CAPITOLO VIII

SOLIDI ISOTROPI

53. Nel caso particolare dei solidi elastici isotropi, unico oggetto delle usuali applicazioni, si ha una notevolissima semplificazione delle relazioni fondamentali (37_1) e (37_2), e quindi di tutti i successivi sviluppi della teoria, riducendosi i 21 coefficienti d'elasticità a due soli distinti.

Corpo isotropo è quello le cui proprietà si manifestano ugualmente in ogni direzione [229]. (Quando all'isotropia si accompagni l'omogeneità, le proprietà saranno uguali anche in ogni punto.) Agli effetti pratici sono da considerare isotropi anche certi materiali costituiti da aggregati di cristalli, benchè ciascuno di questi sia ovviamente un corpo anisotropo: quando cioè tali cristalli siano orientati senza regola, e così numerosi in ogni più piccola porzione che occorra nelle misurazioni riguardanti le considerate proprietà, che risultino praticamente compensate le diversità delle proprietà medesime che si manifestano secondo le diverse direzioni in ciascuno di essi. (Si tratta dunque di isotropia in senso statistico.) Particolarmente importante per le costruzioni è il caso dell'acciaio, che si comporta in ogni esperienza, entro certi limiti della tensione, come materiale elastico isotropo.

Dalla definizione di isotropia segue evidentemente che ove si considerino in un dato punto di un corpo elastico isotropo due stati di deformazione rappresentati dalle medesime componenti, ε e γ, riferite a due diverse terne di assi cartesiani, si avranno in tale punto rispettivamente due stati di tensione rappresentati anch'essi dalle medesime componenti, σ e τ, riferite alle due stesse terne. Potrà dirsi per brevità che quando in un punto di un corpo isotropo ruoti la deformazione di un certo angolo intorno a un certo asse, allo stesso modo (cioè intorno all'asse medesimo e del medesimo angolo) si troverà rotata in esso punto anche la

---

(229) S'intende la direzione rispetto ad esso corpo (o se si vuole, rispetto a una terna rigidamente connessa col corpo medesimo).

tensione ([230]). Si dimostra allora facilmente la proprietà fondamentale della *coincidenza*, in ogni punto di un solido elastico isotropo, *degli assi principali della tensione con quelli della deformazione.* Se infatti l'asse principale 1 della deformazione non fosse tale anche per la tensione, agirebbe sul piano 2,3 ad esso normale una tensione tangenziale τ: rotando la deformazione dell'angolo π intorno all'asse medesimo, questa dovrebbe mutarsi nella sua opposta (fig. 67), e così lo stato di tensione verrebbe a variare, mentre resterebbe in realtà immutata la deformazione, perchè rappresentata dalle stesse dilatazioni principali riferite alle stesse direzioni; e così risulterebbero per una medesima deformazione due tensioni diverse. (Basta dunque che si tratti di un corpo elastico nel senso più generale, dovendo solo corrispondere ad ogni deformazione un'unica tensione.)

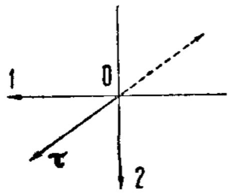

Fig. 67

Considerata la terna di riferimento secondo le comuni direzioni principali, è chiaro che la corrispondenza tra deformazione e tensione resterà definita da tre sole relazioni, ovviamente indipendenti dall'orientazione di tale terna (s'intende rispetto all'elemento), che nel caso dell'elasticità lineare si scriveranno

$$\sigma_1 = c_{11}\,\varepsilon_1 + c_{12}\,\varepsilon_2 + c_{13}\,\varepsilon_3\,,$$

$$\sigma_2 = c_{21}\,\varepsilon_1 + c_{22}\,\varepsilon_2 + c_{23}\,\varepsilon_3\,,$$

$$\sigma_3 = c_{31}\,\varepsilon_1 + c_{32}\,\varepsilon_2 + c_{33}\,\varepsilon_3\,,$$

dove i due indici saranno sempre scambiabili; e sarà inoltre, per la suddetta indipendenza, $c_{11} = c_{22} = c_{33}$. Se ora si considera la deformazione di componenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ rotata dell'angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse 1, le cui componenti secondo i medesimi assi 1, 2, 3 sono $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon_3$, $\varepsilon'_3 = \varepsilon_2$, si ha per la tensione ad essa corrispondente, ugualmente rotata, $\sigma'_1 = \sigma_1$, quindi per la prima delle precedenti, espresse le ε per le ε' secondo tali ultime relazioni,

$$\sigma'_1 = c_{11}\,\varepsilon'_1 + c_{13}\,\varepsilon'_2 + c_{12}\,\varepsilon'_3\,;$$

([230]) Si ricordi che cambiando il senso positivo di tutt'e tre gli assi di riferimento, e mutando pertanto la terna oraria in antioraria o viceversa, le componenti della tensione e della deformazione restano invariate. Dunque ogni assegnata terna, quand'anche non possa ottenersi da un'altra terna prefissata per semplice rotazione, è equivalente ad una in tal modo ottenuta per quanto riguarda il riferimento di una tensione o di una deformazione.

onde si conclude per confronto colla stessa prima precedente applicata alla nuova deformazione, cioè

$$\sigma_1' = c_{11}\,\varepsilon_1' + c_{12}\,\varepsilon_2' + c_{13}\,\varepsilon_3' ,$$

che dovrà essere $c_{12} = c_{13}$. Così ovviamente anche $c_{23} = c_{21}$; e così infine risultano tutti uguali fra loro i coefficienti coi due indici diversi, come uguali tra loro i tre cogli indici uguali: si hanno cioè due soli coefficienti d'elasticità. Si porrà

$$\lambda = c_{12}\,(= c_{23} = c_{31}), \qquad 2\mu = c_{11} - c_{12}\,(= c_{11} - \lambda = c_{22} - \lambda = c_{33} - \lambda);$$

e ricordando allora l'espressione della dilatazione cubica $\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, si scriveranno le relazioni d'elasticità (riferite per ora agli assi principali) nella forma

$$\sigma_i = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_i \qquad (i = 1,\,2,\,3).$$

Per il riferimento ad una terna generica x, y, z giova considerare il tensore $\mathcal{T}$ decomposto in due, corrispondenti ai due termini $\lambda\Theta$ e $2\mu\varepsilon_i$ delle componenti di essi secondo gli assi principali:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \lambda\Theta\,\mathcal{T}_u + 2\mu\,\mathcal{D}',$$

essendo $\mathcal{T}_u$ il tensore unitario ($\mathcal{T}_u\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$). Risulta così

$$\sigma_x = \lambda\Theta\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + 2\mu\mathcal{D}'\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \lambda\Theta\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + 2\mu\mathcal{D}'\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \mu\gamma_{xy}.$$

Le relazioni d'elasticità per i solidi isotropi possono dunque esprimersi nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x , & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} , \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_y , & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} , \\ \sigma_z &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_z , & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx} . \end{aligned} \tag{41_1}$$

Si avverta che mentre ogni tensione normale è funzione delle tre dilatazioni (e indipendente dagli scorrimenti), ogni tensione tangenziale è semplicemente proporzionale allo scorrimento di pari indici.

Per ricavare dalle precedenti le espressioni delle componenti della deformazione in funzione di quelle della tensione si può cominciare osservando che dalla somma delle prime tre di esse si ottiene

$$\Theta = \frac{\Psi}{3\lambda + 2\mu}. \tag{42}$$

Dalle tre medesime si hanno quindi immediatamente le ε, e dalle altre tre le γ:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Psi + \frac{1}{2\mu}\sigma_x, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu}\tau_{xy},\\
\varepsilon_y &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Psi + \frac{1}{2\mu}\sigma_y, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu}\tau_{yz}, \qquad (41_2)\\
\varepsilon_z &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Psi + \frac{1}{2\mu}\sigma_z, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu}\tau_{zx}.
\end{aligned}$$

54. Ai coefficienti λ e μ, noti come *costanti di Lamé*, sogliono sostituirsi nella trattazione dei problemi d'ingegneria i coefficienti E ed m definiti ponendo

$$\lambda = \frac{m}{(m+1)(m-2)}E, \qquad \mu = \frac{m}{2(m+1)}E; \tag{43}$$

e poichè insieme con essi suol conservarsi anche lo stesso μ mutandone il simbolo in G, si usano così tre coefficienti, legati dalla seconda di tali relazioni, che si scriverà ora

$$E = 2\frac{m+1}{m}G. \tag{44}$$

Le espressioni di m e di E in funzione di λ e μ si ottengono osservando da prima che dalle (43) si ha $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{m-2}{2}$, onde

$$m = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda}, \tag{45_1}$$

e ricavando allora ovviamente dalla seconda delle medesime

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \tag{45_2}$$

Per esprimere le componenti della tensione in funzione delle componenti della deformazione per mezzo delle nuove costanti si sostituiranno nelle prime tre delle (41_1) le espressioni (43), mentre nelle altre tre basterà porre G in luogo di μ: si ottiene così

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{m}{(m+1)(m-2)}E\{(m-1)\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\}, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy},\\
\sigma_y &= \frac{m}{(m+1)(m-2)}E\{\varepsilon_x + (m-1)\varepsilon_y + \varepsilon_z\}, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \qquad (41_1')\\
\sigma_z &= \frac{m}{(m+1)(m-2)}E\{\varepsilon_x + \varepsilon_y + (m-1)\varepsilon_z\}, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}.
\end{aligned}$$

Le espressioni delle componenti della deformazione in funzione di quelle della tensione possono aversi nel modo più semplice trasformando le (41_2): basta ricavare dalle (43)

$$3\lambda + 2\mu = \frac{m}{m-2} E,$$

e ricordare che si è trovato sopra

$$\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{m-2};$$

e così risultando (come anche direttamente dalle (45_1) e (45_2))

$$\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{mE},$$

si ottiene, posta per μ la sua espressione (43),

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right\}, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy},\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right\}, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz},\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}.
\end{aligned} \tag{$41_2'$}$$

La relazione (42) diviene infine

$$\Theta = \frac{m-2}{mE}\Psi. \tag{42'}$$

Le $(41_2')$ dimostrano chiaramente il significato delle costanti d'elasticità G, E ed m, giustificando i nomi che ad esse si attribuiscono. La G, rapporto fra ogni tensione tangenziale e il rispettivo scorrimento, è detta *modulo d'elasticità tangenziale*; la E, rapporto tra una tensione normale e la rispettiva dilatazione quando siano nulle le tensioni normali nelle direzioni ad essa ortogonali $\left(E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}\right.$ quando sia $\left.\sigma_y = \sigma_z = 0\right)$, è detta *modulo d'elasticità normale, o di Young* (o semplicemente modulo d'elasticità, quando non sia da temere confusione); e il numero m, rapporto della dilatazione nella direzione della tensione σ alla contrazione (cioè la dilatazione con segno cambiato) nelle direzioni ortogonali, sempre quando in queste ultime direzioni la tensione sia nulla $\left(m = \frac{\varepsilon_x}{-\varepsilon_y} = \frac{\varepsilon_x}{-\varepsilon_z}\right.$ per $\left.\sigma_y = \sigma_z = 0\right)$, è detta *coefficiente di contrazione laterale*, o *coefficiente di Poisson*. Invece di m si usa talvolta il suo inverso $\nu = \frac{1}{m}$, indicandolo come *rapporto di Poisson* [231].

Può osservarsi infine che la proprietà delle coazioni elastiche $\int_{(S)} \Psi^{(0)} dV = 0$ significa nel caso dei corpi isotropi, valendo le (42′), che in ogni coazione elastica è nulla la variazione totale del volume.

55. Per il potenziale elastico unitario si ottiene immediatamente dalla (36_3), sostituite alle ε e alle γ le espressioni $(41_2')$,

$$\varphi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \qquad (46_1)$$

Poichè questa dev'essere una forma definita positiva, si ha subito ponendo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ la condizione $G > 0$. Ponendo invece nulle σ_y, σ_z e tutte le τ (tensione monoassiale), si ottiene $E > 0$. Da queste due e dalla (44) risulta $\frac{m}{m+1} > 0$; per la quale restano esclusi i valori di m interni all' intervallo $(-1, 0)$, estremi compresi. Un' altra condizione per m si ottiene infine considerando l'espressione di φ nella forma

$$\varphi = \frac{m-2}{6mE}\Psi^2 + \frac{1}{12G}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right\} + \qquad (46_1')$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2),$$

---

[231] A chiarimento di tali significati si consideri da prima uno stato di tensione monoassiale, ponendo per esempio $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; e siano ds_1, ds_2, ds_3 le lunghezze infinitesime degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo orientato secondo gli assi principali. Dopo la deformazione la lunghezza ds_1, sarà aumentata divenendo $ds_1(1 + \varepsilon_1)$, mentre gli altri due spigoli risulteranno contratti avendo assunto rispettivamente le lunghezze $ds_2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{m}\right)$, $ds_3\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{m}\right)$ (fig. 68). Lo stesso effetto si ha nel caso più generale in cui, non coincidendo le direzioni degli spigoli del parallelepipedo colle direzioni principali della tensione e della deformazione, le stesse tensioni normali (di cui due nulle) siano accompagnate da tensioni tangenziali. S' intende che allora si manifesterà tra ogni coppia di facce opposte, oltre alla traslazione relativa in direzione ad esse normale (allontanamento o avvicinamento delle facce di una coppia, e rispettivamente avvicinamento o allontanamento delle facce delle altre due), anche uno scorrimento proporzionale alla distanza delle facce medesime e alla tensione tangenziale rispettiva.

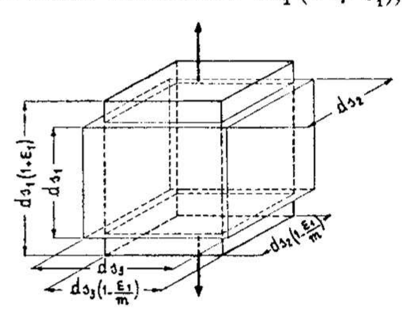

Fig. 68

la cui equivalenza colla precedente può facilmente riscontrarsi: poste nulle le τ e le σ uguali fra loro (tensione di tipo idrostatico), si ottiene infatti $\frac{m}{m-2} > 0$, e restano così esclusi anche i valori di m interni all'intervallo $(0, 2)$. La costante m risulta dunque necessariamente esterna all'intervallo $(-1, 2)$ estremi compresi (quindi la $\nu = \frac{1}{m}$ necessariamente interna all'intervallo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$)[232]. Nel caso limite di $m \to 2$ tende a zero la dilatazione cubica, per la (42'), in ogni stato di tensione.

Ricordando le definizioni date alla fine del paragrafo 30, si osservi ora che nel caso dei solidi isotropi si ha dalle (41_1) e (42)

$$s_x = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_x - \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\,\Theta = 2\mu\left(\varepsilon_x - \frac{\Theta}{3}\right) = 2G\, e_x\,,$$

e così

$$s_y = 2G\, e_y\,, \qquad s_z = 2G\, e_z\,;$$

onde si conclude, considerate anche le relazioni fra le τ e le γ, che il deviatore della tensione dipende solo dal deviatore della deformazione, essendo anzi ad esso semplicemente proporzionale (per essere componenti del secondo, come di $\mathcal{D}'$, le $\gamma/2$). Osservato poi che allo stesso modo la tensione normale media dipende solo dalla dilatazione media secondo la relazione (42') (ossia anche per la (44)

$$\Psi = 2\,\frac{m+1}{m-2}\,G\Theta = 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}\,G\Theta),$$

risulta che in questo caso l'espressione

$$\varphi = \frac{1}{6}\,\Psi\Theta + \frac{1}{2}\,(s_x\, e_x + \dots + \tau_{zx}\,\gamma_{zx})$$

considerata alla fine del paragrafo 30 rappresenta effettivamente la scissione dell'energia elastica unitaria in due parti, dovute la prima alla tensione normale media e alla corrispondente deformazione (cioè la dilatazione media), la seconda alla deviazione della tensione e alla corrispondente deformazione (cioè il rispettivo deviatore). Può scriversi dunque $\varphi = \varphi_m + \varphi_d$; e la parte φ_m può dirsi anche energia dovuta alla variazione di volume (variazione nulla nel secondo dei considerati stati di tensione), mentre la

(232) Per l'acciaio si ha in media $m = \frac{10}{3}$, con piccole variazioni.

parte φ_d può dirsi anche energia dovuta alla variazione di forma (nulla questa nel primo degli stati medesimi). Siccome è chiaro (per la (42')) che la φ_m è rappresentata dal primo termine della precedente espressione (46_1), il secondo termine di questa deve rappresentare la φ_d; come infatti può agevolmente riscontrarsi ([233]).

L'espressione di φ per le componenti della deformazione risulta molto semplice colle costanti di Lamé:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left\{\lambda\Theta^2 + 2\mu\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \mu\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right\}. \qquad (46_2)$$

56. Si scriveranno ora esplicitamente le equazioni fondamentali della statica dei solidi elastici isotropi ed omogenei (ponendo dunque che le costanti d'elasticità siano indipendenti dal punto).

Le *equazioni indefinite dell'equilibrio elastico, o equazioni di Cauchy,* si ottengono col procedimento generale indicato al paragrafo 39, senza alcuna difficoltà, nella forma

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \\ &\Delta\eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \\ &\Delta\zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0, \end{aligned}\right. \qquad (47)$$

essendo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(operatore di Laplace).}$$

Considerato invece il problema posto come al paragrafo 32, si scrivano da prima le condizioni di Saint-Venant (16) sostituendo alle compo-

---

([233]) Dalla $s_x + s_y + s_z = 0$ si ha ovviamento

$$2\,(s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x) = -\,(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2),$$

e quindi

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 = 2\,\{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - (s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x)\} = 3\,(s_x^2 + s_y^2 + s_y^2) =$$

$$= 6G\,(s_x e_x + s_y e_y + s_z e_z).$$

nenti della deformazione le loro espressioni ($41'_2$) e tenendo conto della (44):

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{m+1}\left\{\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}\right\}-\frac{1}{m+1}\left\{\frac{\partial^2(\sigma_y+\sigma_z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\sigma_z+\sigma_x)}{\partial x^2}\right\}=2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\,\partial y}\,,\\
&\frac{m}{m+1}\left\{\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2}\right\}-\frac{1}{m+1}\left\{\frac{\partial^2(\sigma_z+\sigma_x)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}\right\}=2\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y\,\partial z}\,,\\
&\frac{m}{m+1}\left\{\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}\right\}-\frac{1}{m+1}\left\{\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_y+\sigma_z)}{\partial z^2}\right\}=2\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z\,\partial x}\,,\\
&\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left\{\sigma_x-\frac{1}{m+1}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right\},\\
&\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\left\{\sigma_y-\frac{1}{m+1}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right\}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right\},\\
&\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{\sigma_z-\frac{1}{m+1}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right\}.
\end{aligned}\qquad(48)$$

Sommando la prima e la terza di queste, si ottiene

$$\frac{m}{m+1}\Delta\sigma_x-\frac{m+2}{m+1}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2(\sigma_y+\sigma_z)}{\partial x^2}-\frac{1}{m+1}\Delta(\sigma_y+\sigma_z)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right\},$$

ossia

$$\Delta\sigma_x-\frac{1}{m+1}\Delta(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial x^2}-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=0;$$

insieme con la quale saranno da considerare le due che da essa si ottengono per sostituzione circolare degl'indici. La sesta delle precedenti può scriversi poi nella forma

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z\,\partial x}-\frac{1}{m+1}\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

ossia

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2} -$$

$$- \frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial z\,\partial x} = 0,$$

e quindi

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right\} = 0,$$

dove pure potrà operarsi la suddetta sostituzione degl'indici. Ricordando infine le equazioni indefinite dell'equilibrio (25) e la definizione di Ψ, si scriveranno le *equazioni di Beltrami:*

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{m+1}\Delta\Psi\\
&\Delta\sigma_y + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{m+1}\Delta\Psi\\
&\Delta\sigma_z + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{m+1}\Delta\Psi\\
&\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0\\
&\Delta\tau_{yz} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} = 0\\
&\Delta\tau_{zx} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

Si avverta che la somma delle prime tre dà

$$(m-1)\,\Delta\Psi + (m+1)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0. \tag{50}$$

Quando dunque sia nulla la divergenza delle forze di massa, e in particolare quando siano nulle le forze medesime, sarà $\Delta\Psi = 0$ (onde anche per la (42′), non potendo essere $m = 0$, $\Delta\Theta = 0$). Nel caso delle forze di massa nulle le equazioni di Beltrami si riducono dunque a contenere ciascuna due soli termini; e tutte le componenti della tensione risultano funzioni biarmoniche ([234]).

L'osservata semplificazione delle equazioni di Beltrami rende interessante l'indicazione del modo di eliminare le forze di massa da ogni problema. Basta a tal uopo considerare una soluzione delle equazioni di Cauchy valida per il corpo indefinito, cioè in tutto lo spazio, quando agisca in una porzione finita di esso un determinato sistema di forze di massa: soluzione che è stata data da W. Thomson (Lord Kelvin) come quella sodisfacente alla condizione che lo spostamento da essa espresso si annulli all'infinito ([235]).

È chiaro infatti che quando sia da risolvere il problema del corpo generico soggetto a un generico sistema di forze di massa e di superficie, si potrà considerare la soluzione di Lord Kelvin per le forze di massa medesime, alla quale sarà da aggiungere la soluzione del problema riguardante il corpo assegnato libero da forze di massa, e con forze di superficie pari alla differenza tra quelle assegnate e le tensioni risultanti alla superficie esterna di esso da tale prima soluzione.

Si osservi da ultimo che le equazioni di Beltrami contengono la sola costante elastica m: dunque la tensione dipende solo da m per il corpo vincolato rigidamente in senso stretto, e anche nel caso di vincoli elastici omogenei, quando i corpi che fanno da vincoli siano dello stesso materiale del corpo vincolato. È chiaro infatti che le condizioni di congruenza risultanti dalle equazioni (19) restano allora anch'esse indipendenti dalla seconda costante elastica, per essere questa un fattore comune a tutti i termini noti delle equazioni medesime. (Tale conclusione vale naturalmente anche per i corpi ciclici.) Può dirsi, anche nel caso più generale di un sistema di corpi costituiti di uno stesso materiale, che le tensioni dovute all'azione di forze quali si vogliano dipendono solo dalla costante m; e dipendono invece da entrambe le costanti gli stati di coazione elastica.

([234]) Si ricordi che una funzione f dicesi armonica quando sodisfa all'equazione $\Delta f = 0$; biarmonica quando sodisfa alla $\Delta^2 f = 0$ (essendo $\Delta^2 = \Delta\Delta$).

([235]) La soluzione di Lord Kelvin riguarda propriamente l'azione di una forza concentrata in un punto. Da essa si ottiene ovviamente per integrazione la soluzione per l'azione di una forza ripartita su una certa porzione dello spazio.