

CAPITOLO IX

S I S T E M I P I A N I

57. Si passa ora allo studio di qualche problema particolare tra i più importanti per le applicazioni, cominciando dai sistemi piani di deformazione e di tensione.

Si dirà *sistema piano di deformazione* l'insieme degli stati di tensione e di deformazione nei punti di un corpo quando in ciascuno di essi si verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

La medesima definizione può esser data mediante condizioni per le componenti dello spostamento, cioè

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad (51')$$

a meno naturalmente di un moto rigido: mentre infatti da queste ultime discendono le precedenti immediatamente, è facile anche vedere come inversamente seguano dalle (51) le (51'), mediante il seguente ragionamento. Assegnate ε_x , ε_y , γ_{xy} come funzioni delle sole variabili x , y , si ponga da prima nel piano il problema geometrico della determinazione di uno spostamento da cui derivino tali componenti della deformazione: problema possibile pur che siano soddisfatte la prima delle condizioni (16) e le altre eventuali condizioni intrinseche di congruenza (evidentemente comprese anch'esse in quelle riguardanti il problema nello spazio), la soluzione del quale sarà data da due componenti di spostamento

$$\xi(x, y) = \bar{\xi}(x, y) + \omega_0 y + \xi_0, \quad \eta(x, y) = \bar{\eta}(x, y) - \omega_0 x + \eta_0,$$

essendo ω_0 , ξ_0 , η_0 costanti arbitrarie (parametri di un moto rigido piano). La soluzione dello stesso problema posto nello spazio senza particolari

condizioni per le altre tre componenti della deformazione si ottiene mutando ω_0 , ξ_0 , η_0 in funzioni arbitrarie di z , ed aggiungendo la componente ζ ad arbitrio; ma quando siano poste le condizioni $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$, dovrà essere ζ funzione solo di x ed y , ed aversi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{d\omega_0}{dz} y - \frac{d\xi_0}{dz}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{d\omega_0}{dz} x - \frac{d\eta_0}{dz};$$

onde ovviamente $\frac{d\omega_0}{dz} = 0$, $\frac{d\xi_0}{dz} = \text{cost.}$, $\frac{d\eta_0}{dz} = \text{cost.}$ Così lo spostamento aggiunto a quello dato dalle componenti $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ risulta ancora un moto rigido⁽²³⁶⁾.

Un caso di sistema piano di deformazione si ha considerando un cilindro retto, e (assunto l'asse z parallelo alle generatrici) assegnando le forze di massa sotto le condizioni $Z = 0$, $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0$, cioè tutte parallele al piano xy e indipendenti da z , e le forze sulla superficie laterale sotto le condizioni

$$\tau_{nz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_n}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial z} = 0 \quad (237),$$

aventi lo stesso significato delle precedenti; e ponendo infine nei punti delle basi $\zeta = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$. Queste ultime condizioni potranno porsi in concreto mantenendo le basi aderenti a due piani fissi perfettamente

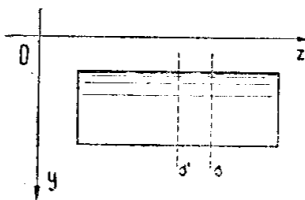


Fig. 69

lisci. È chiaro che per la simmetria di tutte le condizioni poste rispetto al piano della sezione retta s' equidistante dalle basi (fig. 69) le condizioni riguardanti le basi stesse debbono verificarsi anche in ogni punto di s' ⁽²³⁸⁾; la qual sezione divide dunque il cilindro in due che si trovano nelle stesse condizioni di esso: considerando allora la sezione di mezzo di ciascuno di questi, e così continuando, si prova che le medesime condizioni poste per le basi si verificano in una sezione prossima quanto si voglia ad una sezione s qualunque, e quindi (per ovvie ragioni di continuità) anche nella sezione medesima, ossia in ogni punto del cilindro.

⁽²³⁶⁾ Si tratta naturalmente questa volta di un moto rigido spaziale.

⁽²³⁷⁾ n e t sono ovviamente le direzioni della normale e della tangente alla direttrice del cilindro.

⁽²³⁸⁾ Lo spostamento deve risultare simmetrico rispetto ad s' ; perciò le componenti ζ in due punti simmetrici debbono essere opposte. Così per la simmetria della tensione debbono essere opposti in punti simmetrici i vettori τ_z .

Si vede infine immediatamente come da tali condizioni, cioè $\zeta = 0$, $\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$, si traggano le (51') che definiscono, come s'è visto, il sistema piano di deformazione.

È anche facile dimostrare che in ogni sistema piano di deformazione sono verificate per ogni cilindro come quello considerato tutte le condizioni poste sopra. Dalla definizione nella forma (51') si hanno infatti immediatamente quelle riguardanti le basi; mentre per essere indipendenti da z tutte le componenti della deformazione risultano tali anche tutte quelle della tensione, onde le $\frac{\partial \sigma_n}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial z} = 0$, ed ovviamente anche le $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0$; e infine dall'esser nulle τ_{zx} e τ_{yz} risulta la $\tau_{nz} = 0$, e dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio la $Z = 0$.

Il caso di tale cilindro è poi evidentemente l'unico in cui il problema del corpo elastico si presenti già a priori come problema riguardante uno stato piano di deformazione. I dati di esso, forze di massa e forze alla superficie laterale, come pure le incognite componenti della deformazione e della tensione (o le componenti dello spostamento) sono funzioni solo del punto della sezione retta del cilindro: in tal senso può parlarsi di *problema piano*.

58. Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono nel caso qui considerato

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + Y = 0, \end{cases}$$

restando la terza identicamente soddisfatta se si pone, come s'è detto, $Z = 0$. Le condizioni di Saint-Venant si riducono ad una sola come sopra s'è già ricordato, cioè la

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

È chiaro allora che si potrà ricorrere anche ad una qualunque delle equazioni di Beltrami, che non risulti soddisfatta identicamente; o anche alla già considerata somma delle prime tre di esse, cioè la (50), che in questo caso, essendo

$$\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y)$$

(dalla $\varepsilon_z = 0$, per la terza delle (41'₂)), quindi

$$\Psi = \frac{m+1}{m} (\sigma_x + \sigma_y),$$

si scrive

$$(m - 1) \Delta (\sigma_x + \sigma_y) + m \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0 \quad (239). \quad (52)$$

Le condizioni al contorno riguardanti la forza di superficie divengono

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y = f_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = f_y. \end{cases}$$

Volendo da ultimo l'espressione delle componenti ε_x , ε_y in funzione delle componenti della tensione, ricordata la precedente espressione di σ_z , basterà applicare la prima delle (41'₂), che diviene

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \frac{1}{m} \left[\sigma_y + \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \right\};$$

onde per ovvi passaggi, ricordando la (44),

$$\varepsilon_x = \frac{m - 1}{2m G} \left(\sigma_x - \frac{1}{m - 1} \sigma_y \right); \quad (53)$$

e analogamente

$$\varepsilon_y = \frac{m - 1}{2m G} \left(\sigma_y - \frac{1}{m - 1} \sigma_x \right).$$

Nel caso che sia nulla la divergenza della forza di massa la (51) diverrà semplicemente $\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0$: non comparando più in essa nessuna costante d'elasticità, lo stato di tensione risulterà indipendente dal materiale di cui il corpo è costituito quando sia posto il problema assegnando tutte le forze al contorno. Quando si abbiano invece condizioni di vincolo non isostatiche (naturalmente indipendenti da z), le costanti elastiche compariranno nel porre le condizioni medesime, dovendosi innanzi tutto esprimere la deformazione per mezzo della tensione; e così in generale compariranno tali costanti nel caso dei corpi ciclici, anche se vincolati isostaticamente⁽²⁴⁰⁾.

(239) Per quanto s'è avvertito alla fine del paragrafo precedente si ha qui

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(240) S'è già visto in generale che in quest'ultimo caso e nel caso dei vincoli omogenei (sotto la condizione indicata alla fine del paragrafo 56 per i vincoli elastici) comparirà la sola costante m qualunque sia il sistema delle forze di massa; compariranno tutt'e due le costanti nei problemi di coazione elastica.

Compreso nel caso ora considerato è quello delle forze di massa nulle; al quale ci si può sempre ridurre in modo analogo a quello indicato al paragrafo 56, essendo nota una soluzione valida in tutto il piano⁽²⁴¹⁾. La soluzione più generale del sistema delle equazioni indefinite d'equilibrio, posto $X = Y = 0$, è evidentemente

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (54)$$

essendo $F(x, y)$ una funzione arbitraria, che ammetta le derivate seconde soddisfacenti alle condizioni di continuità stabilite per la tensione. La condizione di congruenza (52) diviene allora

$$\Delta^2 F = 0 :$$

così il problema è ridotto alla ricerca di una funzione $F(x, y)$ biarmonica, che sarà detta *funzione di Airy*, per la quale restino soddisfatte le assegnate condizioni al contorno, nonchè le altre eventuali condizioni di congruenza di cui s'è detto in generale.

Poichè la soluzione dovrà essere unica quando siano assegnate al contorno tutte le forze, cioè (per la (54)) quando siano assegnate le derivate seconde $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial n \partial t}$, essendo n e t le direzioni della normale e della tangente al contorno medesimo (da intendere come direzioni fisse), resta così anche dimostrato indirettamente che tali derivate (assegnate in modo da soddisfare alle condizioni complessive d'equilibrio) definiscono la funzione biarmonica a meno di una funzione additiva lineare. (Trattandosi di tensioni dovute solo all'azione di forze, risulteranno continue in ogni punto tutte le derivate seconde e terze di F .)⁽²⁴²⁾

⁽²⁴¹⁾ È chiaro che usando ancora la soluzione di Lord Kelvin il problema verrebbe svantaggiosamente riportato dal piano allo spazio.

⁽²⁴²⁾ Per lo spostamento si trovano le espressioni

$$\xi = \bar{\xi} - \frac{1}{2G} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \bar{\eta} - \frac{1}{2G} \frac{\partial F}{\partial y},$$

essendo $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ funzioni armoniche coniugate definite dalle relazioni

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = \frac{m-1}{2mG} \Delta F$$

a meno di una funzione lineare, cioè rispettivamente $\omega_0 y + \xi_0$, $-\omega_0 x + \eta_0$. (Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} &= - \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = \frac{m-1}{2mG} \left\{ - \int_0^y \frac{\partial \Delta F}{\partial x} dy + \int_0^x \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial y} \right)_{y=0} dx \right\} + \omega_0 = \\ &= \frac{m-1}{2mG} \left\{ \int_0^x \frac{\partial \Delta F}{\partial y} dx - \int_0^y \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial x} \right)_{x=0} dy \right\} + \omega_0. \end{aligned}$$

59. Come importante e semplicissimo esempio si consideri un cilindro circolare cavo (tubo) soggetto all'interno e all'esterno a due pressioni normali uniformi, rispettivamente p_i e p_e , essendo nulle le forze di massa

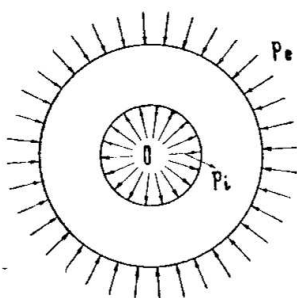


Fig. 70

ed avendosi sulle basi le condizioni $\zeta = 0, \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ già considerate in generale (fig. 70). Converrà ovviamente trattare il problema in coordinate polari, ponendo il polo nel centro della sezione: è chiaro per ragione di simmetria che saranno direzioni principali della tensione e della deformazione le direzioni r e t della fig. 71, cioè che risulterà $\tau_{rt} = 0$, e che σ_r e σ_t saranno indipendenti dalla anomalia ω , e tale pertanto potrà assumersi anche la F . Risulterà

inoltre lo spostamento (a meno di un moto rigido) diretto secondo il raggio r e indipendente anch'esso da ω .

Per il passaggio dalle coordinate cartesiane alle polari potrà procedersi vantaggiosamente al modo seguente. Sarà intanto

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x};$$

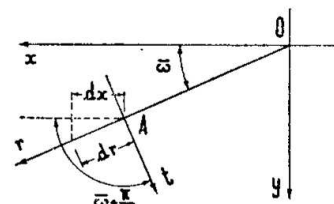


Fig. 71

ossia, per essere

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \bar{\omega}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \left(\bar{\omega} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{r} \sin \bar{\omega},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

(L'angolo $\bar{\omega}$ è riferito all'asse x , che sarà fatto poi coincidere con r ; l'anomalia ω è invece riferita a un asse polare fisso arbitrario; quindi $\bar{\omega} = \omega - \omega_1$, essendo ω_1 l'anomalia dell'asse x .) Analogamente si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Siccome le componenti σ_r, σ_t della tensione in un punto qualunque sono le derivate seconde della funzione di Airy rispetto ad x e ad y quando si faccia coincidere l'asse cartesiano x con l'asse r passante per il punto medesimo (e quindi y con t), converrà nell'esprimere gli operatori $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ considerare subito tale coincidenza ponendo dopo la derivazione

$\cos \bar{\omega} = 1$, $\sin \bar{\omega} = 0$: si ottiene così

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_{\omega=0} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_{\omega=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}.$$

Sono dunque queste le espressioni generali delle derivate seconde sudette, cioè quelle secondo le direzioni r e t riguardate come direzioni fisse (assi cartesiani); e così la loro somma è l'espressione generale dell'operatore Δ (indipendente dalla direzione degli assi).

Nel caso qui considerato potrà assumersi la funzione di Airy, come s'è detto, indipendente da ω , quindi sarà

$$\Delta F = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr};$$

e si porrà allora

$$F = \frac{1}{2} A r^2 + B \ln \frac{r}{R}$$

(funzione finita e continua insieme colle derivate di qualunque ordine nel campo considerato), dove A , B ed R siano costanti arbitrarie, risultando infatti $\Delta F = 2A$, quindi $\Delta^2 F = 0$ ⁽²⁴³⁾. Ed essendo espresse in generale σ_t e σ_r , come s'è già detto, dalle sopra indicate derivate seconde di F , e $\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_t + \sigma_r)$, risulta

$$\sigma_t = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_r = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z = \frac{2A}{m}.$$

Tali espressioni sono sufficienti a risolvere il problema contenendo due costanti arbitrarie, che possono determinarsi in modo che risulti $\sigma_r = -p_i$ per $r = r_i$, e $\sigma_r = -p_e$ per $r = r_e$. Le espressioni finali della tensione sono

$$\begin{aligned} \sigma_t &= -\frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left\{ p_e r_e^2 - p_i r_i^2 + (p_e - p_i) \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} \right\}, \\ \sigma_r &= -\frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left\{ p_e r_e^2 - p_i r_i^2 - (p_e - p_i) \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} \right\}, \\ \sigma_z &= -\frac{2}{m} \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} = \text{costante} \text{ (244)}. \end{aligned}$$

⁽²⁴³⁾ Si vede facilmente dalle espressioni della nota precedente (ricordando che ΔF è costante) che risulta uno spostamento radiale e indipendente dall'anomalia, come ovviamente s'era previsto.

⁽²⁴⁴⁾ Pur trattandosi di un corpo ciclico, si è avuta questa volta la soluzione senza considerare esplicitamente la condizione di monodromia dello spostamento, perchè

La fig. 72 mostra l'andamento di σ_t e σ_r (posto $p_i r_i^2 > p_e r_e^2$).

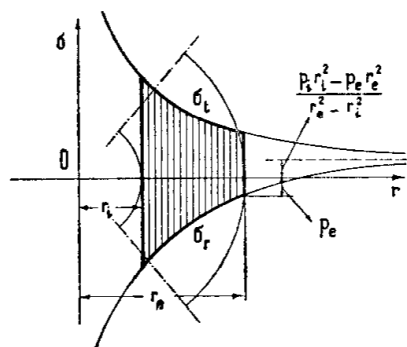


Fig. 72

Si può osservare che per $p_e = 0$ (sola pressione interna) risulta

$$\sigma_t(r_i) = p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} > p_i :$$

al lembo interno la trazione in direzione tangenziale supera sempre la pressione radiale, qualunque sia lo spessore del tubo.

60. Ricordata la definizione (51) del sistema piano di deformazione, si potrà definire per analogia come *sistema piano di tensione* quello caratterizzato dalle analoghe condizioni poste per le componenti della tensione, cioè dalle condizioni

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0.$$

Si può osservare subito che formalmente la sola differenza tra il sistema così definito e il sistema piano di deformazione è quella riguardante le componenti σ_z e ε_z : sono nulle infatti in entrambi i sistemi le componenti τ_{zx}, τ_{yz} come le γ_{zx}, γ_{yz} , e tutte le componenti di deformazione e di tensione sono indipendenti da z . Mentre nel sistema piano di deformazione si aveva, con $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)$, si ha qui con $\sigma_z = 0$,

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{m-1}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \text{ (dalla terza delle (41'))}.$$

Le due prime equazioni indefinite dell'equilibrio assumono la stessa forma del caso precedente, e la terza dà anche qui la condizione $Z = 0$.

si è trovato uno spostamento indipendente da ω . E ciò è dovuto, come s'è visto nella nota precedente, alla scelta di una soluzione della $\Delta^2 F = 0$ per la quale è $\Delta F = \text{cost}$.

L'equazione $\Delta^2 F = 0$, con F dipendente dalla sola r , ammette un'altra soluzione indipendente da quella considerata, cioè il prodotto $r^2 \ln \frac{r}{R}$; ma essendo

$$\Delta \left(r^2 \ln \frac{r}{R} \right) = 4 \left(1 + \ln \frac{r}{R} \right),$$

per tale funzione di Airy lo spostamento non risulterebbe indipendente da ω (nè funzione periodica con periodo 2π), perciò non sarebbe soddisfatta la condizione di monodromia.

La differenza essenziale tra i due problemi si manifesta invece nelle condizioni di congruenza, poichè questa volta esse non si riferiscono più a un problema geometrico (integrazione della deformazione) posto nel piano, e si capisce perciò che non basterà più la sola prima delle (16). Si riscontra infatti immediatamente che soltanto la quarta e la quinta di queste sono ora identicamente soddisfatte, mentre dalla seconda, dalla terza e dalla quarta si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0.$$

La ε_z risulta dunque necessariamente funzione lineare; e poichè dalla terza delle (41₂') si ha (con $\sigma_z = 0$)

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y),$$

dev'essere una semplice espressione lineare in x ed y anche la somma $\sigma_x + \sigma_y$. Si vede così che il sistema piano di tensione è in realtà uno stato molto più particolare del sistema piano di deformazione, e però di assai minore interesse.

Invece della prima condizione di Saint-Venant potrà poi considerarsi anche qui la (50), dalla quale, essendo per quanto ora s'è visto $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$, si ottiene semplicemente

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Si ha dunque una condizione per i dati del problema (come la $Z = 0$, comune al caso precedente), necessaria affinché possa aversi un sistema piano di tensione: dev'essere nulla cioè la divergenza della forza di massa. Come le equazioni d'equilibrio, così anche le condizioni al contorno si esprimono infine formalmente allo stesso modo del caso precedente.

Le espressioni di $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ in funzione di σ_x, σ_y risultano questa volta dalle (41₂') immediatamente:

$$\varepsilon_x = \frac{m}{2(m+1)G} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{m}{2(m+1)G} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right).$$

È interessante osservare che esse sono le stesse (53) del sistema piano di deformazione, mutato m in $m+1$.

Quando, risolto un problema di deformazione piana nel caso particolare delle forze di massa a divergenza nulla, si ottenga per la somma $\sigma_x + \sigma_y$ un'espressione lineare, le stesse σ_x , σ_y e τ_{xy} apparterranno anche ad un sistema piano di tensione (evidentemente colle medesime forze di massa e le medesime forze al contorno della sezione). Essendo in questo secondo stato $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, si avrà così la soluzione del problema riguardante lo stesso cilindro, ma questa volta colle basi libere⁽²⁴⁵⁾. Quest'ultimo problema avrà invece per soluzione uno stato non piano nel caso generale, quando cioè nella soluzione del primo la somma $\sigma_x + \sigma_y$ non sia lineare (come avverrà necessariamente, per la (51), quando non sia nulla la divergenza delle forze di massa).

Per il tubo considerato al paragrafo precedente esiste anche lo stato piano di tensione, risultando come s'è visto $\sigma_x + \sigma_y = \text{cost.}$.

(245) Basterà ovviamente aggiungere alla prima soluzione uno stato di tensione con componenti tutte nulle fuorchè una

$$\sigma'_z = -\sigma_z = -\frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{m}(a + bx + cy),$$

essendo a, b, c tre costanti (soluzione del problema del cilindro sollecitato alle basi da forze σ'_z opposte alle σ_z , libero da forze di massa e da forze alla superficie laterale). Le corrispondenti componenti di deformazione saranno

$$\varepsilon'_z = -\frac{1}{mE}(a + bx + cy), \quad \varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \frac{1}{m^2 E}(a + bx + cy); \quad \gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0.$$

Per le componenti dello spostamento si ottiene quindi infine, come facilmente può verificarsi,

$$\zeta' = -\frac{1}{mE}(a + bx + cy)z,$$

$$\xi' = \frac{1}{m^2 E} \left\{ ax + \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + cxy \right\} + \frac{b}{2mE} z^2,$$

$$\eta' = \frac{1}{m^2 E} \left\{ ay + \frac{c}{2}(y^2 - x^2) + bxy \right\} + \frac{c}{2mE} z^2$$

(sempre s'intende a meno di un moto rigido). Risulta dalla prima di queste espressioni che la sezione del cilindro si mantiene ancora piana.