dall'altra che la superficie medesima si mantenga piana, o si deformi in modo dipendente anch'esso esclusivamente dalle componenti suddette: si avranno allora come incognite solo queste ultime, e sarà ovviamente sodisfatta la condizione dell'ugual deformazione delle due facce del taglio.

34. Sia ora il corpo vincolato in un modo generico, cioè iperstaticamente. Si potrà pensarlo liberato da tutti i vincoli effettivi, e assoggettato invece a un arbitrario sistema isostatico di vincoli ausiliari sufficienti a renderlo fisso ($c' = n' = 6$): posto allora che agiscano su di esso, oltre alle assegnate forze di massa e di superficie, le incognite reazioni dei vincoli soppressi, potrà esprimersi come soluzione del problema precedente la tensione, e quindi la deformazione, in funzione di tali incognite; le quali potranno allora essere determinate in modo che restino sodisfatte le effettive condizioni di vincolo. Si porrà che queste siano rigide in senso lato, assegnando per ciascuna condizione elementare uno spostamento (eventualmente nullo), cioè il già considerato cedimento del vincolo stesso (143).

Le n condizioni di vincolo si scriveranno nella forma (19), dove le $\bar{s}$ saranno le componenti di un particolare spostamento ottenuto integrando la deformazione suddetta, e pertanto come quest'ultima funzioni delle reazioni incognite (144). Le condizioni di possibilità di tale sistema per i sei parametri di moto rigido $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$, cioè le relazioni tra le reazioni che si ottengono eliminando da esso i parametri medesimi, sono condizioni

(143) Potrà trattarsi di un cedimento effettivamente osservato in una costruzione già eseguita e soggetta ai carichi considerati, o anche semplicemente presunto come effetto dei carichi stessi per confronto con casi analoghi, quando la costruzione sia soltanto progettata.

Gli spostamenti assegnati si riguarderanno ovviamente anch'essi infinitesimi per un fattore costante sottinteso.

(144) Qui non è da tacere la difficoltà consistente nel non potersi esprimere gli spostamenti dei punti vincolati per il caso che sarebbe da considerare secondo la definizione data dei vincoli, cioè il caso limite delle reazioni concentrate nei punti medesimi, poichè lo spostamento di un punto della superficie, nel quale vada concentrandosi una forza finita, inteso come soluzione esatta del problema d'elasticità, tende all'infinito. Se si considera il semispazio delimitato da un piano, costituito di materiale elastico isotropo (problema del suolo isotropo), quando su una superficie Σ di tale piano agisca una forza f per unità di area, normale al piano medesimo, lo spostamento di un punto di questo secondo la stessa direzione normale risulta proporzionale al potenziale newtoniano di semplice strato $\int_{(\Sigma)} \frac{f}{r}\, dA$ (essendo r la distanza del punto medesimo dal punto generico di Σ). Quando la Σ si riduce all'intorno infinitesimo di un

di congruenza per il corpo considerato coi suoi effettivi vincoli, come s'è visto al paragrafo 16, dove s'è già anche accennato a questo procedimento: esse sono in numero di $n - c$ essendo c la caratteristica della matrice incompleta del sistema; alle quali sono da aggiungere le equazioni d'equilibrio tra le incognite reazioni e le forze assegnate (di massa e di superficie), equivalenti alla condizione di annullamento delle reazioni dei vincoli ausiliari. Se si ricorda che da queste ultime, quando sia $c < 6$ (caso del corpo labile), possono ottenersene $6 - c$ eliminando tutte le reazioni, che sono le condizioni di possibilità del problema, si conclude (come già allora)

---

punto O, posto $\lim \int_{(\Sigma)} f\, dA = F$ (forza finita), tale spostamento diventa proporzionale ad $\dfrac{F}{r}$, essendo r la distanza da O.

Siccome d'altra parte il materiale non può sopportare una tensione eccedente certi limiti, ogni reazione deve effettivamente ripartirsi in un certo intorno superficiale del punto teoricamente vincolato. Ciò che importa è allora (s'intende ove il problema non sia altrimenti definito) di trovare un'espressione dello spostamento di ciascuno dei punti vincolati dovuto alla reazione cha si esercita nel punto medesimo, la quale dipenda soltanto dall'intensità di essa reazione, e possa intendersi valida nell'effettiva condizione rappresentata schematicamente dal vincolo concentrato: si vede facilmente come possa assumersi per tale un'espressione ottenuta trascurando una deformazione locale, cioè quella che potrebbe dirsi in un certo senso l'impronta del corpo che fa da vincolo sulla superficie del corpo vincolato (ma senza idea di permanenza). Benchè infatti sia proprio la deformazione locale a rendere infinito al limite lo spostamento, è chiaro che in ogni caso effettivo lo spostamento ad essa corrispondente sarà dell'ordine di grandezza dell'errore inevitabile nell'assegnazione del cedimento.

Teoricamente potrebbe definirsi la deformazione da trascurare come quella prodotta dalla stessa reazione supposta agente sul semispazio delimitato dal piano tangente alla superficie del corpo nel punto considerato. Resterebbe così lo spostamento dovuto a una forza staticamente ad essa equivalente, ma ripartita sulla superficie del corpo in un certo modo conforme alla soluzione del problema del semispazio (suolo elastico), agente sul corpo con i suoi vincoli ausiliari; ed essendo tale forza evidentemente finita in ogni punto (e nulla nel punto considerato, tale restando costantemente nel passaggio dalla forza effettivamente ripartita al caso limite della forza concentrata), si ottiene così per ogni intensità della forza uno spostamento finito. Non occorre avvertire che tale considerazione è valida per qual si voglia posizione del piano tangente rispetto alla superficie: è da osservare piuttosto come la deformazione trascurata risulti così in sostanza una deformazione locale, come sopra s'era detto, pur estendendosi a rigore a tutto il corpo. (Ogni effettiva delimitazione di un intorno al quale intendere estesa la deformazione locale sarebbe ovviamente arbitraria.)

Nelle applicazioni si useranno invece espressioni approssimate dello spostamento ottenute estendendo i risultati riferentisi a problemi posti senza azione di forze concentrate (per esempio nella teoria delle travi), dalle quali si avrà pertanto un valore definito in ogni punto. È chiaro che in tale estensione vengono trascurate le deformazioni locali intorno ai punti di concentrazione delle forze.

che si ha in tutto per le n reazioni un sistema di altrettante equazioni ([145]). (Tale eliminazione delle reazioni dalle equazioni d'equilibrio può conseguirsi esprimendo l'annullamento del lavoro virtuale per ciascuno dei moti rigidi indipendenti consentiti dai vincoli, vale a dire per ciascuna delle $6 - c$ soluzioni indipendenti del sistema (19) coi secondi membri nulli ([146]).)

Si può osservare subito che le n equazioni suddette sono lineari, essendo le (19) lineari nelle $\bar{s}$, e queste funzioni lineari delle incognite reazioni: quest'ultima proprietà consegue evidentemente dal carattere lineare del problema sopra considerato per il corpo vincolato isostaticamente. Quando sarà dimostrato, come si farà prossimamente, che tale sistema di equazioni non può essere indeterminato, resterà pertanto assicurata anche l'esistenza della soluzione.

Il modo più conveniente per esprimere le $\bar{s}$, posta nota la tensione e quindi la deformazione in funzione delle reazioni, è quello dato dall'applicazione del teorema dei lavori virtuali esposta al paragrafo 27, assumendo la forza ausiliaria di volta in volta agente nel punto e secondo la direzione cui ciascuna delle $\bar{s}$ si riferisce, e un sistema ausiliario di vincoli rigidi ad arbitrio (indipendente pertanto da quello sopra considerato ([147])). Nel caso ordinario del corpo non labile converrà poi scegliere tali sei condizioni di vincolo indipendenti fra le stesse condizioni effettive, con gli assegnati spostamenti, pensando tolte le altre $n - 6$ condizioni da considerare sovrabbondanti. Lo spostamento $\bar{s}$ sarà allora quello sodisfacente alle 6 condizioni di vincolo conservate, dunque $\bar{s}_i = s_i$ per i da 1 a 6, distinte con tali indici le condizioni medesime ([148]): dalle prime 6 equazioni (19), che

---

([145]) Come s'è già accennato in proposito delle travature reticolari, la labilità è naturalmente una condizione inammissibile in una costruzione, ma potrà convenire talvolta studiare separatamente una parte labile di una costruzione complessa: le condizioni di possibilità dovranno ovviamente essere sodisfatte tra le forze ad essa direttamente applicate e le azioni esercitate dalla rimanente parte della costruzione medesima.

([146]) L'eliminazione delle incognite può ovviamente eseguirsi anche in modo diretto uguagliando a zero i determinanti di ordine $c + 1$ della matrice completa del sistema delle sei equazioni d'equilibrio: il metodo indicato nel testo è in generale preferibile nelle applicazioni, poichè i moti rigidi consentiti dai vincoli sono immediatamente riconoscibili.

([147]) Lo spostamento $\bar{s}$ che così si esprime è quello (corrispondente alla considerata deformazione) definito da queste ultime condizioni ausiliarie di vincolo, le quali debbono dunque essere le medesime per la determinazione di tutte le $\bar{s}$, nel senso che si dovranno anche assegnare per i punti vincolati gli stessi spostamenti. Per una scelta generica di tali vincoli converrebbe ovviamente porre gli spostamenti tutti nulli.

([148]) L'applicazione del teorema dei lavori virtuali diventa ovviamente inutile, poichè condurrebbe semplicemente a ritrovare gli stessi valori s_i. Si può osservare che essendo in tale applicazione la forza ausiliaria equilibrata da una reazione ad essa oprisulteranno così omogenee, si otterrà $\omega_{x_0} = ... = \zeta_0 = 0$, e le equazioni successive diventeranno semplicemente $s_k = \bar{s}_k$, per k da 7 ad n. Queste saranno dunque le condizioni di possibilità del sistema (risultanti dall'eliminazione delle incognite $\omega_{x_0}, ..., \zeta_0$), ossia le condizioni di congruenza [149]. Insieme colle 6 condizioni d'equilibrio esse serviranno a determinare, come nel procedimento generale, le reazioni.

Il corpo liberato dalle condizioni di vincolo considerate sovrabbondanti si dirà *un sistema principale*. Lo stesso sistema principale potrà infine considerarsi anche nel porre il problema della determinazione della tensione in funzione delle reazioni, assumendo il sistema di vincoli di esso anche come primo sistema ausiliario: si considereranno così come incognite nelle espressioni della deformazione, e quindi degli spostamenti $\bar{s}_k$, soltanto le $n - 6$ reazioni dei vincoli sovrabbondanti, che si diranno *incognite iperstatiche*; a determinare le quali varranno le sole $n - 6$ suddette condizioni di congruenza, mentre le 6 condizioni d'equilibrio si considereranno a parte per trovare, quando interessino, le reazioni dei vincoli del sistema principale [150].

È chiaro da ultimo come per esprimere la tensione prodotta nel sistema principale dal sistema delle forze assegnate e dalle incognite reazioni iperstatiche sia necessario saper esprimere separatamente la parte dovuta alle prime e quelle dovute a ciascuna delle seconde, proporzionali alle reazioni medesime (come risulta dal già osservato carattere lineare del

---

posta, e quindi da una tensione identicamente nulla, si annullerebbe il lavoro virtuale interno per qualunque deformazione, dunque anche per quella prodotta dall'effettiva reazione concentrata (che va sempre riguardata come limite di una forza ripartita).

(149) I termini noti di tali equazioni sono le componenti di spostamento assegnate s_k meno le parti delle rispettive $\bar{s}_k$ corrispondenti alla deformazione prodotta dalle forze direttamente applicate agenti sul corpo col primo sistema di vincoli ausiliari isostatici, e i termini contenenti le incognite reazioni sono le parti delle medesime $\bar{s}_k$ corrispondenti alle deformazioni prodotte dall'azione di ciascuna di esse incognite sul corpo medesimo; intendendosi determinate le $\bar{s}_k$ mediante le condizioni di vincolo effettivo mantenute. Colla scelta di un secondo sistema di vincoli ausiliari ad arbitrio si ottiene un sistema equivalente (condizione di congruenza estrinseca della somma delle due suddette deformazioni), costituito cioè da combinazioni lineari delle stesse equazioni.

(150) Si deve avvertire per altro che la coincidenza dei due sistemi di vincoli ausiliari costituisce teoricamente una complicazione: nell'esprimere ciascuno degli spostamenti $\bar{s}$ bisogna prescindere non solo, come nel procedimento generale, dalla deformazione locale dovuta alla rispettiva reazione, ma anche da quella dovuta a ciascuna delle reazioni degli stessi vincoli ausiliari, per poter attribuire ai punti d'applicazione di essi spostamenti determinati. Il vantaggio che si ha in pratica da tale coincidenza è quello di ottenere direttamente, come s'è visto, il sistema di $n - 6$ equazioni che altrimenti si avrebbe usando le equazioni d'equilibrio per eliminare le reazioni dei vincoli del sistema principale.

problema): è ovvia allora la convenienza di servirsi di ciascuna di queste ultime espressioni anche come espressione della tensione equilibrata colla forza ausiliaria avente la stessa retta d'azione, nell'applicazione del teorema dei lavori virtuali. Si giunge così alla forma particolare che assume comunemente in pratica il procedimento generale sopra indicato ([151]).

35. Si espone ora la preannunziata dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema trattato: proposizione nota come *teorema di Kirchhoff*.

Per il già osservato carattere lineare del problema ([152]) è chiaro innanzi tutto che la differenza tra due soluzioni di esso sarebbe soluzione dello stesso problema reso omogeneo, dunque con forze assegnate di massa e di superficie tutte nulle e con spostamenti tutti nulli dei punti vincolati. Considerato allora il corpo equilibrato in tali condizioni, si applichi il teorema dei lavori virtuali assumendo come spostamento virtuale

([151]) Il rapporto fra la tensione dovuta a ciascuna forza ausiliaria e la forza medesima (questa volta univocamente determinata, come si dimostrerà appresso) potrà dirsi « tensione dovuta alla forza unitaria » (si confronti la nota ([116])). E' da evitare invece come contraria al buon senso l'espressione convenzionale « condizione di carico $X_i = 1$ » per indicare la condizione data dalla forza ausiliaria riguardante la i^a condizione di vincolo.

E' chiaro che nel caso di un corpo labile si potrebbe ricorrere a un sistema principale sempre scegliendo le $n - c$ condizioni di vincolo sovrabbondanti, e introducendo $6 - c$ condizioni integrative solo nell'esprimere gli spostamenti $\overline{s}$ ed s (cioè solo per il secondo dei sistemi ausiliari sopra considerati). Si ricordi infatti (§ 16) che per l'equilibrio di un tal sistema principale si richiedono soltanto le $6 - c$ condizioni necessarie per il corpo con tutti i suoi vincoli, e che in particolare i vincoli effettivi rimasti sono in grado di equilibrare ogni forza applicata al posto di ciascuna delle reazioni dei vincoli soppressi (le quali perciò appunto sono iperstatiche).

Si può osservare da ultimo che quando la tensione dovuta alla forza ausiliaria agente sul sistema principale sia nota in modo approssimato (come sarà generalmente in pratica), usandola nell'applicazione del teorema dei lavori virtuali si introdurrà in generale un errore nella soluzione del problema effettivo; mentre non si introdurrebbe errore ponendo in luogo di essa una tensione esattamente equilibrata colla stessa forza ausiliaria, determinata senza riguardo alle condizioni di congruenza che distinguono l'effettiva tensione prodotta dall'azione di essa forza sul sistema principale elastico.

([152]) Tale carattere non consiste soltanto nella linearità di tutte le equazioni indefinite e al contorno, mediante le quali il problema si esprime analiticamente, e nell'essere le equazioni medesime riferite in tal forma (come si ammette implicitamente in ogni problema) ad uno spazio fisso assegnato e al suo contorno, cioè ad un'assegnata configurazione del corpo: è essenziale anche che in esse equazioni i dati del problema, forze e spostamenti assegnati, costituiscano linearmente i termini noti; o in altre parole, che le equazioni medesime siano lineari anche nel complesso delle funzioni incognite e dei dati medesimi.

uno spostamento continuo corrispondente a tale supposta soluzione [153]: risultando ovviamente nullo il lavoro virtuale esterno (per essere nullo in ogni punto e secondo ogni direzione la componente della forza o quella dello spostamento), dovrà esser nullo anche il lavoro interno; dunque

$$\int_{(S)} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \, dV = 0.$$

E poichè tale espressione rappresenta il doppio del potenziale elastico, dovrà esser nulla in ogni punto la funzione integranda, e così anche la tensione e la deformazione. La differenza tra due soluzioni dello stesso problema non può esser data dunque che da un sistema di tensioni (e di deformazioni) identicamente nulle.

Un'altra ovvia conseguenza del carattere lineare sopra ricordato (già osservata al paragrafo precedente) può esprimersi nel modo seguente: *La soluzione del problema d'elasticità riguardante un certo sistema di forze e di cedimenti è la somma delle soluzioni che si hanno per sistemi parziali di forze e di cedimenti, che insieme costituiscano i rispettivi sistemi totali.* Per soluzione s'intende il sistema delle tensioni e delle deformazioni, e quindi anche degli spostamenti determinati da queste ultime e dalle condizioni di vincolo. Tale proprietà è nota come *legge di sovrapposizioni degli effetti* [154].

In particolare si osservi come il problema considerato possa trattarsi ponendo da prima che il corpo, soggetto all'azione delle assegnate forze, sia vincolato rigidamente in senso stretto, per poi valutare separatamente l'effetto dei soli spostamenti assegnati, secondo le assegnate direzioni, per

---

(153) Si ricordi che la condizione della continuità dello spostamento è la sola essenziale per la validità della relazione analitica esprimente il teorema dei lavori virtuali. Lo spostamento va considerato infinitesimo solo allo scopo di attribuire ai numeri $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ il significato di componenti di deformazione.

Si avverta che si dimostra così l'unicità della tensione corrispondente ad uno spostamento continuo, e pertanto continua essa stessa in ogni punto insieme con tutte le derivate prime, come s'è visto alla fine del paragrafo 32.

(154) In tale enunciato è sottinteso che il problema sia posto ogni volta per lo stesso corpo con le stesse condizioni di vincolo, nel senso già dichiarato (designazione dei punti vincolati e della direzione di ogni vincolo). Lo stato di tensione prodotto nel corpo con certe condizioni di vincolo da certe forze e certi spostamenti assegnati risulta ovviamente, nelle stesse ipotesi che consentono la formulazione lineare del problema, indipendente da un altro stato preesistente quale si voglia, che potrebbe anche pensarsi ottenuto sollecitando il corpo con condizioni di vincolo diverse; ma è chiaro che non potrebbe parlarsi allora di sovrapposizione, poichè in ciascuno dei punti vincolati nell'una o nell'altra sollecitazione verrebbe a sommarsi lo spostamento assegnato nel rispettivo problema (causa) con quello risultante nell'altro (effetto).

i punti vincolati. Così s'intenderà d'ora innanzi, quando non sia esplicitamente dichiarato il contrario. Potrà dirsi allora, per esempio, che gli effetti di ogni data forza sono proporzionali all'intensità di essa ([155]).

Gli spostamenti considerati così indipendentemente dalle forze, ai quali pertanto non può più attribuirsi il significato di cedimenti nel senso già dichiarato (v. la nota ([143])), possono ugualmente assumere un proprio significato fisico. Un caso importante è quello dei *difetti di costruzione o di montaggio.* Si pensi per esempio ad una trave rettilinea appoggiata in tre punti: è chiaro come per un errore nella costruzione di essa o nella collocazione degli appoggi (anzi in ogni caso per difettoso adeguamento dell'una all'altra operazione) possa accadere che disposta la trave su due degli appoggi medesimi (A e C della fig. 63), per il contatto col terzo appoggio (B) si richieda uno spostamento non più consentito alla trave considerata rigida ([156]). Ma potrebbe pure pensarsi a movimenti del terreno di fondazione indipendenti dai carichi ad esso trasmessi dal corpo considerato: moti spontanei, come ritiro o rigonfiamento di un terreno argilloso, o dovuti a carichi trasmessi da costruzioni vicine; o anche cedimenti permanenti, effetto di carichi già applicati al corpo ma su esso non più agenti.

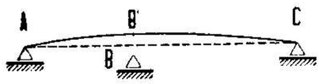

Fig. 63

36. Come s'è già detto alla nota ([136]), l'ipotesi degli spostamenti infinitesimi reca come conseguenza che siano infinitesime anche le forze: per essere dunque effettivamente finite le forze da considerare, e finiti gli spostamenti assegnati, in luogo della soluzione corrispondente a tali forze $\boldsymbol{F}$ (di massa) ed $\boldsymbol{f}$ (di superficie) e a tali spostamenti $\boldsymbol{s}$ si ottiene in realtà la soluzione corrispondente alle forze $\varepsilon\boldsymbol{F}$, $\varepsilon\boldsymbol{f}$ e agli spostamenti $\varepsilon\boldsymbol{s}$, essendo

---

([155]) Ciò è già stato osservato alla fine del paragrafo precedente trattandosi degli effetti sul sistema principale, che essendo isostatico non è soggetto a tensione per gli spostamenti assegnati.

Si avverta che una forza agente in un punto vincolato rigidamente in senso stretto viene direttamente equilibrata dalla reazione per quanto riguarda la sua componente in ciascuna delle direzioni delle assegnate condizioni di vincolo; restano dunque attive due componenti nel caso di una sola condizione, e una sola nel caso di due condizioni (componenti da intendere ottenute come s'è detto all'inizio del paragrafo 16 per quelle dello spostamento). Può aversi infatti ovviamente in tal modo una soluzione, data dalla tensione identicamente nulla, sodisfacente alle condizioni d'equilibrio e a tutte quelle di congruenza (con spostamento pure identicamente nullo).

([156]) In pratica la trave potrebbe aderire all'appoggio B per la sola inflessione dovuta al suo proprio peso. Ciò ovviamente non toglie significato fisico agli effetti del solo spostamento, i quali permarrebbero (permanendo il contatto) quando l'effetto di tal peso fosse eliminato dall'azione di forze ad esso opposte.

ε un numero infinitesimo, divisa per ε. Essa sarà abbastanza prossima alla prima, quindi accettabile in un dato ordine d'approssimazione, quando siano sufficientemente approssimate le equazioni poste e le condizioni al contorno, intese le une e le altre riferite (così come sono scritte) alla configurazione fissa iniziale. È da ricordare dunque in primo luogo che le equazioni d'equilibrio e le condizioni suddette sono valide esattamente se riferite invece alla configurazione finale, cioè quella effettivamente assunta dal corpo sotto l'azione delle forze considerate. Bisogna inoltre ammettere innanzi tutto l'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra le componenti della tensione e i numeri ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} definiti secondo le (5), come nel caso limite degli spostamenti infinitesimi, e ammettere poi che tale corrispondenza sia ancora quella lineare del caso medesimo ([157]).

Nelle applicazioni riguardanti quei casi nei quali sia evidentemente inammissibile lo scambio delle due configurazioni suddette si usano spesso ugualmente equazioni ricavate dalla teoria fondata sugli spostamenti infinitesimi, ammettendo dunque le relazioni lineari tra le componenti della tensione e le usuali componenti della deformazione $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$, ma tenendo conto della variata configurazione del corpo nell'esprimere le condizioni d'equilibrio ([158]). Non sarà meraviglia se così operando si potrà eventual-

---

([157]) Per il primo punto si osservi che nei casi già accennati in cui i numeri $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$ non possano rappresentare con sufficiente approssimazione le componenti della deformazione per essere la rotazione (cioè altre derivate dello spostamento) di un ordine di grandezza superiore, non si potrà ammettere nessuna relazione che riguardi esclusivamente i numeri stessi e le componenti della tensione. La grandezza della rotazione può dunque rendere insufficiente l'approssimazione delle equazioni di equilibrio scritte al modo ordinario non solo per non essere ammissibile lo scambio della configurazione finale con quella iniziale (sopra tutto per la grandezza degli spostamenti che si accompagnano a tali rotazioni, come nell'esempio della fig. 21), ma anche e per doppia ragione l'approssimazione delle condizioni di congruenza espresse per la tensione.

Si ricordi che nel caso della mensola sollecitata da una coppia, considerato come esempio al paragrafo 7 (fig. 25), la variazione della configurazione non può evidentemente avere importanza: per quanto riguarda l'altro effetto della grandezza della rotazione potrebbe vedersi che mentre resta accettabile in tal caso l'espressione della tensione che risulta dalla teoria fondata sull'espressione lineare della deformazione, si ha invece effettivamente da tale teoria un errore non sempre trascurabile nella determinazione dello spostamento dei punti nell'asse, apparendo quest'ultimo trasformato in parabola anzichè in cerchio, e di lunghezza aumentata anzichè invariata.

([158]) In molti problemi non ha interesse in pratica porre le condizioni d'equilibrio per l'elemento generico infinitesimo, ma solo quelle riguardanti parti del corpo con dimensioni finite, conforme al carattere d'approssimazione della soluzione cercata. Così nel caso della mensola della fig. 21 (§ 5), essendo nota in modo sufficientemente approssimato la tensione in ogni punto in funzione della risultante delle tensioni agenti sulla sezione generica e del momento risultante di esse rispetto al baricentro C della sezione medesima, basta considerare l'equilibrio del tronco fra questa e l'estremo B: si ottiene per risultante in ogni sezione la stessa forza P, e per momento (come già al paragrafo 5 s'è accennato) il prodotto $P(e + \eta)$, essendo η la differenza tra gli spostamenti di B e di C.

mente trovare più d'una soluzione([159]): il problema è infatti diverso, per la distinzione fatta tra le due configurazioni, da quello per cui s'è dimostrato il teorema di Kirchhoff. A tale ultimo problema, e quindi all' unicità della soluzione in ogni caso, ci si ricondurrebbe ove si riguardasse come assegnata la configurazione finale anzichè quella iniziale, alla quale si perverrebbe dalla prima mediante lo spostamento opposto a quello trovato. Tale considerazione dimostra per altro che lo spostamento non unico potrà aversi solo in casi eccezionali, dovendo verificarsi la coincidenza delle configurazioni iniziali, ciascuna univocamente determinata, che corrispondono a configurazioni finali diverse. Ed è ovvio presumere che la stessa conclusione valga anche per il problema effettivo, posto cioè senza la semplificazione sopra accennata (esistenza e linearità della relazione fra le componenti della tensione e le $\varepsilon_x, \dots \gamma_{zx}$).

Per quanto riguarda la legge di sovrapposizione, è chiaro che anch'essa sarà accettabile quando sia praticamente lecito ridurre il problema alla forma lineare mediante tutte le semplificazioni sopra indicate. È da ricordare in particolare che tale proprietà, di ovvia importanza applicativa, viene a mancare quando non sia ammissibile lo scambio della configurazione finale con quella iniziale.

37. Si può ora estendere il concetto di vincolo considerando anche il caso dei *vincoli elastici,* manifestantisi dove il corpo considerato sia collegato con altri corpi elastici. A una definizione più precisa sarà utile premettere i seguenti esempi:

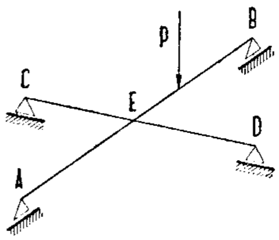

Fig. 64

a) Sia una trave orizzontale AB (fig. 64) appoggiata agli estremi e collegata in E con una seconda trave orizzontale CD, pure appoggiata agli estremi e perpendicolare alla prima: il collegamento sia tale da imporre l'uguaglianza degli abbassamenti in E delle sezioni collegate. È chiaro che si manifesta in E per la trave AB una condizione di vincolo non rigido, perchè l'abbassamento di tal punto non è assegnato, ma dipende dall'azione mutua che in esso si trasmettono le due travi: vincolo che potrà ovviamente dirsi elastico.

([159]) Nel caso della nota precedente ciò potrà accadere quando sia nulla l'eccentricità e (fig. 21). Si tratta del più noto tra i fenomeni di instabilità dell'equilibrio accennati alla nota ([123]).

b) Si consideri un arco vincolato a cerniera alle imposte con le sommità A, B di due pile incastrate al suolo (fig. 65). Si hanno in tali punti due sistemi di vincoli elastici fra loro indipendenti, costituito ciascuno da due condizioni di vincolo che a lor volta possono considerarsi indipendenti, ove si osservi che ciascuna delle componenti orizzontale e verticale dello spostamento della sommità della pila è da riguardare sostanzialmente come effetto della rispettiva componente della forza ad essa trasmessa dall'arco.

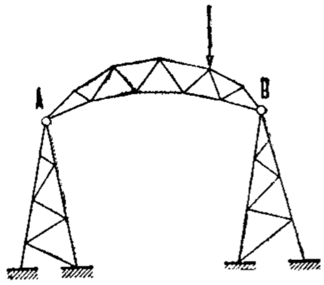

Fig. 65

c) Sia la trave AB appoggiata agli estremi e collegata in E, F, G, H, I rispettivamente con le sezioni L, M, N, O, P di un arco incastrato alle imposte C, D, per mezzo di montanti rigidi articolati a cerniera ai due estremi (fig. 66). A differenza del caso precedente si hanno qui per la trave condizioni di vincolo elastico non indipendenti (nel senso in cui è stata usata sopra tale parola), cioè non esprimibili ciascuna separatamente dall'altra.

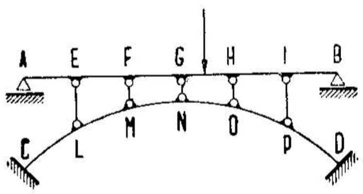

Fig. 66

Si porrà in generale che i corpi elastici che fanno da vincolo siano a lor volta vincolati rigidamente, e in ogni caso sufficientemente, vale a dire non labili ([160]): ogni sistema di vincoli elastici determinato dal collegamento del corpo considerato con un altro corpo elastico si definirà allora mediante un certo numero di relazioni, esprimenti ciascuna una componente di spostamento di un punto come funzione lineare di un ugual numero di componenti di reazione. Tali relazioni saranno omogenee ogni volta che non siano assegnati cedimenti dei vincoli rigidi del corpo che fa da vincolo, e quest'ultimo non sia sollecitato da forze estranee, cioè diverse da quelle trasmesse dal corpo considerato, nè vi siano infine difetti di costruzione o di montaggio. Quest'ultima condizione riguarda l'insieme del corpo considerato con tutti i suoi vincoli rigidi ed elastici, ed è da intendere nel senso che il corpo indeformato possa aderire a tutti i vincoli medesimi, essendo a loro volta i corpi che fanno da vincolo indeformati e aderenti ai loro vincoli rigidi ([161]).

Ricordando il primo degli esempi sopra citati, nel quale la condizione di vincolo elastico si esprime ovviamente in forma analitica mediante una

([160]) Potrà considerarsi come caso limite un solido elastico indefinito, per esempio il già accennato semispazio delimitato da un piano, ponendo in luogo delle suddette condizioni di vincolo rigido la condizione che lo spostamento si annulli all'infinito.

([161]) E' ovvio che nella considerazione dei difetti di costruzione o di montaggio i vincoli rigidi vanno intesi tali in senso stretto.

relazione lineare tra lo spostamento verticale del punto E e la reazione che si esercita in esso da parte della seconda trave, è chiaro che tale relazione non sarà omogenea quando sia assegnato per l'appoggio C di quest'ultima un certo cedimento: il suddetto spostamento dovrà infatti uguagliare lo spostamento dello stesso punto considerato appartenente alla seconda trave, dato in tale ipotesi dalla somma di una parte proporzionale all'azione che essa riceve dalla prima, cioè alla suddetta reazione, e di una parte dovuta al moto rigido (rotazione intorno all'appoggio D) necessario affinchè sia sodisfatta in C la condizione di vincolo col rispettivo cedimento. Alla stessa conclusione si giunge ovviamente pensando la trave CD gravata da altre forze, o costruita in modo difettoso (cioè non rettilinea).

I coefficienti delle suddette funzioni lineari delle componenti di reazione esprimenti le componenti di spostamento per ogni dato sistema di vincoli elastici costituiscono in ogni caso una matrice simmetrica, come risulta dalla seguente proposizione, nota come *teorema di Maxwell: considerato un corpo elastico vincolato rigidamente (in senso stretto), la componente secondo una certa direzione dello spostamento di un punto A per effetto di una certa forza concentrata in un punto B, riferita all'unità d'intensità della forza medesima, è uguale alla componente dello spostamento del punto B secondo la direzione di tale forza per effetto di una forza concentrata in A nella prima direzione, riferita all'unità di intensità di quest'ultima.* In simboli $\dfrac{s_1(A)}{F_B} = \dfrac{s_2(B)}{F_A}$, essendo 1 e 2 le direzioni suddette, F_A l'intensità della forza agente in A secondo la direzione 1, F_B l'intensità della forza agente in B secondo la direzione 2. Tale teorema deriva ovviamente dalla formula di reciprocità (38), che esprime l'uguaglianza dei lavori interni corrispondenti ai lavori esterni $F_A\, s_1(A)$, $F_B\, s_2(B)$.

Interessa osservare inoltre che la forma quadratica corrispondente alla suddetta matrice simmetrica è in ogni caso definita negativa: riguardate infatti le variabili come componenti di reazione, essa rappresenta il lavoro delle reazioni dei vincoli resi omogenei (intendendo che siano omogenee le rispettive equazioni) per gli spostamenti dei punti vincolati, contrario a quello sempre positivo delle rispettive azioni sul corpo elastico che costituisce il considerato sistema di vincoli.

Le espressioni lineari degli spostamenti (coi loro eventuali termini noti) vanno poste evidentemente in luogo dei valori assegnati di essi al secondo membro delle (19), nel metodo generale indicato al paragrafo 16, per ottenere le equazioni che servono a determinare le reazioni dei vincoli: risulta quindi applicabile anche al caso dei vincoli elastici tutto quanto s'è detto successivamente in tale proposito. (Si dovranno naturalmente considerare insieme tutte le condizioni di vincolo, rigide ed elastiche, del dato corpo ([162]).)

È ovvia la dimostrazione del teorema di unicità della soluzione per il caso dei vincoli elastici, ove si ricordi che il lavoro delle reazioni di tali vincoli non può essere > 0. Così pure è ancora evidentemente valida la legge di sovrapposizione degli effetti, da intendere come nel caso dei vincoli rigidi, ma considerando oltre alle forze, insieme cogli spostamenti assegnati, le altre sopra indicate cause di non omogeneità delle equazioni esprimenti le condizioni di vincolo. Pertanto anche i vincoli elastici saranno considerati d'ora innanzi « omogenei », intendendosi di valutare a parte gli effetti (reazioni, tensioni, deformazioni e spostamenti) delle cause suddette.

([162]) Le condizioni di possibilità del sistema (19) esprimono questa volta l'adeguamento della considerata deformazione del corpo, oltre che alle condizioni di vincolo rigido per questo assegnate, alla deformazione degli altri corpi costituenti i vincoli elastici per effetto delle azioni che su essi viene ad esercitare il primo corpo, tenuto conto naturalmente delle condizioni di vincolo rigido dei corpi medesimi nonchè di tutte le circostanze sopra indicate come cause di non omogeneità delle condizioni di vincolo elastico. Resta perciò teoricamente illimitato il numero delle possibili condizioni di vincolo elastico in un medesimo punto, anche quando siano assegnate per esso condizioni di vincolo rigido (in numero queste ultime non maggiore di tre, come s'è visto alla nota ([80])).

Quando si avesse un sistema di vincoli elastici costituito da un corpo labile, bisognerebbe ricorrere a un sistema di vincoli ausiliari integrativi per il corpo medesimo al fine di esprimere gli spostamenti $\overline{s}$ in funzione delle incognite reazioni. In tali espressioni interverrebbero poi $6 - c_1$ parametri di moto rigido di tale corpo (essendo ovviamente la caratteristica c_1 da riferire alle condizioni effettive di vincolo di esso), che rimarrebbero come incognite oltre alle suddette reazioni nelle $n - c$ equazioni di congruenza; alle quali sarebbero d'altra parte da aggiungere, insieme con le condizioni d'equilibrio indipendenti del corpo vincolato, le $6 - c_1$ condizioni per le sole forze da considerare direttamente applicate all' altro corpo, fra cui le medesime incognite reazioni cambiate di segno (annullandosi così le reazioni dei suddetti vincoli integrativi); e risulterebbe così in tutto un numero di equazioni pari al numero totale delle incognite.

Nel caso del sistema di m corpi considerato alla fine del paragrafo 17 si debbono aggiungere alle $n' - c'$ equazioni di congruenza ivi indicate le $6m$ equazioni d'equilibrio dei singoli corpi; dalle quali potranno per altro estrarsene $6m - c'$ non contenenti le reazioni (condizioni d'equilibrio per le sole forze applicate, necessarie quando il sistema sia labile), e si avranno così n' equazioni per le n' reazioni dei vincoli esterni ed interni.

È interessante avvertire che in un problema riguardante un unico corpo potrà essere conveniente in pratica considerare come sistema principale il corpo medesimo (trave o sistema di travi) diviso in parti tra loro vincolate, conservando totalmente o parzialmente i vincoli esterni.

38. È necessario ora generalizzare il concetto di vincolo anche in altro senso, con l'introduzione di vincoli riguardanti non più punti isolati, ma tutti i punti di una parte Σ' della superficie del corpo (non necessariamente connessa) ([163]). Posto che in ogni punto di Σ' siano fissate tre direzioni variabili con continuità, si avrà un vincolo rigido in senso lato quando siano assegnate in ciascuno dei punti medesimi le componenti dello spostamento secondo le medesime direzioni, sotto l'ovvia condizione che siano anch'esse continue ([164]).

Generalizzando allo stesso modo i vincoli elastici si perverrebbe al caso generale in cui ogni componente di spostamento del punto generico di Σ' dipenda da tutte le forze agenti sulla superficie medesima: condizione di vincolo rappresentata dunque da tre relazioni esprimenti ciascuna di tali componenti di spostamento come integrale esteso a Σ' dei contributi recati a tale componente dalle forze elementari agenti sulla stessa superficie. Se non che quando si consideri in concreto una condizione siffatta determinata dal contatto del corpo considerato con altri corpi elastici, non sarà più possibile distinguere questi ultimi dal primo, avendosi effettivamente un problema riguardante un unico corpo elastico costituito dall'insieme di tutti quelli suddetti ([165]). Si limiterà pertanto la conside-

([163]) Con tale generalizzazione si riconduce in realtà il concetto di vincolo ai dati dell'osservazione, non potendo effettivamente manifestarsi i vincoli in punti isolati. La schematizzazione del vincolo concentrato ha stretta relazione con quello della forza concentrata; poichè riducendosi all'intorno infinitesimo di un punto la superficie per la quale si pone la condizione di vincolo, viene ivi a concentrarsi una reazione finita: siccome infatti la condizione posta per un punto non può rendersi sodisfatta se non facendo variare in modo essenziale lo spostamento dei punti di un certo intorno finito del punto medesimo (per la richiesta continuità dello spostamento), è chiaro che occorre una causa non essenzialmente diversa da quella del caso del vincolo esteso alla superficie finita.

([164]) Si sono poste le direzioni variabili affinchè in una certa parte di Σ' possano risultare complanari, o anche coincidenti. E' chiaro che dove le tre direzioni siano complanari saranno assegnate in realtà due sole componenti di spostamento; dalle quali si otterrà la proiezione dello spostamento medesimo sul piano di esse (diametro del cerchio passante per l'estremo comune e per l'altro estremo di ciascuno dei vettori rappresentanti le due componenti assegnate), e quindi la componente secondo ogni altra direzione dello stesso piano: sarà necessario allora assegnare la componente della forza di superficie perpendicolare al piano medesimo, altrimenti il problema resterebbe indeterminato, non potendosi portare a conclusione il ragionamento col quale s'è dimostrata l'unicità della soluzione. Dove poi le tre direzioni suddette coincidano si avrà una sola componente dello spostamento, e dovranno assegnarsi due componenti della forza nel piano normale.

([165]) Si esclude per semplicità in questo accenno il caso più generale del vincolo incompleto come quello considerato per i vincoli rigidi nella nota precedente, benchè qualche caso particolarissimo di vincolo elastico esteso incompleto possa avere importanza pratica (l'appoggio elastico continuo). Perciò le componenti di spostamento e di forza potrebbero intendersi qui sempre riferite a tre direzioni ortogonali fisse.

razione di condizioni di vincolo «esteso» (per contrapposto ai vincoli «concentrati») al caso dei vincoli rigidi, cioè degli spostamenti assegnati.

Circa l'estensione della legge di sovrapposizione degli effetti al caso dei vincoli estesi non sarà forse superfluo osservare che vanno intesi variabili solo i valori delle componenti di spostamento nei punti di una stessa parte Σ' della superficie secondo prefissate direzioni. Se si assegnassero in diversi problemi spostamenti in punti diversi, oppure (nel caso di vincolo incompleto, v. nota ([164])) secondo diverse direzioni, si avrebbe in ciascuno di tali punti la somma di forze e di spostamenti assegnati in alcuni dei problemi medesimi (cause) con forze e spostamenti risultanti negli altri (effetti). (Si confronti la nota ([154]).)

Le condizioni di vincolo esteso (ovviamente sempre iperstatiche) possono introdursi nel problema analitico fin qui considerato allo stesso modo delle condizioni iperstatiche di vincolo concentrato; se non che il numero delle equazioni algebriche lineari da considerare diviene ovviamente infinito. Una seconda forma analitica dello stesso problema del solido elastico, che ora si esporrà, consente invece l'introduzione delle condizioni medesime in modo diretto, cioè come condizioni per le stesse funzioni incognite.

39. Se nelle equazioni indefinite dell'equilibrio si pongono per le componenti della tensione le loro espressioni (37_1) in funzione delle componenti della deformazione, è ovvio che insieme con esse in luogo delle condizioni di congruenza (che andrebbero lasciate questa volta nella loro forma originaria, espresse cioè anch'esse per le componenti della deformazione) possono considerarsi direttamente le espressioni $\varepsilon_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}$, ..., $\gamma_{zx} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}$, da cui le condizioni medesime furono ricavate mediante l'eliminazione delle funzioni ξ, η, ζ. (Si tratta in sostanza di sostituire a un sistema parziale delle equazioni del problema la soluzione generale del sistema medesimo contenente tre funzioni arbitrarie, che diventano le incognite del sistema rimanente.) Mediante tali espressioni le equazioni di equilibrio si trasformano evidentemente in tre equazioni lineari di second'ordine per le funzioni ξ, η, ζ, componenti dello spostamento: esse saranno dette *equazioni indefinite dell'equilibrio elastico,* o *equazioni di Cauchy* ([166]).

([166]) Quando sia necessaria la distinzione tra configurazione deformata e configurazione nota indeformata (come s'è detto al paragrafo 36), le condizioni d'equilibrio espresse per lo spostamento assumeranno forma non lineare, restando le assegnate forze di massa a costituirne i termini noti; e analogamente si trasformeranno le condizioni al contorno riguardanti le forze di superficie. E' interessante osservare che nella tratta-

Mentre le condizioni di vincolo esteso si pongono questa volta, come s'è accennato, assegnando determinati valori di combinazioni lineari delle stesse incognite nei punti della superficie Σ', è chiaro che le condizioni date dalle forze di superficie assegnate nella rimanente parte della superficie del corpo riguardano combinazioni lineari delle derivate prime delle incognite stesse: si hanno dunque tutte le condizioni al contorno nella forma ordinaria (167). Quando si considerino condizioni di vincolo in punti isolati, la valutazione dello spostamento dovrà eseguirsi anche nel caso di un sistema isostatico trascurando la deformazione locale come s'è indicato nella nota (144) in proposito delle reazioni dei vincoli iperstatici (168).

Nel caso di un corpo ciclico si potrà esprimere la soluzione del problema posto per il corpo ridotto a connessione semplice in funzione della tensione t_n sulla superficie di ciascuno dei tagli occorrenti per tale riduzione (forze di superficie per il corpo così tagliato), e determinare tale tensione mediante la condizione d'uguaglianza dello spostamento sulle due facce delle superficie medesime. O anche si potrà esprimere la soluzione suddetta in funzione invece dello spostamento di ogni punto di tali superficie, e porre la condizione che risultino forze opposte sulle due facce.

---

zione approssimata delle travi, ragionando come nel caso particolare della mensola di cui s'è detto alla nota (158), si ottiene invece ancora un'equazione lineare, nella quale le forze assegnate intervengono per altro come moltiplicatori delle funzioni incognite.

(167) Nel problema analitico precedente le condizioni di vincolo iperstatiche riguardavano invece funzioni ottenute dalle incognite mediante integrazione.

(168) Il problema deve considerarsi come caso limite per l'intervento di forze concentrate note, che sono le reazioni; e non ammette a rigore soluzione sodisfacente alle condizioni degli assegnati spostamenti, poichè al limite gli spostamenti dei punti vincolati divengono infiniti: perciò la soluzione rigorosa resta necessariamente indeterminata per un moto rigido. (Per la determinazione della tensione è sufficiente come s'è visto la designazione dei punti vincolati e delle rispettive direzioni di vincolo.) Si potrebbe allora teoricamente considerare ciascuna delle reazioni ripartita sulla superficie nel modo accennato alla nota (144), risultante dalla soluzione del problema del semispazio limitato dal piano tangente alla superficie medesima nel punto in cui essa reazione si esercita, trascurando così quella che è sostanzialmente una deformazione locale: lo spostamento che si ha come soluzione del problema così modificato resta evidentemente finito, e potrà pertanto essere determinato in modo da sodisfare alle condizioni assegnate.

Ugualmente si procederebbe nel caso dei vincoli concentrati iperstatici. Le forze da considerare ripartite in superficie come sopra è ricordato saranno questa volta proporzionali in ogni punto alle rispettive reazioni incognite: trovata allora l'espressione generale dello spostamento in funzione di queste ultime, le condizioni degli spostamenti assegnati varranno a determinarne i valori. Rispetto al problema posto in forma analitica al modo precedente c'è evidentemente la già osservata differenza che qui la soluzione in funzione delle incognite reazioni si ottiene direttamente come spostamento, e non occorre perciò l'integrazione (cioè l'applicazione del teorema dei valori virtuali).

S'intende che nelle applicazioni converrà sostituire anche questa volta al procedimento teorico sopra indicato quello pratico di cui s'è fatto cenno alla fine della nota sopra ricordata.

Le incognite componenti dello spostamento saranno in ogni caso da considerare funzioni continue in ogni punto, e ammettenti le derivate prime e seconde continue nel punto generico: si ricordi che non potrebbe sussistere la prima proprietà se le eventuali discontinuità delle derivate attraverso certe superficie non sodisfacessero alle relazioni (18) (§ 15). La soluzione risulterà poi sodisfacente, per quanto riguarda la continuità delle derivate, a condizioni più particolari, come s'è visto al paragrafo 32: resteranno cioè continue attraverso ciascuna delle eventuali superficie di discontinuità tutte le componenti della deformazione e della sua derivata normale, quando non si tratti di una superficie di discontinuità delle assegnate forze di massa.

Nonostante l'apparenza di minor difficoltà del problema generale posto analiticamente in questa seconda forma, è da avvertire fin d'ora che molti problemi particolari di fondamentale importanza per le applicazioni sono stati risolti abbastanza agevolmente (in modo esatto o con approssimazione sufficiente per le applicazioni medesime) nella forma precedentemente esposta.