

(essendo  $x$  ed  $y$ , come già al paragrafo 4, assi principali d'inerzia); mentre per il momento flettente  $M_x$  si ottiene

$$M_x = -Eb_2 z \int_{(\Sigma)} y^2 dA = -Eb_2 J_x z.$$

Gli sforzi di taglio sono quindi, per le relazioni d'equilibrio viste al paragrafo 2,

$$T_x = 0, \quad T_y = \frac{M_x}{z} = -Eb_2 J_x,$$

come può anche riscontrarsi direttamente dalle espressioni delle  $\tau$  con trasformazioni del tutto analoghe a quelle del paragrafo 4, ricordando che

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m} x y \alpha_x + y^2 \alpha_y \quad (46).$$

dove è da porre la  $\sigma$  totale, cioè

$$\sigma = \frac{1}{2} \omega^2 E (x^2 + y^2),$$

perchè la parte eliminata con  $N$  ha esattamente la direzione  $z$ ; dunque

$$\mathcal{M}_t = \frac{1}{2} \omega^3 E \int_{(\Sigma)} (x^2 + y^2)^2 dA.$$

Gli stati di tensione e deformazione considerati, quindi anche la rotazione relativa  $\omega$ , non sono perciò dovuti al solo momento  $M_t$ , ma alla somma  $M_t + \mathcal{M}_t$ : risulta così un aumento della rigidità torsionale, che diventa  $\frac{M_t + \mathcal{M}_t}{\omega}$ .

(46) Per il  $T_y$  basta porre

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right)$$

(essendo  $\vartheta_2$  armonica); onde

$$\begin{aligned} T_y &= Gb_2 \left\{ J_x - \int_{(c)} y \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \alpha_x + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \alpha_y \right) ds \right\} = Gb_2 \left\{ J_x - \int_{(c)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{m} x y^2 \right) + \frac{\partial y^3}{\partial y} \right] dA \right\} = \\ &= Gb_2 \left( 1 - \frac{2}{m} - 3 \right) J_x = -Eb_2 J_x. \end{aligned}$$

Dall'espressione di  $M_x$  si ottiene poi  $-Eb_2 = \frac{M_x}{J_x z}$ ; onde l'espressione di  $\sigma_z$  diventa

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y,$$

che è la stessa del caso della flessione semplice (si ricordi per altro che qui  $M_x$  non è costante ma proporzionale a  $z$ ); mentre per le tensioni tangenziali risulta

$$\tau_{zx} = -\frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left( \frac{2}{m} xy - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = -\frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left( y^2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right). \quad (6)$$

Per il momento torcente si ottiene infine

$$M_t = \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \int_{(\Sigma)} \left( -\frac{m-2}{m} xy^2 + x \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right) dA.$$

Si hanno dunque questa volta in generale tre caratteristiche di sollecitazione diverse da zero, due delle quali vanno necessariamente insieme per l'equilibrio: sulla base  $z = 0$  le caratteristiche sono due, cioè la componente  $T_y$  del vettore risultante e la componente  $M_t$  del momento risultante. Il caso della sola  $T_y$  su tale base, cioè di una risultante  $T_y$  passante per il baricentro della base medesima (e quindi della stessa  $T_y$  e di un momento  $M_x$  per ciascun'altra sezione) sarà allora da scindere in due: un caso di flessione composta, nel quale si avrà anche un momento  $M_t$ , e un caso di torsione col momento  $-M_t$ . In altre parole si considererà da prima la risultante  $T_y$  agente secondo la linea della risultante delle  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  nella flessione composta, retta non passante in generale per il baricentro, detta *asse di taglio* parallelo ad  $y$ , e poi la sollecitazione per la coppia torcente costituita dall'effettiva  $T_y$  baricentrica e da quella considerata con senso invertito<sup>(47)</sup>. Definito allo stesso modo l'asse di taglio

<sup>(47)</sup> Mentre dunque  $M_x$  e  $T_y$  compaiono insieme nella soluzione perchè sono accoppiati nello stesso problema, essi sono nel problema indipendenti da  $M_t$ ; e rispetto a tale soluzione la sollecitazione data da essi, richiedendo due delle costanti della soluzione medesima diverse da zero, è da riguardare come una sollecitazione composta al pari di quella, per esempio, di flessione e trazione.

Si osservi che la posizione dell'asse di taglio, e così quella del centro di taglio appresso definito, non è determinata in generale soltanto dalla forma della sezione, ma dipende anche a rigore dal valore del coefficiente  $m$  di Poisson (pur risultandone indipendenti le espressioni approssimate di esso che possono usarsi in pratica, come quella che si troverà qui al paragrafo 10): dipendono infatti da  $m$  le espressioni (6) di  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{yz}$ , non solo esplicitamente ma anche attraverso le derivate della  $\vartheta_2$ , la quale dipende per definizione dal coefficiente medesimo. (Dipende invece solo dalla sezione la  $\vartheta_0$  della torsione.)

parallelo ad  $x$  con riferimento all'altro caso di flessione composta ( $b_1 \neq 0$ ), il punto d'incontro di tali due assi si dirà *centro di taglio*.

Si trova facilmente che il momento torcente risulta nullo, nella flessione qui considerata, per la sezione simmetrica rispetto all'asse  $y$ , o simmetrica rispetto al baricentro (per esempio la sezione di un ferro a  $\sqcap$ ): nel primo caso dunque il centro di taglio appartiene all'asse  $x$ ; nel secondo esso coincide col baricentro medesimo. Basta osservare che nel primo caso la funzione  $\vartheta_2$  risulta anch'essa simmetrica rispetto all'asse  $y$ , tale essendo l'espressione  $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m} xy \alpha_x + y^2 \alpha_y$  (si confronti l'analoga considerazione per la  $\vartheta_0$  al paragrafo 5), e risulta così antimetrico ogni termine della funzione integranda nell'espressione di  $M_t$ ; mentre nel secondo caso la  $\vartheta_2$  risulta antimetrica rispetto al baricentro come  $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n}$ , e così risulta ugualmente antimetrico ognuno dei termini medesimi<sup>(48)</sup>. Si avverta che nel primo caso è simmetrica rispetto all'asse  $y$  la  $\tau_{yz}$ , antimetrica la  $\tau_{zx}$ ; nel secondo caso sono ambedue simmetriche rispetto al baricentro<sup>(49)</sup>.

Le componenti della deformazione sono

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{M_x}{EJ_x} y, & \varepsilon_x = \varepsilon_y &= -\frac{M_x}{mEJ_x} y; \\ \gamma_{xy} &= 0, & \gamma_{zx} &= -\frac{T_y}{EJ_x} \left( \frac{2}{m} xy - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right), & \gamma_{yz} &= -\frac{T_y}{EJ_x} \left( y^2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

e si verifica facilmente che da esse risultano per le componenti dello spostamento le espressioni

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{M_x}{mEJ_x} xy, & \eta &= -\frac{M_x}{2EJ_x} \left( \frac{z^2}{3} - \frac{x^2 - y^2}{m} \right), \\ \zeta &= \frac{M_x}{2EJ_x} yz - \frac{T_y}{EJ_x} \left\{ \frac{x^2 y}{2m} + \frac{2m-1}{6m} y^3 - \vartheta_2(x, y) \right\}. \end{aligned}$$

Circa la costante della  $\vartheta_2$  può ripetersi l'osservazione fatta al paragrafo 5 per la  $\vartheta_0$ , con riferimento alla nota<sup>(10)</sup>.

<sup>(48)</sup> Dall'antimetria della  $\vartheta_2$  rispetto al baricentro segue la simmetria delle derivate  $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}$ , mentre i fattori  $x, y$  sono antimetrici.

<sup>(49)</sup> Non è necessario osservare che anche nei casi qui considerati, pur risultando le sole caratteristiche  $M_x$  e  $T_y$ , si avrà in generale una tensione  $\tau_{zx}$  diversa da zero. Risulta la  $\tau_{zx}$  identicamente nulla solo per una particolare forma di sezione, che può trovarsi molto semplicemente: si vede infatti dall'espressione di tale componente che

La parte di tale spostamento comprendente la componente  $\xi$  e il secondo termine della  $\eta$  è espressa allo stesso modo della parte data dalle componenti  $\xi_2$  ed  $\eta_2$  dello spostamento nel caso della flessione semplice

dovrà essere

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = \frac{2}{m} xy,$$

onde

$$\vartheta_2 = \frac{1}{m} x^2 y + f(y),$$

e quindi per l'armonicità

$$f''(y) = -\frac{2}{m} y;$$

onde infine, a meno di una costante additiva,

$$\vartheta_2 = \frac{1}{m} x^2 y - \frac{1}{3m} y^3 \pm \frac{m+1}{m} k^2 y,$$

essendo  $k$  una costante arbitraria. Risulta così

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m} xy \alpha_x + \left( \frac{1}{m} x^2 - \frac{1}{m} y^2 \pm \frac{m+1}{m} k^2 \right) \alpha_y;$$

e dalla condizione

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m} xy \alpha_x + y^2 \alpha_y$$

si ricava allora l'equazione del contorno

$$\{(m+1)y^2 - x^2 \mp (m+1)k^2\} \alpha_y = 0;$$

quindi o  $\alpha_y = 0$ , oppure

$$\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{(m+1)k^2} = \pm 1,$$

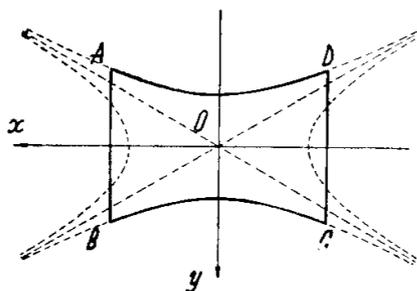


Fig. 22

equazione di una coppia di iperboli coniugate. Si ha così (ricordando che il baricentro deve coincidere con l'origine) la sezione della fig. 22, il cui contorno  $ABCD$  è costituito di due lati rettilinei paralleli ad  $y$  ( $\alpha_y = 0$ ) e di due archi di una di tali iperboli. (Dall'altra iperbole si avrebbe evidentemente una sezione non connessa; che è un caso nel quale i risultati della teoria non hanno interesse, non essendo applicabile il principio di Saint-Venant.) Risulta la sezione rettangolare nel caso di  $m$  infinito.

(§ 4); solo essendo qui il momento  $M_x$ , anzichè costante, proporzionale a  $z$ , tale risulta anche la deformazione della sezione nel proprio piano. Il secondo termine di  $\zeta$ , indipendente da  $z$ , rappresenta poi un uguale ingobbamento di ogni sezione (come l'intera componente  $\zeta$  nel caso della torsione); mentre dal primo termine di  $\eta$  e da quello di  $\zeta$  resta determinata la deformazione dell'asse e di ogni retta ad esso parallela, ed anche la nuova disposizione che assumerebbe il piano della sezione generica, senza il suddetto ingobbamento, rispetto alla deformata dell'asse.

L'equazione di tale deformata è questa volta

$$y = -\frac{T_y}{6 EJ_x} z^3,$$

rappresentante una parabola cubica, la cui tangente nel punto generico incontra l'asse  $z$  (fig. 23) a  $\frac{2}{3}z$  della distanza tra l'origine e la proiezione del punto stesso; e la sezione ruota intorno all'asse parallelo ad  $x$  per tale punto d'incontro dell'angolo

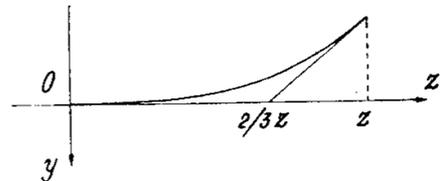


Fig. 23

$$\Omega(z) = \frac{T_y}{2 EJ_x} z^2,$$

movimento risultante di un'ugual rotazione intorno all'asse appartenente alla sezione medesima, che dà la componente  $\zeta$  per ogni punto di essa, e della traslazione  $-\frac{T_y}{6 EJ_x} z^3 j$  che dà la comune componente  $\eta$  (s'intende dell'una e dell'altra il solo primo termine): così il piano della sezione resta anche questa volta, per la considerata parte dello spostamento, normale all'asse deformato, come si riconosce per essere  $\Omega = -\frac{dy}{dz}$ , e come doveva risultare perchè si ha per lo spostamento medesimo  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ . La curvatura della deformata dell'asse (considerata positiva per  $M_x$  positivo) è data con l'approssimazione già considerata nel caso della flessione semplice dall'espressione

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{T_y}{EJ_x} z = \frac{M_x}{EJ_x},$$

cioè dalla stessa espressione di tal caso (risultando quindi questa volta anch'essa proporzionale a  $z$ ). Tale espressione rappresenta esattamente la rotazione relativa di due tangenti infinitamente vicine, e per quanto ora s'è visto anche quella di sezioni infinitamente vicine, riferita anzichè alla distanza  $ds$  (secondo la definizione della curvatura) alla distanza iniziale

$dz$  delle sezioni, cioè  $\omega = \frac{d\Omega}{dz}$ : rotazione che anche questa volta deve avvenire, sempre per l'osservato annullarsi dello scorrimento, intorno all'asse parallelo ad  $x$  per il baricentro della sezione medesima <sup>(50)</sup>.

Naturalmente anche qui la deformata dell'asse è data colla stessa approssimazione dalla parabola cubica come da ogni altra curva che differisca da essa per ordinate infinitesime d'ordine superiore; e come nel caso della flessione semplice può presumersi che  $\frac{M_x}{EJ_x}$  sia in realtà l'espressione esatta della curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

e che risulti in realtà rigorosamente nulla in ogni punto la dilatazione dell'asse medesimo <sup>(51)</sup>.

Alla deformazione dell'asse e alla considerata rotazione di ogni sezione, nonchè alla ricordata deformazione di ciascuna di queste nel proprio piano (nulla per la sezione  $z = 0$ ) è da aggiungere l'ingobbamento

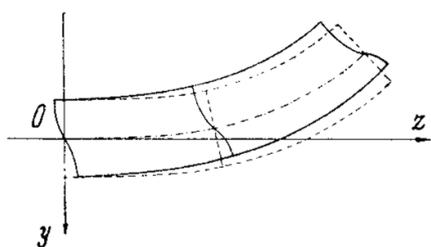


Fig. 24

delle sezioni medesime dato, come già s'è osservato, dal secondo termine dell'espressione di  $\zeta$ , indipendente da  $z$ . Si avverte che ogni punto appartenente al piano  $yz$  resta anche questa volta nel piano stesso, per essere  $\xi$  proporzionale ad  $x$ . La fig. 24 mostra, ovviamente in modo indicativo, la sezione del cilindro deformato col piano  $yz$  e le tracce delle sezioni normali nel caso che l'asse  $y$  incontri il contorno della sezione normalmente (come quando sia asse di simmetria):

<sup>(50)</sup> Per conferma si ricordi la nota <sup>(46)</sup>. Il centro della rotazione relativa delle sezioni  $z = z_1$ ,  $z = z_2$  è questa volta il punto dell'asse  $z$  all'ascissa

$$z_0 = \frac{2}{3} \frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2}.$$

<sup>(51)</sup> Si assumono così anche qui per espressioni esatte della curvatura e della dilatazione nel punto generico dell'asse quelle che risultano dalle espressioni dello spostamento che si ottengono ponendo nulla la rotazione dell'elemento dell'asse nel punto medesimo, perchè ivi sono allora rappresentate esattamente le componenti della deformazione dalle espressioni lineari considerate nella teoria.

Risulta in tal modo questa volta rigorosamente proporzionale a  $z$  (cioè anche alla lunghezza misurata lungo l'asse deformato) la rotazione relativa di due sezioni infinitamente vicine riferita anche alla distanza iniziale.

l'ortogonalità di tali tracce alle fibre estreme è dovuta all'essere in tal caso nei punti di queste ultime  $\gamma_{yz} = 0$ . In ogni altro punto l'andamento delle linee indica uno scorrimento  $\gamma_{yz} > 0$  (diminuzione dell'angolo tra le direzioni positive degli assi  $z$  ed  $y$ ), com'è da presumere che sia effettivamente in ogni caso pratico <sup>(52)</sup>.

Se da ultimo anzichè porre fisso il baricentro della base  $z = 0$ , si pone fisso quello dell'altra base,  $z = l$ , ponendo anche nello stesso punto le condizioni

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

si passa dal precedente asse deformato  $OA$  (fig. 25) a quello  $O'B$  ottenuto da esso mediante una rotazione intorno al punto dell'asse  $z$  a distanza  $\frac{2}{3}l$  dall'origine, cioè l'inversa della rotazione della base  $z = l$  nel primo spostamento: così infatti il baricentro della base medesima, che solo per tale rotazione s'era discostato dall'asse  $z$  <sup>(53)</sup>, viene in questo ricondotto, e l'asse del cilindro riprende in esso punto la direzione iniziale (cioè

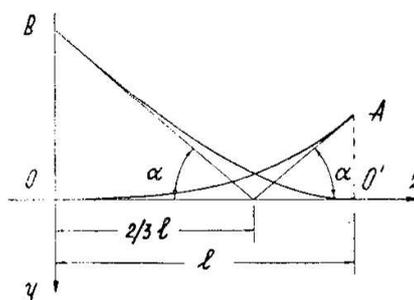


Fig. 25

quella dello stesso asse  $z$ ), mentre permane anche la condizione  $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$  (già soddisfatta per ogni punto del piano  $yz$ ). <sup>(54)</sup> Siccome precedentemente lo spostamento  $\eta$  di tale baricentro era  $-\frac{T_y}{6EJ_x}l^3$ , è chiaro che si avrà nelle nuove condizioni, che sono quelle della mensola sollecitata da una forza all'estremo libero, uno spostamento  $\eta = -\frac{T_y}{3EJ_x}l^3$  del baricentro della base  $z = 0$ , la cui distanza dal suddetto centro di rotazione è doppia di quella dell'altra base. Detto infine  $f$  (freccia) lo spostamento medesimo considerato positivo nel senso della forza agente allo stesso estremo, si ha

$$f = \frac{T_y}{3EJ_x}l^3. \quad (7)$$

<sup>(52)</sup> Dall'espressione della  $\tau_{yz}$  media su ogni segmento della sezione parallela ad  $x$ , che si ottiene mediante una semplice considerazione d'equilibrio come si vedrà tra breve, risulta che tale media è positiva in ogni caso.

<sup>(53)</sup> È chiaro dalle espressioni dello spostamento che il baricentro di ogni sezione resta fisso in quella parte di esse che dà la deformazione della sezione nel proprio piano.

<sup>(54)</sup> Non s'è parlato della componente  $\zeta$  per includere i casi in cui la  $\zeta$  non sia definibile per il baricentro, com'è detto nella nota <sup>(9)</sup>. (Si ricordi che le espressioni delle altre componenti possono riferirsi al baricentro in ogni caso.)

Questa espressione è esatta nelle esatte condizioni di tensione risultanti dalla soluzione del Saint-Venant e nelle condizioni di vincolo sopra indicate (nonchè sempre, s'intende, per la forza infinitesima); e rappresenta anche lo spostamento di ogni altro punto della stessa base, la quale non soffre nè deformazione nè rotazione nel proprio piano.

Dall'espressione del potenziale elastico unitario

$$\varphi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2),$$

dove  $\sigma_z = \frac{T_y}{J_x} zy$ , si ricava quella del lavoro di deformazione

$$\mathcal{L} = \frac{T_y^2}{2EJ_x} \frac{l^3}{3} + \frac{l}{2G} \int_{(\Sigma)} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2) dA = \frac{1}{2} T_y f + \frac{l}{2G} \int_{(\Sigma)} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2) dA.$$

Per il teorema dei lavori virtuali questa dev'essere anche l'espressione della metà del lavoro delle forze applicate al cilindro per gli spostamenti dei rispettivi punti d'applicazione: è chiaro che il primo termine rappresenta il lavoro delle forze agenti alla base libera, lo spostamento di ogni punto della quale ha le componenti  $\xi = 0$ ,  $\eta = -f$  (sicchè risulta  $T_y f$  il lavoro delle forze di superficie  $-\tau_{yz}$  e nullo quello delle  $-\tau_{zx}$ , che sono le sole forze agenti su tale base); perciò il secondo termine deve rappresentare il lavoro delle forze agenti sulla base  $z = l$  in cui sono poste le condizioni di vincolo, cioè della  $\sigma_z$  per lo spostamento  $\zeta$  <sup>(55)</sup> e delle  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  rispettivamente per gli spostamenti  $\xi$  ed  $\eta$ .

Quando invece delle condizioni di vincolo qui considerate si ponga sulla stessa base  $z = l$  quella che s'intende comunemente in pratica per condizione d'incastro, cioè quando si ponga fisso ogni punto di tale base, sempre considerando il cilindro sollecitato dalle medesime forze  $-\tau_{zx}$ ,  $-\tau_{yz}$  sulla base opposta, il lavoro delle forze sopra ricordate diverrà nullo <sup>(56)</sup>; e ammesso allora per approssimazione che non vari il lavoro di

<sup>(55)</sup> Non darebbe lavoro una traslazione secondo  $z$ , per essere

$$\int_{(\Sigma)} \sigma_z dA = 0.$$

<sup>(56)</sup> È interessante osservare che nei casi più comuni la parte essenziale di tale lavoro è quella compiuta dalla  $\sigma_z$ : mentre essa infatti è in ogni punto positiva, come risulta dalla fig. 24, si vedrebbe facilmente che il lavoro delle tensioni tangenziali si compone di termini dei due segni; ed è inoltre da tener conto che i valori massimi della  $\sigma$ , proporzionali alla lunghezza del cilindro, risultano assai maggiori di quelli delle

deformazione (vale a dire trascurando la variazione dello stato di tensione, che conforme al principio di Saint Venant potrà risultare apprezzabile solo in prossimità della base vincolata), la medesima espressione sopra trovata dovrà rappresentare il lavoro delle sole  $-\tau_{zx}$ ,  $-\tau_{yz}$  suddette; onde risulterà necessariamente (ammesso anche, com'è ovvio, che la base libera si mantenga ancora indeformata nel proprio piano) aumentata la freccia della quantità

$$f' = \frac{l}{GT_y} \int_{(\Sigma)} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2) dA \quad (57).$$

Questa si dice la *freccia dovuta al taglio*, perchè dipende dalle tensioni tangenziali, e suol esprimersi nella forma

$$f' = \chi \frac{T_y}{GA} l, \quad (7')$$

essendo dunque ovviamente

$$\chi = \frac{A \int_{(\Sigma)} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2) dA}{T_y^2}. \quad (8)$$

Si può osservare che tale valutazione è certamente approssimata per eccesso, poichè in realtà il lavoro di deformazione nel caso del supposto

$\tau$ , indipendenti dalla lunghezza medesima, in ogni caso pratico al quale la teoria che qui si svolge sia applicabile con sufficiente approssimazione.

L'osservazione è importante sopra tutto perchè potranno applicarsi allora le considerazioni che seguono (riguardanti la freccia dovuta al taglio) al caso di una trave semplicemente appoggiata agli estremi e gravata da un carico concentrato nella sezione di mezzo: per ragione di simmetria è chiaro infatti che tale sezione deve mantenersi piana, ma non indeformata nel proprio piano; ed interessa perciò osservare che può ugualmente reputarsi nullo in pratica il lavoro delle tensioni agenti sulla sezione medesima, e considerare quindi la metà della trave alla stessa stregua della mensola a cui appresso ci si riferisce.

(57) La base libera non si deforma nel proprio piano per il principio di Saint-Venant (s'intende dunque secondo l'approssimazione di tale principio, quando sia sufficientemente grande la lunghezza del cilindro); non è invece da escludere in generale una rotazione della base medesima nel proprio piano, giacchè la rotazione dipende anche dalla deformazione del tronco prossimo alla base vincolata; perciò il considerato aumento della freccia sarebbe da intendere a rigore riferito ai punti dell'asse di taglio, linea d'azione della risultante delle  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ . È per altro ovviamente presumibile che il rapporto delle differenze di spostamento fra i diversi punti della base e l'aumento medesimo resti in ogni caso dell'ordine di grandezza del rapporto delle dimensioni di essa base alla lunghezza del cilindro, non diverso in generale da quello del già osservato errore relativo dell'espressione tenuta per il lavoro di deformazione.

vincolo strettamente rigido in ogni punto della base è minore di quello che si ha nelle condizioni avanti considerate, nelle quali i punti medesimi si spostano, come risulta dal teorema di Menabrea <sup>(58)</sup>. La  $f'$  è ovviamente la stessa che si ha da una rotazione  $\chi \frac{T_y}{GA}$  intorno all'asse parallelo ad  $x$  per il baricentro della base incastrata: rotazione pari dunque alla media degli scorrimenti  $\gamma_{yz}$  moltiplicata per il *fattore di taglio*  $\chi$ .

Può dimostrarsi facilmente da ultimo che tale fattore di taglio è sempre  $> 1$ : si ha infatti evidentemente

$$\chi \geq \frac{A \int_{(\Sigma)} \tau_{yz}^2 dA}{T_y^2} > 1$$

per essere

$$T_y = \int_{(\Sigma)} \tau_{yz} dA \quad (59).$$

---

<sup>(58)</sup> Il lavoro di deformazione del cilindro nelle condizioni considerate nella soluzione del problema di Saint-Venant può riguardarsi come potenziale elastico dello stesso cilindro col vincolo strettamente rigido in ogni punto della base, somma del lavoro di deformazione in queste ultime condizioni e di un'energia vincolata dovuta allo spostamento dei punti medesimi.

<sup>(59)</sup> Dalla relazione

$$\int_{(\Sigma)} (\lambda\varphi + 1)^2 dA = \lambda^2 \int_{(\Sigma)} \varphi^2 dA + 2\lambda \int_{(\Sigma)} \varphi dA + A \geq 0,$$

valevole per qualunque costante  $\lambda$ , si deduce per ogni funzione  $f$  la

$$\left( \int_{(\Sigma)} \varphi dA \right)^2 \leq A \int_{(\Sigma)} \varphi^2 dA,$$

la quale significa ovviamente che il quadrato della media è inferiore o uguale alla media dei quadrati. Si è esclusa l'uguaglianza perchè la  $\tau_{yz}$  non può mai essere costante, come risulterà anche dalla semplice espressione della media di essa lungo ogni segmento parallelo ad  $x$ .

Può osservarsi che trascurando la componente  $\tau_{zx}$  si ha

$$f' = \frac{\int_{(\Sigma)} \tau_{yz}^2 dA}{G \int_{(\Sigma)} \tau_{yz} dA} l = \frac{\int_{(\Sigma)} \gamma_{yz}^2 dA}{\int_{(\Sigma)} \gamma_{yz} dA} l;$$

la suddetta rotazione intorno al baricentro della sezione incastrata può dunque reputarsi, con tale approssimazione, pari alla media degli scorrimenti definita come rapporto dell'integrale dei quadrati di essi all'integrale degli scorrimenti medesimi.

Lo stato di tensione è biassiale, e coincide con quello del caso della torsione nei punti del piano  $zx$  <sup>(60)</sup>: mentre per gli altri punti si trova facilmente dalla rappresentazione per mezzo dei cerchi di Mohr (fig. 26) che si hanno le tensioni principali

$$\left. \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4(\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2)}:$$

basta infatti considerare che sull'elemento della sezione agiscono la tensione normale  $\sigma_z$  e la tensione tangenziale  $\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2}$ , e su un elemento ad essa normale agisce la sola tensione tangenziale dello stesso valore. Gli assi principali appartengono al piano già indicato in generale al paragrafo 1 <sup>(61)</sup>.

Se ora s'introduce la nozione delle *linee isostatiche*, definite come quelle aventi in ogni punto la direzione di una delle tensioni principali, e costituenti pertanto tre famiglie di curve che s'incontrano ad angolo retto, è chiaro che nel caso della sezione simmetrica rispetto all'asse  $y$  si hanno due serie di linee appartenenti a due delle suddette famiglie che giacciono sul piano  $yz$  (fig. 27): una direzione principale in ogni punto di esso piano è infatti normale al piano medesimo (avendosi in tali punti, per la simmetria della  $\vartheta_2$ ,  $\tau_{zx} = 0$ ). Tali isostatiche incontrano l'asse  $z$  sotto l'angolo  $\frac{\pi}{4}$ , e sotto lo stesso angolo è incontrata la traccia della base libera; mentre le rette superiore ed inferiore delimitanti la sezione  $yz$ , ovviamente esse medesime isostatiche, e pertanto incontrate normalmente ciascuna da tutte le isostatiche di una famiglia, sono asintoti per tutte quelle dell'altra. Le altre isostatiche delle stesse due famiglie non sono linee piane. Le isostatiche della terza famiglia giacciono ciascuna nel piano della rispettiva sezione normale del cilindro (alla quale appartiene

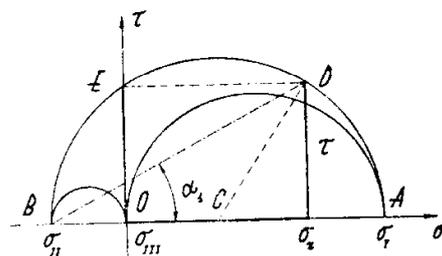


Fig. 26

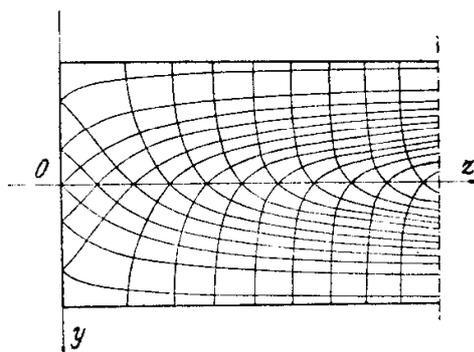


Fig. 27

<sup>(60)</sup> Si riduce monoassiale nei punti del contorno appartenenti all'asse  $y$  quando questo è asse di simmetria, poichè risulta ivi  $\tau_{yz} = 0$  per essere la tangente al contorno parallela ad  $x$ , e  $\tau_{zx} = 0$  per la già osservata simmetria della  $\vartheta_2$ .

<sup>(61)</sup> Per la determinazione di essi si veda per esempio l'applicazione dei cerchi di Mohr al Cap. II dell'opera citata alla nota (4).

in ogni punto, come s'è visto in generale, una delle direzioni principali), e incontrano normalmente il contorno della sezione e l'asse  $y$  <sup>(62)</sup>.

9. Anche in questo caso i valori delle tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{yz}$  possono determinarsi sperimentalmente, introdotta nelle espressioni di esse al posto della funzione  $\vartheta_2$  la coniugata  $\chi_2$ :

$$\tau_{zx} = -\frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left( \frac{2}{m} xy + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = -\frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left( y^2 - \frac{\partial \chi_2}{\partial x} \right).$$

La condizione al contorno

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m} xy \alpha_x + y^2 \alpha_y$$

diviene (essendo  $\alpha_x = \frac{dy}{ds}$ ,  $\alpha_y = -\frac{dx}{ds}$ )

$$\frac{d\chi_2}{ds} = y^2 \frac{dx}{ds} - \frac{2}{m} xy \frac{dy}{ds};$$

quindi, se  $M$  è il punto generico del contorno, che si pone qui costituito da una sola linea chiusa (sezione aciclica), ed  $O$  un punto fisso del contorno medesimo, si ha

$$\chi_2(M) = \chi_2(O) + \int_{(OM)} y^2 dx - \frac{2}{m} xy dy.$$

Noto il valore di  $\chi_2$  in ogni punto del contorno (e ridotto così il problema della determinazione della funzione armonica  $\chi_2$  al problema di Dirichlet), può ottenersi una rappresentazione cartesiana di tale funzione facendo aderire un velo d'acqua saponata ad una linea sghemba avente il contorno della sezione come proiezione su un dato piano, e ordinate rappresentanti in una data scala i rispettivi suddetti valori della funzione medesima: il velo, libero questa volta da ogni forza, cioè mantenuto con la stessa pressione sulle due facce, si disporrà infatti secondo una superficie

---

<sup>(62)</sup> Tale proprietà è dunque comune a tutti i casi del problema di Saint-Venant. Nel caso della torsione le isostatiche di questa terza famiglia sono le proiezioni delle linee di massima pendenza della superficie che rappresenta la funzione  $\varphi$ , normali alle linee del vettore  $\tau$ ; le altre due famiglie sono le eliche inclinate di  $\pi/4$  dei cilindri aventi per direttrici queste ultime linee. Nei due casi precedenti (tensione monoassiale in ogni punto) una famiglia di isostatiche è costituita dalle rette parallele a  $z$ , e le altre due restano indeterminate nei piani normali.

a curvatura totale nulla, che rappresenterà per approssimazione la richiesta funzione nella medesima scala.

L'estensione al caso della sezione ciclica può farsi solo nell'ipotesi che i baricentri delle superficie racchiuse dai singoli contorni siano allineati secondo l'asse  $x$ , in particolare dunque quando la sezione sia simmetrica rispetto all'asse medesimo; poichè solo allora risulta la  $\chi_2$  monodroma, per essere nullo l'integrale

$$\int_{(c)} y^2 dx - \frac{2}{m} xy dy = \int_{(\Sigma)} \left( \frac{2}{m} xy \alpha_x + y^2 \alpha_y \right) dA$$

esteso ad ogni singolo contorno, essendo

$$\int_{(\Sigma)} y dA = 0$$

per ciascuna delle rispettive superficie. In tal caso ciascuna delle linee sghembe aventi per proiezione i contorni interni, determinata a meno di un'ordinata costante rappresentata dal rispettivo termine  $\chi_2(O)$ , potrà essere materializzata (per esempio come contorno di una piastrina curva rigida), e guidata in modo che possa traslare senza resistenza nella direzione delle ordinate: essa si porterà così (disteso il velo tra le linee medesime e quella fissa avente per proiezione il contorno esterno, cioè sull'effettiva superficie della sezione) all'altezza determinata dalla condizione

$$\int_{(c)} \frac{\partial \chi_2}{\partial n} ds = 0$$

richiesta per la monodromia della  $\vartheta_2$ , ossia

$$\int_{(c)} \frac{\partial \zeta}{\partial n} ds = 0$$

(detta  $\zeta$  l'ordinata della superficie del velo), la quale significa infatti che le trazioni esercitate dal velo sulla laminetta si equilibrano.

Non può parlarsi di un'analogia come quella riguardante la torsione, poichè qui il vettore  $\tau$  non è definito dalla sola  $\chi_2$ , perciò dalla rappresentazione di questa non si rileva immediatamente l'andamento di esso. È da osservare inoltre che c'è qui anche da compiere un'operazione analitica preliminare, cioè l'integrazione della  $\frac{d\chi_2}{ds}$  (la quale potrà in ogni caso eseguirsi in modo approssimato, numericamente o graficamente). Dei due termini di tale integrale curvilineo è possibile eliminarne uno intro-

ducendo la funzione armonica

$$\psi = \frac{1}{m+1} (m\chi_2 + xy^2) - x^3 :$$

risulta infatti

$$\frac{d\psi}{ds} = (y^2 - 3x^2) \frac{dx}{ds},$$

onde

$$\psi(M) = \psi(O) + x^3(O) - x^3(M) + \int_{(OM)} y^2 dx.$$

Esprese per la  $\psi$ , le tensioni tangenziali divengono

$$\tau_{zx} = -\frac{T_y}{2J_x} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \frac{T_y}{2J_x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y^2 + 3x^2 \right) \quad (63).$$

**10.** Una valutazione approssimata delle tensioni tangenziali, per la quale non si richiede la conoscenza della funzione  $\vartheta_2$  (o della  $\chi_2$ , o della  $\psi$ ), quasi sempre sufficiente nelle applicazioni, può ottenersi osservando che dall'integrazione della terza equazione indefinita d'equilibrio, estesa alla superficie delimitata da una linea chiusa qualunque e appartenente alla sezione, si ha

$$-\int_{(\Sigma)} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dA = \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA ;$$

(63) È chiaro che non può evitarsi del tutto l'integrazione lungo il contorno, poichè l'espressione  $\frac{d\chi_2}{ds} ds = \frac{2}{m} xy dx + y^2 dy$  non coincide con quella di un differenziale esatto come avviene invece nel caso della torsione per la  $\frac{d\chi_0}{ds} ds = x\alpha_x + y\alpha_y$ , la quale significa che al contorno la  $\chi_0$  coincide, a meno di una costante, con la  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

Anche nel caso della torsione si può naturalmente impiegare la membrana per la sola determinazione della  $\chi_0$ , col vantaggio, rispetto al caso della flessione composta, che per la sezione aciclica la linea sghemba avente per proiezione il contorno della sezione è semplicemente l'intersezione dello stesso cilindro considerato col paraboloide di rivoluzione  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , e che il metodo è estensibile ad ogni sezione ciclica operando come sopra s'è accennato sulle singole linee sghembe ottenute allo stesso modo dalle singole linee del contorno. (A differenza della  $\chi_2$ , la  $\chi_0$  è infatti sempre monodroma per quanto qui sopra s'è osservato.)

ossia

$$-\int_{(c)} (\tau_{zx} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y) ds = \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA = T_y \frac{S}{J_x},$$

dove  $S = \int_{(\Sigma)} y dA$  è il momento statico della suddetta superficie rispetto

all'asse  $x$ . Quest'ultima è dunque la semplicissima espressione del flusso del vettore  $\tau$  entrante attraverso la considerata linea  $c$ ; e se allora si sceglie tale linea costituita da un tratto del contorno e dalla corda che ne congiunge i punti estremi, si ottiene evidentemente il flusso di  $\tau$  attraverso la corda medesima. Quando questa sia parallela all'asse  $x$ , come la  $AB$  della fig. 28, si avrà così la media delle  $\tau_{yz}$  nei punti di essa:

$$\overline{\tau_{yz}} = T_y \frac{S}{bJ_x},$$

essendo  $b$  la lunghezza della corda; e tale valore potrà assumersi praticamente in molti casi per quello effettivo in ogni punto.

La stessa espressione, con analogo significato dei simboli, rappresenta naturalmente la media delle  $\tau_{zx}$  lungo una corda parallela ad  $y$ ; ma è chiaro che in ogni caso come quello della stessa figura (corda  $CD$ ) tale media (che risulterà esattamente nulla come il rispettivo momento statico quando la sezione sia simmetrica rispetto all'asse  $x$ ) non avrà in realtà nessun significato, risultando da valori di segno opposto come si vede osservando l'andamento del vettore  $\tau$  al contorno. Diversa conclusione deve trarsi nel caso della fig. 29, benchè possa dimostrarsi senza difficoltà che la  $\tau_{zx}$  non può essere uniforme sul segmento  $MN$  <sup>(64)</sup>.

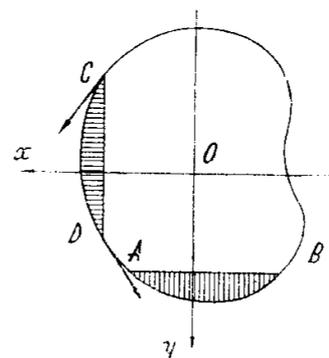


Fig. 28

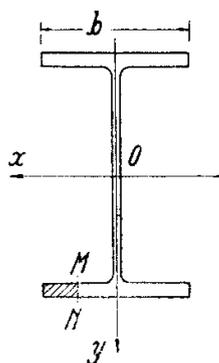


Fig. 29

Nell'ipotesi della ripartizione uniforme della  $\tau_{yz}$  su

(64) Si ha infatti

$$\tau_{zx} = \frac{T_y}{J_x} \left( \frac{b}{2} - \bar{x} \right) y + \frac{d}{dy} \int_{\bar{x}}^{\frac{b}{2}} \tau_{yz} dx,$$

essendo  $\bar{x}$  l'ascissa dei punti  $M$  e  $N$ ; dove il primo termine è presso che costante, mentre il secondo, benchè nulla possa dirsi di preciso sull'integrale, sarà certamente posi-

ogni corda parallela ad  $x$  <sup>(65)</sup> è anche immediato il tracciamento delle linee del vettore  $\tau$ , poichè ciascuna di esse divide allora tutte le corde in un medesimo rapporto. Basta osservare, posto

$$\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \quad \alpha + d\alpha = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}},$$

dove l'elemento  $CC'$  abbia inclinazione generica (fig. 30), che la differenza dei flussi di  $\tau$  attraversanti i segmenti  $AC$ ,  $A'C'$  sarà per ipotesi  $\frac{T_y}{J_x} d(\alpha S)$ ,

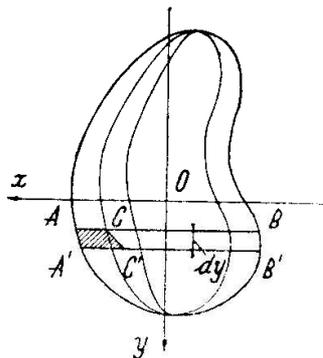


Fig. 30

mentre il flusso totale entrante nell'area tratteggiata dev'essere (sempre a meno di un infinitesimo d'ordine superiore)  $\frac{T_y}{J_x} \alpha dS$ : quando l'elemento  $CC'$  appartenga ad una linea del vettore medesimo le due quantità dovranno essere uguali, quindi  $d\alpha = 0$ . (Nel caso della sezione simmetrica rispetto all'asse  $y$  ciò significa ovviamente che i vettori  $\tau$  nei punti di ogni corda convergono tutti nel punto d'incontro dell'asse  $y$  colle tangenti agli estremi della corda medesima.) Si

potrà così valutare anche la  $\tau_{zx}$ ; se non che è da osservare che in tali casi (sezioni « raccolte », o sviluppate solo in direzione dell'asse  $y$ , come un'ellisse alta e stretta) la  $\tau_{zx}$  ha in realtà pochissima importanza pratica, come risulta anche dall'osservato andamento del vettore  $\tau$ , notevolmente inclinato sull'asse  $y$  solo in prossimità dei punti superiore e inferiore del contorno, dove i valori del modulo di esso sono lontani dai massimi che si hanno in prossimità del baricentro.

Poichè il momento statico  $S$  è massimo per la corda baricentrica, la media  $\tau_{yz}$  risulterà massima in generale per una corda non lontana da essa; ma non per la corda medesima se non quando la lunghezza di questa sia a sua volta stazionaria: per il massimo del rapporto  $\frac{S}{b}$  si richiede infatti la condizione  $Sdb - bdS = 0$ , ossia, per  $dS = 0$ , anche

tivo in  $M$  e negativo in  $N$ . Essendo la questione connessa con quella della diffusione della  $\tau_{yz}$  sull'ala, essa sarà meglio spiegata alla prossima nota <sup>(67)</sup>.

<sup>(65)</sup> Per dimostrare come tale ripartizione possa essere molto diversa in sezioni larghe e basse si cita il caso della sezione rettangolare con rapporto  $\frac{b}{h} = 15$ , in cui nel punto di mezzo del lato minore la  $\tau_{yz}$  è più di 5 volte la media sull'asse  $x$ . Si hanno pure in tal caso tensioni  $\tau_{zx}$  di segno opposto sui due lati lunghi, che giungono (in prossimità dei vertici) circa allo stesso valore assoluto.

$db = 0$ . Ciò significa che le tangenti agli estremi della corda baricentrica siano parallele; e in particolare per la sezione simmetrica rispetto all'asse  $y$  che esse siano normali alla corda medesima <sup>(66)</sup>.

Si ha ad esempio nel caso della sezione rettangolare (fig. 32 a)

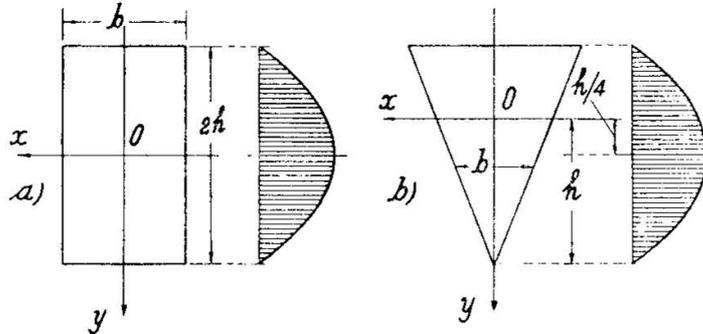


Fig. 32

$$S = b(h - y) \frac{1}{2} (h + y);$$

quindi

$$\left(\frac{S}{b}\right)_{\max} = \frac{1}{2} h^2 \quad \text{per } y = 0 \quad (h + y = h - y);$$

onde

$$\left(\overline{\tau_{yz}}\right)_{\max} = T_y \frac{\frac{1}{2} h^2}{\frac{2}{3} bh^3} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A},$$

essendo  $A = 2bh$  l'area della sezione. Il diagramma della  $\overline{\tau_{yz}}$  è parabolico. Lo stesso diagramma, e quindi (come si trova immediatamente) la stessa espressione

$$\left(\overline{\tau_{yz}}\right)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A},$$

si ha nel caso della sezione triangolare: risulta infatti (fig. 32 b)

$$\frac{S}{b} = \frac{h - y}{2} \left\{ y + \frac{1}{3} (h - y) \right\} = \frac{1}{6} (h - y) (h + 2y);$$

<sup>(66)</sup> È chiaro che quando la corda baricentrica sia minima si avrà ivi il massimo di  $\overline{\tau_{yz}}$ ; mentre nel caso della corda massima potrà aversi il massimo o un minimo. Dall'esempio del triangolo che si darà subito appresso risulta per la sezione  $ABCD$  composta di due triangoli disposti simmetricamente il diagramma della fig. 31; e quando si suppongano i vertici in  $B$  e in  $D$  smussati con raccordi di raggio abbastanza piccolo, risulterà evidentemente un punto di minimo in luogo del punto angolare del diagramma medesimo.

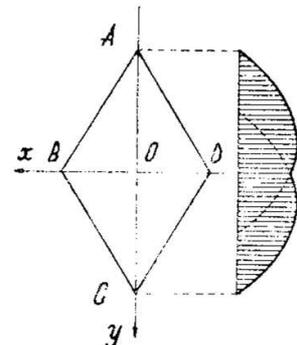


Fig. 31

e posto  $y' = y - \frac{1}{4}h$ , cioè spostata l'origine a metà dell'altezza totale,

$$\frac{S}{b} = \frac{1}{48} (3h - 4y') (3h + 4y'),$$

espressione quadratica simmetrica.

Per la già considerata sezione a  $\Gamma$  si è tracciato nella metà superiore della fig. 33 il diagramma delle  $\frac{\tau_{yz} b}{s_0}$ , essendo  $s_0$  lo spessore costante

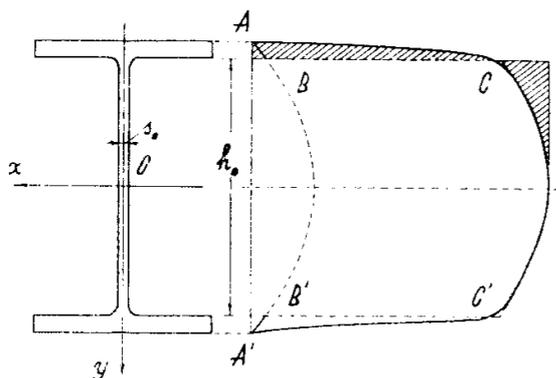


Fig. 33

dell'anima, evidentemente costituito di due diversi archi di parabola (salvo il tratto intermedio corrispondente ai raccordi dell'ala con l'anima); e nella metà inferiore s'è cercato di indicare il diagramma delle  $\tau_{yz}$  massime di ogni corda, che si hanno evidentemente sull'asse  $y$ : esso risulta simmetrico rispetto al precedente in corrispondenza dell'anima (sullo spessore della quale

può ammettersi la ripartizione uniforme); mentre sull'ala ha valori alquanto inferiori perchè la tensione tende a diffondersi sull'intera larghezza. La linea  $ABC C'B'A'$  è il diagramma delle  $\tau_{yz}$ , cioè delle tensioni massime che si avrebbero (non tenendo conto dei suddetti raccordi) se potesse avvenire la ripartizione uniforme sulle ali<sup>(67)</sup>. Si può infine

(67) Si ricordi che ai lembi dell'ala, cioè nei punti  $M$  ed  $N$  della fig. 29 la  $\tau_{yz}$  è evidentemente nulla: è dunque nullo l'integrale

$$\int_{\bar{x}}^{\frac{b}{2}} \tau_{yz} dx$$

lungo i lembi medesimi; mentre per l'accennata diffusione della stessa  $\tau_{yz}$  sull'ala esso deve assumere lungo le orizzontali intermedie valori positivi. Dove si ha il valore massimo resta nell'espressione

$$\tau_{zx} = \frac{T_y}{J_x} \left( \frac{b}{2} - \bar{x} \right) y + \frac{d}{dy} \int_{\bar{x}}^{\frac{b}{2}} \tau_{yz} dx$$

(nota<sup>(64)</sup>) il solo primo termine; ma nella parte superiore (cioè verso  $M$ ) il secondo termine è positivo, nella parte inferiore è negativo; e così il diagramma delle  $\tau_{zx}$  as-

osservare che l'area del diagramma  $\frac{\bar{\tau}_{yz} b}{s_0}$  può praticamente reputarsi uguale a quella del rettangolo  $(\tau_{yz})_{\max} h_0$ , essendo  $h_0$  l'altezza dell'anima; e poichè la prima è evidentemente  $\frac{T_y}{s_0}$ , può assumersi in pratica per la tensione tangenziale massima la semplice espressione

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{T_y}{s_0 h_0} = \frac{T_y}{A_0},$$

essendo  $A_0$  l'area della sezione dell'anima, cioè la stessa espressione che si avrebbe se l'intero  $T_y$  si ripartisse uniformemente sulla sezione medesima.

Le considerazioni di questo paragrafo consentono anche una determinazione approssimata del centro di taglio per forme di sezione praticamente interessanti; per esempio la sezione di un ferro a  $\square$ . Si tratta di determinare la risultante delle tensioni  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , la quale sarà evidentemente parallela all'asse  $y$  e di grandezza  $T_y$ ; l'intersezione della quale con l'asse  $x$  sarà il cercato centro di taglio.

Scomposta la sezione com'è indicato nella fig. 35, si può ammettere che la risultante delle  $\tau_{yz}$ , agenti quasi esclusivamente sul rettangolo sezione dell'anima, coincida colla mediana del rettangolo medesimo (potendo essere in realtà appena spostata verso il baricentro della sezione); mentre le risultanti delle  $\tau_{zx}$  sulle due metà della sezione saranno due forze opposte  $R_x$ , che potranno determinarsi ammettendo che tali tensioni agiscano esclusivamente sulle ali. Riferita allora l'ala inferiore agli assi  $x, y'$  (lombo interno dell'anima) si ha esattamente

$$\bar{\tau}_{zx} s(x') = \frac{T_y}{J_x} \int_{x'}^b y(x'_1) s(x'_1) dx'_1,$$

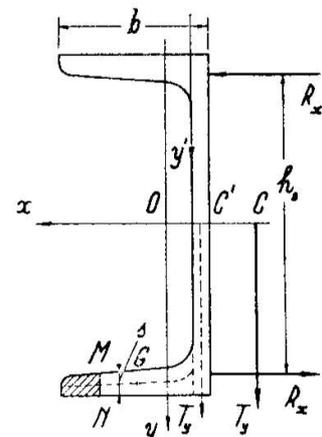


Fig. 35

sumerà presumibilmente lungo il segmento  $MN$  l'andamento della fig. 34, dove la retta leggermente inclinata rappresenta il suddetto primo termine proporzionale ad  $y$ , e la retta tratteggiata è la verticale di compenso comune a tale parte rettilinea e all'intero diagramma. (Non è presumibile che in alcun caso pratico il valore in  $N$  divenga di segno contrario, poichè bisognerebbe che in prossimità del lombo inferiore la  $\tau_{yz}$  divenisse in media maggiore nel tratto laterale  $(\bar{x}, \frac{b}{2})$  che nel tratto centrale  $(0, \bar{x})$ .)

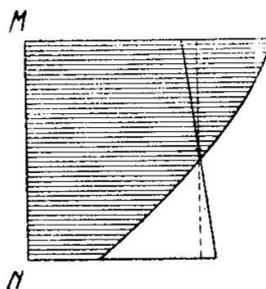


Fig. 34

essendo  $s(x')$  lo spessore dell'ala nel punto generico dell'asse di questa, di coordinate  $(x', y)$ , misurato verticalmente, e  $\overline{\tau_{zx}}$  la media sul segmento verticale  $MN$  per il punto medesimo; mentre  $b$  è la larghezza dell'ala (misurata orizzontalmente, ed escluso lo spessore dell'anima) <sup>(68)</sup>. Perciò

$$R_x = \frac{T_y}{J_x} \int_0^l dx' \int_{x'}^b y(x'_1) s(x'_1) dx'_1 = \frac{T_y}{J_x} \int_0^b x' y(x') s(x') dx' \quad (69),$$

dove l'integrale rappresenta evidentemente il momento centrifugo  $J_{xy'}$ , della sezione dell'ala rispetto agli assi  $x, y'$ ; dunque

$$R_x = T_y \frac{J_{xy'}}{T_x}.$$

Quanto alla retta d'azione di tale risultante, un'osservazione circa la ripartizione delle  $\tau_{zx}$  sullo spessore dell'ala, analoga a quella riguardante la sezione a  $\perp$ , dimostra che essa sarà alquanto spostata dall'orizzontale per il baricentro  $G$  della sezione dell'ala verso il baricentro dell'intera sezione: detto dunque  $h_0$  il braccio della coppia costituita dalle due  $R_x$ , potrà reputarsi pertanto  $h_0$  più prossimo all'altezza libera dell'anima che all'intera altezza della trave. La distanza  $C'C$  del centro di taglio dalla risultante delle  $\tau_{yz}$  risulta infine

$$\overline{C'C} = \frac{R_x h_0}{T_y} = h_0 \frac{J_{xy'}}{J_x}.$$

Può ancora osservarsi che si ha

$$J_{xy'} = \sim J_x \frac{x'(G)}{2y(G)} = \sim J_x \frac{x'(G)}{h_0};$$

<sup>(68)</sup> L'integrale rappresenta esattamente il momento statico della superficie tratteggiata rispetto all'asse  $x$  se per asse dell'anima s'intende il luogo dei punti di mezzo dei segmenti  $MN$ .

<sup>(69)</sup> Integrando per parti si ha infatti

$$\int_0^l x' y(x') s(x') dx' = x' \int_b^{x'} y(x'_1) s(x'_1) dx'_1 \Big|_0^b + \int_0^b dx' \int_{x'}^b y(x'_1) s(x'_1) dx'_1,$$

dove il primo termine è evidentemente nullo. Direttamente può osservarsi che il termine elementare generico  $y(x'_1) s(x'_1) dx'_1$  del secondo integrale va considerato nella prima integrazione per tutti gli intervalli  $dx'$  da 0 ad  $x'_1$ , e risulta così moltiplicato per  $x'_1$ .

onde

$$\overline{C'C} = \sim x'(G),$$

dove può intendersi che  $C'$  sia sulla mediana della sezione dell'anima <sup>(70)</sup>.

11. Si può ora esprimere in forma pratica approssimata anche il fattore di taglio  $\chi$  definito dalla (7), trascurando la tensione  $\tau_{zx}$  e sostituendo alla  $\tau_{yz}$  la media  $\overline{\tau_{yz}}$  lungo ogni corda parallela ad  $x$ , ponendo cioè  $\tau_{yz} = T_y \frac{S}{J_x}$ . Si ha

$$\chi = \frac{A \int_{(\Sigma)} \tau_{yz}^2 dA}{T_y^2} = \frac{A}{J_x^2} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{S}{b}\right)^2 dA = \frac{A}{J_x^2} \int_{y'}^{y''} \frac{S^2}{b} dy,$$

essendo  $y'$  ed  $y''$  le ordinate dei due punti del contorno più lontani dall'asse  $x$ . Benchè anche la seconda approssimazione introdotta sia per difetto, essendosi sostituito il quadrato di una media alla media dei rispettivi quadrati, il valore dell'espressione trovata resta tuttavia  $> 1$ , come si vede osservando che

$$J_x = \int_{y'}^{y''} S dy = \int_{(\Sigma)} \frac{S}{b} dA \quad (71).$$

<sup>(70)</sup> Si è posto il momento d'inerzia  $J_x$  uguale al doppio di quello dell'ala, trascurando quello dell'anima; e nella valutazione del momento d'inerzia dell'ala come in quella di  $J_{xy'}$  si è sostituito il baricentro  $G$  della sezione dell'ala al baricentro dei momenti statici della stessa sezione rispetto all'asse  $x$ . Così, essendosi posto inoltre  $y(G) = \frac{1}{2} h_0$ , la distanza  $C'C$  risulta valutata alquanto in eccesso.

$$(71) \quad J_x = \int_{y'}^{y''} y^2 b dy = y \int_{y'}^y y_1 b dy_1 \Big|_{y'}^{y''} - \int_{y'}^{y''} dy \int_{y'}^y y_1 b dy_1 = -y S(y) \Big|_{y'}^{y''} + \int_{y'}^{y''} S(y) dy = \int_{y'}^{y''} S(y) dy$$

(essendo  $S = 0$  per  $y = y'$  e per  $y = y''$ ). Risulterebbe dunque  $\chi = 1$  solo per  $\frac{S}{b}$  costante: condizione che non può verificarsi per nessuna sezione. (Dovrebbe essere  $\frac{dS}{db} = \frac{S}{b} = \frac{k}{2}$ ; e poichè  $dS = -y b dy$ , risulterebbe  $-y b \frac{dy}{db} = \frac{k}{2}$ , ossia  $\frac{1}{b} \frac{db}{dy} = -\frac{2y}{k}$ , onde  $b = c e^{-\frac{y^2}{k}}$ ; espressione incompatibile con le necessarie condizioni  $b(y') = b(y'') = 0$ .)

È chiaro che il valore medesimo non cambia se si moltiplicano per uno stesso numero  $k$  tutte le larghezze  $b$ , restando moltiplicato per  $k$  l'integrale e diviso per  $k$  il fattore  $\frac{A}{J_x^2}$ : in particolare si ha uno stesso fattore di taglio per tutte le sezioni che possono corrispondersi in una omologia affine rispetto all'asse  $y$ . Segue da ciò, dovendo evidentemente risultare uno stesso  $\chi$  per tutte le sezioni simili (si ricordi quanto detto in proposito del fattore  $q$  a pag. 22), che la stessa proprietà vale anche per le sezioni che possono corrispondersi in un'omologia affine rispetto all'asse  $x$ ; come d'altra parte può subito verificarsi direttamente. Per ogni sezione rettangolare, ad esempio, risulta  $\chi = \frac{6}{5}$ ; per la sezione ellittica  $\chi = \frac{10}{9}$ . Si avverta per altro che tali valori, ugualmente accettabili per il quadrato o per il cerchio come per il rettangolo o l'ellisse alti e stretti (si intende l'altezza nella direzione  $y$ ), andranno divenendo sempre meno approssimati quando vada aumentando il rapporto della larghezza all'altezza. (Si ricordi la nota <sup>(65)</sup>.)

Per la sezione a  $\perp$  si ottiene direttamente dall'espressione (7), trascurando la  $\tau_{zx}$  e ponendo per la  $\tau_{yz}$  il valore zero nelle ali e nell'anima il valore costante  $\frac{T_y}{A_0}$ , già considerato per approssimazione come massimo,

$$\chi = \frac{A}{A_0} \quad (72).$$

(72) Si potrebbe vedere che la seconda delle approssimazioni così introdotte, consistente in sostanza (per l'osservata compensazione delle aree nella fig. 33) nel considerare concentrate sull'anima tutte le  $\tau_{yz}$ , condurrà sempre a una valutazione per eccesso; tuttavia la semplice espressione trovata resterà sempre in difetto rispetto alla (8), a causa dei notevoli valori della trascurata tensione  $\tau_{zx}$ . Rispetto alla

$$\chi = \frac{A}{J_x^2} \int_{y'}^{y''} \frac{S^2}{b} dy$$

tale espressione è invece da presumere approssimata per eccesso: si avrebbe infatti

$$\chi = \frac{A}{J_x^2} \left( \frac{S}{b} \right)_1 \int_{y'}^{y''} S dy = \frac{A}{J_x} \left( \frac{S}{b} \right)_1 = A \frac{(\bar{\tau}_{yz})_1}{T_y},$$

essendo  $(\bar{\tau}_{yz})_1$  un valore medio di  $\bar{\tau}_{yz}$ ; in luogo del quale si ha nell'espressione considerata il presunto valore massimo  $\frac{T_y}{A_0}$ .

È da avvertire infine che anche per valori notevoli del fattore  $\chi$  la freccia dovuta al taglio

$$f' = \chi T_y \frac{l}{GA}$$

risulterà in generale trascurabile rispetto alla freccia

$$f = T_y \frac{l^3}{3 EJ_x}$$

dovuta alla flessione: si ha infatti

$$\frac{f'}{f} = \frac{6(m+1)}{m} \chi \frac{J_x}{Al^2} = \frac{6(m+1)}{m} \chi \left( \frac{i_x}{l} \right)^2,$$

essendo  $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$  il raggio d'inerzia della sezione. Affinchè tale rapporto non risulti trascurabile rispetto all'unità bisogna che le dimensioni della sezione siano paragonabili alla lunghezza del cilindro; ma in tal caso, anche ammesso che si abbiano effettivamente sulla base libera di questo le tensioni della soluzione del Saint-Venant, non potrebbe più trascurarsi il già osservato errore in eccesso nella valutazione della freccia dovuta al taglio; poichè la diversità dello stato di tensione prodotto dalle condizioni imposte all'altra base si manterrà notevole per una parte non piccola del cilindro.