caso della torsione relativo ad un momento torcente — M_t . Si tratta pertanto di un caso di sollecitazione composta, richiedendo esso di porre diverse da zero due delle costanti che appaiono nella soluzione generale del Saint-Venant; si parlerà così di *flessione senza momento torcente* (naturalmente per le sezioni non simmetriche rispetto al baricentro).

Con riguardo al caso accennato gioverà esporre quanto segue. Richiamata la definizione del centro di taglio (§ 8) come punto d'intersezione delle risultanti delle tensioni tangenziali agenti sulla sezione nel caso della flessione composta, rispettivamente con momento flettente M_x ed M_y , si osserva che le coordinate x_c ed y_c di esso centro si ottengono ovviamente dalle espressioni del momento torcente dell'uno e dell'altro caso semplicemente dividendole per il valore T_y o T_x delle rispettive risultanti delle tensioni tangenziali. Ora non sembra privo di interesse far vedere come ad una diversa espressione di esse, e quindi del momento torcente

$$M_t = T_y x_c - T_x y_c$$

possa giungersi applicando il teorema di Betti ad un tronco qualsivoglia del cilindro, considerato una volta soggetto a flessione composta (con l'uno o con l'altro dei due momenti M_x ed M_y) e un'altra volta soggetto a torsione.

Il lavoro delle forze della flessione (con momento M_x) per gli spostamenti della torsione è dato, per quanto riguarda gli spostamenti dei punti di ognuna delle basi del tronco nel rispettivo piano, dalla rotazione relativa ωl delle basi medesime (l essendo la loro distanza) per il momento delle tensioni tangenziali della flessione, uguali per tutte le sezioni, rispetto al baricentro: dunque dal prodotto

$$T_y x_c \omega l.$$

Nei riguardi della componente $\zeta = -\omega \vartheta_0$ il lavoro suddetto è dato dall'integrale del prodotto di essa per la differenza delle tensioni σ_z nei punti corrispondenti delle due basi, cioè (essendo notoriamente $\Delta M_x = T_y l$)

$$-\frac{T_y}{J_x} l \omega \int_{(\Sigma)} y \vartheta_0 dA.$$

Il lavoro delle forze della torsione per gli spostamenti della flessione, nullo per la componente ζ perchè nella torsione $\sigma_z = 0$, e nullo per il primo termine dell'espressione della componente η (§ 8) che è costante nella sezione, è dovuto solo alla componente ξ ed al secondo termine di η , sempre considerata la differenza tra i punti corrispondenti delle due

basi : risulta

$$\frac{G}{mE} \frac{T_y}{J_x} l \omega \int_{(\Sigma)} \left\{ xy \left(y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) + \frac{x^2 - y^2}{2} \left(x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right) \right\} dA.$$

Tale ultima espressione assume una forma che in molti casi si riduce ad estrema semplicità se si introduce la nota funzione (§ 7)

$$\varphi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \chi_0$$

dove χ_0 rappresenta la funzione armonica coniugata della ϑ_0 . Se si suppone per generalità che il contorno della sezione sia composto di una linea chiusa esterna c_0 e di n linee chiuse interne c_1, \dots, c_n su ciascuna delle quali la funzione φ assuma il valore costante φ_i (risultando per essa la condizione al contorno $d\varphi = 0$), l'integrale nell'espressione diventa

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \left\{ xy \left(y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) + \frac{x^2 - y^2}{2} \left(x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right) \right\} dA &= \\ &= \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (xy\varphi) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \varphi \right) - 2x\varphi \right\} dA = \\ &= -2 \int_{(\Sigma)} x\varphi dA + \sum_{i=0}^n \varphi_i \int_{(c_i)} \left(xy \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds = \\ &= -2 \int_{(\Sigma)} x\varphi dA + 2\varphi_0 \int_{(\Sigma_0)} x dA - 2 \sum_{i=1}^n \varphi_i \int_{(\Sigma_i)} x dA = \\ &= -2 \int_{(\Sigma)} x\varphi dA + 2\bar{x}_0 \varphi_0 A_0 - 2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \varphi_i A_i, \end{aligned}$$

dove A_i siano le aree racchiuse dalle linee suddette e \bar{x}_i le ascisse dei rispettivi baricentri. Questa espressione si riduce al solo primo termine per ogni sezione aciclica e anche quando sia $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_n$, cioè quando tutti i baricentri siano allineati sull'asse y .

Dall'uguaglianza dei lavori mutui risulta l'ascissa x_c del centro di taglio, che nei casi da ultimo considerati è semplicemente (ricordata la relazione tra E e G)

$$x_c = \frac{1}{J_x} \left(\int_{(\Sigma)} y \vartheta_0 dA - \frac{1}{m+1} \int_{(\Sigma)} x\varphi dA \right).$$

Analogamente si ottiene, mutando x in y e y in $-x$

$$y_c = - \frac{1}{J_y} \left(\int_{(\Sigma)} x \vartheta_0 dA + \frac{1}{m+1} \int_{(\Sigma)} y \varphi dA \right).$$

È interessante osservare da ultimo che nel caso delle sezioni lineari aperte (un caso frequentissimo riguarda le sezioni dei profilati metallici) i secondi termini delle precedenti espressioni tendono a zero col tendere a zero degli spessori, come si vede subito ricordando ancora la costanza della funzione φ al contorno. In tali casi dunque potranno assegnarsi alle coordinate del centro di taglio le suddette espressioni ridotte ai loro primi termini.