

### CAPITOLO III

#### ANALISI DELLA TENSIONE

19. Le forze agenti dall'esterno su un dato corpo, che potranno dirsi appunto forze esterne, sono da distinguere in *forze di massa* e *forze di superficie*. Le prime sono quelle che agiscono su ogni elemento del corpo, definite in generale da un campo di forze, porzione di spazio in ciascun punto del quale è assegnato un vettore, rappresentante il limite del rapporto tra il vettore risultante delle forze agenti su una massa posta in un intorno infinitesimo di esso punto e la massa medesima. Tale vettore si dirà *forza per unità di massa*; e benchè in generale dovrebbe ammettersi che l'azione esercitantesi sulla massa elementare sia costituita da una forza passante per il rispettivo punto e da una coppia, si porrà qui la condizione (non restrittiva nell'ordinario campo d'applicazione di questi studi) che la coppia sia nulla: sulla massa posta nell'intorno infinitesimo di un dato punto agirà dunque soltanto la forza passante per il punto stesso. È chiaro poi che la parola massa può essere intesa in senso generico: si tratterà bensì quasi sempre di massa in senso ordinario, come nel caso del campo gravitazionale (peso) o per le forze d'inerzia da considerare nei problemi dinamici; ma quando si considerasse per esempio un campo elettrostatico dovrebbe intendersi per massa la carica elettrica.

Detta  $\mathbf{F}$  la forza per unità di massa, di componenti  $F_x, F_y, F_z$  rispetto a un certo sistema cartesiano di riferimento, sarà  $\rho\mathbf{F}$  la forza per unità di volume, essendo  $\rho$  la massa per unità di volume ossia la densità<sup>(88)</sup>. Posto allora  $\rho F_x = X, \rho F_y = Y, \rho F_z = Z$  (componenti della forza per unità di volume), il vettore risultante delle forze di massa agenti su un corpo, o parte di un corpo, occupante uno spazio  $S$  avrà le componenti

$$\int_{(S)} X dV, \quad \int_{(S)} Y dV, \quad \int_{(S)} Z dV;$$

---

<sup>(88)</sup> Il riferimento all'unità di massa si trova nelle opere classiche, e qui s'è accennato perchè discende naturalmente dal concetto stesso di forza di massa; ma per semplicità formale si considererà sempre d'ora innanzi la forza per unità di volume.

e il momento risultante delle forze medesime rispetto all'origine degli assi (che potrà essere un punto qualunque) avrà le componenti

$$\int_{(S)} (Zy - Yz) dV, \quad \int_{(S)} (Xz - Zx) dV, \quad \int_{(S)} (Yx - Xy) dV.$$

Si ponga che la forza  $\rho \mathbf{F}$  vada variando in vicinanza di una superficie  $\Omega$ , mantenendosi sempre continua; e la variazione sia tale, che considerate due superficie  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  da bande opposte di  $\Omega$ , ed essendo  $A'$ ,  $A''$  le intersezioni di esse colla normale ad  $\Omega$  nel punto generico  $A$  (fig. 44),

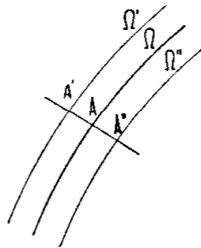


Fig. 44

si possa far tendere a zero la distanza  $A'A'' = dn$  in modo che l'integrale  $\int_{(\Omega)} \rho \mathbf{F} dn$  (per il suddetto contemporaneo

variare di  $\rho \mathbf{F}$ , la quale dovrà assumere su  $\Omega$  valori crescenti indefinitamente) tenda a un limite finito  $\mathbf{f}$ , funzione del punto  $A$ . Tale limite si dirà *forza di massa concentrata sulla superficie  $\Omega$* , valutata per unità di area della superficie medesima. In modo analogo può definirsi la *forza di massa concentrata lungo una*

*linea o concentrata in un punto*; considerando per la prima l'integrale

$\int \rho \mathbf{F} dA$  esteso alla sezione normale generica infinitesima di un tubo avente per asse la linea considerata; per la seconda l'integrale  $\int \rho \mathbf{F} dV$

esteso a un intorno infinitesimo del punto. Non si tratta naturalmente di forze effettive, ma di condizioni limiti, la cui considerazione potrà sostituirsi per comodo a quella di condizioni effettive che possano stinarsi, a certi effetti, abbastanza prossime a quelle.

Le forze di superficie, agenti alla superficie del corpo, si distinguono dalle precedenti perchè si riguardano come azioni dovute al contatto con altri corpi (solidi, liquidi o aeriformi). Una tal forza, valutata *per unità di area* (come appunto la pressione di un liquido o di un gas), s'indicherà con  $\mathbf{f}$ , di componenti  $f_x, f_y, f_z$  <sup>(89)</sup>. Il vettore risultante delle forze agenti

(89) L'azione esercitantesi sull'elemento di superficie nell'intorno di un determinato punto deve intendersi al limite dipendente solo dall'area dell'elemento (e non dalla forma), sempre che sia infinitesima ogni dimensione di questo. (E' conseguenza dello stesso concetto di un'azione determinata spettante ad ogni elemento per quanto piccolo, e di un'ovvia condizione di continuità.) E' anche chiaro come sia inerente alla stessa natura di tale azione di contatto la condizione che sull'elemento nell'intorno di ogni punto agisca (al limite) soltanto una forza passante per il punto medesimo.

Si avverte che questa definizione, e così l'analoga definizione della tensione che si darà al paragrafo seguente, sono riferite al modello dello spazio continuo come quelle riguardanti la deformazione (v. nota <sup>(29)</sup>).

sulla superficie  $\Sigma$ , o parte della superficie, di un dato corpo avrà le componenti

$$\int_{(\Sigma)} f_x dA, \quad \int_{(\Sigma)} f_y dA, \quad \int_{(\Sigma)} f_z dA;$$

e il momento risultante rispetto all'origine le componenti

$$\int_{(\Sigma)} (f_z y - f_y z) dA, \quad \int_{(\Sigma)} (f_x z - f_z x) dA, \quad \int_{(\Sigma)} (f_y x - f_x y) dA.$$

In modo analogo a quello seguito per le forze di massa possono definirsi qui i casi limiti della forza di superficie concentrata lungo una linea, o concentrata in un punto. Si ricordi infine che al paragrafo precedente in proposito delle reazioni di vincolo, partendo dal concetto della forza concentrata in un punto (che interviene naturalmente, per il principio dei lavori virtuali, nella considerazione astratta dei vincoli agenti in punti isolati) si è introdotto il concetto di coppia concentrata in un punto come caso limite di forze concentrate in punti infinitamente vicini<sup>(90)</sup>.

**20.** Sia un corpo soggetto a forze esterne (di massa e di superficie) costituenti un sistema in equilibrio, e si considerino le parti  $A$  e  $B$  in cui esso sia diviso da una superficie avente il contorno sulla superficie (o sistema di superficie) che delimita il corpo stesso (o da più superficie siffatte quando il corpo sia ciclico) (fig. 45). Osservando che ciascuna di queste parti è in equilibrio quand'è in equilibrio l'intero corpo, mentre non si avrà in generale l'equilibrio delle forze esterne agenti sull'una o sull'altra di esse, si deve concludere che per la materiale connessione del corpo si manifesta in ciascuna parte un'azione alla superficie di separazione, equivalente al sistema delle forze esterne agenti sull'altra parte. È ovvio ammettere che si tratti di una forza ripartita sulla superficie medesima, come le forze sopra definite che agiscono dall'esterno alla superficie limite di un corpo, con direzione e intensità determinate per ciascun elemento; e non essendovi poi nessuna condizione effettiva che distingua la forza trasmettentesi attraverso un

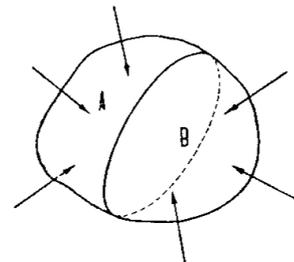


Fig. 45

<sup>(90)</sup> Nel caso delle forze di massa potrebbe introdursi il concetto della coppia concentrata in un punto anche in modo diretto, come caso limite di coppia non nulla per unità di volume.

dato elemento di superficie quando questo sia pensato appartenente a due diverse superficie di separazione, dovrà anche ammettersi che una tal forza riferita all'unità di area sia funzione soltanto del punto e della giacitura dell'elemento medesimo.

L'insieme delle forze per unità di area che si trasmettono attraverso tutti gli elementi di superficie passanti per un dato punto costituisce lo *stato di tensione* nel punto medesimo. Stato di tensione di un corpo sarà l'insieme degli stati di tensione dei punti di esso. Si dirà anche *tensione* su una determinata faccia di un dato elemento di superficie la stessa forza per unità di area che attraverso l'elemento medesimo si esercita su quella parte del corpo per cui la normale inalzata sulla considerata faccia è normale esterna (fig. 46): essa s'indicherà con  $t_n$  essendo  $n$  la normale suddetta. Risulta evidentemente  $t_{-n} = -t_n$ .

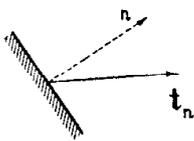


Fig. 46

Per la stessa definizione si deve ammettere la continuità della tensione, nel punto generico e per il generico elemento di superficie, secondo ogni direzione appartenente all'elemento medesimo. Si può ora dimostrare che in ogni

caso effettivo (quando cioè si escludano i casi limiti delle forze concentrate) la tensione è necessariamente continua in ogni punto e per qualunque elemento secondo la direzione normale a quest'ultimo. Si consideri infatti un cilindro retto d'altezza  $\delta$  (fig. 47), e siano  $T_1$  e  $T_2$  i vettori risultanti delle tensioni su facce delle due basi ugualmente rivolte; essendo riferito cioè  $T_1$  alla faccia esterna di una base,  $T_2$  alla faccia interna dell'altra. Per l'equilibrio il vettore  $T_1 - T_2$  è opposto alla somma dei vettori risultanti delle forze di massa agenti sugli elementi di volume del cilindro e delle tensioni agenti sulla faccia esterna della superficie laterale di esso. Al tendere a zero della distanza  $\delta$  anche la differenza  $T_1 - T_2$  tenderà pertanto in ogni caso a zero, posto solo che la

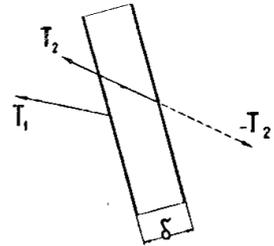


Fig. 47

tensione alla suddetta superficie laterale si mantenga finita, com'è fisicamente ovvio, anche se discontinua: è dimostrata così la continuità della tensione media sulla considerata superficie piana, limite dell'una o dell'altra base, secondo la direzione ad essa normale. Facendo allora tendere a zero ogni dimensione della superficie medesima si ottiene la dimostrazione della continuità, secondo la stessa direzione, della tensione  $t_n$  in ogni punto che non appartenga ad una linea, la quale sia su essa superficie linea di discontinuità della stessa  $t_n$ ; vale a dire in ogni punto in cui questa abbia secondo la definizione un valore determinato. È chiaro infine per ovvie considerazioni (analoghe a quelle della nota <sup>(29)</sup>) che alla continuità dovrà sempre intendersi accompagnata la derivabilità.

Quanto alla continuità delle derivate prime, è da osservare che essa è assicurata dal ragionamento precedente per la  $\frac{\partial t}{\partial n}$  anche nella stessa direzione  $n$ , fuorchè nei punti appartenenti ad ogni eventuale superficie di discontinuità della forza di massa, o ad ogni superficie attraverso la quale sia discontinua la tensione su elementi ad essa normali (per eccezione alla continuità sopra postulata per definizione); in ciascuno dei quali punti sarà discontinua attraverso tale superficie la derivata normale della tensione sull'elemento appartenente alla superficie medesima<sup>(91)</sup>.

21. Si consideri un elemento di un corpo, occupante uno spazio  $S$  limitato da una superficie generica  $\Sigma$ , e sia  $O$  un punto di esso. Per l'equilibrio alla traslazione dev'essere

$$\int_{(\Sigma)} t_{nx} dA + \int_{(S)} X dV = 0, \quad (20)$$

essendo  $t_{nx}$  la componente secondo l'asse arbitrario  $x$  della tensione  $t_n$  sulla faccia esterna di  $\Sigma$ : tale relazione deve valere anche al limite quando  $S$  divenga l'intorno infinitesimo del punto  $O$ . Per la dimostrata continuità della tensione potrà al limite sostituirsi alla  $t_{nx}$  nel punto variabile di  $\Sigma$  la  $(t_{nx})_0$  nel punto  $O$  (riferita naturalmente alla stessa normale  $n$ ), trascurandosi così una parte infinitesima della tensione medesima, e quindi una parte dell'integrale che è rispetto ad esso infinitesima di ordine superiore. Se si pensa di considerare la  $\Sigma$  sempre omotetica ad una superficie fissa  $\bar{\Sigma}$  secondo il rapporto d'omotetia infinitesimo  $\varepsilon$ , potrà dunque scriversi in luogo del primo termine della (20) l'espressione  $\varepsilon^2 \int_{(\bar{\Sigma})} (t_{nx})_0 dA$ .

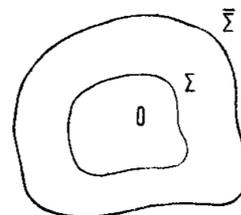


Fig. 48

Detto poi  $\bar{X}$  il massimo valore assoluto di  $X$  nei punti dello spazio  $\bar{S}$  racchiuso dalla  $\bar{\Sigma}$ , si ha ovviamente

$$\left| \int_{(S)} X dV \right| \leq \varepsilon^3 \bar{X} \bar{V},$$

<sup>(91)</sup> Dalla discontinuità di  $\frac{\partial t_n}{\partial n}$ , essendo  $n$  la normale in un punto di una data superficie, consegue naturalmente la discontinuità attraverso la superficie medesima delle derivate di  $t_n$  secondo ogni altra direzione che non sia normale ad  $n$  (cioè non appartenente, nello stesso punto, ad essa superficie).

essendo  $\bar{V}$  il volume di  $\bar{S}$ . E così al limite la (20) diviene semplicemente, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\int_{(\bar{\Sigma})} (t_{nx})_0 dA = 0 \quad (92). \quad (20')$$

Bisogna ricordare che  $(t_{nx})_0$  è la componente secondo l'asse  $x$  della tensione sull'elemento per  $O$  parallelo al piano tangente nel punto generico della superficie fissa  $\bar{\Sigma}$  alla quale è estesa l'integrazione: tale funzione integranda è perciò funzione dei coseni direttori  $\alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz}$  della normale  $n$  alla  $\bar{\Sigma}$ .

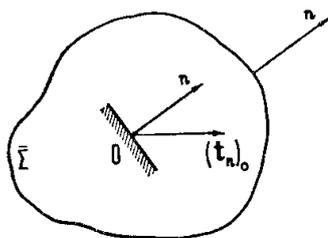


Fig. 49

Si ponga ora

$$\varphi(\alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz}) = (t_{nz})_0 - (k_x \alpha_{nx} + k_y \alpha_{ny} + k_z \alpha_{nz}), \quad (21)$$

essendo  $k_x, k_y, k_z$  costanti arbitrarie. Essendo ovviamente per il lemma di Gauss

$$\int_{(\bar{\Sigma})} \alpha_{nx} dA = \int_{(\bar{\Sigma})} \alpha_{ny} dA = \int_{(\bar{\Sigma})} \alpha_{nz} dA = 0,$$

risulta per la (20')

$$\int_{(\bar{\Sigma})} \varphi(\alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz}) dA = 0, \quad (22)$$

relazione che deve valere per qualunque superficie  $\bar{\Sigma}$ .

Se in particolare si pone  $k_x = (t_{xx})_0, k_y = (t_{yx})_0, k_z = (t_{zx})_0$  <sup>(93)</sup>, si ha dalla definizione (21)  $\varphi(1,0,1) = (t_{xx})_0 - (t_{xx})_0 = 0$ ; e così  $\varphi(0,1,0) = \varphi(1,0,0) = 0$ . Applicata allora la (22) alla superficie di un tetraedro avente tre spigoli sugli assi coordinati e la faccia opposta all'origine secondo una giacitura generica, basta osservare che la funzione integranda ha valore zero sulle tre facce parallele ai piani coordinati, e valore costante sulla quarta faccia, per concludere che anche quest'ultimo valore dev'essere nullo. La

<sup>(92)</sup> Si ricordi che la (20') e le analoghe per le analoghe componenti di  $t_n$  sono condizioni necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio. Dovrà perciò riprendersi in considerazione la parte trascurata della (20), oppure la (20) completa tenendo conto delle relazioni trovate (per le quali quest'ultima si riduce in realtà alla parte medesima).

<sup>(93)</sup>  $t_{xx}, t_{yx}, t_{zx}$  sono ovviamente, conforme alla definizione generale di  $t_{nx}$ , le componenti secondo l'asse  $x$  delle tensioni agenti sugli elementi normali rispettivamente agli assi  $x, y, z$ .

funzione  $\varphi$ , con le costanti  $k$  così scelte, risulta dunque identicamente nulla; e si ottiene così la relazione fondamentale

$$t_{nx} = t_{xx} \alpha_{nx} + t_{yz} \alpha_{ny} + t_{zx} \alpha_{nz}.$$

(Si è tralasciato l'indice  $0$ , divenuto ovviamente inutile perchè s'intende che tutte le  $t$  si riferiscano a un medesimo punto.)

Se infine, decomposta la generica  $t_n$  secondo la direzione  $n$  e la giacitura ad essa normale (cioè la giacitura dell'elemento su cui tale tensione agisce) (fig. 50), si conviene d'indicare la prima di tali proiezioni con  $\sigma_n$ , e con  $\tau_{np}$ ,  $\tau_{nq}$  le proiezioni dell'altra componente secondo due direzioni ortogonali  $p$ ,  $q$  appartenenti alla giacitura di essa (la suddetta giacitura dell'elemento), si ha ovviamente  $\sigma_n = t_{nn}$ ,  $\tau_{np} = t_{np}$ ,  $\tau_{nq} = t_{nq}$ ; e la relazione fondamentale precedente diviene

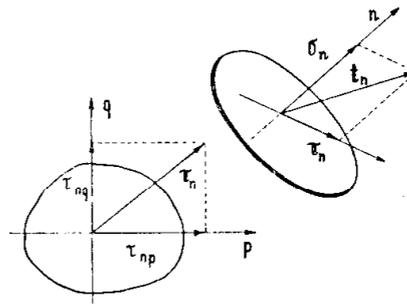


Fig. 50

$$t_{nx} = \sigma_x \alpha_{nx} + \tau_{yx} \alpha_{ny} + \tau_{zx} \alpha_{nz}.$$

Scrivendo insieme con questa le due relazioni analoghe riferentisi agli assi  $y$  e  $z$ , e per semplicità sottintendendo l'indice generico  $n$ , si ha infine <sup>(94)</sup>

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z, \\ t_y &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z, \\ t_z &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z. \end{aligned} \tag{23}$$

In proposito delle componenti  $\sigma$  e  $\tau$  che qui compaiono si può osservare che invertendo il senso della normale  $n$  la prima resta immutata ( $\sigma_{-n} = \sigma_n$ ), mentre cambiano segno  $\tau_{np}$ ,  $\tau_{nq}$  se si lasciano immutati i sensi

<sup>(94)</sup> Nei punti di eventuali superficie di discontinuità della tensione le (23) valgono ovviamente come limite sull'una e sull'altra faccia. Circa le possibili discontinuità della tensione vedasi anche al paragrafo seguente.

Per i punti delle superficie esterna del corpo le (23) si dimostrano direttamente come per il punto generico, poichè il ragionamento sopra esposto vale anche quando il punto sia alla superficie del considerato elemento. La tensione sull'elemento della superficie esterna è la stessa forza di superficie applicata al corpo: le componenti  $\sigma$  e  $\tau$  in ogni punto di tale superficie dovranno pertanto soddisfare alle condizioni (23) in cui siano poste in luogo di  $t_x, t_y, t_z$  le assegnate  $f_x, f_y, f_z$ .

di  $p$  e di  $q$  (fig. 51). Il segno della  $\sigma$ , che è per definizione la *tensione normale*, ha un importantissimo significato fisico: con la convenzione fatta

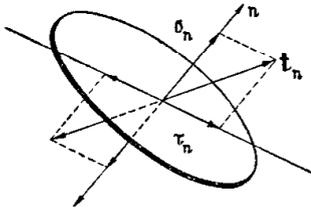


Fig. 51

esso risulta positivo quando la tensione normale è di *trazione* (forze che tendono a distaccare le due facce dell'elemento), negativa quando essa è di *compressione* (forze che tendono a far compenetrare le due facce). Nessun significato fisico particolare ha invece il segno delle *tensioni tangenziali*  $\tau$  (tendenti a fare scorrere le facce dell'elemento fra loro nell'uno o nell'altro senso).

**22.** Le (23), esprimenti le componenti del vettore  $t$  come funzioni lineari omogenee delle componenti  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  del versore  $n$ , possono scriversi sinteticamente nella forma

$$t = \mathcal{T}n,$$

essendo

$$\mathcal{T} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Si dimostra facilmente che tale tensore è simmetrico. Basta osservare che per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse  $z$  dell'elemento infinitesimo del corpo già sopra considerato dev'essere

$$\int_{(\Sigma)} (t_{ny} x - t_{nx} y) dA + \int_{(S)} (Yx - Xy) dV = 0;$$

onde si ottiene come precedentemente, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\int_{(\bar{\Sigma})} \{(t_{ny})_0 x - (t_{nx})_0 y\} dA = 0,$$

essendo  $\bar{\Sigma}$  una superficie chiusa fissa qualunque. E per le (23) (sottintesi gl'indici  $_0$  ed  $_n$ )

$$\int_{(\bar{\Sigma})} \{(\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z) x - (\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z) y\} dA = 0,$$

dove le  $\sigma$  e le  $\tau$  sono da riguardare come costanti, perchè valutate nel punto fisso  $O$ ; onde applicando il lemma di Gauss si ottiene semplice-

mente

$$(\tau_{xy} - \tau_{yz}) \int_{(S)} dV = 0,$$

e quindi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (24)$$

Tale proprietà, valida ovviamente per qualunque coppia di direzioni ortogonali (onde in particolare anche  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ), suole indicarsi come *reciprocità delle tensioni tangenziali* <sup>(95)</sup>.

Le sei componenti del tensore simmetrico  $\mathcal{T}$  si dicono anche *componenti della tensione*. Con riferimento a una data superficie, la cui normale nel punto generico sia  $n$ , e dette come precedentemente  $p$  e  $q$  due direzioni normali ad  $n$  e fra loro, si diranno *esteriori* le componenti  $\sigma_n$ ,  $\tau_{np}$  ( $= \tau_{pn}$ ) e  $\tau_{nq}$  ( $= \tau_{qn}$ ), *interiori* le altre tre (quelle che non hanno l'indice  $n$ ) <sup>(96)</sup>. Con tali denominazioni le proprietà sopra stabilite a riguardo della continuità della tensione e delle sue derivate prime (sempre esclusa l'azione di forze concentrate) possono esprimersi come segue.

Tutte le componenti della tensione sono continue e derivabili nel punto generico. Attraverso determinate superficie possono essere discontinue le componenti interiori, restando necessariamente continue le esteriori <sup>(97)</sup>. Attraverso le superficie medesime, come attraverso le eventuali superficie di discontinuità delle forze di massa, risultano discontinue anche le derivate normali delle componenti esteriori, restando necessariamente continue le derivate di esse secondo le direzioni appartenenti alla

<sup>(95)</sup> Può dirsi in generale che considerato un diedro retto, le componenti delle tensioni agenti sulle due facce esterne o sulle due facce interne di esso in direzione perpendicolare allo spigolo sono di uguale intensità e rivolte entrambe verso lo spigolo o entrambe in senso opposto (fig. 52).

È chiaro che tale proprietà non sussisterebbe se nel definire le forze di massa non si fosse posta nulla la coppia sull'elemento infinitesimo.

<sup>(96)</sup> Si giustificano questi nomi osservando che le prime tre, componenti del vettore  $t_n$ , sono forze esterne per il corpo tagliato secondo la considerata superficie. Si avverta che le componenti interiori non si riferiscono invece alla tensione su uno stesso elemento superficiale.

<sup>(97)</sup> S'intende che dalla discontinuità delle componenti interiori segue la discontinuità attraverso la superficie medesima della tensione su ogni elemento che ad essa non appartenga, e quindi di tutte le componenti riferite a tre direzioni generiche.

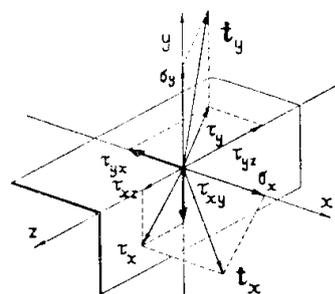


Fig. 52

superficie<sup>(98)</sup>. Possono esservi infine altre superficie, attraverso le quali siano discontinue le derivate normali delle componenti interiori, restando continue (oltre alle derivate di queste secondo le direzioni appartenenti alla superficie) tutte le derivate delle componenti esteriori.

Si riprenda ora l'equazione (20) riferita a uno spazio finito, e si esprima  $t_x$  (sottinteso l'indice  $n$ ) per mezzo della prima delle (23): essa diventa così

$$\int_{(\Sigma)} (\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z) dA + \int_{(S)} X dV = 0;$$

e con l'applicazione al primo termine del lemma di Gauss (posto che  $S$  non contenga superficie di discontinuità di  $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ ),

$$\int_{(S)} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) dV = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè questo integrale sia nullo per qualunque spazio  $S$  è ovviamente che sia nulla la funzione integranda in ogni punto in cui essa sia continua<sup>(99)</sup>. Considerando insieme con tale

<sup>(98)</sup> Le discontinuità delle derivate normali delle componenti esteriori potrebbero ricavarsi senza difficoltà in funzione delle discontinuità delle componenti interiori e di quelle delle forze di massa dalla già considerata condizione d'equilibrio del cilindro della fig. 46 (coi due passaggi al limite già pure indicati). Più semplicemente esse si troveranno come conseguenza delle equazioni di equilibrio (25).

<sup>(99)</sup> Alla stessa condizione si giunge, come s'è accennato alla nota <sup>(92)</sup>, considerando la sola parte già trascurata della (20), cioè

$$\int_{(\Sigma)} \{ t_{nx} - (t_{nx})_0 \} dA + \int_{(S)} X dV = 0.$$

(Risulta infatti da questa, se si pone l'origine degli assi nel punto considerato, che la somma

$$\int_{(\Sigma)} \left\{ \left( \frac{\partial t_{nx}}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial t_{nx}}{\partial y} \right)_0 y + \left( \frac{\partial t_{nx}}{\partial z} \right)_0 z \right\} dA + X_0 V$$

è infinitesima d'ordine superiore al terzo; e poichè questa diventa, poste per le derivate di  $t_{nx}$  le espressioni che si hanno dalla prima delle (23), ed eseguita la trasformazione col lemma di Gauss,

$$\left\{ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right)_0 + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right)_0 + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)_0 + X_0 \right\} V,$$

condizione le due analoghe esprimenti l'equilibrio alla traslazione secondo gli assi  $y$  e  $z$ , si ha il sistema delle *equazioni indefinite dell'equilibrio*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \text{ }^{(100)}. \end{array} \right. \quad (25)$$

basta dividere per  $V$  e passare al limite per ottenere la

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

per il punto suddetto, ossia per il punto generico.)

<sup>(100)</sup> Si è dimostrata la validità delle (25) in ogni punto non appartenente ad una delle eventuali superficie di discontinuità della tensione, o anche solo delle sue derivate prime, nè a una superficie di discontinuità della forza di massa. Nei punti di tali superficie le stesse relazioni assumono significato e validità come limite: ciò significa che effettivamente i primi membri delle (25) risultano continui (e nulli) anche nei punti di tali superficie, compensandosi le discontinuità dei singoli termini di essi attraverso le superficie medesime. In particolare si compenseranno fra loro le sole discontinuità dei primi tre termini dove non sia discontinua anche la forza di massa; mentre attraverso ogni superficie di discontinuità di quest'ultima non potranno restare continue tutte le derivate della tensione.

Le stesse (25), che possono esprimersi mediante la relazione vettoriale

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \rho \mathbf{F} = 0,$$

danno così conferma di quanto s'era osservato in proposito delle discontinuità della tensione, e consentono di trovare l'espressione della discontinuità  $\left[ \frac{\partial t_n}{\partial n} \right]$ , dove sia  $n$  la normale a una superficie di discontinuità della tensione medesima (componenti interiori) o della forza di massa, assumendo uno degli assi coordinati nella direzione  $n$ : si ha infatti, evidentemente, essendo  $p$  e  $q$  due direzioni normali ad  $n$  e fra loro,

$$\left[ \frac{\partial t_n}{\partial n} \right] = - \left\{ \left[ \frac{\partial t_p}{\partial p} \right] + \left[ \frac{\partial t_q}{\partial q} \right] + [\rho \mathbf{F}] \right\},$$

dove poi

$$\left[ \frac{\partial t_p}{\partial p} \right] = \frac{\partial [t_p]}{\partial p}, \quad \left[ \frac{\partial t_q}{\partial q} \right] = \frac{\partial [t_q]}{\partial q}.$$

Si avverta che non può invece considerarsi implicita nelle (25) la continuità delle componenti esteriori della tensione: esse dimostrano invece che si mantiene finito in ogni caso il limite di  $\frac{\partial t_n}{\partial n}$ , lungo ogni normale alla superficie di discontinuità, da una parte e dall'altra della superficie medesima.

Riprendendo le equazioni d'equilibrio alla rotazione (quelle che applicate all'elemento infinitesimo sono servite a dimostrare la reciprocità delle tensioni tangenziali) e procedendo allo stesso modo, si ritroverebbero semplicemente le equazioni medesime <sup>(101)</sup>.

Oltre che alle equazioni indefinite (25) il sistema delle tensioni deve soddisfare alle condizioni al contorno derivanti dall'identificazione della tensione sulla faccia esterna della superficie che delimita il corpo colla stessa forza di superficie su esso agente :

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z - f_x = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z - f_y = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z - f_z = 0, \end{cases} \quad (25')$$

essendo ovviamente  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  i coseni direttori della normale esterna alla superficie del corpo <sup>(102)</sup>. Ma non è da pensare che le equazioni indefinite

---

<sup>(101)</sup> La soluzione generale del sistema omogeneo corrispondente al (25), ossia l'espressione più generale di una tensione equilibrata con forze di massa nulle, è la seguente :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} \right), \\ \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

essendo le  $\varphi$  e le  $\psi$  sei funzioni arbitrarie di  $x, y, z$ . (Si osservi l'analogia formale con le condizioni di Saint-Venant.)

<sup>(102)</sup> Attraverso la linea intersezione della superficie del corpo con una superficie di discontinuità della tensione saranno discontinue le componenti  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$  (o almeno parte di esse) anche come funzioni dei soli punti della superficie. Dalle (25'), valevoli come limite anche nei punti di discontinuità dei singoli termini, risulta che tali discontinuità debbono compensarsi nelle espressioni medesime con quelle eventuali della forza di superficie. Le linee di discontinuità di quest'ultima, che non siano spigoli della superficie (dove cioè non siano discontinui i coseni  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ), dovranno perciò appartenere alle suddette superficie di discontinuità della tensione.

(25) siano sufficienti insieme colle condizioni al contorno (25') a render determinata la tensione in funzione delle forze di massa e di superficie: basterebbe solo osservare che non si è ancora tenuto conto di nessuna proprietà del materiale costituente il corpo considerato.

Le (25) e (25') (rispettivamente in ogni punto del corpo e della superficie di esso) sono invece necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema di tensioni con assegnate forze di massa e di superficie; intendendosi precisamente l'equilibrio di ogni porzione del corpo sotto l'azione delle assegnate forze su essa agenti e delle tensioni alla superficie di separazione di essa dal resto del corpo medesimo.

**23.** Le considerazioni seguenti, di carattere puramente formale ma di grande interesse per le applicazioni (particolarmente quelle del paragrafo 24), riguardano la rappresentazione geometrica del modo di variare della tensione con la giacitura dell'elemento in un dato punto.

In proposito della forma quadratica

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx$$

associata al tensore simmetrico  $\mathcal{T}$  si possono ripetere le stesse considerazioni fatte al paragrafo 8 a riguardo della forma associata al tensore di deformazione  $\mathcal{D}'$ , giungendo ad una rappresentazione della variazione della tensione normale agente secondo la direzione generica, in tutto uguale a quella dell'analoga variazione della dilatazione. Gli assi delle due quadriche coniugate che danno tale rappresentazione sono gli *assi principali della tensione*, normali agli elementi su cui non agisce tensione tangenziale; e le rispettive tensioni normali, cioè le tre *tensioni principali*, sono le tre radici sempre reali dell'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

nell'incognita  $\sigma$ . Due di esse sono in ogni caso la massima e la minima fra le tensioni normali  $\sigma_n$  agenti su ogni elemento (considerate s'intende in valore e segno). Quando le tre tensioni principali hanno ugual segno, dello stesso segno sono anche tutte le  $\sigma_n$ ; nel caso contrario il cono asintotico delle suddette quadriche coniugate (che nel primo caso è immaginario) è costituito dalle normali agli elementi su cui agiscono solo tensioni tangenziali, e separa le due regioni delle normali agli elementi soggetti rispettivamente a trazione e a compressione<sup>(103)</sup>.

<sup>(103)</sup> Si avverta che nell'osservata analogia tra deformazione e tensione corrisponde ad ogni scorrimento la metà dell'omologa tensione tangenziale.

Le tensioni principali saranno indicate con  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (e con 1, 2, 3 i rispettivi assi), intendendosi sempre che sia  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Una rappresentazione geometrica completa della tensione sull'elemento generico può ottenersi come segue.

Assunti gli assi di riferimento secondo le direzioni principali della tensione nel punto considerato, le espressioni (23) divengono semplicemente

$$t_1 = \sigma_1 \alpha_1, \quad t_2 = \sigma_2 \alpha_2, \quad t_3 = \sigma_3 \alpha_3 \quad (104).$$

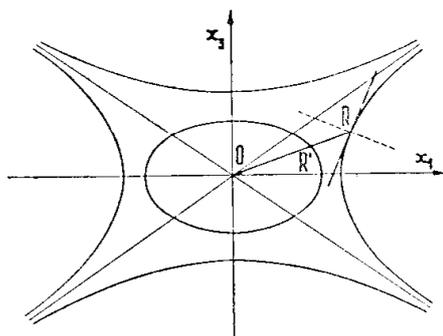


Fig. 53

Si consideri allora la superficie d'equazione

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1} + \frac{x_2^2}{\sigma_2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3} = \pm k^2, \quad (26)$$

con  $k$  costante arbitraria, costituita di due quadriche coniugate, che si diranno *quadriche direttrici*. È noto che la normale a tale superficie nel punto generico  $R$  (fig. 53) <sup>(105)</sup> ha i coseni direttori

$$\alpha_1 = \frac{x_1/\sigma_1}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}}, \quad \alpha_2 = \frac{x_2/\sigma_2}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}},$$

$$\alpha_3 = \frac{x_3/\sigma_3}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}}.$$

Perciò le relazioni precedenti divengono

$$t_1 = \frac{x_1}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}}, \quad t_2 = \frac{x_2}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}},$$

$$t_3 = \frac{x_3}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}}:$$

<sup>(104)</sup> Risulta quindi ovviamente che la massima delle intensità  $t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$  è quella di una delle tensioni principali.

<sup>(105)</sup> Per semplicità di rappresentazione si è preso il punto  $R$  sul piano  $x_1 x_3$ .

la tensione sull'elemento tangente in  $R$  alla superficie è dunque diretta come il raggio vettore  $OR$ , ed ha intensità

$$t = \frac{\overline{OR}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2}},$$

o anche ovviamente

$$t = \frac{\overline{OR'}}{\sqrt{\left(\frac{x'_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{\sigma_3}\right)^2}},$$

essendo  $R'$  un altro punto qualunque di  $OR$ , di coordinate  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Se allora si sceglie  $R'$  in modo che il denominatore di quest'ultima espressione abbia un determinato valore  $K$  (rapporto di una lunghezza a una tensione), si ottiene nel segmento  $OR'$  rappresentata la tensione  $t$  nella scala  $K^{-1}$ . Il senso della tensione su ciascuna delle due facce dell'elemento è determinato infine dal segno della  $\sigma$ , immediatamente riconoscibile dalla quadrica cui appartiene il punto  $R$ , essendo lo stesso segno delle  $\sigma$  principali rappresentate dagli assi reali della quadrica stessa. Si osservi che il cono asintotico delle quadriche direttrici è normale al cono asintotico delle quadriche considerate precedentemente, come risulta osservando che la direzione della tensione agente su un elemento del primo cono appartiene alla giacitura dell'elemento medesimo.

L'ellissoide d'equazione

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = K^2, \quad (27)$$

sul quale si trova per ipotesi il punto  $R'$ , dicesi *ellissoide di Lamé*. Insieme con le quadriche direttrici esso dà nel modo sopra indicato la rappresentazione completa della tensione su ogni elemento superficiale per il punto considerato.

Ad ogni piano condotto per l'origine degli assi parallelamente a un dato elemento superficiale corrisponde la retta parallela alla tensione sull'elemento medesimo (per il punto considerato) nella polarità della stella determinata dalle quadriche direttrici: agli elementi di un fascio corrispondono rette di un piano, che è quello su cui agisce la tensione secondo la retta sostegno del fascio, e le tracce dei piani di quest'ultimo sul piano medesimo sono in involuzione con le rette delle rispettive tensioni.

Se il sostegno del fascio è uno degli assi principali, le rette delle tensioni appartengono al piano normale: oltre che con le tracce dei rispettivi elementi esse risultano in involuzione anche colle normali agli elementi medesimi, appartenenti questa volta allo stesso piano e corrispondenti alle tracce nell'involuzione degli angoli retti.

**24.** Una rappresentazione non altrettanto completa ma molto più comoda, perchè costituita esclusivamente da cerchi tracciati su un medesimo piano, è quella detta appunto dei *cerchi di Mohr*. Essa dà per ogni elemento passante per il dato punto la tensione normale  $\sigma$  e il modulo  $\tau$  della tensione tangenziale (vettore nel piano dell'elemento): che è quanto basta in generale per le applicazioni, non avendo interesse la conoscenza della direzione e del senso della tensione tangenziale.

Dalla

$$\sigma = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2$$

(che si ottiene ovviamente dalla definizione  $\sigma = \mathcal{T}n \times n$  riferendo  $\mathcal{T}$  agli assi principali) e dalla

$$\tau^2 + \sigma^2 = t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2$$

si ottiene

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3^2 \alpha_3^2 - \sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2) \alpha_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Quindi (ricordando che  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ ) si trae

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \alpha_3^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2,$$

o infine

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \alpha_3^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \quad (28)$$

Considerate  $\sigma$  e  $\tau$  come variabili, per  $\alpha_3 = \text{cost.}$  questa è l'equazione di un cerchio, il cui centro si trova sull'asse delle  $\sigma$  nel punto di ascissa  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  indipendentemente dal valore di  $\alpha_3$ , mentre il raggio varia ovviamente col valore medesimo. Si tratta dunque di cerchi concentrici (anzi di semicerchi, essendo definita la  $\tau$  solo in valore assoluto), ciascuno dei quali rappresenta una relazione fra  $\sigma$  e  $\tau$  per il rispettivo valore di  $\alpha_3$ , cioè per gli elementi appartenenti a un cono di rivoluzione intorno all'asse 3.

Per  $\alpha_3 = 0$  il cono delle normali degenera nel piano degli assi 1, 2, e il cono involuppo degli elementi (normale al precedente) nel fascio avente per sostegno l'asse 3. Le rette delle rispettive tensioni sono sul piano 1, 2 in involuzione colle normali, come già sopra s'è osservato. Essendo il raggio  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ , il cerchio passa per i punti dell'asse  $\sigma$  di ascisse  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Se allora (fig. 54) si manda dal secondo di questi punti una retta formante con l'asse  $\sigma$  gli angoli di coseni  $\alpha_1 = \pm \sqrt{\alpha_1^2}$  <sup>(106)</sup> si vede subito che la seconda intersezione di essa col cerchio è un punto le cui coordinate rappresentano rispettivamente la  $\sigma$  e la  $\tau$  dei due elementi del fascio considerato le cui normali hanno rispetto agli assi principali i coseni direttori

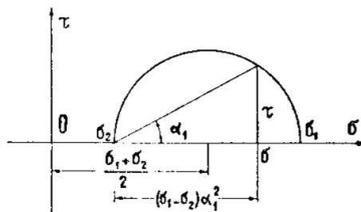


Fig. 54

$$\pm \sqrt{\alpha_1^2}, \quad \pm \sqrt{1 - \alpha_1^2}, \quad 0 \text{ (107)}.$$

Si ha infatti per tali elementi

$$\sigma = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 (1 - \alpha_1^2) = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \alpha_1^2,$$

ed è chiaro che tale è l'espressione dell'ascissa del suddetto punto del cerchio; l'ordinata del quale deve rappresentare allora, per l'osservata proprietà del cerchio medesimo, la tensione tangenziale  $\tau$  degli stessi elementi. Si osservi che la massima tensione tangenziale (in valore assoluto) si ha sugli elementi le cui normali (o le tracce sul piano 1, 2) sono inclinate di  $\frac{\pi}{4}$  sulle direzioni principali.

In modo del tutto analogo si ottengono altri due cerchi aventi per diametro il segmento  $\sigma_2 \sigma_3$  e il segmento  $\sigma_3 \sigma_1$ , che rappresentano analogamente la tensione sugli elementi appartenenti rispettivamente al fascio che ha per sostegno l'asse 1 e a quello che ha per sostegno l'asse 2: questi e il precedente sono i *tre cerchi di Mohr fondamentali*, rappresentanti le tensioni che appartengono ai piani principali. Per tracciare il cerchio corrispondente a un valore  $\alpha_3 = \pm \sqrt{\alpha_3^2} (\neq 0)$ , invece di ricorrere all'espressione del raggio data dalla (28), si può considerare tra le normali appartenenti al cono definito da tale valore costante di  $\alpha_3$  quella appartenente

<sup>(106)</sup> Nelle figure si sono indicati per semplicità gli angoli coi valori dei rispettivi coseni.

<sup>(107)</sup> È chiaro che si ha un solo elemento di superficie, colle sue due facce, dai due radicali presi con uno stesso segno, e così un solo elemento dai due radicali presi con segno diverso. (Si ricordi che la tensione normale è riferita per definizione, in valore e segno, all'elemento e non alle singole facce; e così pure il modulo della tensione tangenziale.)

anche al piano 3, 1 ( $\alpha_2 = 0$ ); il punto rappresentativo della quale (cioè della rispettiva tensione) si ottiene intersecando il cerchio di diametro  $\sigma_3\sigma_1$  colla retta per il punto  $\sigma_1$  facente un angolo di coseno  $\alpha_3$  con l'asse  $\sigma$ : il cerchio resta così determinato essendo concentrico a quello di diametro  $\sigma_1\sigma_2$ , corrispondente al valore  $\alpha_3 = 0$  (fig. 55).

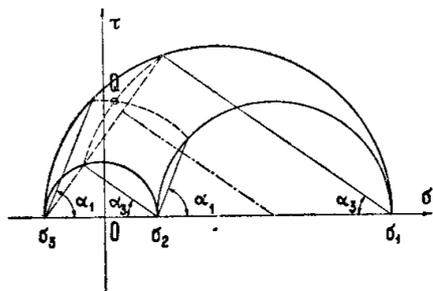


Fig. 55

Considerata invece la normale appartenente allo stesso cono e al piano 2, 3 ( $\alpha_1 = 0$ ), si può trovare un altro punto dello stesso cerchio intersecando il cerchio di diametro  $\sigma_2\sigma_3$  con la retta ugualmente inclinata passante per  $\sigma_2$  <sup>(108)</sup>. Si osservi che per qualunque valore di  $\alpha_3$  il cerchio risulta esterno a quello di diametro  $\sigma_1\sigma_2$ , come dimostra chiaramente l'indicata costruzione. (Si confronti anche l'espressione del raggio data dalla (28).)

Volendo infine il punto rappresentativo di un elemento qualunque, la cui normale abbia i coseni direttori

$$\alpha_3 = \pm \sqrt{\alpha_3^2}, \quad \alpha_1 = \pm \sqrt{\alpha_1^2}, \quad \alpha_2 = \pm \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2}, \quad (109)$$

basterà ovviamente determinare l'intersezione  $Q$  del cerchio sopra trovato, corrispondente al valore assegnato di  $\alpha_3$ , col cerchio corrispondente al valore di  $\alpha_1$ : quest'ultimo sarà concentrico al cerchio di diametro  $\sigma_2\sigma_3$  e passerà per l'intersezione del cerchio di diametro  $\sigma_1\sigma_2$  colla retta per  $\sigma_2$  inclinata dell'angolo corrispondente ad  $\alpha_1$  (e per l'intersezione del cerchio di diametro  $\sigma_3\sigma_1$  colla retta ugualmente inclinata per  $\sigma_3$ ). Tale punto risulta in ogni caso esterno ai cerchi di diametro  $\sigma_1\sigma_2$  e  $\sigma_2\sigma_3$  ed interno a quello di diametro  $\sigma_3\sigma_1$ , tali essendo i cerchi ad essi concentrici che s'intersecano nel punto medesimo <sup>(110)</sup>: questo appartiene cioè alla superficie tratteggiata della fig. 56, il contorno della quale è il luogo dei punti corrispondenti agli elementi paralleli ad uno degli assi principali.

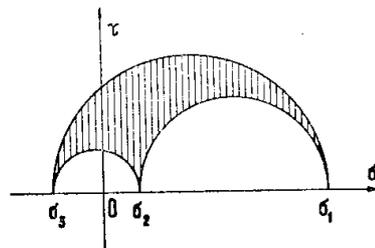


Fig. 56

<sup>(108)</sup> Che i due punti così determinati appartengano effettivamente ad un cerchio concentrico al cerchio  $\sigma_1\sigma_2$  si comprova facilmente osservando che la perpendicolare condotta dal centro di quest'ultimo al segmento che li congiunge è l'asse del segmento medesimo.

<sup>(109)</sup> Si tratta qui di otto facce, ossia di quattro elementi, che si ottengono con le diverse combinazioni dei segni.

<sup>(110)</sup> I tre cerchi corrispondenti ai valori assegnati di  $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$  (quest'ultimo non esplicitamente considerato sopra). Come s'è visto che il primo è esterno al cerchio  $\sigma_1\sigma_2$ , così può vedersi che il secondo è esterno al cerchio  $\sigma_2\sigma_3$ , e il terzo interno al cerchio  $\sigma_3\sigma_1$ .

**25.** Si considerino per esercizio i seguenti casi particolari.

a)  $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$  <sup>(141)</sup>: lo stato di tensione si dice in tal caso *monoassiale*. L'ellissoide di Lamé si riduce a un segmento, perciò le tensioni agenti sugli elementi superficiali per il punto considerato hanno tutte (quando non siano nulle) le direzioni dell'asse *I*. Dei tre cerchi di Mohr fondamentali uno si riduce ad un punto, cioè all'origine degli assi, e gli altri due si sovrappongono (fig. 57). Pertanto tutti gli elementi ugualmente inclinati sull'asse *I* sono ugualmente sollecitati, risultando uguali per essi la  $\sigma$  e la  $\tau$ ; in particolare gli elementi passanti per l'asse medesimo ( $\alpha_I = 0$ )

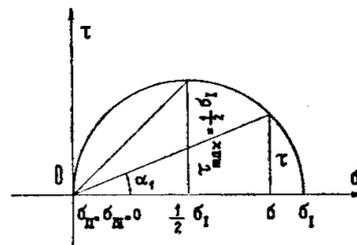


Fig. 57.

hanno tensione nulla. La massima tensione tangenziale, agente sugli elementi inclinati sull'asse *I* di  $\frac{\pi}{4}$ , vale  $\frac{1}{2} |\sigma_I|$  ed è accompagnata da una tensione normale  $\frac{1}{2} \sigma_I$  (cioè di ugual intensità).

Si avverta che la fig. 57 col solo spostamento della origine sull'asse  $\sigma$  viene a rappresentare uno stato di tensione più generale, in cui  $\sigma_{II} = \sigma_{III}$ , corrispondente al caso di una radice doppia dell'equazione secolare. Anche in tal caso dunque la tensione dipende, per intensità e inclinazione rispetto all'elemento, soltanto dall'inclinazione dell'elemento medesimo rispetto all'asse principale *I* corrispondente alla radice semplice. La massima tensione tangenziale risulta  $\frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|$ , e agisce sugli elementi inclinati sull'asse *I* di  $\frac{\pi}{4}$  accompagnata dalla tensione normale  $\frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{II})$ .

b) Quando una sola delle tensioni principali sia nulla, lo stato di tensione si dirà *biassiale*. L'ellissoide di Lamé diventa questa volta un'ellisse, perciò le tensioni agenti sugli elementi superficiali per il punto considerato appartengono tutte alla giacitura del piano delle due tensioni principali diverse da zero.

Posto  $\sigma_{III} = 0$  ed assunti un asse *z* coincidente coll'asse *III* e due assi *x, y* ad arbitrio nel piano ad esso normale (cioè il piano degli altri due assi principali), risulta evidentemente  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Quando siano note le altre tre componenti della tensione  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , si può porre il problema della ricerca delle due tensioni principali  $\sigma_I, \sigma_{II}$  e dei rispettivi assi. Considerati a tale scopo fra gli elementi del fascio di sostegno *z*

<sup>(141)</sup> Si sono usati per indici i numeri romani, per significare che essi non definiscono come precedentemente l'ordine di grandezza (potendo essere  $\sigma_I < 0$ ).

quelli normali rispettivamente ad  $x$  e ad  $y$ , sul primo dei quali agiscono le tensioni  $\sigma_x, \tau_{xy}$ , nel secondo  $\sigma_y, \tau_{xy}$ , si traccino sul diagramma di

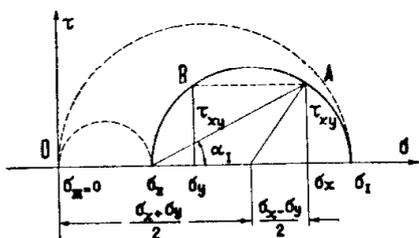


Fig. 58

diagramma di Mohr (fig. 58) i rispettivi punti  $A, B$ , per ciascuno dei quali dovrà passare il cerchio di diametro  $\sigma_I \sigma_{II}$ . Tale cerchio resta così ovviamente determinato (avendo il centro sull'asse  $\sigma$ ): l'ascissa del centro risulta evidentemente  $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ , e il raggio risulta

$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ . Le espressioni delle ten-

sioni principali sono così

$$\left. \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (29)$$

Gli assi  $I, II$  (inteso che sia, come risulta dalle precedenti espressioni,  $\sigma_I \geq \sigma_{II}$ ) fanno coll'asse  $x$  rispettivamente gli angoli delle rette  $\sigma_{II} A, \sigma_I A$  coll'asse  $\sigma$ . Per eliminare l'ambiguità che resta, potendo l'asse  $I$  assumere la posizione  $I_1$  o la posizione  $I_2$  della fig. 59, si osservi che si ha

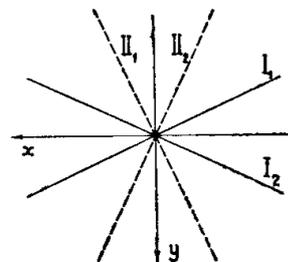


Fig. 59

$$\tau_{xy} = t_{xI} \alpha_{Iy} + t_{xII} \alpha_{IIy}, \quad (112)$$

ossia, essendo

$$t_{xI} = \sigma_I \alpha_{Ix}, \quad t_{xII} = \sigma_{II} \alpha_{IIx},$$

$$\tau_{xy} = \sigma_I \alpha_{Ix} \alpha_{Iy} + \sigma_{II} \alpha_{IIx} \alpha_{IIy};$$

o infine, per essere  $\alpha_{Iy} = \pm \alpha_{IIx}$ ,  $\alpha_{IIy} = \mp \alpha_{Ix}$  (perchè  $x$  ed  $y$  sono ortogonali come  $I$  e  $II$ ),

$$\tau_{xy} = (\sigma_I - \sigma_{II}) \alpha_{Ix} \alpha_{Iy}.$$

Risulta quindi che il prodotto  $\alpha_{Ix} \alpha_{Iy}$  ha il segno di  $\tau_{xy}$ ; perciò se  $\tau_{xy} > 0$  i due angoli che l'asse  $I$  fa con  $x$  e con  $y$  sono entrambi acuti o entrambi ottusi, e l'asse  $I$  assume la posizione  $I_1$ ; se  $\tau_{xy} < 0$  l'asse  $I$  assume la posizione  $I_2$ .

(112) Si proiettano sull'asse  $y$  le componenti secondo gli assi  $I$  e  $II$  della tensione agente sull'elemento normale ad  $x$ .

Si deve rilevare che la (29) e le successive osservazioni danno la soluzione dello stesso problema anche quando sia  $\sigma_{III} = \sigma_z \neq 0$ , vale a dire nel caso generale (stato di tensione triassiale): nella fig. 57 basterà allora spostare l'origine. Ponendo il problema per lo stato biassiale si è voluto far riferimento al caso che occorre più di frequente nelle applicazioni.

c) Se in un punto le tre tensioni principali risultano uguali ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , radice tripla dell'equazione secolare), l'ellissoide di Lamé diviene una sfera, perciò tutte le tensioni hanno uguale intensità. Riducendosi tutt'e tre i cerchi di Mohr ad un punto, non vi sono tensioni tangenziali; cioè la tensione si esercita su ogni elemento normalmente. Si ha dunque uno stato di tensione che può dirsi di *tipo idrostatico*.