CAPITOLO VII

ASPETTI TRADIZIONALI ED APPLICATIVI DELLA STATICA DEI SOLIDI ELASTICI

46. Benchè nei due capitoli precedenti sia stato esposto tutto quanto vi è di essenziale sul problema generale della statica dei solidi elastici, non sarà inutile esporre qui alcuni classici teoremi riguardanti particolari aspetti del problema medesimo; interessanti non solo per l'importanza che hanno avuta nello sviluppo della Scienza delle costruzioni (e per trovarsi quindi frequentemente citati), ma anche perchè possono essere vantaggiosamente applicati per la risoluzione approssimata di importanti problemi particolari.

Sia un corpo elastico nel senso ordinario, cioè un corpo per il quale sia valida la relazione lineare fra tensione e deformazione, soggetto a forze (di massa e di superficie) variabili nel tempo in modo arbitrario, le quali costituiranno in ogni istante, comprese fra esse le forze d'inerzia nonchè le reazioni dei vincoli, un sistema in equilibrio. Si ricordi che il lavoro compiuto da esse forze fra un dato istante t_0 e l'istante generico successivo t_1 è uguale per definizione all'incremento del potenziale elastico nel tempo medesimo: posto che all'istante t_0 tutte le forze siano nulle [197], poichè il potenziale elastico in tale istante sarà allora l'energia vincolata del corpo considerato libero (§ 40), segue che il suddetto lavoro $\mathcal{L}_e$ resta uguale al lavoro di deformazione, sempre per il corpo considerato libero, corrispondente alle forze dell'istante t_1, ossia

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{(S)} (\sigma_x \varepsilon_x + \ldots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \, dV,$$

inteso che le componenti della tensione e della deformazione siano quelle dovute all'azione di tali ultime forze. Se a questa espressione si applica

---

[197] Dovranno esser nulle in particolare tutte le accelerazioni, e così pure le reazioni.

il teorema dei lavori virtuali considerando le forze medesime e la suddetta tensione (con esse in equilibrio) ed assumendo come spostamento quello stesso corrispondente alla suddetta deformazione, cioè lo spostamento effettivo dell'istante t_1 riferito alla configurazione dell'istante t_0, si ottiene il *teorema di Clapeyron*:

Il lavoro compiuto da un sistema di forze applicate a un corpo elastico, le quali varino in modo arbitrario essendo tutte nulle all'istante iniziale, uguaglia in ogni istante successivo la metà del lavoro virtuale delle forze istantanee per gli spostamenti istantanei (riferiti alla configurazione iniziale) ([198]). Si ricordi che tra le forze vanno comprese le reazioni (che non daranno contributo quando i vincoli siano rigidi in senso stretto) ([199]) e le forze d'inerzia. Non considerando queste ultime nel primo membro dell'uguaglianza, si dovrebbe aggiungere al secondo l'incremento dell'energia cinetica: è da avvertire per altro che nel caso di costruzioni aventi ufficio statico i moti saranno così lenti da potersi trascurare energia cinetica ed accelerazioni. (È chiaro infatti che così dovrà essere per mantenersi abbastanza piccoli gli spostamenti, quando non si tratti di moti vibratori.)

47. Siano $\sigma_x^{(1)}, \ldots, \tau_{zx}^{(1)}$ ed $\varepsilon_x^{(1)}, \ldots, \gamma_{zx}^{(1)}$ le componenti della tensione e della deformazione dovute all'azione di un certo sistema di forze su un corpo elastico (nel senso ordinario, come al paragrafo precedente); $\sigma_x^{(2)}, \ldots, \tau_{zx}^{(2)}$ ed $\varepsilon_x^{(2)}, \ldots, \gamma_{zx}^{(2)}$ le analoghe componenti per l'azione sul medesimo corpo di un secondo sistema di forze. Dalla formula di reciprocità (38), cioè

$$\sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} + \ldots + \tau_{zx}^{(1)} \gamma_{zx}^{(2)} = \sigma_x^{(2)} \varepsilon_x^{(1)} + \ldots + \tau_{zx}^{(2)} \gamma_{zx}^{(1)},$$

integrando i due membri nello spazio occupato dal corpo e ricordando il teorema dei lavori virtuali, si ottiene il *teorema di reciprocità, o di Betti*:

Il lavoro delle forze di un primo sistema per gli spostamenti dovuti

---

([198]) Non occorre insistere sull'assoluta arbitrarietà della variazione delle forze, così per intensità come per direzione.

Non si ripete poi che va riguardata come invariabile la configurazione cui si riferiscono le espressioni dei considerati lavori.

([199]) Dicendo vincoli rigidi in senso stretto si vuol qui comprendere anche il caso che siano assegnati per i punti vincolati spostamenti invariabili nel tempo (essendo pure fissati invariabilmente i punti medesimi e le direzioni dei vincoli). Il teorema resterà allora valido pur non essendo nulle all'inizio le reazioni; ma nella dimostrazione il lavoro di deformazione dovrà intendersi riferito al corpo coi suoi vincoli. (Si avverta che se gli spostamenti fossero variabili il lavoro di deformazione così inteso non sarebbe uguale all'incremento $\mathcal{L}_e$ del potenziale elastico.)

Nel caso generale, considerandosi le reazioni alla stessa stregua delle altre forze, s'intenderà che le condizioni di vincolo possano variare anch'esse nel tempo in modo affatto arbitrario.

all'azione di un secondo sistema di forze su un dato corpo elastico è uguale al lavoro di queste ultime forze per gli spostamenti dovuti all'azione delle prime sul corpo medesimo. Non occorrono ipotesi sui vincoli, poichè anche qui si considerano le reazioni alla stessa stregua delle altre forze.

Può considerarsi come caso particolare del teorema di Betti il *teorema di Maxwell* già enunciato al paragrafo 37 : è interessante per altro osservare che inversamente può farsi discendere da quest'ultimo il teorema medesimo. Considerato da prima il corpo vincolato rigidamente in senso stretto com'è richiesto dal teorema di Maxwell, basta infatti applicare tale teorema a due forze elementari generiche appartenenti rispettivamente all'uno e all'altro dei due sistemi supposti agenti sul corpo medesimo nell'enunciato del teorema di Betti, ed operare successivamente l'integrazione rispetto a ciascuno di essi sistemi. Per passare al caso dei vincoli generici si potrà poi pensare sostituito al sistema dei vincoli effettivi un sistema di vincoli ausiliari rigidi isostatico, e considerare le reazioni effettive come forze direttamente applicate: le reazioni dei vincoli ausiliari saranno allora evidentemente nulle, e i vincoli medesimi serviranno solo a render determinati gli spostamenti, i quali risulteranno diversi da quelli effettivi, nell'uno e nell'altro caso, per un moto rigido; ma è chiaro che tale differenza lascia invariato ciascuno dei due lavori considerati nel teorema di Betti.

48. Dallo stesso concetto di potenziale deriva immediatamente il così detto principio della minima energia potenziale totale. Basta considerare che nel passaggio di un corpo elastico da una configurazione ad un'altra infinitamente vicina il lavoro compiuto dalle forze, cioè assorbito dal corpo, uguaglia da un lato l'incremento del potenziale elastico, dall'altro il decremento del potenziale delle forze medesime ([200]), ammessa naturalmente l'esistenza di quest'ultimo: segue che la variazione prima della somma dei due potenziali è sempre nulla ([201]). (Essendo esclusa dal programma

---

([200]) Si attribuisce sempre alla parola potenziale lo stesso significato di energia potenziale.

([201]) Si ricordi che la variazione prima è la parte principale della variazione infinitesima.

È da avvertire che mentre l'incremento del potenziale elastico in un certo intervallo di tempo uguaglia il lavoro delle forze che effettivamente tengono il corpo in equilibrio istante per istante, variabili nello stesso intervallo, a causa della deformazione che si produce, secondo le relazioni d'elasticità che determinano il conseguente variare della tensione, e le condizioni d'equilibrio di questa colle forze medesime, il decremento del potenziale delle forze uguaglia invece il lavoro delle forze assegnate, variabili anch'esse per lo spostamento dei loro punti d'applicazione (quindi per la medesima deformazione del corpo), ma secondo una legge assegnata nel definire il campo al quale esse appartengono.

di questo volume, come già s'è avvertito, ogni considerazione sulla stabilità dell'equilibrio, si omette qui di dimostrare che quando l'equilibrio è stabile il potenziale totale è effettivamente minimo; cosa che non ha importanza per le applicazioni non riguardanti i fenomeni di instabilità.) Detto $-\mathcal{U}$ il potenziale delle forze, sarà $\delta(\Phi - \mathcal{U}) = 0$; e si converrà di conservare tale espressione anche quando non esista il potenziale $-\mathcal{U}$, intendendo sempre per $\delta\mathcal{U}$ (come già al paragrafo 29) il lavoro delle forze considerate invariabili per lo spostamento infinitesimo cui si riferisce la variazione $\delta\Phi$.

La medesima relazione assumerà invece altro valore teorico ed applicativo in virtù del teorema dei lavori virtuali, che consente di esprimere Φ come integrale di una funzione delle componenti della deformazione, le cui derivate sono le omologhe componenti della tensione (§ 29), quando sia stabilita (in conformità dei dati sperimentali, e ordinariamente in forma lineare) l'espressione di tali derivate per le stesse componenti della deformazione, e quindi l'espressione della funzione medesima. Si ha così un *teorema della minima energia potenziale totale,* risultante dall'applicazione al caso dei corpi elastici del teorema dei lavori virtuali e del suo primo inverso: la relazione $\delta(\Phi - \mathcal{U}) = 0$ si verifica necessariamente per qualunque spostamento infinitesimo continuo (posto che non intervengano variazioni dello stato naturale dei singoli elementi) quando le forze per le quali è espresso $\delta\mathcal{U}$ siano effettivamente quelle che equilibrano la tensione corrispondente alla deformazione, in funzione della quale è espresso Φ; e inversamente quando sia verificata la relazione medesima per qualunque spostamento infinitesimo (continuo), tale tensione sarà certamente in equilibrio con tali forze. Poichè lo spostamento arbitrario potrà intendersi come variazione dello spostamento effettivo dovuto all'azione delle forze considerate, si enuncerà in breve il teorema al modo seguente:

La condizione $\delta(\Phi - \mathcal{U}) = 0$ per qualunque variazione dello spostamento è necessaria e sufficiente per l'equilibrio delle forze considerate nell'espressione $\delta\mathcal{U}$ con la tensione corrispondente all'espressione del potenziale Φ.

È chiaro infatti che quando si ripeta il procedimento della dimostrazione del primo inverso del teorema dei lavori virtuali, ma ponendo nell'espressione

$$\int_{(S)} \left\{ \sigma_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + \cdots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right\} dV$$

le componenti $\sigma_x, \ldots, \tau_{zx}$ espresse in funzione delle componenti della deformazione $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$, e queste a lor volta per le derivate delle componenti di uno spostamento s [202], si giungerà alle stesse equazioni d'equilibrio

[202] Si ricordi quanto s'era detto alla fine del paragrafo 28 sull'utilità degli inversi del teorema dei lavori virtuali.

È ovvio che tale spostamento s è qui affatto indipendente dalle funzioni arbitrarie ξ, η, ζ.

(25) e alle condizioni al contorno (25′) espresse anch'esse per tali ultime componenti; vale a dire, nel caso ordinario dell'elasticità lineare, le ordinarie equazioni indefinite dell'equilibrio elastico (di Cauchy) colle rispettive condizioni al contorno ([203]). Basta allora considerare, come s'è detto, le arbitrarie componenti infinitesime di spostamento ξ, η, ζ come variazioni delle componenti di s ([204]), per concludere che tale risultato si è ottenuto dalla condizione $\delta \Phi = \delta \mathfrak{U}$ ([205]), cioè da un problema di calcolo delle variazioni in cui sono variabili indipendenti le coordinate del punto generico, e funzioni incognite tali ultime componenti ([206]).

([203]) Le condizioni di continuità da considerare a priori per le incognite componenti di s e le loro derivate sono quelle già ricordate più volte e da ultimo al paragrafo 39, dove sono ricordate anche le condizioni più particolari cui risulterà sodisfacente la soluzione.

([204]) Si potrebbero dunque indicare con $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, indicando invece con ξ, η, ζ, come di consueto, le componenti di s.

([205]) S'è già detto d'intendere per $\delta\mathfrak{U}$ il lavoro virtuale di tutte le forze di massa e di superficie per la considerata variazione infinitesima dello spostamento effettivo. Esso può riguardarsi come la variazione del lavoro $\mathfrak{U}$ delle forze medesime supposte invariabili per ogni elemento materiale del corpo; il quale lavoro con segno cambiato potrebbe anche dirsi convenzionalmente potenziale delle forze quando non esista il potenziale secondo l'ordinaria definizione. (Si avverta che d'altronde quest'ultima non è applicabile alle forze di superficie, dipendenti ordinariamente non tanto dalla posizione del punto quanto dall'orientazione dell'elemento superficiale.)

([206]) Si ricordi dal paragrafo 29 che l'espressione

$$\int_{(S)} \left\{ \sigma_x \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial z} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \right) \right\} dV$$

(cioè la stessa qui considerata, col cambiamento dei simboli indicato alla nota ([204])) rappresenta la variazione del potenziale elastico appunto perchè uguale, per la formula (30), all'espressione

$$- \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta\xi + \dots + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta\zeta \right\} dV +$$

$$+ \int_{(\Sigma)} \{ (\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z) \delta\xi + \dots + (\tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z) \delta\zeta \} \, dA,$$

la quale per le (25) e (25′) è a sua volta uguale al lavoro $\delta\mathfrak{U}$ delle forze che equilibrano la tensione di componenti $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$; dunque per il teorema dei lavori virtuali (diretto). Dalla stessa (30), posto

$$\int_{(S)} \left\{ \sigma_x \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta \xi}{\partial z} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \right) \right\} dV = \delta \mathfrak{U},$$

inteso ora quest'ultimo come lavoro di assegnate forze di massa e di superficie, si

La tensione corrispondente allo spostamento s che risulta risolvendo le equazioni trovate, in equilibrio colle sole forze assegnate di massa e di superficie, è evidentemente (per essere la corrispondente deformazione congruente per definizione) quella effettivamente dovuta alla sollecitazione data dalle sole forze medesime (agenti sul corpo nella configurazione cui è riferito lo spostamento s): considerando, come s'è fatto, arbitraria la variazione dello spostamento di ogni punto, cioè ponendo il suddetto problema di calcolo delle variazioni senza condizioni a priori ([207]), si viene dunque a porre il problema d'elasticità per il corpo libero ([208]). Quando si consideri il corpo vincolato nel senso più generale accennato al paragrafo 38, uguagliando lo spostamento di ogni punto di una parte Σ' della superficie all'integrale esteso alla stessa Σ' di una certa funzione delle forze di superficie, espresse per le derivate prime dello spostamento medesimo, e si ponga la relazione $\delta \Phi = \delta \mathcal{U}$ (inteso sempre per $\delta \mathcal{U}$ il lavoro delle forze di massa e di superficie assegnate) nel campo degli spostamenti sodisfacenti a tali condizioni di vincolo, è ugualmente chiaro che dal problema variazionale così condizionato si otterranno ancora tutte le equazioni che definiscono il problema dell'equilibrio elastico riguardante le assegnate forze e le condizioni medesime; vale a dire le equazioni di Cauchy e le condizioni al contorno per i punti della superficie Σ'', com-

---

traggono per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni le relazioni (25) e (25') tra le forze medesime e la considerata tensione (primo teorema inverso).

La differenza sostanziale rispetto al caso di un corpo generico consiste dunque effettivamente, come s'è detto, nell'esistenza del potenziale elastico $\Phi = \int_{(S)} \varphi dV$ con φ funzione delle componenti della deformazione; onde (potendosi riguardare per la deformazione infinitesima i fattori $\frac{\partial \delta \xi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x}$ come variazioni di queste ultime) i fattori $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ acquistano il significato di derivate della φ rispetto alle componenti medesime, ossia di funzioni di esse e quindi delle derivate dello spostamento.

([207]) Le condizioni al contorno non poste a priori, ma derivanti dallo stesso annullamento della considerata variazione prima, come in questo caso le (25'), sono dette le *condizioni al contorno naturali* del problema variazionale.

([208]) Il problema, posto formalmente per lo spostamento, interessa effettivamente in questo caso la sola deformazione, e pertanto andranno considerati equivalenti tutti gli spostamenti che differiscano per un moto rigido: una tal differenza lascia infatti identicamente invariato il potenziale elastico Φ, e invariata quindi anche la variazione $\delta\Phi$ per qualunque δs, mentre $\delta \mathcal{U}$ è per definizione indipendente da s. (Lo spostamento resta dunque così indeterminato, com'era da prevedere, anche nel caso dell'elasticità non lineare.) Per la stessa ragione se si assume uno spostamento δs in forma di moto rigido la relazione $\delta\Phi = \delta \mathcal{U}$ non contiene più la funzione incognita, e deve perciò esser sodisfatta identicamente: si ottiene allora nella forma $\delta \mathcal{U} = 0$ la già ricordata condizione di possibilità del problema.

plementare di Σ', sulla quale sia assegnata la forza ([209]). Ma potrà anche porsi da prima il problema variazionale senza condizioni, cioè nel campo generale degli spostamenti continui, trovando così lo spostamento in funzione delle forze assegnate e delle incognite reazioni, per determinare poi tali incognite mediante le assegnate condizioni di vincolo (che nel caso generale accennato costituiranno un sistema di equazioni integrali).

A questo secondo procedimento, ovvio anche sotto l'aspetto analitico nel caso generale (trattandosi di riguardare in un primo tempo come note certe funzioni delle derivate delle incognite componenti dello spostamento, che compaiono nella parte del termine $\delta\mathcal{U}$ riferentesi alla superficie Σ'), può giungersi per via puramente analitica anche nel caso limite dei vincoli rigidi, quando cioè le incognite reazioni non intervengano direttamente nel problema analitico, mediante il noto artificio dei moltiplicatori di Lagrange: posta nel campo generale degli spostamenti continui la condizione

$$\delta\left\{\Phi - \mathcal{U} - \int_{(\Sigma')}(\lambda_1\delta s_1 + \lambda_2\delta s_2 + \lambda_3\delta s_3)\,dA\right\} = 0,$$

intendendo per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre funzioni incognite del punto in Σ', da determinare poi mediante le condizioni date dalle assegnate componenti di spostamento s_1, s_2, s_3, risulta infatti da un ovvio confronto che queste incognite ausiliarie rappresentano appunto le reazioni dei vincoli. Poichè per la risoluzione del sistema d'equazioni ottenuto dal problema variazionale in funzione di tali incognite, dovendo essere assicurato innanzi tutto il sodisfacimento delle condizioni di possibilità (cioè le condizioni complessive d'equilibrio, v. nota ([137])), si dovrà ricorrere a un sistema di vincoli ausiliari isostatico esprimendone le reazioni per le incognite medesime, è chiaro che si ritorna così al procedimento generale del paragrafo 34, applicato alle condizioni di vincolo esteso. È inutile ripetere che siccome la soluzione in funzione delle incognite reazioni si ottiene qui direttamente come spostamento, non occorre nessuna integrazione ([210]).

([209]) Ciò deriva ovviamente dal restare arbitraria la variazione δs in ogni punto dell'interno e di Σ''.

S'intende che la Σ' e la Σ'' potranno essere composte di diverse parti separate: il caso di punti isolati appartenenti a Σ' sarà considerato come caso limite. E s'intende anche che su una parte della superficie potrà essere assegnata la condizione di vincolo riguardante due sole componenti di spostamento, o una sola, come s'è detto alla nota ([164]) per il caso dei vincoli rigidi, e che per rendere il problema determinato dovranno allora essere ivi assegnate una o due componenti della forza di superficie.

([210]) Nel caso del corpo vincolato in punti isolati potrà esser conveniente ricorrere a un sistema principale, ma solo questa volta per poter esprimere la soluzione in funzione delle reazioni incognite senza introdurre esplicitamente le condizioni complessive d'equilibrio (solo cioè per quanto riguarda il primo dei sistemi di vincoli ausiliari di cui s'è detto al paragrafo 34). Si ricordi poi l'osservazione del paragrafo 39 circa l'intervento delle reazioni concentrate anche nel caso dei vincoli isostatici.

Nel caso ordinario dell'elasticità lineare può distinguersi nel potenziale elastico una parte che non varia con lo spostamento, cioè l'energia vincolata del corpo considerato libero, o soggetto al suddetto sistema di vincoli ausiliari; e poichè alla parte rimanente spetta il nome di lavoro di deformazione del corpo così considerato, il teorema qui esposto si trova spesso formulato colla sostituzione dell'espressione $\delta(\mathcal{L} - \mathcal{U})$ alla più generale, e in ogni caso anche più chiara, $\delta(\Phi - \mathcal{U})$.

L'utilità del teorema per la ricerca di soluzioni approssimate (211) appare ovvia se si pensa che lo stesso problema variazionale può esser posto nel campo degli spostamenti di un tipo particolare, esprimibili per un numero di funzioni scalari incognite inferiore a 3, o come funzioni di un numero inferiore a 3 di variabili indipendenti. La soluzione del problema così semplificato potrà dirsi « lo spostamento del tipo considerato che più si approssima allo spostamento effettivo », ed assumersi in luogo di quest'ultimo, pur non sodisfacendo esattamente alle condizioni d'equilibrio, con un errore che sarà comportabile quando la scelta del tipo sia fatta con criterio appropriato al particolare problema (212). Nel caso di una trave, ad esempio, potrà ammettersi di conoscere la configurazione deformata quando sia nota solo la deformata dell'asse, ponendo che ogni sezione si deformi e si sposti per conseguenza in un determinato modo: così nella formulazione del problema si sostituisce ad un integrale di spazio un integrale di linea. Quando poi si pensi di poter definire tale deformata mediante un certo numero (non troppo grande) di parametri, si trasformerà il problema variazionale in un ordinario problema di minimo.

È da osservare da un lato che in tal modo risulteranno equivalenti sistemi di forze non coincidenti punto per punto, dando origine nell'espressione di $\delta\mathcal{U}$ agli stessi coefficienti delle variazioni delle suddette funzioni, per le quali si esprima lo spostamento; e che d'altro lato le condizioni di vincolo non potranno essere riferite direttamente agli spostamenti dei singoli punti, ma ai valori delle funzioni medesime. Questa osservazione sarà chiarita da un'importante applicazione al capitolo X.

---

(211) Il teorema può avere importanza anche per la ricerca di soluzioni esatte, poichè i problemi di calcolo delle variazioni possono risolversi anche con metodi diretti, senza ricorrere cioè alle equazioni (euleriane) derivanti dalla condizione di annullamento della variazione prima (che nel problema qui considerato sono, nel caso dell'elasticità lineare, le equazioni di Cauchy).

(212) Dall'applicazione del capitolo X si vedrà come le equazioni che si ottengono dal problema così posto possano esprimere in casi particolari le condizioni d'equilibrio di parti del corpo con solo una o due dimensioni infinitesime.

49. Una notevole proprietà del potenziale elastico può dimostrarsi considerando una variazione dello spostamento nel solo intorno s di un punto P del corpo considerato. Ponendo $\delta\xi = \varepsilon\,\Delta\xi$, $\delta\eta = \delta\zeta = 0$, dove sia ε una costante infinitesima positiva, $\Delta\xi$ una funzione continua e positiva nell'intorno s ed annullantesi alla superficie limite dell'intorno medesimo (condizione necessaria per mantenere la continuità dello spostamento), si ha

$$\delta\mathfrak{U} = \varepsilon \int_{(s)} X\,\Delta\xi\,dV\,;$$

quindi

$$\frac{\delta\Phi}{\varepsilon} = \frac{\delta\mathfrak{U}}{\varepsilon} = \int_{(s)} X\,\Delta\xi\,dV = \overline{X} \int_{(s)} \Delta\xi\,dV,$$

essendo $\overline{X}$ un valore compreso fra il limite superiore e il limite inferiore della componente X della forza di massa in s. Facendo tendere a zero ogni dimensione di tale intorno, potrà scriversi $\lim\limits_{(s)\to P} \overline{X} = X(P)$, posto solo che in P la X sia continua; onde

$$\lim_{(s)\to P} \frac{\delta\Phi}{\varepsilon \int_{(s)} \Delta\xi\,dV} = X(P). \tag{40}$$

Tale limite, la cui esistenza è così dimostrata indipendentemente dalla scelta della funzione $\Delta\xi$ ([213]), dicesi la *derivata secondo Volterra* della funzione di infinite variabili, ossia *funzione di funzioni*, che è il potenziale elastico Φ. Un'espressione analoga si ottiene per la componente f_x della forza di superficie nel punto generico M della superficie Σ del corpo:

$$\lim_{(\sigma)\to M} \frac{\delta\Phi}{\varepsilon \int_{(\sigma)} \Delta\xi\,dA} = f_x(M), \tag{40'}$$

([213]) Nel passaggio al limite non si può mantenere la $\Delta\xi$ fissata in ogni punto, dovendo essa sempre annullarsi al contorno di s: si potrà per esempio far variare s per omotetia (di centro P), e fissato un valore di $\Delta\xi$ per ogni punto di un s iniziale, mantenerlo per il punto corrispondente di ogni s successivo. A conferma della necessità dell'annullarsi di $\Delta\xi$ al contorno si osservi che se si ponesse tale funzione costante in s, resterebbe invariata la deformazione, e risulterebbe quindi $\delta\Phi = 0$.

Si avverta poi che la direzione x potrebbe anche essere variabile in s da punto a punto, e variare anche in P nel tendere di s al punto medesimo, purchè tendente a una direzione limite determinata; alla quale andrebbe allora riferita la derivata, cioè la forza $X(P)$.

(essendo σ un intorno di M) [214]. L'espressione medesima vale anche per un'eventuale forza di massa concentrata su una superficie interna, e con ovvio mutamento per una forza concentrata su una linea. Quando infine agisca una forza F_x concentrata nel punto P, si avrà

$$\lim_{(s)\to P} \frac{\delta \Phi}{\varepsilon} = \lim_{(s)\to P} \int_{(s)} X\, \Delta\xi\, dV = \Delta\xi\,(P) \lim_{(s)\to P} \int_{(s)} X\, dV = \Delta\xi\,(P) \cdot F_x\,(^{215}),$$

per la stessa definizione della F_x; ossia

$$\lim_{(s)\to P} \frac{\delta \Phi}{\varepsilon\, \Delta\xi\,(P)} = F_x\,. \tag{40''}$$

Il significato di derivata attribuito alle espressioni (40), (40'), (40'') appare chiaramente quando si pensi di eseguire i due passaggi al limite simultaneamente, facendo per esempio variare l'intorno s omoteticamente (o per la (40') facendo variare omoteticamente la proiezione dell'intorno σ sul piano tangente in M), ed assumendo per ε lo stesso rapporto d'omotetia. In particolare si vede che il primo membro della (40'') può anche indicarsi col simbolo ordinario $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi\,(P)}$, considerando Φ funzione di un numero finito di variabili, spostamenti dei punti d'applicazione di forze concentrate, oltre che, s'intende, delle infinite variabili che sono gli spostamenti di tutti gli altri punti.

---

(214) La variazione di ξ deve in ogni caso avvenire, per continuità, in un intorno solido del punto M; ma l'integrale di spazio è infinitesimo d'ordine superiore rispetto a quello di superficie. Si ha infatti

$$\frac{\delta \mathfrak{A}}{\varepsilon} = \overline{f}_x \int_{(\sigma)} \Delta\xi\, dA + \int_{(s)} X\, \Delta\xi\, dV,$$

essendo $\overline{f}_x$ un valore tra i limiti superiore ed inferiore di f_x in σ; onde

$$\frac{\delta \Phi}{\varepsilon \displaystyle\int_{(\sigma)} \Delta\xi\, dA} = \overline{f}_x + \frac{\displaystyle\int_{(s)} X\, \Delta\xi\, dV}{\displaystyle\int_{(\sigma)} \Delta\xi\, dA},$$

dove l'ultimo termine tende ovviamente a zero per s e σ riducentisi al punto M.

(215) Sia X_1 una qualunque forza di massa, continua in P; X_2 la forza di massa in s ottenuta ripartendo in tale intorno, per esempio uniformemente, la F_x: tendendo s al punto P, è chiaro che da un certo momento in poi la forza di massa $X_1 + X_2$ si manterrà in ogni caso di uno stesso segno nell'intorno medesimo.

Nel caso dell'elasticità lineare potranno scriversi le relazioni precedenti ponendo $\mathcal{L}$ in luogo di Φ, ove s'intenda per tal simbolo il lavoro di deformazione del corpo considerato libero, o anche il lavoro di deformazione del corpo nelle sue effettive condizioni di vincolo quando si tratti di vincoli rigidi (e naturalmente il punto considerato non sia vincolato nella considerata direzione).

50. Un altro importante teorema può ottenersi per i corpi elastici nel suddetto caso (o meglio nel campo) dell'elasticità lineare dal teorema dei lavori virtuali e dal suo secondo inverso, esprimenti la condizione necessaria e sufficiente per la corrispondenza tra una data deformazione e un dato spostamento. Essendo infatti per tali corpi le componenti della deformazione uguali alle derivate del potenziale elastico unitario rispetto alle omologhe componenti della tensione, la variazione del potenziale Φ per una variazione arbitraria della tensione di componenti $\delta\sigma_x, \dots, \delta\tau_{zx}$ (e, s'intende, la corrispondente variazione della deformazione) ha l'espressione

$$\delta\Phi = \int_{(S)} (\varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \dots + \gamma_{zx}\,\delta\tau_{zx})\,dV\ ;$$

perciò la condizione suddetta può esprimersi con la relazione

$$\delta\Phi = \int_{(S)} (\xi\,\delta X + \eta\,\delta Y + \zeta\,\delta Z)\,dV + \int_{(\Sigma)} (\xi\,\delta f_x + \eta\,\delta f_y + \zeta\,\delta f_z)\,dA,$$

essendo $\delta X, \dots, \delta f_z$ le variazioni delle forze di massa e di superficie che equilibrano la medesima variazione della tensione. Si scriverà convenzionalmente anche questa volta $\delta\Phi = \delta\mathcal{U}$ (senza naturalmente che si possa più parlare in alcun caso di variazione del potenziale delle forze); e si ha un nuovo problema di calcolo delle variazioni in cui sono funzioni incognite del punto le componenti della tensione, la soluzione del quale sodisfa alla condizione che la corrispondente deformazione, le cui componenti sono assegnate funzioni lineari delle incognite medesime, derivi dallo spostamento assegnato nella definizione di $\delta\mathcal{U}$.

Se si considera in particolare una variazione della tensione sodisfacente alla condizione

$$\frac{\partial\delta\,\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\,\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\,\tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

e alle due analoghe in ogni punto del corpo, e alla

$$\alpha_x\,\delta\sigma_x + \alpha_y\,\delta\tau_{xy} + \alpha_z\,\delta\tau_{zx} = 0$$

e alle due analoghe in ogni punto della superficie, risultando $\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$, $\delta f_x = \delta f_y = \delta f_z = 0$, si annulla il termine $\delta\mathfrak{U}$ indipendentemente dallo spostamento assegnato: la relazione $\delta\Phi = 0$ posta sotto le condizioni ora indicate deve dunque esser sodisfatta da ogni tensione tale che la corrispondente deformazione derivi da uno spostamento (continuo) quale si voglia. Non essendovi poi evidentemente altro modo di eliminare gli spostamenti dalla $\delta\Phi = \delta\mathfrak{U}$, nè quindi altra condizione comune ad ogni tensione siffatta, si conclude che la relazione medesima sotto le condizioni suddette è in tutto equivalente alle condizioni di congruenza della deformazione corrispondente alla considerata tensione. L'eliminazione degli spostamenti sarà solo parziale quando conservandosi le condizioni all'interno si lasci variabile la forza su una parte Σ' della superficie: si avrà allora $\delta\mathfrak{U}$ come integrale esteso alla parte medesima, e la relazione così posta sarà condizione necessaria e sufficiente affinchè la deformazione corrispondente alla considerata tensione derivi da uno spostamento arbitrario all'interno e sulla rimanente parte della superficie, ma assegnato nei punti di Σ', oppure espresso ivi in funzione della forza di superficie nei punti medesimi (vincolo elastico). Si ha così per i corpi elastici, nel campo dell'elasticità lineare, il seguente teorema, noto come *teorema di Menabrea* (o di Castigliano, secondo autori stranieri):

Fra tutte le tensioni equilibranti uno stesso sistema di forze direttamente applicate a un corpo comunque vincolato, la sola cui corrisponda una deformazione congruente (intrinsecamente e rispetto ai vincoli) è definita dalla condizione $\delta\Phi = \delta\mathfrak{U}$ per ogni variazione di essa nel campo medesimo, essendo $\delta\mathfrak{U}$ il lavoro delle variazioni delle tensioni sulla parte vincolata della superficie del corpo (reazioni dei vincoli) per gli spostamenti dei rispettivi punti ([216]). Nel caso dei vincoli rigidi in senso stretto la condizione diviene

---

([216]) La dimostrazione per esteso di quanto qui s'è affermato può aversi esprimendo il minimo condizionato col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ossia ripetendo il procedimento della dimostrazione del secondo inverso del teorema dei lavori virtuali con l'aggiunta dei termini riguardanti le condizioni poste per la tensione ivi considerata arbitraria, che diventa ora la variazione della tensione incognita, ed osservando che $\delta\mathfrak{U}$ si riduce al solo integrale di superficie esteso a Σ'. Si ottiene

$$\int_{(S)} (\varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \dots + \gamma_{zx}\,\delta\tau_{zx})\,dV + \int_{(S)} \left\{ \lambda_1 \left(\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_3 \left(\frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z} \right) \right\} dV - \int_{(\Sigma'')} \{ \lambda_1' (\alpha_x\delta\sigma_x + \alpha_y\delta\tau_{xy} + \alpha_z\delta\tau_{zx}) + \lambda_2' (\alpha_x\tau_{xy} + \alpha_y\sigma_y + \alpha_z\tau_{yz}) +$$

$$+ \lambda_3' (\alpha_x\,\delta\tau_{zx} + \alpha_y\,\delta\tau_{yz} + \alpha_z\,\delta\sigma_z) \}\,dA = \int_{(\Sigma')} (\xi\,\delta f_x + \eta\,\delta f_y + \zeta\,\delta f_z)\,dA,$$

dove ovviamente Σ'' è la superficie complementare di Σ'. Trasformato il secondo intesemplicemente $\delta\Phi = 0$; perciò il teorema di Menabrea, enunciato originariamente per questo solo caso, fu detto anche del minimo potenziale elastico. Erroneo è poi il nome di teorema del minimo lavoro di deformazione, essendo effettivamente il lavoro di deformazione, nel caso suddetto, il particolare valore assunto dal potenziale elastico quando la condizione del teorema è sodisfatta. (Si avverta anche che questa volta, e sempre nel caso medesimo, si può affermare senz'altro il significato di minimo di tale valore sodisfacente alla condizione $\delta\Phi = 0$ ricordando la relazione

---

grale mediante la formula (30) (§ 26), e scisso l'integrale di superficie che così si ottiene nelle parti estese a Σ' e a Σ'', risulta (ricordando le (25'))

$$\int_{(s)} \left\{ \left(\varepsilon_x - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\right) \delta\sigma_x + \dots + \left(\gamma_{zx} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}\right) \delta\tau_{zx} \right\} dV +$$

$$+ \int_{(\Sigma'')} \{(\lambda_1 - \lambda_1')\, \delta f_x + (\lambda_2 - \lambda_2')\, \delta f_y + (\lambda_3 - \lambda_3')\, \delta f_z\}\, dA +$$

$$+ \int_{(\Sigma')} \{(\lambda_1 - \xi)\, \delta f_x + (\lambda_2 - \eta)\, \delta f_y + (\lambda_3 - \zeta)\, \delta f_z\}\, dA = 0\,;$$

onde infine, poichè va riguardata qui come arbitraria la variazione della tensione in ogni punto dell'interno e dell'intera superficie, si hanno per ogni punto interno le condizioni

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \gamma_{zx} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x},$$

per i punti di Σ'' le condizioni $\lambda_1' = \lambda_1$, $\lambda_2' = \lambda_2$, $\lambda_3' = \lambda_3$, e per i punti di Σ' le $\lambda_1 = \xi$, $\lambda_2 = \eta$, $\lambda_3 = \zeta$. Ciò significa che la deformazione corrispondente all'incognita tensione deriva da uno spostamento di componenti λ_1, λ_2, λ_3 continuo in ogni punto di S (tali essendo per ipotesi i moltiplicatori di Lagrange) e assumente in Σ' i valori considerati. (E i moltiplicatori in Σ'', assunti a priori indipendenti da quelli all'interno, risultano in realtà uguali agli stessi valori assunti da questi ultimi sulla superficie medesima, cioè uguali anch'essi alle componenti dei rispettivi spostamenti.)

Sulle parti Σ' e Σ'' può ripetersi quanto s'è osservato alla nota ([209]). Dove si abbiano due sole condizioni elementari di vincolo, e sia assegnata pertanto una componente della forza, si porrà ovviamente la condizione $\alpha_{hx}\, \delta f_x + \alpha_{hy}\, \delta f_y + \alpha_{hz}\, \delta f_z$, detta h la direzione di quest'ultima componente, normale a quella del vincolo; e due condizioni analoghe si porranno dove le condizioni di vincolo si riducano ad una sola. Nell'espressione di $\delta\mathfrak{A}$ si avranno rispettivamente due termini e un termine solo.

È chiaro infine che in modo del tutto analogo potranno considerarsi teoricamente condizioni di vincolo in punti interni. Trattandosi di vincolo esteso dovranno naturalmente essere riguardate come incognite le componenti della forza di massa nelle direzioni cui si riferiscono le condizioni medesime.

$\Phi = \Phi_0 + \mathcal{L}$, nella quale tutti i termini sono per definizione essenzialmente positivi ([217]).)

Il teorema resta valido anche per i corpi elastici nel senso più generale quando per $\delta\Phi$ s'intenda semplicemente l'espressione $\int_{(S)} (\varepsilon_x \, \delta\sigma_x + \dots + \gamma_{zx} \, \delta\tau_{zx}) \, dV$, senza il significato di variazione del potenziale elastico ([218]), che questa volta non deriva più semplicemente, come per l'espressione considerata al paragrafo 48, dalla definizione del potenziale medesimo e dal teorema dei lavori virtuali (v. nota ([206])).

Se si considera la condizione di minimo del teorema di Menabrea, equivalente alle condizioni di congruenza intrinseche ed estrinseche, mettendo in conto col metodo dei moltiplicatori di Lagrange le condizioni d'equilibrio con le assegnate forze di massa e di superficie, che definiscono il campo delle tensioni nel quale il minimo va ricercato, secondo il procedimento della nota ([216]), si giunge infine per la determinazione dei moltiplicatori, che sono le componenti dello spostamento, alle equazioni di Cauchy e alle rispettive condizioni al contorno. Quando si pensi invece di risolvere da prima le equazioni indefinite d'equilibrio con le condizioni al contorno riguardanti le forze di superficie, e di determinare poi le funzioni arbitrarie di tale soluzione mediante la condizione di minimo, il problema assumerà in sostanza la forma considerata al Capitolo V, risultando le condizioni di vincolo come condizioni naturali (v. nota ([207])) del problema variazionale ([219]). Potrà pure trattarsi il problema mettendo in conto col metodo dei moltiplicatori solo una parte delle condizioni suddette ([220]).

Il vantaggio che può aversi nelle applicazioni consiste, analogamente a quanto s'è visto in proposito del teorema della minima energia potenziale totale, nella possibilità di effettuare per ogni particolare problema la ricerca del minimo in un campo di tensioni di tipo particolare che si reputi

([217]) Nel dimostrare tale relazione si era dimostrata effettivamente la necessità (ma non la sufficienza) della $\delta\Phi = 0$, nelle condizioni cui si riferisce il teorema di Menabrea nel senso ristretto originario, per la congruenza della deformazione corrispondente alla tensione considerata.

([218]) Tale espressione è stata chiamata nel caso generale « variazione della seconda energia potenziale ».

([219]) Ciò significa che i primi membri delle condizioni naturali del problema $\delta\Phi = 0$ (posto a secondo membro lo zero) esprimeranno per mezzo delle suddette funzioni incognite gli spostamenti. I valori assegnati a cui tali espressioni debbono uguagliarsi compariranno ovviamente nel termine $\delta\mathfrak{A}$.

([220]) Si avverta (v. nota ([216])) che, ponendo condizioni di forze assegnate col metodo di Lagrange, viene a considerarsi formalmente in un primo tempo il problema come se fossero assegnati invece i rispettivi spostamenti, rappresentati dai moltiplicatori.

appropriato al problema medesimo, in modo che risulti diminuito il numero delle funzioni incognite o quello delle variabili da cui esse dipendono: la soluzione che così può ottenersi, non sodisfacente esattamente questa volta alle condizioni di congruenza, potrà dirsi « la tensione del tipo considerato che più si approssima alla tensione effettiva ». Potranno anche non porsi tutte le condizioni d'equilibrio con forze assegnate punto per punto, ma in parte solo con forze e coppie risultanti su certi elementi di dimensioni non tutte infinitesime, postulandosi la equivalenza ai fini pratici di tutti i sistemi aventi quelle stesse forze e coppie risultanti; e potrà convenire mettere in conto tali condizioni nel problema variazionale col metodo di Lagrange.

Tutto ciò sarà chiarito da un interessante esempio al Capitolo X.

51. La condizione $\delta\Phi = \delta\mathcal{U}$ nello stesso senso del paragrafo precedente, posta nel campo più ristretto delle tensioni non solo equilibrate con assegnate forze, ma corrispondenti a deformazioni intrinsecamente congruenti, è evidentemente condizione necessaria e sufficiente per la compatibilità della corrispondente deformazione con gli assegnati vincoli. Se si osserva che come ad ogni sistema di tensioni del campo suddetto corrispondono determinate forze di superficie in Σ' (parte vincolata), così ad ogni sistema di valori di tali forze che sia in equilibrio con quelle assegnate (forze di massa e forze di superficie in Σ'') corrisponde un determinato sistema di tensioni del campo medesimo (221), risulta che il potenziale Φ funzione delle tensioni può considerarsi anche funzione delle forze in Σ', le quali possono così diventare in tal caso le incognite del problema variazionale (222). La soluzione di questo darà, per quanto s'è detto, le effettive reazioni.

Per assicurare a priori il sodisfacimento delle sopra ricordate condizioni complessive d'equilibrio si ricorrerà anche qui in generale a un sistema di vincoli ausiliari isostatici, le cui reazioni saranno espresse linearmente per le forze assegnate e le incognite reazioni effettive; e il problema variazionale andrà considerato allora sotto la condizione che tali espressioni risultino nulle, la quale potrà porsi ovviamente nella forma

$$\mathcal{R}_x + R_x = \mathcal{R}_y + R_y = \mathcal{R}_z + R_z = 0; \quad \mathcal{M}_x + M_x = \mathcal{M}_y + M_y = \mathcal{M}_z + M_z = 0,$$

essendo $\mathcal{R}_x, \dots, \mathcal{M}_z$ e $R_x, \dots, M_z$ le componenti del vettore risultante e del momento risultante, rispettivamente delle incognite reazioni effettive e delle forze assegnate. Tenendo conto di tali condizioni col metodo di

(221) Evidentemente la soluzione del problema del corpo libero sollecitato da tutte le forze considerate.

(222) Dicendo forze in Σ' s'intende sempre (v. nota (216)) quelle agenti nella direzione delle condizioni di vincolo (cioè le incognite reazioni).

Lagrange, e osservando che per il corpo coi soli vincoli ausiliari il potenziale elastico è questa volta uguale al lavoro di deformazione, si scriverà

$$\delta\mathcal{L} + \lambda_1 \delta\mathcal{R}_x + \dots + \lambda_6 \delta\mathcal{M}_z = \delta\mathcal{U} ;$$

e ottenute le espressioni delle incognite in funzione dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, si determineranno questi ultimi mediante le condizioni medesime. È chiaro che tale uguaglianza può esprimersi anche nella forma $\delta\mathcal{L} = \delta\overline{\mathcal{U}}$, essendo $\delta\overline{\mathcal{U}}$ il lavoro delle variazioni delle incognite reazioni per gli spostamenti assegnati cui siano tolti quelli costituenti il moto rigido di parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_6$.

Nel caso che vi siano almeno sei condizioni di vincolo effettive indipendenti in punti isolati sarà conveniente ricorrere a un sistema principale, ponendo così il problema di minimo incondizionato ($\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = 0$), e comprendendo naturalmente in $\delta\mathcal{U}$ anche i termini riguardanti i vincoli del sistema medesimo coi loro effettivi spostamenti; e quando poi tutti i vincoli del sistema effettivo siano rigidi in senso stretto, si avrà semplicemente $\delta\mathcal{L} = 0$. In questo caso particolarissimo può dunque veramente parlarsi di un minimo lavoro di deformazione.

Il problema ora trattato, cioè quello della determinazione delle reazioni dei vincoli rigidi estesi su una parte Σ' della superficie, posta nota l'espressione del potenziale elastico in funzione delle reazioni medesime, è evidentemente lo stesso già accennato alla fine del paragrafo 38, estensione di quello precedentemente trattato nel caso dei vincoli concentrati, dove si poneva nota in funzione delle reazioni la tensione in ogni punto. Da quest'ultima, ossia dalla corrispondente deformazione, s'era ricordato allora come possa ottenersi lo spostamento del punto generico, al fine di esprimere le condizioni di vincolo, mediante un'applicazione del teorema dei lavori virtuali. Con riferimento a tale applicazione può osservarsi ora che se si considera infinitesima la forza ausiliaria concentrata nel punto P di cui si cerca lo spostamento (forza la cui intensità può essere scelta ad arbitrio), il lavoro virtuale della tensione da essa prodotta nel corpo col sistema ausiliario di vincoli, che qui si porrà coincidente con quello precedentemente considerato, è uguale alla variazione prima del lavoro di deformazione del corpo medesimo per l'aggiunta della stessa forza infinitesima a tutte le forze effettive, direttamente applicate e reazioni: ciò risulta ovviamente dall'espressione

$$\delta\Phi = \int_{(S)} (\varepsilon_x \, \delta\sigma_x + \dots + \gamma_{zx} \, \delta\tau_{zx}) \, dV$$

(ricordando che qui è $\delta\Phi = \delta\mathcal{L}$). Il rapporto fra tale lavoro e la forza ausiliaria infinitesima può dunque dirsi la derivata di $\mathcal{L}$ rispetto alla componente della forza agente in P secondo la considerata direzione: derivata la cui esistenza è dunque assicurata dall'esistenza di una determinata tensione in ogni punto prodotta dall'azione di tale forza infinitesima (223). Indicando tale derivata col simbolo $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_x(P)}$, essendo x la direzione suddetta, si ha dunque dal teorema dei lavori virtuali $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_x(P)} = \bar{\xi}(P)$, intesa per $\bar{\xi}$ la componente di un particolare spostamento corrispondente alla tensione prodotta dall'azione delle forze effettive sul corpo col medesimo sopra indicato sistema ausiliario di vincoli, cioè quello definito dai vincoli stessi considerati rigidi in senso stretto. Le condizioni di vincolo effettivo si esprimeranno allora come al paragrafo 16 nella forma

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_h(M)} + a_{1h}(M)\,\omega_{x_0} + \dots + b_{3h}(M)\,\zeta_0 = s_h(M),$$

dove sia M il punto generico di Σ', e per $h = 1, 2, 3$ s'intendano le direzioni delle condizioni elementari di vincolo nel punto medesimo. Ottenute da questo sistema di infinite equazioni lineari le espressioni delle incognite reazioni in funzione dei parametri $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$, si determineranno infine questi ultimi mediante le condizioni d'equilibrio delle reazioni medesime colle forze assegnate (224).

Dal confronto di tali equazioni con la precedente espressione $\delta\mathfrak{L} = \delta\overline{\mathfrak{U}}$, osservato che per definizione

$$\delta\overline{\mathfrak{U}} = \int_{(\Sigma')} \sum_{h=1}^{3} \{s_h(M) - \lambda_1 b_{1h} - \dots - \lambda_6 a_{3h}\}\, \delta f_h \, dA,$$

risulta che deve essere

$$\delta\mathfrak{L} = \int_{(\Sigma')} \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_h(M)}\, \delta f_h(M)\, dA.$$

Un'espressione di $\delta\mathfrak{L}$ equivalente a questa può trovarsi direttamente senza difficoltà introducendo una definizione di derivata più generale, analoga a quella del paragrafo 49.

---

(223) L'osservata indipendenza di tale rapporto dall'intensità della forza ausiliaria (anche quando si assuma per tensione, come qui è supposto, quella effettivamente prodotta dall'azione della forza medesima), cioè la costanza del rapporto incrementale, non significa in realtà che la sostituzione a quest'ultimo del proprio limite, ossia la derivata, per il sottinteso fattore infinitesimo più volte ricordato.

(224) È ovvio che si potrebbe procedere allo stesso modo anche nel caso dei vincoli concentrati, cioè di un numero finito d'equazioni e d'incognite, invece di eliminare i parametri ed aggiungere alle equazioni risultanti le sei equazioni d'equilibrio come s'è detto al paragrafo 34.

Nell'intorno superficiale σ di M si consideri questa volta un incremento $\delta f_x = \varepsilon\, \Delta f_x$ della componente f_x della forza di superficie, essendo Δf_x una funzione del punto arbitraria purchè integrabile in σ e avente in M un valore determinato diverso da zero, ed ε una costante infinitesima. Intendendo per $\delta \mathcal{L}$ l'incremento corrispondente a tale variazione della forza, si porrà

$$\mathcal{L}'_{f_x(M)} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\delta \mathcal{L}}{\varepsilon \int_{(\sigma)} \Delta f_x \, dA} \ ([225]).$$

Ammessa l'esistenza di tale derivata in ogni punto M di Σ' per ciascuna delle direzioni 1, 2, 3 sopra considerate (al posto della direzione generica x), potrebbe dimostrarsi senza difficoltà che la variazione prima $\delta \mathcal{L}$ per le variazioni arbitrarie δf_1, δf_2, δf_3 delle forze di superficie in Σ' è data dall'espressione

$$\delta \mathcal{L} = \int_{(\Sigma')} \sum_{h=1}^{3} \mathcal{L}'_{f_h(M)}\, \delta f_h \cdot dA \ ;$$

e inversamente quando $\delta \mathcal{L}$ possa esprimersi in tal forma, i coefficienti delle δf_h saranno necessariamente le derivate suddette. Resta da osservare come la definizione della derivata $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_x(M)}$ non sia che un caso limite della

---

([225]) A differenza della funzione $\Delta \xi$ del paragrafo 49, la Δf_x può restare fissa in ogni determinato punto nel tendere dell'intorno al punto M; mentre potrebbe variare anche la direzione da punto a punto, e nello stesso punto M nel passaggio al limite (v. nota ([212])).

Si può avvertire che nel caso particolare qui considerato la definizione potrebbe semplificarsi omettendo l'infinitesimo ε, ponendo cioè

$$\mathcal{L}'_{f_x(M)} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\Delta \mathcal{L}}{\int_{(\sigma)} \Delta f_x \, dA} \ ;$$

infatti il rapporto

$$\frac{\Delta_k \mathcal{L}}{k \int_{(\sigma)} \Delta f_x \, dA},$$

dove sia k un numero finito e Δ_k la variazione per l'incremento $k\, \Delta f_x$, risulta per ipotesi indipendente da k. In realtà l'infinitesimo ε è sottinteso appunto in tale ipotesi, cioè nella riduzione del problema alla forma lineare.

definizione generale della derivata $\mathcal{L}'_{f_x(M)}$, cioè quello che si ha ponendo Δf_x infinita in M in modo che risulti

$$\lim_{(\sigma)\to M} \varepsilon \int_{(\sigma)} \Delta f_x \, dA = \delta F_x ;$$

perciò le due derivate hanno in realtà lo stesso significato, e, per quanto s'è visto sopra, uguagliano dunque entrambe le componenti $\bar{\xi}$ dello spostamento del punto M per l'azione delle forze effettive (quelle che equilibrano la tensione per la quale è espresso $\mathcal{L}$) sul corpo col considerato sistema di vincoli ausiliari strettamente rigidi.

52. La definizione più generale di derivata secondo Volterra può ovviamente estendersi anch'essa al punto generico P del corpo, ponendo

$$\mathcal{L}'_{X(M)} = \lim_{(s)\to P} \frac{\delta \mathcal{L}}{\varepsilon \int_{(s)} \Delta X \, dV} \text{ (226)},$$

essendo ΔX una funzione arbitraria purchè integrabile nell'intorno s, ed avente in P un valore determinato diverso da zero; ed è anche chiaro che la precedente definizione della derivata $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_x(P)}$ è un caso limite di quest'ultima. Può enunciarsi allora il *teorema di Castigliano:*

Sia un corpo elastico (nel senso ordinario) soggetto a vincoli quali si vogliano, purchè vi siano almeno sei condizioni di vincolo indipendenti in punti isolati, sicchè sia possibile la considerazione di un sistema principale. La derivata del lavoro di deformazione di quest'ultimo rispetto alla componente secondo una data direzione della forza di massa o di superficie in un dato punto, come anche la derivata rispetto alla componente nella stessa direzione della forza concentrata in esso punto, è uguale all'omologa componente dello spostamento dello stesso punto a meno del moto rigido definito dagli spostamenti effettivi dei vincoli del sistema principale medesimo.

Si avverta che la derivata dipende dalle reazioni dei vincoli iperstatici, mentre quelle dei vincoli del sistema principale interverranno (sole o insieme con alcune delle prime) a determinare il suddetto moto rigido nel caso che si tratti di vincoli elastici. Non occorre invece osservare che per considerare le derivate rispetto alla forza concentrata non si richiede che una tal forza nel considerato punto sia compresa tra le effettive.

---

(226) Anche qui nel caso particolare considerato potrebbe omettersi formalmente l'infinitesimo ε.

Questo teorema è noto anche come *primo teorema di Castigliano,* indicandosi come *secondo teorema di Castigliano* quello espresso dalle relazioni (40), (40′), (40″). Si avverta che mentre in quest'ultimo si definiscono tre diverse derivazioni rispetto a una stessa variabile, cioè lo spostamento, dalle quali si hanno quantità di diverse dimensioni, nel primo si definisce la derivazione rispetto a ciascuna di tali quantità, ma ponendo sempre a denominatore una forza, ed ottenendo perciò sempre lo spostamento. Non si dimentichi infine che a differenza del primo il secondo teorema è valido anche fuori dal campo dell'elasticità lineare, e indipendente da ogni ipotesi sui vincoli; e che a tale maggior generalità fa riscontro ovviamente la mancanza d'interesse per le applicazioni ([228]). Il primo teorema può invece applicarsi sia per valutare gli spostamenti, sia per porre come sopra s'è visto le condizioni riguardanti i vincoli iperstatici: non si tratta a ogni modo, come pure s'è messo in chiaro, che di una forma sotto la quale può presentarsi nel caso dei corpi elastici l'applicazione del teorema dei lavori virtuali.

([227]) In un punto nel quale si consideri agente (come caso limite) una forza concentrata la derivata risulta a rigore infinita: per avere una valutazione dello spostamento sufficientemente approssimata nel caso reale in cui la forza sia ripartita in un certo intorno del punto medesimo bisogna trascurare una deformazione locale, come s'è detto alla nota ([144]). Per una definizione teorica di tale deformazione da trascurare potrebbe sostituirsi, nel caso del punto interno, alla soluzione del problema del semispazio quella del problema del corpo indefinito (soluzione di Lord Kelvin per il corpo isotropo).

([228]) Data la deformazione, e nota la legge d'elasticità per la quale da essa si passa punto per punto alla tensione, la determinazione della forza di massa (e quindi come caso limite quella della forza concentrata) è un semplice problema di derivazione. (La forza in un punto dipende solo dalla tensione nell'intorno del punto medesimo; al quale infatti è limitato l'integrale che esprime la variazione $\delta\Phi$.)