CAPITOLO V

FONDAMENTI DELLA STATICA DEI SOLIDI ELASTICI

29. Dopo aver trattato dei solidi in generale, si viene ora a considerare la particolare categoria dei *solidi elastici.* Partendo dalla nozione comune secondo la quale è elastico un corpo che, dopo essersi deformato sotto l'azione di un sistema di forze, riprenda la forma primitiva al cessare dell'azione medesima, si precisa la definizione di elasticità nei seguenti termini:

Dicesi elastico un solido che quando sia soggetto a forze variabili nel tempo (costituenti in ogni istante un sistema in equilibrio) riprenda la stessa configurazione assunta in un istante generico ogni volta che tutte le forze tornino ad assumere gli stessi valori dell'istante medesimo. Deve intendersi ovviamente che a modificare la configurazione del corpo non intervengano cause di altra natura, in particolare variazioni termiche ([123]). Poichè tra le forze suddette vanno comprese naturalmente anche le forze d'inerzia, è bene avvertire subito che in pratica queste saranno trascurabili quando le trasformazioni considerate avvengano con sufficiente lentezza.

Discende da tale definizione che il lavoro compiuto da tutte le forze durante la considerata variazione delle forze medesime e della configurazione dipende soltanto dalle forze agenti all'inizio e al termine di essa variazione, e non dall'insieme dei sistemi di forze agenti negli istanti intermedi (nè quindi dall'insieme delle corrispondenti configurazioni). Se

---

([123]) Le forze vanno considerate agenti ciascuna su un determinato elemento materiale del corpo: esse potranno variare anche di direzione; perciò la parola valore va intesa in senso vettoriale. Poichè ovviamente si dirà che il corpo abbia ripreso la configurazione precedente quando per riportare ogni punto al posto precedentemente occupato sia sufficiente un moto rigido, va specificato che la direzione di ogni forza dovrà intendersi rotata come esso corpo. (La condizione che ogni forza riprenda lo stesso valore precedente si intenderà cioè prescindendo da una rotazione uguale per tutte le forze.)

Si deve avvertire che il suddetto comportamento si riferisce alle configurazioni d'equilibrio effettive, aventi cioè carattere di stabilità. Lo studio delle possibili configurazioni d'equilibrio instabile, di grande importanza pratica, non è compreso nel programma di questo volume.

infatti a due diversi passaggi da un primo ad un secondo sistema di forze (e quindi da una prima ad una seconda configurazione) corrispondessero lavori diversi, si potrebbe aver guadagno d'energia meccanica senza alcun mutamento di condizioni effettuando uno di tali passaggi, e ritornando alle condizioni iniziali mediante l'altro passaggio invertito. È chiaro che sarebbe questo un risultato in contradizione coi principi della termodinamica; per il primo dei quali un tale guadagno non potrebbe aversi che a spese di energia termica, mentre per il secondo ciò è impossibile se le trasformazioni si compiono a temperatura costante, come appunto s'è ammesso. Il lavoro compiuto da tutte le forze agenti su un dato solido elastico è dunque la variazione di una quantità Φ, che si dirà *energia potenziale elastica*, o anche *potenziale elastico*, funzione a un solo valore del sistema delle forze medesime (e quindi del sistema di tensioni, il quale come s'è visto determina in modo univoco il sistema delle forze).

Detta $\delta\Phi$ la variazione prima del potenziale elastico Φ per una variazione della tensione, e quindi delle forze, cui corrisponda una certa variazione della configurazione, e quindi una variazione dello spostamento di componenti $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ (intendendosi per variazione prima la parte principale della variazione infinitesima), dev'essere per definizione $\delta\Phi = \delta U$, lavoro delle forze di massa e di superficie per la medesima variazione dello spostamento; ossia

$$\delta\Phi = \int_{(S)} (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, dV + \int_{(\Sigma)} (f_x\, \delta\xi + f_y\, \delta\eta + f_z\, \delta\zeta)\, dA.$$

Assunta tale variazione come spostamento virtuale, si ha allora per il teorema dei lavori virtuali

$$\delta\Phi = \int_{(S)} \left\{ \sigma_x \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \tau_{yz}\left(\frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial z}\right)\right\} dV.$$

Ricordando poi che lo spostamento effettivo di componenti ξ, η, ζ è da considerare infinitesimo, si ha, indicate con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto generico nella configurazione fissa alla quale si riferisce lo spostamento medesimo,

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} = \frac{\partial\delta\xi}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x} = \delta\frac{\partial\xi}{\partial x_0}\left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - \delta\frac{\partial\xi}{\partial y_0}\frac{\partial\eta}{\partial x} -$$
$$- \delta\frac{\partial\xi}{\partial z_0}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \delta\varepsilon_x + \text{infinitesimi d'ordine superiore},$$

essendo $\delta\varepsilon_x$ la variazione infinitesima della componente ε_x della deformazione effettiva; e analogamente, sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\frac{\partial\delta\eta}{\partial y} = \delta\varepsilon_y\,, \quad \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} = \delta\varepsilon_z\,, \quad \frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} = \delta\gamma_{xy}\,,$$

$$\frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} = \delta\gamma_{yz}\,, \quad \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\delta\xi}{\partial z} = \delta\gamma_{zx}$$ [124].

Dunque

$$\delta\Phi = \int_{(S)} (\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \sigma_y\,\delta\varepsilon_y + \sigma_z\,\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\,\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\delta\gamma_{zx})\,dV. \tag{33}$$

Le stesse considerazioni valgono ovviamente per una parte qualunque del corpo elastico, quando si riguardino come forze esterne di superficie le tensioni sulla faccia esterna della superficie che la delimita: ciò significa che l'elasticità è da considerare proprietà generica del materiale, e non proprietà particolare di un determinato corpo. Potrà dunque applicarsi la (33), al limite, anche all'elemento infinitesimo nell'intorno del punto generico; e indicato allora con $\varphi\,dV_1$ il potenziale elastico di tale elemento, essendo dV_1 il volume di esso in una configurazione fissa di riferimento (che potrebb'essere anche diversa da quella cui sia riferito lo spostamento dell'elemento), si avrà

$$\delta\varphi\cdot dV_1 = (\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \sigma_y\,\delta\varepsilon_y + \sigma_z\,\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\,\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\delta\gamma_{zx})\,dV,$$

---

[124] Ad evitare confusione gioverà rappresentarsi lo spostamento infinitesimo come prodotto di un certo spostamento finito per un fattore infinitesimo costante, e lasciare quest'ultimo sottinteso, riguardando pertanto le componenti ξ, η, ζ delle espressioni analitiche come quantità finite: $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ saranno allora le variazioni infinitesime di tali quantità, da sottintendere moltiplicate anch'esse per lo stesso fattore (tendente a zero in modo affatto indipendente dal tendere a zero delle medesime $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$). È ovvio che ci si deve poi ricordare di tale fattore al fine di conservare nelle espressioni analitiche soltanto i termini principali, togliendo quelli in cui il fattore medesimo appaia a potenza superiore.

S'è già osservato al paragrafo 7 che con tale definizione dello spostamento infinitesimo tutte le derivate delle componenti di esso sono infinitesime del prim'ordine, e perciò $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$ sono effettivamente le componenti della deformazione. Ora si osservi che per analoga ragione (essendo ovviamente infinitesime del prim'ordine le derivate rispetto ad x, y, z come quelle rispetto ad x_0, y_0, z_0) sono anche sempre valide le relazioni sopra trovate $\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} = \delta\varepsilon_x, \ldots, \frac{\partial\delta\xi}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} = \delta\gamma_{zx}$. Nell'applicazione dei risultati della teoria agli spostamenti reali non bisognerebbe invece dimenticare che la grandezza della rotazione rispetto alla deformazione potrebbe in certi casi far cadere in difetto, insieme con l'espressione di quest'ultima, anche tali relazioni.

dove dV sia il volume dell'elemento nella configurazione variabile istantanea. Siccome poi il rapporto $\frac{dV}{dV_1}$ differisce dall'unità per un infinitesimo (dell'ordine delle componenti di deformazione $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$), potrà scriversi infine semplicemente

$$\delta\varphi = \sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \sigma_y\,\delta\varepsilon_y + \sigma_z\,\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\,\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\delta\gamma_{zx}\ (^{125}). \tag{34}$$

Ora, poichè da un lato le forze agenti sull'elemento infinitesimo nell'intorno di un certo punto sono date dalla tensione nel punto medesimo ([126]), e dall'altro la configurazione dell'elemento è definita dalla deformazione di esso, ad ogni stato di tensione dovrà corrispondere in ciascun punto un'unica deformazione; e così inversamente la tensione dovrà essere, punto per punto, funzione di quest'ultima (anche se non necessariamente ad un sol valore). Riguardata pertanto anche φ come funzione della deformazione, si ha dalla (34)

$$\sigma_x = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x},\quad \sigma_y = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y},\quad \sigma_z = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z},\quad \tau_{xy} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}},\quad \tau_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}},\quad \tau_{zx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\ (^{127}). \tag{35}$$

Si darà alla funzione φ il nome di *energia potenziale elastica unitaria*, o *potenziale elastico unitario*: per l'osservazione già fatta essa potrà intendersi indifferentemente riferita all'unità di volume in una configurazione fissa o nella configurazione variabile istantanea.

([125]) Per quanto s'è osservato nella nota precedente è chiaro che la validità di tale relazione fondamentale è connessa nelle applicazioni con quella del significato di componenti della deformazione da attribuire ai numeri $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}$. Ciò si accorda col fatto che quando tale attribuzione non fosse ammissibile colla richiesta approssimazione (per essere la rotazione, come s'è detto, di un ordine di grandezza superiore a quello della deformazione), il potenziale elastico unitario non potrebbe nemmeno esser più considerato funzione di tali numeri.

([126]) Si ricordi che la forza di massa, che non dipende dalla tensione nel punto ma dalle sue derivate, è infinitesima d'ordine superiore rispetto alle forze agenti su singole parti della superficie.

([127]) Non resta escluso qui che ad un unica deformazione possano corrispondere più tensioni, e quindi più valori di φ; ma questi ultimi non potranno costituire che un sistema discreto, poichè una variazione continua di φ può aversi per definizione solo con produzione di lavoro (positivo o negativo), cioè con variazione della deformazione. Nell'intorno di una generica deformazione si avrebbero in tal caso più rami distinti della funzione φ, per ciascuno dei quali ad ogni deformazione dell'intorno medesimo verrebbe a corrispondere anche un'unica tensione. Ammettendosi poi ovviamente che la deformazione vari con continuità al variare della tensione (cioè che vari con continuità la configurazione di un corpo al variare delle forze su esso agenti), risulterà pure continua la tensione come funzione della deformazione; intesa naturalmente tale continuità riferita, nel caso ora considerato, ai singoli rami.

Per ogni parte finita del corpo si avrà allora $\Phi = \int_{(S_1)} \varphi d V_1$, o anche indifferentemente $\Phi = \int_{(S)} \varphi d V$: in tal modo infatti dalla (34) si ottiene la (33), che ovviamente definisce il potenziale elastico Φ a meno di una costante arbitraria; la quale resterà poi determinata dall'espressione medesima quando sia fissato il riferimento del potenziale unitario φ. Questo si porrà nullo nella configurazione dell'elemento allo *stato naturale*, che sarà quello in cui sia nulla in esso la tensione: così, essendo evidentemente da ammettere che il lavoro compiuto dal sistema di tutte le forze agenti su un corpo qualunque nel passaggio da uno stato in cui ogni forza sia nulla a un altro stato quale si voglia sia sempre positivo ([128]), sarà in ogni caso $\varphi \geq 0$. È ovvia allora la convenienza di assumere lo stesso stato naturale anche per riferimento della deformazione dell'elemento ([129]); e si avrà così per la funzione φ, osservando che per la (34) è assicurata l'esistenza delle derivate prime, e dovendosi ovviamente ammettere insieme con la continuità di esse (v. nota ([127])) la loro derivabilità, lo sviluppo abbreviato di Mac Laurin

$$\varphi(\varepsilon_x , \varepsilon_y , \dots , \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2} \varepsilon_x^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y^2} \varepsilon_y^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{zx}} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \right\},$$

dove le derivate s'intendono per i valori delle variabili $\theta \varepsilon_x , \dots , \theta \gamma_{zx}$, essendo $0 \leq \theta \leq 1$; ma trattandosi di deformazioni infinitesime potranno intendersi indifferentemente per il valore nullo di ciascuna di esse ([130]).

([128]) Il sistema delle forze sarà sempre in equilibrio, comprese fra esse le forze d'inerzia. Il lavoro considerato, nullo pertanto nel caso limite del corpo rigido, sarà positivo in ogni caso effettivo sempre che l'azione delle forze sia effettivamente l'unica causa della deformazione, come già s'è ammesso. Si tratta di un ovvio postulato inerente allo stesso concetto di forza.

([129]) Il riferimento della deformazione alla configurazione naturale di ciascun elemento infinitesimo va inteso ovviamente nel senso che sia riferita la deformazione nei punti di ogni elemento finito alla configurazione iniziale dell'elemento medesimo ottenuta liberandolo dalla forza di massa e dall'azione degli elementi contigui; e s'immagini poi di passare al limite facendo tendere a zero ogni dimensione di ciascun elemento. Tale riferimento conserva così significato anche quando l'insieme degli elementi nel loro stato naturale non costituisca una possibile configurazione del corpo mantenuto integro (come si vedrà essere necessariamente quando vi sia uno stato di tensione indipendente da ogni forza).

([130]) Secondo le considerazioni della nota ([127]) riguardanti la semplice definizione di elasticità, tale espressione sarebbe quella del ramo della funzione φ, nell'intorno della deformazione nulla, che per la deformazione medesima assume il valore zero. L'esistenza di altri rami resta una possibilità puramente teorica, non contradicendo alla suddetta definizione, ma non avendo riscontro nel comportamento effettivo di alcun materiale.

30. Se si conviene di indicare qui per comodità di scrittura le componenti della deformazione coi simboli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ ponendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \dots, \varepsilon_6 = \gamma_{zx}$, e se si pone inoltre $a_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_i \, \partial \varepsilon_k}\right)_0$, valori delle derivate seconde come sopra s'è dichiarato, l'espressione di φ diventa

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} a_{ik} \, \varepsilon_i \, \varepsilon_k . \qquad (36_1)$$

Si tratta di una forma quadratica, che per quanto sopra s'è osservato è in ogni caso definita positiva; i coefficienti della quale, in numero di 21 (essendo per definizione $a_{ik} = a_{ki}$), si diranno *coefficienti di elasticità*. Per la (35) si ha allora, con convenzione analoga alla precedente in proposito delle componenti della tensione, posto cioè $\sigma_1 = \sigma_x, \dots, \sigma_6 = \tau_{zx}$,

$$\sigma_m = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_m} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{6} a_{im} \, \varepsilon_i + \sum_{k=1}^{6} a_{mk} \, \varepsilon_k\right),$$

dove i due termini sono uguali, potendosi porre in luogo di a_{mk}, come s'è già osservato, a_{km}; quindi

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{6} a_{km} \, \varepsilon_k . \qquad (37_1)$$

Le componenti della tensione sono dunque combinazioni lineari omogenee delle componenti della deformazione; le quali possono perciò esprimersi a loro volta come combinazioni lineari omogenee delle prime:

$$\varepsilon_m = \sum_{k=1}^{6} A_{mk} \, \sigma_k , \qquad (37_2)$$

essendo A_{mk} l'elemento reciproco di a_{mk} nel determinante dei coefficienti a. Agli $A_{ik} = A_{ki}$ potrà darsi ugualmente il nome di coefficienti di elasticità.

Per queste ultime relazioni l'espressione (36) diventa

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} a_{ik} \, \varepsilon_k \sum_{n=1}^{6} A_{in} \, \sigma_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{6} \sigma_n \sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k \sum_{i=1}^{6} a_{ik} \, A_{in} ;$$

ossia, ricordando che

$$\sum_{i=1}^{6} a_{ik} \, A_{in} = \begin{cases} 1 & \text{per } k = n \\ 0 & \text{per } k \neq n , \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{6} \sigma_n \, \varepsilon_n . \qquad (36_3)$$

Si ha così il potenziale unitario φ espresso come forma bilineare semplicissima delle due serie di variabili ε e σ. E da ultimo sostituendo ancora alle ε rimaste le espressioni (37_1) si ottiene

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} A_{ik} \, \sigma_i \, \sigma_k \, , \tag{36_2}$$

forma quadratica nelle componenti di tensione, analoga alla (36_1).

Si avverta che i coefficienti di elasticità a_{ik} (e così naturalmente gli A_{ik}), costanti per ciascun elemento, potranno intendersi in generale variabili da elemento ad elemento, cioè da punto a punto, di un dato corpo (considerato così in generale non omogeneo). Nell'integrale $\Phi = \int_{(S)} \varphi \, d V$ la funzione integranda dipenderà pertanto dal punto anche in modo diretto, oltre che attraverso i valori assunti dalle componenti della deformazione, o da quelle della tensione, o da entrambe (secondo che φ sia espresso nella forma (36_1), o (36_2), o (36_3)).

In proposito della (36_3), che non dipende dai suddetti coefficienti, sarà utile ricordare che considerata in astratto la funzione

$$\mathcal{U}(\sigma \, , \, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{6} \sigma_n \, \varepsilon_n \, ,$$

forma bilineare unitaria delle due serie di variabili σ, ε, ed essendo $\sigma^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ e $\sigma^{(2)}$, $\varepsilon^{(2)}$ due coppie di tali serie corrispondentisi fra loro (cioè le $\sigma^{(1)}$ colle $\varepsilon^{(1)}$ e le $\sigma^{(2)}$ colle $\varepsilon^{(2)}$) secondo le relazioni lineari omogenee (37_1) e (37_2), si ha la *formula di reciprocità* (immediatamente dimostrabile in modo ovvio)

$$\mathcal{U}(\sigma^{(1)}, \varepsilon^{(2)}) = \mathcal{U}(\sigma^{(2)}, \varepsilon^{(1)}). \tag{38}$$

Detto infine Ψ l'invariante lineare del tensore $\mathcal{T}$ di tensione, $\Psi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, e posto $s_x = \sigma_x - \frac{\Psi}{3}$, $s_y = \sigma_y - \frac{\Psi}{3}$, $s_z = \sigma_z - \frac{\Psi}{3}$, onde ovviamente $s_x + s_y + s_z = 0$, la parte della tensione di componenti s_x, s_y, s_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} s'indicherà come *deviazione* della tensione, e come *deviatore* il rispettivo tensore; mentre la parte rimanente, di componente normale $\frac{\Psi}{3}$ secondo qualunque direzione e componenti tangenziali nulle (tensione di tipo idrostatico), potrà indicarsi ovviamente come *tensione normale media*. Analogamente posto $e_x = \varepsilon_x - \frac{\Theta}{3}$, $e_y = \varepsilon_y - \frac{\Theta}{3}$, $e_z = \varepsilon_z - \frac{\Theta}{3}$, onde $e_x + e_y + e_z = 0$, s'indicherà come deviazione della deformazione la parte di componenti $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, e il rispettivo tensore come deviatore; e *dilatazione media* sarà la parte rimanente, di scorrimenti nulli e dilatazione $\frac{\Theta}{3}$ in ogni direzione. Risulta allora in modo ovvio dalla (36_3)

$$\varphi = \frac{1}{6}\,\Psi\,\Theta + \frac{1}{2}(s_x e_x + s_y e_y + s_z e_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx});$$

dov'è per altro da osservare che i due termini, dipendenti il primo solo dalla tensione normale media e dalla dilatazione media, il secondo solo dalle deviazioni della tensione e della deformazione, non rappresentano ciascuno singolarmente, in generale, un'energia elastica.

31. È necessario avvertire a questo punto, pur senza voler propriamente entrare nell'argomento della deformabilità e resistenza dei materiali, che i più importanti di questi, e in particolare il più impiegato dei materiali metallici, cioè l'acciaio, dimostrano in realtà un comportamento praticamente conforme alla definizione di elasticità, con corrispondenza biunivoca fra tensione e deformazione (v. nota ([130])), finchè queste si mantengano comprese entro certi limiti ([131]). Non è detto che debbano però necessariamente essere valide entro i limiti medesimi le relazioni lineari (37_1) e (37_2) (anche se ciò è vero praticamente per l'acciaio): le costanti a_{ik} si sono poste infatti in sostituzione dei valori variabili delle derivate seconde del potenziale unitario per una condizione intermedia tra la deformazione nulla e quella istantanea, riguardando quest'ultima come infinitesima; e non c'è ragione che tale sostituzione debba necessariamente risultare accettabile in un dato ordine d'approssimazione quando la deformazione sia abbastanza piccola da rendere accettabile nello stesso ordine di approssimazione l'ipotesi dell'elasticità. Bisogna dunque distinguere, almeno teoricamente, i *limiti di proporzionalità* (come abbreviazione per indicare la suddetta relazione lineare) dai *limiti di elasticità*; essendo ovviamente i primi sempre compresi nei secondi, poichè la relazione lineare (da intendere per qualunque variazione della tensione e della deformazione entro i considerati limiti) definisce per l'elemento infinitesimo una corrispondenza

---

([131]) È da avvertire che è necessario anche che la variazione dello stato di tensione e di deformazione sia sufficientemente lento (più di quanto occorra perchè possano praticamente trascurarsi le forze d'inerzia) affinchè la deformazione di ogni elemento si adegui effettivamente in ogni istante alla rispettiva tensione. Si può anche accennare al comportamento del calcestruzzo, il quale è soggetto anche per piccole sollecitazioni ad una deformazione differita che si manifesta, permanendo lo stato di tensione, nel corso di mesi e di anni con tendenza asintotica a una deformazione totale, che può giungere al triplo o al quadruplo della deformazione che si ha all'atto del carico. Il calcestruzzo può dunque comportarsi elasticamente, nel senso della definizione data sopra, soltanto per sollecitazioni (abbastanza piccole) di breve durata.

biunivoca tra forze e configurazioni, e quindi un comportamento elastico. Si avrà così *elasticità lineare* fino ai limiti di proporzionalità, elasticità non lineare fra questi e i limiti d'elasticità. (Si ripete che per l'acciaio il campo dell'elasticità non lineare è praticamente nullo.)

Si vuol ricordare da ultimo che si pone sempre che l'ordine di grandezza della rotazione non superi quello della deformazione, affinchè risultino accettibili le espressioni lineari delle componenti della deformazione in funzione delle derivate dello spostamento. Nei casi, già accennati al paragrafo 7, in cui tale condizione non sia verificata è chiaro che perderanno significato le (35) (v. nota ([125])), intese per $\varepsilon_x , \dots , \gamma_{zx}$ le suddette espressioni lineari; ma è parimente ovvio che restando la deformazione abbastanza piccola potrà mantenersi il comportamento elastico, ed anche la linearità della relazione tra essa, espressa dalle sue effettive componenti, e la tensione ([132]).

Le relazioni lineari (37_1) e (37_2), costituiscono quella che può dirsi *legge di Hooke generalizzata* (dal fisico inglese R. Hooke, che nel 1678 la enunciò nei termini « ut tensio sic vis », dove per « tensio » deve intendersi la dilatazione).

32. Un corpo elastico privo di forze direttamente applicate (cioè soggetto solo ad eventuali forze da parte dei vincoli) si dirà in uno *stato iniziale*; e *configurazioni iniziali* si diranno quelle da esso assunte in tali stati. Va subito osservato che non sarà però necessariamente nulla la tensione nemmeno quando per essere il corpo vincolato isostaticamente, come appunto per ora sarà supposto, siano nulle invece anche le reazioni, e nulle quindi tutte le forze esterne ([133]). Si voglia ora determinare la variazione dello stato di tensione di un tale corpo per effetto di un dato sistema di forze di massa e di superficie ad esse applicate, ponendo che esse siano in ogni punto finite ([134]) (e continue nel punto generico, senza

---

([132]) Questo accenno, che qui non può essere sviluppato, si ricollega con quello alla fine della nota ([33]).

([133]) È noto che le due parti di un corpo elastico tagliato possono restare deformate (indipendentemente dalle azioni locali sofferte nel taglio) in modo da non poter più combaciare, dimostrando di essere state avanti sollecitate, ciascuna da parte dell'altra, da un sistema di forze (ovviamente in equilibrio tra loro, trattandosi di un corpo libero). Un tale stato di tensione, che sarà oggetto di particolare studio al capitolo seguente, dovrà sodisfare alle equazioni d'equilibrio (25) e alle condizioni al contorno (25'), le une e le altre coi termini noti nulli, cioè omogenee.

([134]) Si potranno poi considerare forze concentrate in vario grado, secondo la definizione data a suo luogo, come casi limiti. Nel problema ora posto intervengono bensì forze concentrate in punti come reazioni dei vincoli (essendo mantenuta l'ordinaria considerazione delle condizioni di vincolo riguardanti punti isolati); ma la soluzione del problema medesimo dipende effettivamente dalle sole forze direttamente assegnate, quando naturalmente sia dato il corpo colle sue condizioni di vincolo.

escludere cioè superficie di discontinuità delle forze di massa, nè linee di discontinuità delle forze di superficie). Le incognite del problema sono dunque le componenti della differenza tra la nuova tensione e la suddetta eventuale tensione iniziale (differenza che potrà anche intendersi, nella solita ipotesi delle deformazioni infinitesime, come variazione della forza sull'unità di area ([135])).

Come effetto delle forze applicate si avrà naturalmente anche un cambiamento di configurazione, quindi una deformazione, necessariamente congruente, che si sovrapporrà alla deformazione iniziale corrispondente alla tensione iniziale secondo le (37_2). Le componenti di tale deformazione congruente si esprimeranno per le derivate del corrispondente spostamento, ovviamente riferito alla configurazione iniziale, rispetto alle coordinate del punto nella configurazione medesima: esse non sarebbero dunque a rigore gl'incrementi delle componenti della deformazione iniziale, le quali vanno invece riferite alla configurazione naturale di ciascun elemento; tuttavia, sempre restando nel campo delle deformazioni infinitesime, potrà ugualmente intendersi che si identifichino con tali incrementi, i quali evidentemente corrispondono alle componenti della differenza di tensione, cioè alle suddette incognite del problema, ancora secondo le relazioni lineari omogenee (37_2) ([136]). Si hanno così per tali incognite, che s'indicheranno semplicemente con $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$, oltre alle equazioni indefinite d'equilibrio e alle condizioni al contorno, le equazioni esprimenti la congruenza della suddetta deformazione, vale a dire le condizioni di Saint-Venant nelle quali mediante le (37_2) siano espresse le $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$ per le incognite medesime.

Si ha dunque un sistema di nove equazioni alle derivate parziali, tre del prim'ordine e sei del secondo, in cui le variabili indipendenti sono le coordinate del punto del corpo considerato nell'assegnata configurazione iniziale. Le condizioni al contorno sono le (25′) coi valori assegnati delle componenti f_x, f_y, f_z della forza di superficie; ma non bisogna dimenticare

---

([135]) È chiaro che a rigore la variazione della tensione dipende dalla variazione di tale forza e dalla variazione dell'area dell'elemento superficiale.

([136]) Alla deformazione infinitesima corrisponde naturalmente una tensione pure infinitesima, e tali risultano anche le forze che ad essa fanno equilibrio. Nelle applicazioni bisogna pertanto ricordare che non si otterranno in realtà gli effetti di date forze $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}$ (rispettivamente di massa e di superficie), ma gli effetti delle forze infinitesime $\varepsilon\boldsymbol{F}, \varepsilon\boldsymbol{f}$, essendo ε il numero infinitesimo già considerato nella nota ([124]), divisi per il numero medesimo. Il risultato sarà dunque accettabile quando la deformazione corrispondente alla tensione trovata sia sufficientemente piccola; e l'importanza della teoria che si espone deriva ovviamente dal fatto che tale si dimostra in realtà la deformazione corrispondente a tensioni, e quindi a forze, dell'ordine di grandezza di quelle che possono aversi effettivamente. Questo è il significato da attribuire all'affermazione che i coefficienti di elasticità A_{ik} sono piccoli (o che sono grandi gli a_{ik}).

che un dato essenziale del problema (inscindibile dalla stessa definizione del corpo) è anche la designazione dei vincoli, cioè di punti della superficie e di direzioni in ciascuno di essi (non più di 6 direzioni in tutto, dovendo aversi un sistema di vincoli isostatico), secondo le quali possano agire nei punti medesimi forze concentrate da far equilibrio alle assegnate forze di massa e di superficie ([137]). Queste forze concentrate possono riguardarsi come tensioni infinite sovrapponentisi necessariamente, negl'intorni superficiali infinitesimi di tali punti, alle forze di superficie assegnate ([138]). È interessante infine osservare che non vi potranno essere superficie di discontinuità delle incognite componenti della tensione e nemmeno delle loro derivate normali, eccettuate per queste ultime le eventuali superficie di discontinuità delle assegnate forze di massa, sempre che si pongano continue in ogni punto le costanti d'elasticità e le loro derivate prime; come si prova col seguente ragionamento.

S'è visto che attraverso una superficie qualunque potrebbero essere discontinue solo le componenti interiori della tensione, restando $[\sigma_n] = [\tau_{np}] = [\tau_{nq}] = 0$; e d'altra parte per la continuità dello spostamento dovrebbe essere (§ 15) $[\varepsilon_p] = [\varepsilon_q] = [\gamma_{pq}] = 0$: queste ultime costituiscono, tenuto conto delle prime e dall'ammessa continuità delle costanti elastiche, un sistema lineare omogeneo di tre equazioni per le $[\sigma_p]$, $[\sigma_q]$, $[\tau_{pq}]$, le quali pertanto risultano anch'esse nulle ([139]). Dimostrata così la continuità della tensione e della deformazione, resterebbe possibile per la prima la discontinuità attraverso certe superficie delle componenti interiori della derivata

---

([137]) Nel caso del corpo libero, vale a dire quando siano direttamente assegnate tutte le forze, queste dovranno essere fra loro in equilibrio: condizione che si richiede già ovviamente per l'esistenza di un qual si voglia sistema di tensioni in equilibrio con le forze medesime (cioè indipendentemente dalla considerazione dell'elasticità e della congruenza). E così naturalmente quando il corpo sia vincolato ma labile, le forze assegnate dovranno sodisfare alle $6 - c$ condizioni ricordate al paragrafo 16.

Trattandosi qui di vincoli isostatici, i valori delle reazioni restano in ogni caso determinati dalle medesime condizioni d'equilibrio complessivo, e non sono pertanto da comprendere fra i dati arbitrari del problema, come già s'è accennato alla nota ([133]). Circa il carattere essenziale della definizione dei vincoli (nel senso sopra dichiarato) basti pensare al diverso stato di tensione di una data trave che debba sopportare un medesimo carico in diverse condizioni di vincolo, per esempio incastrata ad un estremo e del resto libera (mensola) o appoggiata ai due estremi.

([138]) Sarà osservato poco appresso che gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze concentrate divengono teoricamente infiniti. A questo punto non ci si deve dare di ciò alcun pensiero, perchè in questo caso dei vincoli isostatici non interviene nella determinazione della tensione nessuna condizione che riguardi gli spostamenti.

([139]) Non potrà esistere nemmeno eccezionalmente una soluzione diversa dalla triviale, poichè la forma quadratica φ si annullerebbe per valori non tutti nulli delle variabili, e perciò non sarebbe definita.

normale, restando $\left[\frac{\partial \sigma_n}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial \tau_{np}}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial \tau_{nq}}{\partial n}\right] = 0$, mentre per la deformazione dovrebbe aversi $\left[\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial \gamma_{pq}}{\partial n}\right] = 0$: ammessa la continuità delle derivate delle costanti elastiche, risultano così continue tutte le componenti della derivata normale della tensione e della deformazione. Solo sulle eventuali superficie di discontinuità delle forze di massa le $\left[\frac{\partial \sigma_n}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \tau_{np}}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \tau_{nq}}{\partial n}\right]$ non saranno nulle, ma uguali alle discontinuità medesime (v. nota (100)); e allora dalle sopra ricordate condizioni di continuità delle componenti interiori della derivata normale della deformazione resteranno determinate anche le discontinuità $\left[\frac{\partial \sigma_p}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \sigma_q}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \tau_{pq}}{\partial n}\right]$ (e quindi anche le $\left[\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \gamma_{np}}{\partial n}\right]$, $\left[\frac{\partial \gamma_{nq}}{\partial n}\right]$).

Mentre le discontinuità delle componenti esteriori della derivata normale dell'incognita tensione sono determinate dalle stesse equazioni indefinite d'equilibrio, le richieste discontinuità delle componenti interiori sono dunque condizioni di congruenza indipendenti dalle equazioni di Saint-Venant, da porre esplicitamente per le superficie di discontinuità delle forze di massa.

In tal modo essendo poste nel caso del corpo aciclico (vincolato isostaticamente) tutte le condizioni di congruenza, il problema resta in questo caso determinato: potrebbe infatti dimostrarsi subito che le condizioni d'equilibrio e di congruenza non possono essere sodisfatte che da un unico sistema di tensioni e deformazioni (140). Si rimanda la dimostrazione a un prossimo paragrafo, dopo la discussione degli altri casi (corpo ciclico, e corpo vincolato iperstaticamente), avvertendo che non può invece aver luogo in questa sede alcuna considerazione sull'esistenza e sulla ricerca della soluzione del problema analitico posto così in generale.

33. Quando il corpo sia ciclico bisognerà ricordare che oltre alle condizioni di Saint-Venant e a quelle riguardanti le eventuali discontinuità della deformazione e delle sue derivate prime, sono condizioni di congruenza intrinseche anche quelle riguardanti la monodromia dello spostamento.

---

(140) Per forze esterne tutte nulle si avrà dunque solo la tensione identicamente nulla, perciò la deformazione di uno stato iniziale non può mai essere congruente. Ciò significa che in ogni caso in cui la tensione e la deformazione di uno stato iniziale non siano nulle non potrà essere ridotto ogni elemento del corpo al proprio stato naturale senza che venga almeno a mancare la connessione del corpo medesimo, o a diminuire (nel caso di un corpo ciclico) l'ordine di essa. Si ricordi in tale proposito la nota (129).

Può accennarsi allora in generale al seguente procedimento, riferito per semplicità al caso della connessione doppia.

Supposto di saper risolvere il problema per il corpo aciclico (assegnato colle sue condizioni di vincolo isostatiche), cioè di saper esprimere per esso la tensione in funzione di tutte le forze di massa e di superficie, si potrà pensare di render tale il corpo considerato mediante un taglio eseguito secondo una superficie generica (che non lo divida in due parti), e di porre il problema per un'indeterminata tensione t_n, essendo n la normale in ogni punto della superficie medesima, considerata come forza di superficie sulle due facce del taglio divenute parti della superficie esterna del corpo. Si porrà indi da prima la condizione della continuità attraverso tale superficie (nel campo non tagliato) delle componenti interiori della tensione e della sua derivata normale, che è, posti continui i coefficienti d'elasticità colle loro derivate prime, condizione necessaria e sufficiente per la possibilità di uno spostamento continuo in ogni spazio parziale aciclico contenente la superficie medesima [141]; le due facce della quale dovranno allora deformarsi alla stessa maniera, risultando per altro in generale distaccate nello spazio effettivo, per non essere consentito dalla connessione di questo il moto rigido relativo che sarebbe necessario per portarle a contatto. La soluzione che in tal modo s'immagina di saper trovare dovrà dunque contenere sei costanti arbitrarie [142], da determinare ponendo ancora la condizione d'annullamento dei sei parametri del suddetto moto rigido, cioè le sei costanti di polidromia definite al paragrafo 13.

L'interesse di questo accenno consiste principalmente nel fatto che in molte applicazioni il procedimento può ridursi in pratica soltanto all'ultima parte, potendosi intendere da un lato che la tensione in ogni punto di una superficie come quella del taglio, sezione piana secondo una certa giacitura, sia definita semplicemente dalle sei componenti del vettore risultante e del momento risultante delle tensioni medesime (reputandosi nota una certa legge generale di ripartizione di tale azione complessiva);

---

(141) Si ricordi ancora dalla nota (100) che la continuità delle componenti esteriori della derivata normale risulta come conseguenza delle equazioni indefinite (25), le quali sono sodisfatte per ipotesi sull'una e sull'altra faccia del taglio. Così, essendo anche posta la continuità di t_n, le condizioni indicate sono esclusivamente condizioni di congruenza (com'è chiaro d'altra parte se si osserva che equivalgono alle condizioni di continuità delle componenti interiori della deformazione e della sua derivata normale), che vanno poste esplicitamente in questo caso per la sezione del taglio.

(142) Per la già accennata unicità della soluzione, che sarà dimostrata senza distinzione fra corpi ciclici ed aciclici, è da escludere un'indeterminazione maggiore. La dimostrazione dell'effettiva arbitrarietà di sei costanti, necessaria a render possibile il problema del corpo ciclico, appartiene alle questioni d'esistenza della soluzione, che qui non possono essere trattate.