Capitolo VI

COAZIONI ELASTICHE

40. *Si dirà coazione elastica ogni sistema di tensioni cui sia soggetto un solido elastico in uno stato iniziale.*

È chiaro che in questa definizione sono compresi gli stati di tensione prodotti da spostamenti assegnati per i punti vincolati, oppure, nel caso dei vincoli elastici, dalle altre cause di non omogeneità delle condizioni di vincolo a suo luogo indicate (naturalmente solo nel caso dei vincoli iperstatici): stati di tensione equilibrati dunque con le reazioni prodotte dalle cause medesime ([169]). Per effetto di queste ultime il corpo passa da una prima a una seconda configurazione iniziale, e un nuovo stato di coazione elastica, da esse prodotto, si sovrappone a quello (eventualmente nullo) della prima configurazione.

Alle tensioni costituenti la coazione elastica si accompagnano naturalmente le deformazioni che ad essa corrispondono secondo le relazioni lineari (37_2), da intendere sempre riferite alla configurazione naturale di ciascun elemento ([170]). S'è già osservato alla nota ([140]) come tale stato di deformazione non possa mai essere congruente, intese le condizioni di congruenza estrinseche riferite alle condizioni di vincolo omogenee: ciò risulta ovviamente dalla dimostrazione del teorema di Kirchhoff, per la quale è necessariamente nulla la deformazione congruente che corrisponde a forze applicate tutte nulle.

([169]) Lo spostamento di ogni punto vincolato elasticamente, espresso dalla rispettiva condizione di vincolo, sarà la somma di una parte (termine noto della condizione medesima non omogenea) direttamente determinata dalle cause suddette, e di una parte dovuta alle incognite reazioni.

([170]) S'intende ovviamente la configurazione naturale dell'elemento nelle condizioni in cui si trova all'istante considerato, ossia quella che esso assumerebbe ove fosse soltanto liberato dalle azioni esercitate dagli elementi contigui, le quali costituiscono, come già s'è osservato, il suo stato di tensione. In proposito del riferimento alla configurazione naturale si ricordi la nota ([129]).

Un'altra importante proprietà che si dimostra immediatamente può enunciarsi come segue. Siano $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \sigma_z^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}, \tau_{yz}^{(0)}, \tau_{zx}^{(0)}$, e $\varepsilon_x^{(0)}, \varepsilon_y^{(0)}, \varepsilon_z^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}, \gamma_{yz}^{(0)}, \gamma_{zx}^{(0)}$ rispettivamente le componenti della coazione elastica e della corrispondente deformazione; e siano $\sigma_x^{(1)}, \dots, \tau_{zx}^{(1)}$, e $\varepsilon_x^{(1)}, \dots, \gamma_{zx}^{(1)}$ le componenti di una tensione e della corrispondente deformazione dovute all'azione di un sistema qualunque di forze sullo stesso corpo elastico con i vincoli pensati tutti rigidi (in senso stretto): sarà dunque necessario e sufficiente che si tratti di una deformazione congruente per il corpo così vincolato. Se si pone

$$\Phi^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{(S)} (\sigma_x^{(0)}\varepsilon_x^{(0)} + \dots + \tau_{zx}^{(0)}\gamma_{zx}^{(0)})\, dV, \quad \Phi^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{(S)} (\sigma_x^{(1)}\varepsilon_x^{(1)} + \dots + \tau_{zx}^{(1)}\gamma_{zx}^{(1)})\, dV,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_{(S)} \{(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)})(\varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_x^{(1)}) + \dots + (\tau_{zx}^{(0)} + \tau_{zx}^{(1)})(\gamma_{zx}^{(0)} + \gamma_{zx}^{(1)})\}\, dV,$$

risulta in ogni caso semplicemente

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}. \tag{39}$$

Si può vedere infatti facilmente che nell'espressione

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \frac{1}{2}\int_{(S)} (\sigma_x^{(0)}\varepsilon_x^{(1)} + \dots + \tau_{zx}^{(0)}\gamma_{zx}^{(1)})\, dV + \\ + \frac{1}{2}\int_{(S)} (\sigma_x^{(1)}\varepsilon_x^{(0)} + \dots + \tau_{zx}^{(1)}\gamma_{zx}^{(0)})\, dV$$

i due integrali, uguali per la formula di reciprocità (38), sono nulli: basta osservare che è evidentemente nullo il lavoro esterno corrispondente al primo di essi (essendo nullo per ipotesi lo spostamento dei punti vincolati, che sono i soli dove non è nulla la forza) (171).

Così l'energia elastica Φ di un corpo vincolato rigidamente può scindersi nelle due parti $\Phi^{(0)}$ e $\Phi^{(1)}$ dovute rispettivamente alla coazione elastica e alla tensione prodotta dai carichi. La prima suol dirsi *energia vincolata*; la seconda *lavoro di deformazione*, che si indica più spesso col simbolo $\mathfrak{L}$.

---

(171) Si ricordi che non c'è da far distinziene per quanto riguarda la configurazione nella quale vanno considerate le tensioni, le deformazioni e i volumi dV, atteso che si tratta di spostamenti infinitesimi (per il fattore costante sottinteso di cui già più volte s'è detto).

L'annullarsi dei due termini considerati può esprimersi dicendo che la tensione $\mathfrak{T}^{(0)}$ è « ortogonale » alla deformazione $\mathfrak{D}'^{(1)}$ e la tensione $\mathfrak{T}^{(1)}$ alla deformazione $\mathfrak{D}'^{(0)}$.

Interessa osservare come qualunque sistema di tensioni possa scindersi in una coazione elastica e in una parte dovuta all'azione di certe forze sul corpo soggetto a un assegnato sistema di vincoli (omogenei). Tali forze sono evidentemente quelle stesse che equilibrano le considerate tensioni, eccettuate le forze di superficie agenti nei punti vincolati secondo le assegnate direzioni dei vincoli; e la coazione elastica è la differenza tra il sistema delle tensioni medesime e quello che si ottiene risolvendo il problema d'elasticità per il corpo soggetto (coi suoi vincoli) all'azione delle forze così determinate. Nel caso dei vincoli rigidi resta così eseguita anche la scissione dell'energia elastica nelle due parti suddette. Nel caso dei vincoli elastici la somma delle due energie $\Phi^{(0)}$ e $\Phi^{(1)}$ corrispondenti alle due parti della tensione (e della deformazione) in tal modo separate non dà invece l'energia totale: la separazione di questa in energia vincolata e lavoro di deformazione è possibile in tal caso soltanto per l'insieme dei corpi elastici collegati. È superfluo ricordare in proposito che la somma delle energie corrispondenti alle tensioni dovute a due diversi sistemi di forze non dà in generale, qualunque sia il sistema dei vincoli, l'energia corrispondente alla somma delle tensioni medesime; e così non si sommano in generale le energie corrispondenti a due diversi stati di coazione.

41. Per mettere in chiaro quale possa essere l'origine degli stati di coazione elastica ([172]), si vuol considerare ora un corpo elastico con vincoli generici (sempre omogenei) in uno stato iniziale in cui esso sia privo di tensioni; il quale stato verrà distinto col nome di *stato primitivo* ([173]). Pensato tale corpo liberato dai vincoli e diviso materiamente in un certo numero di parti delimitate da un sistema di superficie, si supponga di produrre in ciascuna di esse una deformazione (congruente), che si mantenga senza l'intervento di tensioni. Ciò potrà ottenersi ad esempio per mezzo di una variazione uniforme di temperatura, posto che la parte sia omogenea ([174]), oppure per l'intervento provvisorio di forze sollecitanti la parte stessa oltre i limiti d'elasticità (e tali che al cessare dell'azione di esse possa annullarsi anche, nella parte così isolata, ogni tensione). In tal modo ogni elemento del corpo passerà da una configurazione naturale ad un'altra (v. la nota ([170])), e ogni parte da uno stato primitivo ad un altro.

([172]) Le cause già sopra considerate danno solo una categoria molto particolare di coazioni elastiche.

([173]) Tale nome è da intendere in senso affatto convenzionale, poichè in realtà le cause generatrici di tensioni che saranno appresso accennate possono intervenire nello stesso processo di formazione del corpo.

([174]) Ove la parte fosse anche isotropa, la configurazione deformata di essa sarebbe allora simile a quella indeformata.

Ma per l'intero corpo coi suoi vincoli la deformazione introdotta non sarà in generale congruente: non sarà cioè possibile riportare le parti a contatto per tutta la loro superficie, e ad aderire di nuovo ai vincoli, con soli moti rigidi di esse. Si consideri allora una nuova deformazione, tale che risulti congruente la somma di essa colla precedente (dunque necessariamente congruente anch'essa per ciascuna delle parti supposte libere), e si pensi di attribuirla al corpo come deformazione elastica, assoggettandone ogni parte alle forze di massa e di superficie equilibranti la tensione che ad essa corrisponde secondo le relazioni d'elasticità. Riportate così le parti al mutuo contatto e al rispetto delle condizioni di vincolo, si immagini infine di togliere le forze suddette dopo aver ripristinato la continuità materiale delle parti e la materiale aderenza ai vincoli medesimi (175): si otterrà ancora uno stato iniziale, che non sarà più lo stato primitivo, sostituendosi su ogni parte alle forze tolte le azioni delle parti contigue e le reazioni degli eventuali vincoli, che determineranno un altro stato di tensione in ogni punto del corpo. Questo risulterà dunque soggetto a una coazione elastica (176).

È ovviamente da presumere che un effetto almeno analogo si ottenga quando per esempio la medesima variazione di temperatura si verifichi nel corpo indiviso e non distaccato dai vincoli. Se poi s'immagina nelle considerazioni precedenti di far tendere a zero le dimensioni delle parti, si arriva a comprendere come possa ottenersi una coazione elastica da una variazione di temperatura distribuita nel corpo con legge qualunque, o in generale da una causa quale si voglia che faccia variare la configurazione naturale di ciascun elemento, in modo che l'insieme di essi nella nuova configurazione naturale non sia più congruente. Tale causa sarà in generale di natura fisica o in particolare meccanica, come quelle sopra considerate, o come il normale ritiro del calcestruzzo; ma potrebbe consistere anche in un'alterazione della composizione chimica del materiale con conseguente variazione di volume.

---

(175) Se si pensa ad esempio di aver liberato il corpo dai vincoli distaccando da esso un intorno di ogni punto vincolato, si deve immaginare di poter operare una saldatura così alle superficie che limitano tali intorni come a quelle di mutuo contatto delle parti considerate.

(176) Condizioni analoghe a quelle qui considerate si verificano nel *calcestruzzo precompresso* (sistemi ad aderenza), quando si hanno i fili d'acciaio tesi per l'azione di forze esterne e a contatto col calcestruzzo senza trasmettere ad esso nessuna azione: tolte poi tali forze (liberate cioè le estremità dei fili), per la naturale aderenza tra calcestruzzo e acciaio si ottiene lo stato di coazione elastica (richiesto al fine di una più favorevole condizione statica del calcestruzzo sotto l'azione dei carichi, avendo tale materiale scarsa resistenza a trazione). Come stato primitivo sarebbe da considerare in tal caso quello in cui i fili fossero ugualmente allungati senza sforzo di trazione, a causa per esempio di un aumento di temperatura.

La deformazione corrispondente al passaggio di ciascun elemento da una configurazione naturale ad un'altra si dirà *deformazione impressa* (dalla causa di tale mutamento). Il fatto che ogni deformazione non congruente impressa in un corpo allo stato primitivo produca una coazione elastica, come s'è inferito dalle considerazioni precedenti intese a dare un'immagine intuitiva del modo di generazione di tali coazioni, è confermato dall'esame delle condizioni che debbono esser sodisfatte dopo il mutamento della configurazione naturale degli elementi del corpo. Queste sono infatti le condizioni d'equilibrio senza forze applicate, e le condizioni di congruenza intrinseche ed estrinseche riferite non già alla sola deformazione elastica (corrispondente secondo le relazioni d'elasticità alla tensione cui le equazioni d'equilibrio si riferiscono), ma alla somma di essa con la deformazione impressa; la qual somma deve ovviamente corrispondere allo spostamento, continuo e sodisfacente alle condizioni di vincolo, che porta il corpo dalla configurazione precedente a quella seguente la considerata deformazione impressa. Tali condizioni determinano un unico sistema di tensioni, come risulta osservando che la differenza tra due sistemi ad esse sodisfacenti sarebbe una coazione elastica con deformazione congruente. Può dunque affermarsi che l'effetto della deformazione non congruente di cui sopra s'è detto, pensata direttamente impressa al corpo nello stato primitivo, è non soltanto analogo a quello che si otterrebbe procedendo come s'era indicato, ma è senz'altro l'effetto medesimo; il quale risulta in particolare indipendente dalla deformazione elastica allora considerata, cioè dalle forze applicate provvisoriamente alle singole parti al fine di consentire ad esse il mutuo contatto e l'aderenza ai vincoli ([177]).

([177]) S'è detto che la deformazione impressa può essere prodotta sollecitando ogni parte del corpo con forze non contenute nei limiti d'elasticità, e togliendo poi le forze medesime. Si tratta delle deformazioni permanenti, o plastiche, che si producono appunto quando si giunge a tali limiti, o meglio a una certa *condizione di plasticità* riguardante lo stato di tensione, e dipendente naturalmente dal materiale. (S'è ammesso che le deformazioni permanenti così ottenute siano intrinsecamente congruenti in ciascuna parte, affinchè non producano stati di coazione elastica già nelle parti stesse.)

Il problema di un corpo sollecitato nel modo suddetto è in generale complesso (problema di elasto-plasticità), poichè negli stati di tensione che si considerano vanno ovviamente comprese anche le coazioni elastiche prodotte dalle stesse deformazioni plastiche non congruenti. Qui basti accennare che si può ammettere, con riferimento a un comportamento tipico dei materiali metallici duttili (plasticità perfetta), che nel prodursi di deformazioni plastiche lo stato di tensione si mantenga sodisfacente alla medesima condizione di plasticità, e che sia nullo in ogni istante il lavoro della variazione della tensione per la variazione della deformazione plastica. Caratteristica di quest'ultima è l'invarianza del volume.

Può anche osservarsi in tale proposito che fenomeni di plasticità potranno spesso verificarsi nell'intorno di punti in cui si considerino agenti forze concentrate, assegnate o reazioni di vincoli. È chiaro che sostituendo alle condizioni effettive le condizioni li-

Se si ricorda che nel caso dei vincoli rigidi s'è trovata al paragrafo 40 la relazione $\int_{(S)} (\sigma_x^{(0)} \varepsilon_x^{(1)} + \dots + \tau_{zx}^{(0)} \gamma_{zx}^{(1)})\, dV = 0$, essendo $\sigma_x^{(0)}, \dots, \tau_{zx}^{(0)}$ le componenti di una coazione elastica, ed $\varepsilon_x^{(1)}, \dots, \gamma_{zx}^{(1)}$ le componenti di una qual si voglia deformazione congruente, e si assume per quest'ultima la sopra considerata deformazione totale, somma della deformazione impressa che è causa della stessa coazione con la deformazione elastica a questa corrispondente, si ottiene la notevole relazione

$$2\Phi^{(0)} = \int_{(S)} (\sigma_x^{(0)} \varepsilon_x^{(0)} + \dots + \tau_{zx}^{(0)} \gamma_{zx}^{(0)})\, dV = -\int_{(S)} (\sigma_x^{(0)} \varepsilon_x^{*} + \dots + \tau_{zx}^{(0)} \gamma_{zx}^{*})\, dV,$$

valida nel caso suddetto, dove sono distinte con l'asterisco le componenti della deformazione impressa. Nel caso infine del corpo libero (o vincolato isostaticamente) ponendo $\varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_z^{(1)} = \text{cost}$, $\gamma_{xy}^{(1)} = \gamma_{yz}^{(1)} = \gamma_{zx}^{(1)} = 0$, componenti di una deformazione in tal caso congruente, si ha

$$\int_{(S)} \Psi^{(0)}\, dV = 0\,;$$

che è un'altra notevole proprietà di questo caso particolare di coazione elastica.

42. Tutte le equazioni sopra ricordate, mediante le quali si pone in forma analitica il problema riguardante l'effetto delle deformazioni impresse, sono le medesime del problema riguardante l'effetto delle forze, mutati naturalmente i termini noti ([178]). Segue ovviamente da tale raffronto tra

---

miti delle forze concentrate si deve rinunziare all'indagine dello stato di tensione e deformazione in tali intorni, che dipende ovviamente dall'effettiva ripartizione delle forze nei punti delle superficie di contatto del corpo considerato con quelli che ad esso trasmettono le forze medesime. Quando si volesse eseguire una tale indagine non bisognerebbe dimenticare che oltre a produrre stati di coazione, le deformazioni plastiche modificheranno la ripartizione suddetta, per la variazione delle superficie di contatto, in misura che potrà essere anche molto maggiore di quella dell'analogo effetto delle deformazioni elastiche.

([178]) Nel problema delle forze s'è visto che possono intervenire condizioni esplicite riguardanti anche determinate superficie interne (escluse quindi quelle dei tagli da considerare nel caso dei corpi ciclici), che sono le superficie di discontinuità delle forze di massa supposte tutte finite. Nel problema delle coazioni elastiche interverranno analogamente, come si vedrà al paragrafo 45, condizioni poste esplicitamente per quelle superficie attraverso le quali si abbiano discontinuità della deformazione impressa, o delle sue derivate normali, non sodisfacenti alle condizioni di congruenza (18) del paragrafo 15.

i due problemi la validità della legge di sovrapposizione estesa anche agli effetti delle deformazioni impresse: *l'effetto di un certo sistema di forze e di una certa deformazione impressa è la somma degli effetti di altri sistemi di forze e di altre deformazioni impresse, che insieme costituiscano rispettivamente il primo sistema e la prima deformazione.*

Le diverse deformazioni impresse vanno intese come successivi mutamenti dello stato naturale di ogni elemento, e per deformazione costituita dal loro insieme s'intende ovviamente la somma delle deformazioni medesime, non avendo importanza la mutata configurazione di riferimento per la ragione già più volte ricordata. Risulta poi dalla stessa legge di sovrapposizione che ogni deformazione impressa può essere valutata come passaggio alla nuova configurazione naturale dell'elemento da una qual si voglia configurazione effettiva, cui l'elemento stesso sia pervenuto per effetto di forze e di deformazioni impresse precedenti ([179]): la differenza delle deformazioni così diversamente valutate è infatti una deformazione congruente, che non ha alcun effetto.

È da avvertire anche che nel precedente enunciato generale non s'è fatta più menzione di spostamenti assegnati o di altre cause di non omogeneità delle condizioni di vincolo, essendosi già osservato che l'effetto di tali cause è per definizione una coazione elastica, e d'altra parte risultando da quanto s'è esposto che ogni coazione elastica può pensarsi prodotta da una deformazione impressa: può assumersi infatti ovviamente per tale la stessa deformazione corrispondente secondo le relazioni d'elasticità alla coazione medesima cambiata di segno, aggiungendo ad arbitrio una deformazione congruente ([180]).

Le forze di massa e di superficie che equilibrano la tensione corrispondente formalmente secondo la (37_1) alla deformazione congruente totale debbono equilibrare anche la tensione corrispondente alla sola deformazione impressa, perchè l'altra parte è la stessa coazione elastica: esse sono pertanto note a priori, e si diranno *forze di massa e di superficie equivalenti*. Questa osservazione riduce il problema riguardante una data deformazione impressa ad un problema riguardante assegnate forze; salvo che per ottenere la tensione effettiva bisognerà dalla soluzione di quest'ul-

---

([179]) Per tale configurazione di riferimento nella valutazione della deformazione impressa potrebbe anche assumersi quella del corpo sotto l'azione delle forze applicate provvisoriamente alle singole parti, nel procedimento immaginato al paragrafo precedente, al fine di ripristinare la congruenza dopo la deformazione impressa al corpo diviso come ivi è detto.

([180]) Quest'ultima osservazione dimostra anche, insieme con la legge di sovrapposizione, che si può sempre mediante una deformazione impressa portare il corpo da un dato stato iniziale a un altro quale si voglia, in particolare allo stato che si è detto primitivo.

timo problema, cioè dalla tensione che si avrebbe per l'azione delle forze equivalenti, togliere quella suddetta corrispondente formalmente alla deformazione impressa. Le forze equivalenti vanno naturalmente considerate agenti sul corpo colle sue effettive condizioni di vincolo.

Si avverta che quando la deformazione impressa presenti attraverso una certa superficie una discontinuità risulterà evidentemente una forza di massa equivalente concentrata sulla superficie medesima, necessaria per l'equilibrio con la tensione discontinua; mentre quando si abbia discontinuità della sola derivata normale della deformazione impressa, risulterà semplicemente anche la forza di massa equivalente discontinua attraverso la stessa superficie. (Ciò avverrà anche quando tali discontinuità sodisfacciano alle condizioni di congruenza (18) del paragrafo 15, cioè anche quando non siano esse stesse causa di coazione elastica.)

43. Si distingueranno col nome di *distorsioni* le coazioni elastiche prodotte da deformazioni impresse sodisfacenti alle condizioni di Saint-Venant, quindi necessariamente non sodisfacenti a tutte le altre condizioni di congruenza intrinseche ed estrinseche ([181]). Si tratterà dunque delle deformazioni impresse sopra citate che presentino attraverso certe superficie discontinuità non sodisfacenti alle condizioni (18) del paragrafo 15, o di deformazioni impresse ad un corpo ciclico, per le quali non sia possibile uno spostamento monodromo, o di tali infine che non siano compatibili colle condizioni di vincolo (sempre, s'intende, considerate omogenee).

Quest'ultimo tipo di distorsione, già compreso fra gli stati di tensione studiati al capitolo precedente, gode di tutte le proprietà di continuità ivi indicate. Assegnata la deformazione impressa sodisfacente a tutte le condizioni di congruenza intrinseche, si potranno porre le condizioni di compatibilità coi vincoli omogenei per la deformazione totale, somma della dèformazione impressa con quella prodotta dalle incognite reazioni dei

---

([181]) Il nome indicherebbe propriamente l'operazione consistente nell'imprimere una deformazione siffatta; e si può osservare in proposito che spesso si trova definito come distorsione un particolare modo di eseguire tale operazione, con preventiva sconnessione del corpo. Trattasi evidentemente di un espediente didattico come quello già qui usato, senza analoga pretesa di definizione, al paragrafo 41.

Con traslato meno felice di quello qui proposto altri chiama distorsione la stessa deformazione impressa (anche nel caso generale di una deformazione non congruente quale si voglia, con la qualificazione di distorsione distribuita). Si rischia così da un lato di dimenticare che la deformazione non congruente non può attuarsi da sola nel corpo integro; dall'altro di ricadere nello stesso difetto della pseudo-definizione sopra accennata, di credere cioè che per imprimere una tale deformazione sia necessario procedere materialmente alla sconnessione del corpo medesimo.

vincoli medesimi [182]. Non sarà conveniente ricorrere alle forze equivalenti, se non forse quando abbia particolare interesse la conoscenza dello spostamento, potendo allora porsi il problema direttamente per quest'ultimo (equazioni di Cauchy) [183].

S'è visto al paragrafo 17 come da ogni deformazione intrinsecamente congruente, cui corrisponda uno spostamento necessariamente non sodisfacente a tutte le condizioni di vincolo, possa ottenersi anche uno spostamento sodisfacente a tali condizioni, ma presentante discontinuità in forma di moto rigido attraverso superficie che dividano il corpo in due o più parti [184]. Il problema riguardante l'effetto di una deformazione siffatta potrà dunque esser posto anche assegnando tali discontinuità [185]. Considerata allora separatamente, com'è consentito dalla legge di sovrapposizione, ciascuna discontinuità attraverso una superficie che divida il corpo in due parti [186], è chiaro che si potranno scrivere le equazioni (19)

---

(182) Si considereranno dunque ancora le equazioni (19) come al paragrafo 34, con gli spostamenti s_i nulli, e gli spostamenti corrispondenti alla deformazione impressa al posto delle parti degli $\overline{s}_i$ dovute alle forze direttamente assegnate. È chiaro che questi ultimi con segno cambiato possono considerarsi invece come assegnati s_i (con forze nulle).

(183) Le forze equivalenti risulteranno in generale anche in questo caso (come pure nel caso considerato alla fine del precedente paragrafo) diverse da zero in ogni punto del corpo e della superficie.

(184) Una divisione in parti vincolate isostaticamente è sufficiente in ogni caso a render nulli tutti gli spostamenti dei punti vincolati. Ma la discontinuità dello spostamento potrà in particolare riuscire nulla attraverso qualcuna delle superficie di divisione, restando così continuo lo spostamento sodisfacente alle condizioni di vincolo anche in parti vincolate iperstaticamente.

(185) In tal modo si pone il problema delle azioni di «forzamento» che possono utilmente esercitarsi per esempio nei ponti ad arco in cemento armato.

(186) Una superficie chiusa divide ovviamente in due parti ogni corpo (al quale appartenga interamente). Una superficie aperta (considerata in ogni caso estesa fino alla superficie esterna del corpo) può non dividere un corpo ciclico: la superficie di discontinuità dovrà allora intendersi composta effettivamente di due o più di tali superficie, sull'insieme delle quali la discontinuità si manifesti in forma di un unico moto rigido.

Considerare separatamente l'effetto di ciascuna discontinuità significa sostituire all'assegnata deformazione impressa la somma di altre, ciascuna delle quali richieda per la compatibilità coi vincoli soltanto la discontinuità medesima. (Una deformazione siffatta può ottenersi eliminando ognuna delle altre discontinuità assegnate mediante una variazione della deformazione impressa in un certo spazio comprendente la rispettiva superficie di discontinuità: dalla somma delle deformazioni così ottenute potrà aversi ovviamente uno spostamento sodisfacente a tutte le condizioni di vincolo e con tutte e sole le assegnate discontinuità; dunque tale somma differirà dalla deformazione assegnata per una parte congruente.)

È da osservare infine che le discontinuità assegnate s'intenderanno sempre indipendenti, nel senso che nessuna di esse possa trasferirsi sulla superficie di una delle altre senza che ne mutino gli effetti. Quando tale trasferimento fosse possibile, verificandosi la condizione che sarà dichiarata fra breve nel testo, dovrebbe ovviamente in luogo delle due discontinuità considerarsene una sola pari alla somma di esse.

come al paragrafo 34, con tutti gli s nulli e gli $\bar{s}$ dipendenti esclusivamente dalle incognite reazioni, aggiungendo ai parametri indeterminati di moto rigido $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$, nelle equazioni riguardanti le condizioni di vincolo di una delle due parti, i parametri $[\omega_x], \dots, [\zeta]$ dell'assegnata discontinuità considerata come spostamento dell'altra parte (che sarà indicata appresso come parte I) rispetto a quella: ciò significa infatti porre che con l'aggiunta della deformazione elastica, il cui effetto è rappresentato dai termini $\bar{s}$, sia possibile togliere la discontinuità dello spostamento (cioè riportare a contatto le due facce della considerata superficie) mantenendo tutte le condizioni di vincolo ([187]). Eliminati i parametri indeterminati, resteranno per le n reazioni $n - c$ equazioni (essendo al solito c la caratteristica della matrice incompleta del sistema, considerati come incognite i parametri stessi), cui saranno da aggiungere le c condizioni d'equilibrio indipendenti (fra le sole reazioni).

Le suddette $n - c$ equazioni possono distinguersi nei seguenti gruppi (con ovvio significato dei simboli): $n_1 - c_1$, omogenee, che esprimono la compatibilità della deformazione elastica coi vincoli della parte I; $n_2 - c_2$, omogenee, che esprimono la stessa condizione per la parte II; e le rimanenti $c_1 + c_2 - c$ (essendo $n_1 + n_2 = n$), non omogenee, ossia contenenti gli assegnati parametri $[\omega_x], \dots, [\zeta]$. Il primo gruppo si ottiene evidentemente dalle n_1 equazioni esprimenti le condizioni di vincolo della parte I eliminando i parametri indeterminati di moto rigido; e così dalle n_2 equazioni riguardanti la parte II si ottiene allo stesso modo il secondo gruppo, essendo da osservare che in tali equazioni considerate separatamente possono riguardarsi come incognite le somme $\omega_{x_0} + [\omega_x], \dots, \zeta_0 + [\zeta]$. Il terzo gruppo si ottiene infine eliminando ancora i parametri arbitrari dal sistema costituito dalle c_1 equazioni che restano delle prime n_1 (quelle che esprimono appunto tali parametri in funzione delle $\bar{s}$) e dalle analoghe c_2 che restano delle altre n_2, contenenti queste ultime anche i parametri della discontinuità assegnata: tali equazioni risultano in numero di $c_1 + c_2 - c$ per essere ancora c la caratteristica della matrice incompleta del sistema delle considerate $c_1 + c_2$ equazioni per le incognite $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$, ovviamente equivalente a quello di tutte le equazioni scritte da prin-

---

([187]) A togliere la discontinuità occorre il moto rigido di parametri $[\omega_x], \dots, [\zeta]$ della parte II rispetto alla parte I, cioè appunto lo stesso moto per la sola parte II oltre al moto rigido arbitrario (di parametri $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$) dell'intero corpo.

È chiaro che le equazioni sopra indicate sono le stesse che si scriverebbero dopo ridotto il problema alla forma che esso assume quando siano assegnati gli spostamenti dei punti vincolati corrispondenti alla medesima deformazione impressa: tali spostamenti (definiti a meno di un moto rigido dell'intero corpo) sono infatti rappresentati dai termini delle equazioni medesime contenenti i parametri $[\omega_x], \dots, [\zeta]$.

cipio. Di tutte le n equazioni esse sono le sole non omogenee, essendo omogenee anche le condizioni d'equilibrio.

Le equazioni da prima considerate scritte con tutti gli $\bar{s}$ nulli vengono ad esprimere la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista almeno un moto rigido consentito dai vincoli della parte I, che sommato con l'assegnata discontinuità sia consentito dai vincoli della parte II; o in altri termini, affinchè la discontinuità medesima sia un moto rigido relativo consentito dai vincoli alle due parti. Che una discontinuità così fatta non produca distorsione, come risulta evidentemente da tale osservazione, appare anche direttamente dal fatto che essa può introdursi mantenendo sodisfatte tutte le condizioni di vincolo. In particolare non dà distorsione nessuna discontinuità in forma di moto rigido attraverso una superficie dividente il corpo in due parti, una delle quali sia priva di vincoli (per esempio ogni superficie chiusa, posti i vincoli alla superficie esterna del corpo); nè può aversi distorsione del tipo considerato in un corpo vincolato isostaticamente [188]. Mentre la prima di tali conclusioni è anche per sè evidente, la seconda può anche dedursi dall'osservata equivalenza della discontinuità qui considerata ad assegnati cedimenti.

È da osservare infine che ogni discontinuità in forma di moto rigido può trasferirsi da una superficie ad un'altra senza che ne mutino gli effetti a condizione che sia consentito dai vincoli il moto medesimo della parte compresa tra le due superficie (supposte non intersecantisi) rispetto all'una o all'altra delle parti rimanenti [189]. In particolare qualunque di-

---

[188] Si vede subito che il numero $c_1 + c_2 - c$ delle equazioni del terzo gruppo (le sole che possano risultare non omogenee) è uguale a 6 meno il numero dei moti rigidi relativi indipendenti consentiti dai vincoli alle due parti. Sono tali infatti i $6 - c_1$ moti rigidi indipendenti consentiti alla parte I e i $6 - c_2$, consentiti alla parte II; ma fra questi $12 - c_1 - c_2$ moti rigidi si avrà una relazione lineare per ogni combinazione lineare dei primi che s'identifichi con una dei secondi, cioè per ogni moto rigido consentito dai vincoli all'intero corpo: il numero di tali relazioni, che va tolto dal precedente, è dunque $6 - c$, e resta così $6 - (c_1 + c_2 - c)$. Nel primo caso considerato nel testo è $c_1 = 0$, $c_2 = 0$; nel secondo $c_1 = n_1$, $c_2 = n_2$, $c = n$: in entrambi i casi risulta $6 - (c_1 + c_2 - c) = 6$, come dev'essere restando consentito dai vincoli qualunque moto rigido relativo delle due parti.

Il suddetto numero delle equazioni del terzo gruppo è in ogni caso compreso, come quello dei moti rigidi relativi consentiti, fra 6 e 0. Quando tali equazioni siano 6, non potranno risultare tutte omogenee se non per una discontinuità nulla (dovendo esser nulle 6 combinazioni lineari indipendenti dei parametri di essa); perciò ogni discontinuità darà distorsione, com'è chiaro d'altra parte per non essere in tal caso consentito dai vincoli nessun moto rigido relativo.

[189] Detta II la parte fra le due superficie, effettuando il moto relativo fra la I e l'insieme delle altre due parti, pensata la III sciolta dai propri vincoli, si ripristinerà la continuità della II colla I; poi si riporteranno a posto i punti vincolati della III mediante il moto contrario della sola parte medesima: così si trasferisce la disconti-

scontinuità di tal forma può essere trasferita da una superficie ad una altra che separi i vincoli negli stessi due gruppi (anche se intersechi la prima).

44. Gli stessi caratteri di continuità presentano le distorsioni che possono aversi in un corpo occupante uno spazio ciclico per effetto di deformazioni impresse cui non possa corrispondere nello spazio medesimo uno spostamento monodromo. Considerando da prima il caso del corpo vincolato isostaticamente, sia assegnata per esso una deformazione impressa sodisfacente a tutte le altre condizioni di congruenza intrinseche, cioè alle condizioni di Saint-Venant e a quelle riguardanti le eventuali superficie di discontinuità di essa o delle sue derivate prime. Si penserà il corpo tagliato in modo da ridurlo a connessione semplice, e si esprimerà la tensione in funzione della t_n sulla superficie di ogni taglio; quindi si porranno come al paragrafo 33 le condizioni di continuità delle componenti interiori della tensione medesima e delle loro derivate normali attraverso la stessa superficie, e da ultimo le condizioni di monodromia dello spostamento riferite alla somma della deformazione elastica colla deformazione impressa: le costanti di polidromia della prima si porranno cioè contrarie a quelle della seconda. La soluzione dipenderà dunque in tal caso da tali costanti di polidromia, che potrebbero anche essere direttamente assegnate invece della deformazione impressa. È interessante osservare, come già al paragrafo 33, che in molte applicazioni il procedimento potrà praticamente ridursi a porre soltanto le ultime condizioni suddette.

Quando il sistema dei vincoli sia iperstatico, assegnata una deformazione impressa come la precedente, bisognerà trovare da prima la precedente deformazione elastica che valga ad annullare la polidromia dello spostamento; poi si scriveranno le equazioni (19) esprimenti le condizioni di vincolo con gli s nulli e gli $\bar{s}$ corrispondenti alla somma della deformazione impressa colla deformazione elastica suddetta e con quella prodotta dalle incognite reazioni dei vincoli (quest'ultima naturalmente corrispondente a uno spostamento monodromo, cioè soluzione del problema riguardante gli effetti delle reazioni posto per il considerato corpo ciclico). Dati essenziali del problema sono questa volta, oltre alle costanti di polidromia, gli spostamenti dei punti vincolati risultanti dall'insieme della

---

nuità sulla seconda superficie senza variazione della deformazione impressa (essendosi effettuati solo moti rigidi). Mediante l'operazione inversa (dunque ancora con soli moti rigidi) si otterrà il trasferimento dalla seconda superficie alla prima; risultando così la possibilità di entrambi i trasferimenti quando sia consentito il moto della parte II rispetto ad una qualunque delle altre.

Sotto analoghe condizioni potrà anche trasferirsi la assegnata discontinuità su una superficie che intersechi la prima.

deformazione impressa con quella elastica che annulla la polidromia medesima (spostamenti da assegnare ovviamente a meno di un moto rigido) ([190]). S'intende che quando sia assegnata la deformazione impressa potrà ricorrersi anche alle forze equivalenti.

Un'altra posizione del problema, sempre nel caso del corpo ciclico vincolato iperstaticamente, è quella che si ha considerando il corpo stesso ridotto a connessione semplice mediante un sistema di tagli, e assegnando per ciascuno di questi un moto rigido da intendere come discontinuità (nello spazio non tagliato) di uno spostamento sodisfacente a tutte le condizioni di vincolo, ottenuto integrando una certa deformazione impressa nello spazio tagliato. Qui sono dunque dati del problema insieme colle costanti di polidromia (che sono i parametri dei moti rigidi assegnati) anche le posizioni dei tagli rispetto ai vincoli, che non possono essere mutate a piacere ([191]). Per la soluzione potrà procedersi in modo del tutto analogo a quello sopra indicato per il caso dei vincoli isostatici, salvo naturalmente che la determinazione della tensione in funzione delle incognite t_n implica questa volta la ricerca delle reazioni staticamente indeterminate.

Le distorsioni fin qui studiate, aventi in comune la forma di moto rigido della discontinuità dello spostamento corrispondente alla deformazione impressa (considerata, quando si tratti un corpo ciclico, nel corpo medesimo tagliato), possono indicarsi come *distorsioni di Volterra.*

45. Le distorsioni prodotte da discontinuità della deformazione impressa e delle sue derivate prime non sodisfacenti alle condizioni (18) del paragrafo 15 si distinguono dalle precedenti e dalle altre coazioni elastiche per non esser più continue le componenti interiori della tensione, o almeno le loro derivate normali, attraverso le superficie delle assegnate

---

([190]) Quando tali spostamenti siano nulli (cioè si riducano ad un unico moto rigido) potrà dirsi che si tratta, per il corpo considerato coi suoi assegnati vincoli, di una deformazione impressa sodisfacente a tutte le condizioni di congruenza fuorchè quella della monodromia dello spostamento.

Si avverta che mentre le costanti di polidromia dipendono effettivamente dalle singolarità della deformazione impressa in uno spazio aciclico comprendente il corpo considerato, la deformazione elastica occorrente ad eliminarlo dipende invece propriamente dalla forma di quest'ultimo; e pertanto i considerati spostamenti dei punti vincolati vengono a dipendere così dalla deformazione impressa come dal corpo e dai suoi vincoli.

([191]) Ciascuna delle assegnate discontinuità potrà essere trasferita sulla superficie di un altro taglio dello stesso tipo (cioè che interrompa gli stessi cammini) quando sia costituita da un moto rigido consentito come moto relativo delle due parti in cui le superficie medesime, non intersecantisi, dividano il corpo (e sotto analoga condizione anche se le due superficie s'intersechino).

discontinuità: è infatti questo evidentemente il solo caso al quale non possa estendersi il ragionamento esposto al paragrafo 32 per dimostrare la continuità di tali componenti e delle loro derivate attraverso ogni superficie che non sia superficie di discontinuità delle forze di massa (sempre posti continui i coefficienti d'elasticità e le derivate prime di essi) ([192]). La tensione deve sodisfare in tal caso a condizioni tutte omogenee fuorchè quelle riguardanti la data superficie, attraverso la quale la corrispondente deformazione e le sue derivate debbono presentare discontinuità, che sommate con le assegnate discontinuità della deformazione impressa (e delle sue derivate) rendano sodisfatte le sei condizioni (18): si vede facilmente che restano così assegnate le discontinuità delle componenti interiori della tensione e delle loro derivate normali ([193]). È da avvertire per altro che il problema sarà determinato solo quando la data superficie divida il corpo in due parti, alle quali sia consentito dai vincoli un moto rigido relativo arbitrario (in particolare per ogni corpo aciclico vincolato isostaticamente); altrimenti si avranno infinite soluzioni, differenti fra loro per una delle distorsioni considerate ai paragrafi precedenti.

Nel caso suddetto (sempre inteso che la deformazione impressa sia compatibile con l'eventuale connessione multipla di ciascuna delle due parti e coi vincoli delle parti medesime quando siano iperstatici) potrà porsi analiticamente il problema assumendo come incognita la $\boldsymbol{t}_n$ sulla superficie di discontinuità: espressa in funzione di questa la tensione in ogni punto della prima e della seconda parte, dopo aver introdotto vincoli ausiliari integrativi al fine di rendere possibile l'equilibrio delle parti medesime con qualunque $\boldsymbol{t}_n$, si potrà porre la sopra ricordata condizione delle assegnate discontinuità delle componenti interiori di essa tensione

---

([192]) Basta ricordare che tale ragionamento è fondato sulle proprietà riguardanti le discontinuità della tensione e delle sue derivate, esprimenti condizioni d'equilibrio, e sulle ricordate condizioni (18) cui deve sodisfare la discontinuità della deformazione e delle sue derivate attraverso un data superficie, affinchè sia consentito lo spostamento continuo attraverso le superficie medesime, cioè affinchè la discontinuità di esso si riduca a un moto rigido.

([193]) Le discontinuità delle componenti interiori della tensione si ottengono, considerata la continuità delle componenti esteriori, dalle omologhe discontinuità della deformazione elastica, contrarie a quelle della deformazione impressa. Da esse e da queste medesime si ottengono poi le discontinuità delle componenti esteriori della stessa deformazione elastica, quindi i secondi membri delle (18); e poichè queste debbono valere per la deformazione totale, e sono assegnati i corrispondenti termini riguardanti la deformazione impressa, si hanno così le discontinuità delle componenti interiori della derivata normale della deformazione elastica. Così infine, potendosi ricavare dalle discontinuità delle componenti interiori della tensione quelle delle derivate normali delle componenti esteriori (nota ([100])), resteranno determinate le discontinuità di tutte le componenti della derivata normale della tensione (come della deformazione elastica).

e delle loro derivate normali, trovando così un'espressione della t_n che dovrà contenere anche questa volta sei costanti arbitrarie. Queste saranno infine da determinare mediante le condizioni d'equilibrio della t_n senza reazioni, com'è ovviamente necessario, nella considerata ipotesi, per l'equilibrio dell'una e dell'altra parte (dovendo esser nullo il lavoro di essa t_n per un arbitrario moto rigido). Si avranno dunque effettivamente reazioni solo quando una almeno delle due parti sia vincolata iperstaticamente.

Negli altri casi dovrà esser posto il problema assegnando una discontinuità dello spostamento corrispondente alla deformazione impressa (determinata dalla discontinuità di questa ultima solo a meno di un moto rigido) per cui lo spostamento medesimo risulti compatibile con la connessione del corpo tagliato secondo la superficie di discontinuità e con tutte le condizioni di vincolo ([194]); alla quale discontinuità potrà aggiungersi ad arbitrio solo un moto rigido che sia consentito come moto relativo delle due parti in cui il corpo resti diviso ([195]). Si potrà allora cercare la soluzione assumendo come incognita lo spostamento dei punti di una delle facce della data superficie, dal quale con l'aggiunta della discontinuità corrispondente alla deformazione elastica (contraria a quella suddetta) si avrà lo spostamento dei punti dell'altra faccia: risolto il problema d'elasticità così definito per ciascuna delle due parti del corpo, o per il corpo rimasto connesso, ponendo sul resto della superficie la condizione

---

([194]) Si avverta che qui la superficie di discontinuità non è da considerare composta come alla nota ([186]), ma corrispondente a un solo taglio. Quando questo divida il corpo ciclico in due parti, dovrà intendersi innanzi tutto che la deformazione impressa sia congruente intrinsecamente in ciascuna di queste (una almeno delle quali sarà ancora ciclica), cioè che si possa ottenere da essa, considerata separatamente in ciascuna delle parti medesime, uno spostamento monodromo e continuo; poi che con l'assegnata discontinuità tale spostamento sia compatibile coi vincoli dell'una e dell'altra parte. Quando invece il corpo resti connesso s'intenderà che la deformazione impressa sia congruente intrinsecamente ed estrinsecamente nello spazio così tagliato, vale a dire che integrata in esso dia uno spostamento monodromo e continuo nello spazio medesimo e sodisfacenti a tutte le condizioni di vincolo; e la discontinuità assegnata attraverso la superficie del taglio sarà quella di tale spostamento considerato nello spazio non tagliato. Si ha così un problema analogo a quello considerato alla fine del paragrafo precedente, salvo che qui la discontinuità è di forma generica per essere discontinua la deformazione impressa. (Si osservi la possibilità di trasferimento su un'altra superficie, in ciascuno dei casi considerati in questo paragrafo, di una parte in forma di moto rigido dell'assegnata discontinuità dello spostamento, sotto le condizioni già indicate per il trasferimento delle discontinuità di tal forma.)

([195]) Si ha così una generalizzazione del problema delle azioni di « forzamento » accennato alla nota ([185]). Si avverta che a tal forma particolare si riduce il problema delle distorsioni secondo la consueta definizione ricordata alla nota ([181]).

della tensione nulla e le assegnate condizioni di vincolo, resterà solo da uguagliare la t_n sulle due facce (continuità delle componenti esteriori della tensione) (196).

(196) Il risultato non varia quando sia aggiunta alla discontinuità, come sopra è detto, un moto rigido consentito dai vincoli, poichè il problema posto per una discontinuità siffatta conduce ovviamente ad uno spostamento (dei punti della prima faccia) e ad una tensione t_n identicamente nulli.

Assumendo invece anche questa volta per incognita la t_n, da determinare mediante la condizione dell'assegnata discontinuità dello spostamento, potrà occorrere ancora l'introduzione di vincoli integrativi, le reazioni dei quali dovranno poi annullarsi ponendo le condizioni d'equilibrio della t_n coi soli vincoli effettivi di ciascuna delle due parti. Queste condizioni sono, come già s'è osservato, in numero pari a quello dei moti rigidi relativi consentiti dai vincoli stessi, cioè il numero dei parametri mediante i quali potrà esprimersi il moto rigido da aggiungersi arbitrariamente alla discontinuità assegnata, e varranno pertanto a determinare infine i parametri stessi.