Dire che la forma è integrabile (o che è un differenziale esatto) significa che l'integrale curvilineo

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

sia indipendente dal cammino d'integrazione avente gli estremi nel punto fisso di coordinate x_0, y_0 e nel punto generico di coordinate x, y; o anche evidentemente che sia nullo l'integrale medesimo esteso a una linea chiusa qualunque interna al campo Σ. Si consideri dunque tale integrale esteso a una linea chiusa c percorsa in un dato senso, che sarà riguardato come senso positivo della tangente (fig. 30).

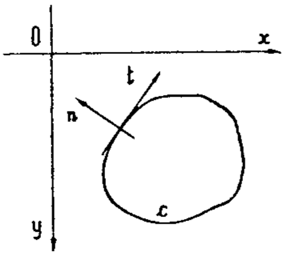

Fig. 30

Avendosi qui $dy = ds \cos \widehat{ty} = \alpha_x\, ds$, $dx = ds \cos \widehat{tx} = -ds \cos \widehat{ny} = -\alpha_y\, ds$ (posta sempre l'orientazione relativa degli assi x, y come quella degli assi n, t, ossia quella di $t, -n$), esso diventa $\int_{(c)} \{-P(x, y)\, \alpha_y + Q(x, y)\, \alpha_x\}\, ds$; e si ottiene quindi applicando il lemma di Gauss la relazione

$$\int_{(c)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{(\Sigma')} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dA, \tag{14}$$

essendo Σ' la porzione del campo Σ racchiusa dalla linea c. Condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di quest'ultimo integrale per qualunque Σ' è evidentemente, per l'ammessa continuità di $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ nel punto generico,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ (55)}.$$

Per la forma differenziale in tre variabili $P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$ le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

come dimostra il *teorema di Stokes*

$$\int_{(c)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(\Sigma)} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \alpha_z + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \alpha_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \alpha_y \right\} dA,$$

(55) Perciò le eventuali linee di discontinuità di $\frac{\partial Q}{\partial x}$ e di $\frac{\partial P}{\partial y}$ debbono coincidere.

essendo c una linea chiusa contorno di una superficie Σ a due facce (diaframma), e α_x, α_y, α_z i coseni direttori della normale a Σ sulla faccia individuata dalla condizione che nei punti di c l'orientazione relativa degli assi n, t, essendo n la normale a c appartenente a Σ e diretta all'esterno, (e la tangente t orientata nel senso di percorrenza), concordi con quella degli assi x, y sulla faccia del loro piano rivolta a z. Tale teorema, generalizzazione della (14), si dimostra applicando il lemma di Gauss alle proiezioni di c sui piani coordinati.

11. Si ponga ora il problema fondamentale accennato all'inizio del paragrafo precedente: trattasi di vedere se esistano e come in tal caso possano determinarsi per un dato corpo le componenti di spostamento, una volta assegnate sei funzioni del punto come componenti di deformazione. Siano dunque ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} sei funzioni assegnate delle coordinate x, y, z, continue e con derivate prime continue in ogni punto dello spazio occupato dal corpo, e con derivate seconde continue nel punto generico; e si consideri il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali del prim'ordine per le funzioni ξ, η, ζ nello spazio medesimo, che si porrà da prima aciclico:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon_x , \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon_y , \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon_z ; \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \gamma_{xy} , \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \gamma_{yz} , \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \gamma_{zx} .\end{gathered} \tag{15}$$

Si può subito osservare che se il problema è possibile la soluzione resta determinata a meno di una soluzione del corrispondente sistema omogeneo, cioè a meno di un arbitrario moto rigido dell'intero corpo considerato ([56]).

Per integrare il sistema (15) si osservi che si avrebbero formalmente i differenziali $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, e pertanto il problema sarebbe ridotto a tre indipendenti integrazioni di forme differenziali lineari, se si conoscessero le derivate $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial z}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$; dalle quali infatti si trarrebbe

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \gamma_{zx} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \gamma_{xy} - \frac{\partial \xi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \gamma_{yz} - \frac{\partial \eta}{\partial z} .$$

([56]) Soluzione del problema omogeneo significa spostamento a deformazione nulla in ogni punto: è chiaro come sia tale ogni spostamento costituente un moto rigido, definito dalla condizione che resti invariata la distanza di ogni coppia di punti, e come inversamente ogni spostamento a deformazione identicamente nulla costituisca un unico moto rigido. (Senza una sconnessione del corpo non sono evidentemente possibili moti rigidi diversi di singoli elementi.)

Ora la $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ (e allo stesso modo ciascuna delle altre due) può ottenersi mediante una prima integrazione di forma lineare, essendo facile ricavare dalle (15) le derivate di essa rispetto ad x, ad y e a z. Si ha infatti

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Quest'ultima può scriversi invertendo l'ordine delle derivazioni nell'ultimo termine ancora incognito; e scrivendo insieme le due che da essa si ottengono per sostituzione circolare, si ha il sistema

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y};
\end{aligned}\right.$$

onde ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right).$$

Si avverta che in questo modo, quando esistano effettivamente le incognite derivate prime, esse saranno per ipotesi sodisfacenti alle condizioni $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z}$, e a quelle che da esse si deducono per sostituzione circolare [57]; dunque a tutt'e tre le condizioni $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial z}$ necessarie e suf-

---

[57] Le due che si deducono dalla $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z}$ sono già state effettivamente considerate $\left(\text{perchè necessarie per ricavare la } \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$; quelle che si deducono dalle due prime vanno poste nell'esprimere le derivate rispetto ad y e rispetto a z di $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ e le derivate rispetto a z e rispetto ad x di $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

ficienti per l'integrabilità della forma differenziale $d\xi$; e così a tutte quelle riguardanti $d\eta$ e $d\zeta$. Per l'integrabilità del sistema (15) restano dunque necessarie e sufficienti le condizioni riguardanti le forme differenziali $d\,\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $d\,\frac{\partial \eta}{\partial z}$, $d\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, ossia le $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}=$ $=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}$, e quelle che da esse si deducono per sostituzione circolare. Con le precedenti espressioni delle derivate seconde la prima di queste diventa

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y},$$

la terza

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right),$$

e la seconda (con ovvî passaggi)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right),$$

che si ottiene anche dalla precedente per sostituzione circolare. Risultano così in tutto le sei condizioni seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial_2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

note sotto il nome di *condizioni di congruenza,* o *condizioni di Saint-Venant.*

È chiaro che per l'analogo problema posto nel piano, quando cioè si considerino solo punti appartenenti tutti ad un piano, i quali si spostino in esso, è condizione necessaria e sufficiente la sola prima delle (16)([58]).

12. Posto che l'assegnata deformazione sia *congruente,* cioè sodisfacente alle (16), si può pensare di cominciare l'integrazione determinando direttamente, anzichè le suddette derivate $\frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s}$, rotazione dell'elemento infinitesimo. Dalle (5′) e (5) si ha infatti $d\omega_z = \frac{1}{2} d\gamma_{xy} - d \frac{\partial \xi}{\partial y}$, forma differenziale nota, che integrata dà

$$\omega_z(x, y, z) = \omega_z(x_0, y_0, z_0) + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} d\omega_z = \omega_{z_0} + \bar{\omega}_z(x, y, z);$$

e così procedendo per le altre componenti di $\boldsymbol{\omega}$, si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}(P) = \bar{\boldsymbol{\omega}}(P) + \boldsymbol{\omega}_0,$$

essendo $\boldsymbol{\omega}_0$ un vettore arbitrario, rotazione dell'elemento nel punto P_0 di coordinate x_0, y_0, z_0.

Può procedersi allora alla seconda integrazione, dalla quale si ottiene

$$\boldsymbol{s}(P) = \boldsymbol{s}(P_0) + \int_{P_0}^{P} d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + \int_{P_0}^{P} \mathcal{D}' \, dP + \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge dP + \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (P - P_0);$$

e infine

$$\boldsymbol{s}(P) = \bar{\boldsymbol{s}}(P) + \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (P - P_0) + \boldsymbol{s}_0,$$

dove $\boldsymbol{s}_0$, spostamento del punto P_0, è un altro vettore arbitrario. Poichè la somma $\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (P - P_0)$ rappresenta ovviamente un moto rigido arbitrario dell'intero corpo (traslazione e rotazione intorno a P_0), resta così confermato quanto s'era previsto all'inizio del paragrafo precedente.

([58]) Come riscontro della necessità di ciascuna delle (16) si avverta: 1° — potrebbe non esser sodisfatta la prima (e così ciascun'altra del primo gruppo), pur essendo sodisfatte tutte le altre, nel caso di un sistema di deformazione piano definito dalle condizioni $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$ (si è infatti già osservato che per il problema geometrico posto nel piano si richiede appunto tale condizione di possibilità); 2° — potrebbe non esser sodisfatta la quarta (e così ciascun'altra del secondo gruppo), pur essendo sodisfatte tutte le altre, bastando porre lineari tutte le componenti di deformazione e aggiungere poi alla sola γ_{yz} un termine in x^2.

Le funzioni $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, componenti di $\overline{s}$, risultano ovviamente continue in ogni punto del corpo insieme con le loro derivate prime (tali essendo per ipotesi le componenti della deformazione, e tali risultando le componenti di ω) [59].

Con le osservazioni seguenti si vuol ora chiarire il significato geometrico delle condizioni di congruenza. Sia un corpo semplicemente connesso, per i punti del quale si considerino come componenti di deformazione sei funzioni generiche (non costanti) sodisfacenti alle condizioni di continuità e derivabilità poste all'inizio del paragrafo 11, ma che in generale non saranno sodisfacenti alle (16). Diviso tale corpo in un certo numero di parti per mezzo di un determinato numero di superficie (fig. 31), si assegni da prima ad ogni componente di deformazione un valore costante all'interno di ciascuna di esse, arbitrariamente scelto fra quelli considerati per la stessa componente nella parte medesima. È chiaro che si otterrà così per ogni parte uno spostamento continuo (la deformazione costante sodisfa evidentemente alle (16)); ma nell'intero corpo lo spostamento risulterà necessariamente discontinuo attraverso le superficie di separazione (benchè resti libera ogni parte di muoversi come corpo rigido): trovandosi infatti la faccia di ciascuna di tali superficie appartenente all'una delle parti deformata in modo diverso dalla faccia appartenente alla parte contigua, non sarà possibile con soli moti rigidi riportare a coincidere tutti i punti delle facce medesime. Per tale necessaria discontinuità dello spostamento, cioè per non essere questo effettuabile senza la divisione in parti del corpo, la considerata deformazione discontinua può dirsi a ragione *non congruente.*

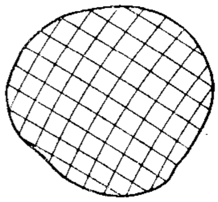

Fig. 31

Se ora si pone di suddividere le parti suddette, e di passare poi al limite facendo tendere a zero la massima dimensione di ciascuna di esse (per esempio assumendo per superficie di divisione tre sistemi di piani ortogonali ad ugual distanza, successivamente dimezzata), la deformazione tenderà evidentemente nel punto generico (cioè in un punto scelto a caso) a quella assegnata per il punto medesimo; ed è anche evidente che sarà

(59) Non dovrebb'essere necessario avvertire che sarebbe priva di senso la ricerca di uno spostamanto s distinto dagli altri per « non contenere moto rigido » : tutti gli spostamenti rappresentati dalla soluzione generale sono da considerare, per il corpo libero, alla stessa stregua.

Si vuol piuttosto osservare come la stessa deformazione corrispondente a un certo spostamento continuo corrisponda anche ad uno spostamento discontinuo attraverso una qual si voglia superficie che divida il corpo in due parti, ottenuto aggiungendo al primo un moto rigido diverso per ciascuna delle parti medesime.

sempre possibile far in modo che lo spostamento tenda a un limite che sia funzione continua del punto: tendendo a zero la differenza tra le deformazioni di due parti contigue(60), andrà infatti sparendo ogni discontinuità non eliminabile mediante i moti rigidi delle singole parti. Ma non può affermarsi che la deformazione derivante da tale spostamento limite sia quella stessa assegnata; anzi così non potrà essere in generale, poichè s'è visto che solo sotto particolari condizioni quest'ultima può derivare da uno spostamento. Ciò non farà meraviglia se si pensi che infinitamente vicini ad ogni punto ve ne sono infiniti altri che al limite vengono a trovarsi su una superficie di divisione, per i quali dunque la deformazione non resta definita.

Si può anche concepire la discontinuità dello spostamento per ogni determinata divisione come un sistema di «deformazioni concentrate» sulle superficie di separazione (pensate come limiti di strati con deformazione indefinitamente crescente al tendere a zero dello spessore); con l'aggiunta delle quali può dirsi che la deformazione discontinua considerata diviene congruente. Col tendere a zero della distanza fra le superficie, quando come sopra è detto si assumano i moti rigidi delle singole parti in modo che tenda pure a zero ogni discontinuità dello spostamento, le deformazioni concentrate andranno ripartendosi, sempre restando insieme con l'effettiva deformazione del punto generico, tendente a quella assegnata, a costituire la deformazione totale derivante dallo spostamento medesimo. Solo in casi particolari sarà possibile che la deformazione limite delle deformazioni concentrate risulti nulla(61): avendosi allora uno spostamento derivante dalla deformazione assegnata, la particolarità di quest'ultima dovrà consistere nel sodisfare alle condizioni di Saint-Venant.

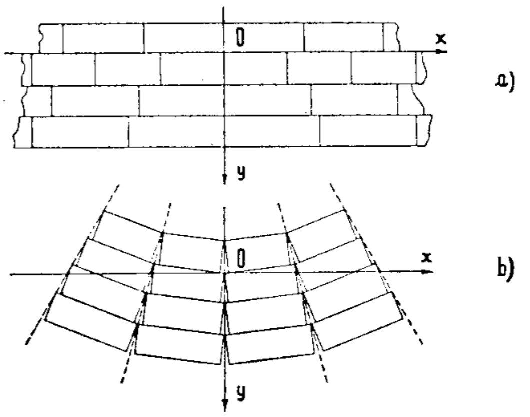

Fig. 32

Un esempio semplicissimo si ha ponendo $\varepsilon_x = f(y)$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ (particolare problema piano). Diviso il campo piano in rettangoli, potrà considerarsi lo spostamento discontinuo della fig. 32 (*a*), che al limite tende ovviamente a uno spostamento continuo, ma corrispondente a uno scorrimento $\gamma_{xy} \neq 0$, proveniente dagli «scorrimenti concentrati» costituiti dalle discontinuità. Ma nel caso che f sia funzione lineare, sodisfacendo così la deformazione assegnata alle condizioni di

(60) Nel senso che tenda a zero il rapporto dei moduli della discontinuità dello spostamento e dello spostamento stesso, considerato sempre infinitesimo.

(61) Com'è nulla per esempio la forza ripartita che si ottiene al limite da forze concentrate parallele a distanze uguali, d'uguale intensità e di senso alterno.

Saint-Venant (cioè alla prima delle (16), che è la sola richiesta nel caso del problema piano), sarà possibile anche lo spostamento della fig. 32 (*b*), tendente anch'esso in tal caso a uno spostamento continuo, questa volta con $\gamma_{zy} = 0$. La variazione lineare di ε_x è necessaria affinchè risultino rette le linee tratteggiate, deformate delle parallele ad y, com'è richiesto per il parallelismo delle linee normali.

13. Si riprenda ora il problema dell'integrazione della forma differenziale $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ in un campo aciclico (sempre ragionando sul caso delle due variabili per semplicità formale); e si supponga che essa sodisfaccia alle supposte condizioni di continuità e derivabilità in tutto il campo fuorchè in un punto isolato, che sia punto d'infinito di una almeno delle funzioni P, Q, sempre restando verificata la condizione $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Poichè il lemma di Gauss non è applicabile a un campo contenente tale punto singolare, non potrà più affermarsi che sia nullo l'integrale $\int_{(c)} P\,dx + Q\,dy$ quando la linea chiusa c contenga nel suo interno il punto medesimo: potrà affermarsi invece che il valore di esso sarà costante, cioè lo stesso per ogni linea siffatta senza punti doppi, come dimostra il lemma applicato al campo delimitato da due di tali linee [62]. Dunque l'integrale $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$ non sarà più in generale funzione di x ed y a un sol valore, ma *funzione polidroma*, assumente cioè in ogni punto infiniti valori, le differenze dei quali saranno date dal suddetto valore dell'integrale lungo la linea c, il cui segno sia definito fissando sulla linea medesima un determinato senso di percorrenza, moltiplicato per un intero arbitrario dell'uno o dell'altro segno. L'integrazione lungo ogni dato cammino tra il punto fisso (x_0, y_0) e il punto generico (x, y) è infatti equivalente a quella eseguita da prima lungo un cammino chiuso costituito da quello medesimo e da un cammino fisso tra gli stessi due punti percorso in senso inverso, poi lungo quest'ultimo in senso diretto; e il suddetto

---

[62] Si avrà così ancora la (14), dove il contorno c dovrà intendersi costituito dall'insieme delle due linee, percorsa ciascuna nel senso della tangente orientata rispetto ad n come y rispetto ad x, essendo la normale sempre rivolta all'esterno del campo come nella fig. 29. Risulta quindi l'uguaglianza degli integrali lungo le due linee, percorse entrambe nel senso individuato dalla regola precedente, ma considerando la normale rivolta sempre all'esterno del campo racchiuso dalla rispettiva linea; o si può anche dire percorse entrambe nel medesimo senso, come appare ovvio se si pensa alla riduzione dell'una all'altra linea per deformazione continua.

cammino chiuso sarà in ogni caso scindibile in un insieme di cammini semplici, lungo ciascuno dei quali l'integrale sarà nullo, o uguale alla costante sopra definita col suo segno o col segno opposto.

Le stesse considerazioni possono farsi nel caso di un campo doppiamente connesso senza punti singolari di P o di Q, sostituendo al cammino racchiudente il punto singolare il cammino semplice non riducibile a un punto. La costante sopra definita come valore dell'integrale $\int_{(c)} P\,dx + Q\,dy$ esteso a un tale cammino si dirà *costante di polidromia* della funzione $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$. Quando mediante un taglio si renda il campo aciclico, quest'ultimo integrale diverrà naturalmente una funzione monodroma (cioè ad un sol valore), che in tale campo dovrà dirsi ancora continua benchè assuma in generale valori diversi in due punti affacciati dalle due parti del taglio; ma la stessa funzione monodroma, definita nel campo non tagliato ponendo l'arbitraria condizione che il cammino d'integrazione non possa attraversare la stessa linea arbitrariamente scelta, sarà evidentemente discontinua attraverso la linea medesima, quando la costante di polidromia non sia nulla.

Uguale carattere assume la funzione $\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ in un campo spaziale a connessione doppia, come in un campo aciclico che contenga una linea di punti d'infinito di una almeno delle funzioni P, Q, R attraversante il campo medesimo (il quale diverrà appunto doppiamente connesso quando sia escluso un intorno tubolare di essa, di sezione arbitrariamente piccola). In un campo i volte connesso si avranno $i-1$ costanti di polidromia, valori assunti dall'integrale $\int_{(c)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ per ognuna delle linee chiuse fondamentali del campo. Poichè può evidentemente ripetersi qui l'osservazione sull'equivalenza di ogni cammino tra due punti all'insieme di un cammino chiuso e di un cammino fisso arbitrario, ricordando che ogni linea chiusa può ridursi a un insieme di linee chiuse fondamentali, e avvertendo che fissato sulla linea medesima un certo senso di percorrenza resta fissato tale senso anche su ciascuna di queste ultime, si conclude che le differenze tra i valori della funzione $\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ in un medesimo punto sono tutte le combinazioni lineari delle suddette costanti di polidromia con coefficienti interi arbitrari, dell'uno o dell'altro segno ([63]).

Tale conclusione è applicabile senz'altro, nel problema della determinazione dello spostamento corrispondente a una deformazione assegnata in un campo i volte connesso, alle integrazioni che danno le componenti del vettore $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s}$: si avranno dunque $3(i - 1)$ costanti di polidromia, valori dei rispettivi integrali estesi alle $i - 1$ linee chiuse fondamentali percorse ciascuna in un prefissato senso, che saranno le componenti di $i - 1$ vettori, le cui combinazioni lineari a coefficienti interi arbitrari daranno le differenze tra le diverse determinazioni della rotazione ω in un medesimo punto ([64]). Per quanto riguarda le integrazioni da compiere successivamente per avere le componenti di s, cioè in proposito dell'integrale $\int_{P_0}^{P} \mathcal{D}' \, dP + \omega \wedge dP$ (v. § 12), è da avvertire che essendo ω funzione polidroma nello spazio considerato, l'integrale medesimo esteso ad una linea chiusa (non riducibile a un punto) non ha un valore determinato, ma dipende dal punto in cui viene iniziata e terminata l'integrazione (non dal valore di ω scelto all'inizio nel punto medesimo, perchè per ω_0 costante è $\int_{(c)} \omega_0 \wedge dP = 0$). Bisogna perciò, ricordando che tale

([63]) Che l'integrale sia lo stesso per tutte le linee fondamentali di una stessa specie risulta dal teorema di Stokes applicato a una superficie a due facce delimitata da due di tali linee, cioè una superficie ricoperta da una di esse colle sue successive deformate nel ridursi all'altra per deformazione continua. Scelto ad arbitrio il senso di percorrenza su una delle linee medesime, resta individuata dal criterio esposto alla fine del paragrafo 10 la faccia su cui va considerata la normale alla superficie, e quindi il senso di percorrenza dell'altra linea: è facile vedere che si ottiene, come ovviamente deve essere, il senso contrario a quello che risulta seguendo la prima linea nella suddetta deformazione. (Può dirsi anche qui che si ottiene lo stesso valore integrando la forma differenziale lungo le due linee percorse nello stesso senso, benchè sia chiaro che nello spazio non si può parlare in generale di uno stesso senso o di sensi contrari su due diverse linee, assumendo invece significato tale espressione nel caso di cui trattasi per la sopra esposta considerazione di continuità.) Allo stesso modo si dimostra che l'integrale esteso a un cammino chiuso qualunque è uguale alla somma degli integrali estesi alle linee fondamentali cui può ridursi il cammino medesimo percorse una o più volte nel senso risultante per continuità da tale riduzione.

([64]) Si ricordi che si è posto $\omega(P) = \overline{\omega}(P) + \omega_0$, essendo ω_0 un vettore costante arbitrario (costante d'integrazione). Sia chiaro che risulta polidroma al modo suddetto ogni funzione ω definita da una certa ω_0.

Si pone naturalmente che le tre integrazioni che danno le componenti della rotazione siano sempre eseguite lungo un medesimo cammino.

integrale dev'essere effettivamente eseguito lungo una linea avente inizio e termine in P_0, condurre a passare per il punto P_0 anche le linee fondamentali del campo a cui la linea medesima può ridursi, per esempio annettendo a ciascuna di esse (considerata come linea fissa) due tratti infinitamente vicini fra un suo punto arbitrario e il punto medesimo, com'è indicato schematicamente nella fig. 33, dove s'intende la linea c riducibile alle fondamentali c_1, c_2, c_3; e saranno allora costanti di polidromia gli integrali estesi a tali cammini partendo sempre da P_0 (65). Risulta da ultimo, dette $(\omega)_1, \dots, (\omega)_{i-1}$ le prime costanti di polidromia, ed $(s)_1, \dots, (s)_{i-1}$ le seconde, che la differenza tra due determinazioni della funzione s nel medesimo punto P si esprime nella forma $\sum_{n=1}^{i-1} a_n \{(s)_n + (\omega)_n \wedge (P - P_0)\}$, combinazione lineare a coefficienti interi arbitrari di $i - 1$ moti rigidi (66).

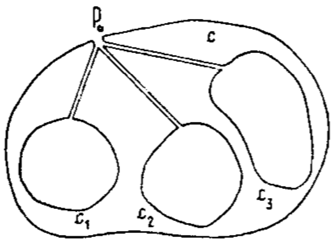

Fig. 33

È ovvio che per rappresentare effettivamente uno spostamento la funzione s deve risultare monodroma; perciò sono condizioni di possibilità dell'effettivo problema di cui trattasi, nel caso del corpo ciclico, anche quelle dell'annullamento delle $6(i-1)$ costanti di polidromia, componenti delle (ω) e delle (s). S'intende che poste nulle le (ω), possono poi porsi nulli invece delle (s) i rispettivi integrali estesi ai cammini fondamentali comunque scelti.

14. Conviene ora considerare il caso che vi siano nello spazio considerato, che sarà supposto da prima aciclico, superficie di discontinuità della deformazione (cioè delle sue componenti), o anche solo delle derivate prime di essa: poichè quando si tratti di superficie aperte esse potranno pensarsi in ogni caso delimitate da curve appartenenti al contorno, ogni

(65) Si sono eseguiti in sostanza dei tagli nel campo superficiale delimitato dalla considerata linea chiusa e dall'insieme delle linee fondamentali a cui essa si riduce, rendendolo semplicemente connesso: il vettore ω diviene così in esso campo funzione monodroma, e l'integrale esteso all'unica linea di contorno, costituita dalla successione della prima linea e delle linee fondamentali colle rispettive appendici, risulta nullo per il teorema di Stokes.

Le integrazioni che danno le costanti di polidromia potranno naturalmente iniziarsi anche in un punto qualunque delle rispettive linee riguardate come cammini chiusi, purchè si considerino i valori di ω nel campo tagliato, tenendo conto quindi della discontinuità in P_0.

(66) La parte $\Sigma a_n \omega_n \wedge (P - P_0)$ è ovviamente dovuta all'integrazione lungo il cammino fisso da P_0 a P, che segue l'integrazione lungo il cammino chiuso. Si ricordi che le componenti delle (s) dipendono dal punto P_0 intorno al quale secondo tale espressione è considerata la rotazione del corpo, avvertendo come ciò sia conforme al loro significato di parametri di moto rigido.

superficie di discontinuità dividerà tale spazio in due parti. S'intende che per l'integrabilità della deformazione dovranno sempre esser sodisfatte le condizioni (16) in ogni punto non appartenente alle suddette superficie, essendo applicabili le conclusioni dei precedenti paragrafi per ciascuno degli spazi parziali da queste delimitati; le quali condizioni conserveranno perciò significato (come nei punti delle altre eventuali superficie di discontinuità delle derivate seconde che in esse condizioni compaiono) anche nei punti delle superficie medesime. Ma lo spostamento, di cui dalle (16) è assicurata l'esistenza e la continuità all'interno di ciascuno dei due suddetti spazi parziali, non potrà in generale restar continuo nello spazio totale: risulteranno cioè attraverso tali superficie, in generale, discontinuità dello spostamento non eliminabili mediante moti rigidi delle singole parti. Le integrazioni indicate al paragrafo 12, dalle quali si ottengono le componenti di ω e poi quelle di s, non daranno più infatti risultato nullo quando siano estese a un cammino chiuso come quello delle fig. 34, attraversante in M_0 e in M una delle considerate superficie; perciò poste continue tali componenti in M_0, esse non risulteranno continue in M.

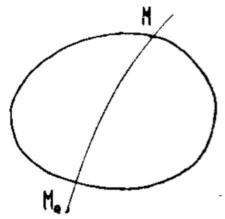

Fig. 34

È chiaro per altro che il risultato di ciascuna di tali integrazioni è lo stesso che si ottiene integrando la discontinuità della rispettiva funzione lungo una linea qualunque della superficie medesima da M_0 ad M. La discontinuità di ognuna delle componenti di ω resta così determinata nel punto generico M quando sia arbitrariamente assegnata nel punto fisso M_0, risultando

$$[\omega] = [\omega]_{M_0} + \int_{M_0}^{M} [d\omega] = [\omega]_{M_0} + [\bar{\omega}] \text{ ([67])}.$$

Analogamente per la discontinuità di s risulta

$$[s]=[s]_{M_0}+\int_{M_0}^{M}[\omega]\wedge dM+[\mathcal{D}']dM=[s]_{M_0}+[\omega]_{M_0}\wedge(M-M_0)+\int_{M_0}^{M}[\bar{\omega}]\wedge dM+[\mathcal{D}']\,dM\,;$$

dunque tale discontinuità è determinata a meno di un moto rigido arbitrario ([68]). Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia possibile lo spo-

---

([67]) Il simbolo di una certa funzione (scalare o vettoriale) racchiuso in parentesi quadra indicherà la discontinuità della funzione medesima attraverso una certa superficie.

([68]) Dovrebb'essere superfluo avvertire che non esiste nessun criterio generale di distinzione fra le discontinuità dello spostamento, diverse fra loro per un moto rigido, che si hanno da una stessa discontinuità della deformazione o delle sue derivate. Potranno essere assegnate di volta in volta ad arbitrio condizioni che valgano a render determinata tale discontinuità, che non dovranno essere necessariamente condizioni di stamento continuo è che l'integrale

$$\int_{M_0}^{M} [\omega] \wedge dM + [\mathcal{D}'] \, dM$$

rappresenti anch'esso una rotazione; cioè $\left(\text{scritto } \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s} \text{ in luogo di } \omega\right)$ che sia

$$\int_{M_0}^{M} \frac{1}{2} [\operatorname{rot} \boldsymbol{s}] \wedge dM + [\mathcal{D}'] \, dM = \frac{1}{2} \boldsymbol{u} \wedge (M - M_0), \tag{17}$$

dove s'intenda per $\boldsymbol{u}$ un vettore qualunque costante (69). Si troveranno fra breve le condizioni che a tal effetto si richiedono per le discontinuità della deformazione e delle sue derivate prime.

Passando al caso del corpo ciclico (70), è chiaro che quando vi sia una superficie di discontinuità della deformazione (o delle sole derivate prime di essa) che non divida il copo in due parti, e possa quindi essere attraversata una sola volta dai cammini chiusi di una certa specie (fig. 35), la discontinuità di ciascuna delle componenti di rot $\boldsymbol{s}$ e di $\boldsymbol{s}$ avrà in ogni punto M della superficie medesima un unico determinato valore, cioè quello del rispettivo integrale esteso al cammino che in esso punto l'attraversa (71): bisognerebbe dunque

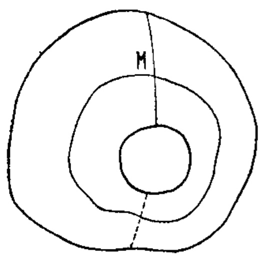

Fig. 35

---

vincolo: potrebbe pensarsi per esempio alla condizione di minimo dell'integrale $\int_{(\Sigma)} [s]^2 \, dA$. (Quest'ultima, sempre ovviamente arbitraria, riguarderebbe la sola discontinuità; mentre le condizioni di vincolo fanno dipendere la determinazione di essa dalla deformazione in ogni punto del corpo.)

(69) S'è già fatta alla nota (59) l'ovvia osservazione che una discontinuità dello spostamento in forma di moto rigido può introdursi ad arbitrio, mantenendo invariata la deformazione, attraverso una superficie qualunque: perciò quando sia soddisfatta la (17) la considerata superficie di discontinuità della deformazione o delle sue derivate non sarà più superficie singolare per lo spostamento. Si tratta in sostanza di ciò, che mentre in generale le due facce di una tal superficie si deformano in modo diverso e non possono quindi più combaciare, nel caso particolare in cui sia sodisfatta la (17) esse si deformano ugualmente come le due facce di ogni altra superficie.

Con riferimento alla nota precedente si osservi che fra le discontinuità in forma di modo rigido è ovvia, anche per l'aspetto puramente analitico, la distinzione della discontinuità nulla.

(70) Si ricordi che il problema si riporta al campo ciclico anche quando sia assegnata per un corpo aciclico una deformazione con linee di punti d'infinito delle derivate prime, dovendo escludersi un intorno filiforme di ciascuna delle linee medesime.

(71) A conferma di ciò si può osservare che ove si pensi il corpo privato di un grado di connessione mediante un taglio secondo un'altra superficie attraversante i cam-

porre tre condizioni per ogni punto M uguagliando a zero i tre integrali che danno le componenti della discontinuità di $\boldsymbol{s}$. Ma si vede facilmente che il problema può semplificarsi ponendo da prima le condizioni necessarie e sufficienti affinchè tale discontinuità si riduca a un moto rigido (vale a dire, come s'è osservato nella nota (69), affinchè le due facce della superficie si deformino allo stesso modo); che sono ovviamente le stesse sopra accennate che derivano dalla (17), e riguardano direttamente l'assegnata discontinuità della deformazione e delle sue derivate; dopo di che resterà solo da uguagliare a zero i sei parametri del moto medesimo, che potranno dirsi anche qui, per un'ovvia considerazione, costanti di polidromia. Si darà l'espressione di queste al paragrafo seguente, dopo trovate le suddette condizioni (72).

15. Affinchè sia sodisfatta la condizione (17) dev'essere evidentemente

$$([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \wedge dM = -2\,[\mathcal{D}']\, dM$$

in ogni punto della considerata superficie e per ogni vettore dM appartenente alla superficie medesima, quindi anche per ogni vettore finito parallelo a dM. Posti dunque successivamente in luogo di dM due versori $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ ortogonali, per esempio tangenti alle linee di curvatura della superficie nel punto M considerato, si ha

$$([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{p} = -2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{p}, \quad ([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{q} = -2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{q}\,;$$

dalle quali si ottiene in modo ovvio (essendo $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ il versore normale in M alla superficie)

$$([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{n} = -2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = -2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} = -([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{n} = 0\,;$$

$$([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{p} = -2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n} = -[\gamma_{nq}], \text{ (73)}$$

$$([\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] - \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{q} = 2\,[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n} = [\gamma_{np}]\,;$$

quindi

$$[\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}] = \boldsymbol{u} - [\gamma_{nq}]\,\boldsymbol{p} + [\gamma_{np}]\,\boldsymbol{q}\,;$$

e inoltre

$$[\varepsilon_p] = [\varepsilon_q] = [\gamma_{pq}] = 0.$$

---

mini della stessa specie di quello considerato (linea punteggiata della fig. 35), il moto rigido arbitrario della discontinuità dello spostamento attraverso la prima superficie resta determinato dalla condizione della continuità attraverso la seconda.

(72) Sia chiaro che non si potrà parlare di costanti di polidromia finchè non sia assicurata mediante le accennate condizioni la possibilità dello spostamento continuo attraverso la considerata superficie in uno spazio aciclico contenente la superficie medesima (cioè in uno spazio parziale, o anche nello spazio totale tagliato come s'è detto alla nota precedente).

(73) Si ricordi che $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$.

Intesi ora per $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ tre versori coincidenti rispettivamente con $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n}$ nel punto M, ma da considerare fissi nell'intorno infinitesimo del punto stesso, si ha in ogni punto della superficie appartenente a tale intorno

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{i} - \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{i} + \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{j} + \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{k},$$

essendo dx, dy le coordinate cartesiane del punto rispetto a un sistema di assi con origine in M secondo le direzioni $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, ϱ_x e ϱ_y i raggi di curvatura delle sezioni della superficie rispettivamente coi piani zx e zy, ciascuno positivo quando il rispettivo centro sia dalla parte positiva di $\boldsymbol{n}$. Onde, sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n} + \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{p} + \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{p} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{q} - \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{n}.$$

Dalle precedenti relazioni si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = \frac{1}{\varrho_x}\boldsymbol{k}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x} = 0;$$

e così dall'espressione trovata di $[\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}]$ si ottiene

$$\left[\frac{\partial\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}}{\partial x}\right] = \frac{\partial\, [\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}]}{\partial x} = -\frac{\partial\, [\gamma_{nq}]}{\partial x}\boldsymbol{p} + \frac{\partial\, [\gamma_{np}]}{\partial x}\boldsymbol{q} - \frac{[\gamma_{nq}]}{\varrho_x}\boldsymbol{k}.$$

D'altra parte si ha immediatamente dalla definizione, con riferimento al sopra indicato sistema cartesiano,

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{s} = \left(\gamma_{yz} - 2\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(-\gamma_{zx} + 2\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\gamma_{xy} - 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\boldsymbol{k};$$

onde si ottiene facilmente

$$\frac{\partial\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{s}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + 2\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\ (^{74}).$$

---

(74) $$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}.$$

Per gli altri termini la trasformazione è ovvia.

Essendo ora

$$\gamma_{zx} = 2\mathcal{D}'\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = 2\mathcal{D}'\left(\boldsymbol{n} + \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{p} + \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{q}\right) \times \left(\boldsymbol{p} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{n}\right) =$$

$$= \gamma_{np} + 2\frac{dx}{\varrho_x}\varepsilon_p + \frac{dy}{\varrho_y}\gamma_{pq} - 2\frac{dx}{\varrho_x}\varepsilon_n\,,$$

$$\gamma_{xy} = 2\mathcal{D}'\left(\boldsymbol{p} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{n}\right) \times \left(\boldsymbol{q} - \frac{dy}{\varrho_y}\boldsymbol{n}\right) = \gamma_{pq} - \frac{dx}{\varrho_x}\gamma_{nq} - \frac{dy}{\varrho_y}\gamma_{np}\,,$$

$$\varepsilon_x = \mathcal{D}'\left(\boldsymbol{p} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{n}\right) \times \left(\boldsymbol{p} - \frac{dx}{\varrho_x}\boldsymbol{n}\right) = \varepsilon_p - \frac{dx}{\varrho_x}\gamma_{np}\,,$$

si ha

$$\left[\frac{\partial\,\gamma_{zx}}{\partial x}\right] = \frac{\partial\,[\gamma_{np}]}{\partial x} + \frac{2}{\varrho_x}[\varepsilon_p] - \frac{2}{\varrho_x}[\varepsilon_n], \qquad \left[\frac{\partial\,\gamma_{zx}}{\partial y}\right] = \frac{\partial\,[\gamma_{np}]}{\partial y} + \frac{1}{\varrho_y}[\gamma_{pq}]\,;$$

$$\left[\frac{\partial\,\gamma_{xy}}{\partial x}\right] = \frac{\partial\,[\gamma_{pq}]}{\partial x} - \frac{1}{\varrho_x}[\gamma_{nq}]\,; \qquad \left[\frac{\partial\,\varepsilon_x}{\partial y}\right] = \frac{\partial\,[\varepsilon_p]}{\partial y}\,.$$

E ricordando che $[\varepsilon_p] = [\gamma_{pq}] = 0$, si ottiene dall'espressione di $\dfrac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{s}}{\partial x}$

$$\left[\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{s}}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial\,[\gamma_{np}]}{\partial y} - \left[\frac{\partial\,\gamma_{xy}}{\partial z}\right]\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\partial\,[\gamma_{np}]}{\partial x} - \frac{2}{\varrho_x}[\varepsilon_n] + 2\left[\frac{\partial\,\varepsilon_x}{\partial z}\right]\right)\boldsymbol{j} - \frac{1}{\varrho_x}[\gamma_{nq}]\boldsymbol{k}.$$

Dal confronto di questa con l'espressione di $\left[\dfrac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{s}}{\partial x}\right]$ trovata precedentemente si traggono infine (sempre ricordando che in M è $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{j}$) le relazioni

$$\left[\frac{\partial\,\gamma_{xy}}{\partial z}\right] = \frac{\partial\,[\gamma_{np}]}{\partial y} + \frac{\partial\,[\gamma_{nq}]}{\partial x}\,, \qquad \left[\frac{\partial\,\varepsilon_x}{\partial z}\right] = \frac{1}{\varrho_x}[\varepsilon_n] + \frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial x}\,;$$

alle quali è da aggiungere quella che si troverebbe dalle analoghe espressioni di $\left[\dfrac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{s}}{\partial y}\right]$, ossia

$$\left[\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial z}\right] = \frac{1}{\varrho_y}[\varepsilon_n] + \frac{\partial\,[\gamma_{nq}]}{\partial y}\,.$$

I primi membri di queste relazioni sono componenti della discontinuità

$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial n}\right]$ della derivata normale della deformazione (75).

Le cercate condizioni sono dunque le sei seguenti (che si ripetono ora scrivendo ovviamente ϱ_p, ϱ_q per ϱ_x, ϱ_y, e così $\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial n}$ per $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, e infine $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \gamma_{pq}$ per $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$):

$$[\varepsilon_p] = [\varepsilon_q] = [\gamma_{pq}] = 0\,;$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n}\right] = \frac{1}{\varrho_p}[\varepsilon_n] + \frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial p}, \qquad \left[\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial n}\right] = \frac{1}{\varrho_q}[\varepsilon_n] + \frac{\partial[\gamma_{nq}]}{\partial q}, \tag{18}$$

$$\left[\frac{\partial \gamma_{pq}}{\partial n}\right] = \frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial q} + \frac{\partial[\gamma_{nq}]}{\partial p} \ (76).$$

---

(75) Le discontinuità delle derivate di $\mathcal{D}'$ secondo le direzioni dell'elemento di superficie, cioè $\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]$, si esprimono ovviamente in ogni caso per la discontinuità di $\mathcal{D}'$ e le sue derivate secondo le direzioni medesime. Nel caso considerato, poichè $[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\,[\gamma_{np}]\,\boldsymbol{n}$, si ha, tenendo conto dell'espressione sopra trovata $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = \frac{1}{\varrho_x}\boldsymbol{k} = \frac{1}{\varrho_x}\boldsymbol{n}$ e dell'analoga $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho_x}\boldsymbol{p}$,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial x}\boldsymbol{n} - \frac{1}{2\varrho_x}[\gamma_{np}]\,\boldsymbol{p} - \frac{1}{\varrho_x}[\mathcal{D}']\,\boldsymbol{n}\,;$$

onde

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p} = -\frac{1}{\varrho_x}[\gamma_{np}], \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2\varrho_x}[\gamma_{nq}], \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial x} - \frac{1}{\varrho_x}[\varepsilon_n].$$

E così analogamente

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q} = 0, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\frac{\partial[\gamma_{nq}]}{\partial x}, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial x}\right]\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{\varrho_x}[\gamma_{np}] + \frac{\partial[\varepsilon_n]}{\partial x}\,;$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p} = 0, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2\varrho_y}[\gamma_{np}], \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial y}\,;$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q} = -\frac{1}{\varrho_y}[\gamma_{nq}], \quad \left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\frac{\partial[\gamma_{nq}]}{\partial y} - \frac{1}{\varrho_y}[\varepsilon_n],$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial y}\right]\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{\varrho_y}[\gamma_{nq}] + \frac{\partial[\varepsilon_n]}{\partial y}.$$

(76) Con una denominazione che sarà introdotta appresso nel testo in proposito della tensione, le prime tre di tali condizioni possono esprimersi dicendo che non possono essere discontinue le componenti *interiori* della deformazione; le altre tre danno le discontinuità delle componenti interiori della derivata normale della deformazione in funzione delle discontinuità delle componenti *esteriori* della deformazione medesima e delle loro derivate. $\left(\text{Si avverta che è ovviamente } \frac{\partial[\gamma_{np}]}{\partial p} = \left[\frac{\partial \gamma_{np}}{\partial p}\right], \text{ etc.}\right)$

La sufficienza di queste condizioni risulta dall'evidente invertibilità del ragionamento.

Nel caso particolare della deformazione continua si ha $[\operatorname{rot}\boldsymbol{s}]=\boldsymbol{u}=\text{cost.}$ Risultano inoltre ovviamente continue le derivate della deformazione medesima secondo le direzioni dell'elemento di superficie (com'è confermato dalle espressioni della nota ([75])); e per la derivata normale si ha $\left[\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial n}\right]=\left[\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial n}\right]=\left[\frac{\partial \gamma_{pq}}{\partial n}\right]=0$. Quest'ultima condizione può esprimersi dicendo che la $\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial n}\,dn\right]$, deformazione definita in ogni punto della considerata superficie, dev'esser tale da far apparire quest'ultima flessibile ma inestensibile (essendo nulla in ogni punto la dilatazione secondo ogni direzione di essa superficie nel punto medesimo). Quando poi la condizione medesima non sia sodisfatta, è chiaro che si manifesterà in forma di flessione senza estensione la discontinuità dello spostamento attraverso la considerata superficie (teorema di Weingarten): basta infatti ricordare che per ipotesi la deformazione, e quindi in particolare la dilatazione secondo ogni direzione appartenente a tale superficie, è la stessa sulle due facce.

Sodisfatte le (18) varrà la (17); dalla quale nel caso del corpo ciclico si ottiene (per il teorema di Stokes), essendo c e c_0 le linee chiuse della fig. 36,

$$\int_{(c)} \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{s}\wedge dP+\mathcal{D}'\,dP=\int_{(c_0)}\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{s}\wedge dP+\mathcal{D}'\,dP\;+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\wedge(M-M_0),$$

dove la funzione $\operatorname{rot}\boldsymbol{s}$ va considerata monodroma e discontinua, nel modo già osservato alla fine del paragrafo precedente, attraverso la superficie di discontinuità di $\mathcal{D}'$. Le costanti di polidromia allo stesso luogo accennate sono dunque le componenti di $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$ (parametri di rotazione) e quelle del vettore $\int_{(c_0)}\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{s}\wedge dP+\mathcal{D}'dP$ (parametri di traslazione).

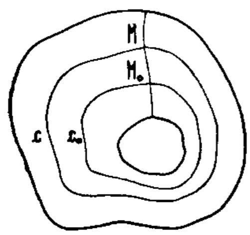

Fig. 36

S'è trovato sopra $\boldsymbol{u}=[\operatorname{rot}\boldsymbol{s}]+[\gamma_{nq}]\,\boldsymbol{p}-[\gamma_{np}]\,\boldsymbol{q}$; ossia in questo caso, per quanto già qui ricordato, $\boldsymbol{u}=\int_{(c)} d\operatorname{rot}\boldsymbol{s}+[\gamma_{nq}]\,\boldsymbol{p}-[\gamma_{np}]\,\boldsymbol{q}$. Le prime tre costanti sono dunque le componenti di tale vettore, indipendenti dal punto M, e non quelle del solo $\int_{(c)} d\operatorname{rot}\boldsymbol{s}$ come nel caso della deformazione senza superficie di discontinuità (per essere qui rot $\boldsymbol{s}$ discontinuo attraverso tale superficie). La traslazione risulta qui riferita al punto M_0, anzichè al punto generico P_0 del corpo; ma anche qui nel porre tutte le costanti uguali a zero potranno estendersi poi anche i secondi integrali alla linea c generica.

16. Il problema fin qui considerato riguarda il corpo libero: resta ora da trattare il caso del corpo vincolato, che è ovviamente d'interesse fondamentale per l'ingegneria.

Ponendo la definizione dei vincoli nel modo classico, pensando cioè che essi si manifestino in punti isolati del corpo, si dirà *condizione semplice di vincolo rigido* (in senso lato) quella consistente nell'assegnazione di una determinata componente dello spostamento di un certo punto. Quando tale componente sia nulla il vincolo si dirà *rigido in senso stretto*.

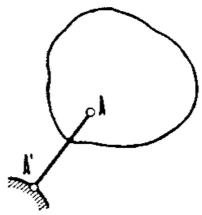

Fig. 37

In ogni caso s'intenderà valutata la componente col decomporre lo spostamento del punto secondo la direzione considerata e la giacitura ad essa normale. L'indicazione convenzionale della condizione semplice di vincolo rigido sarà qui quella della fig. 37, intendendosi che l'asta AA', fissa al secondo estremo, sia soggetta ad un allungamento o accorciamento uguale alla componente assegnata dello spostamento di A secondo la direzione medesima. (Così il vincolo sarà posto sempre reagente nei due sensi). La componente assegnata potrà denominarsi, con estensione di un'ovvia interpretazione fisica, cedimento del vincolo.

Per il principio dei lavori virtuali si manifesterà nel punto vincolato una reazione (forza concentrata) nella direzione stessa secondo la quale è assegnata la componente dello spostamento. (Si confronti la nota (15).) (77)

Dato un corpo soggetto ad n condizioni semplici di vincolo, si pensi assegnata per i punti di esso una deformazione congruente nel senso finora considerato, e sia

$$\boldsymbol{s} = \bar{\boldsymbol{s}} + \omega_0 \wedge (P - O) + \boldsymbol{s}_0$$

il più generale spostamento ad essa corrispondente, dove ω_0 ed $\boldsymbol{s}_0$ siano due vettori arbitrari rappresentanti rispettivamente una rotazione ed una

(77) Quando si abbiano in un punto tre condizioni di vincolo, determinate in concreto da tre distinti apparecchi d'appoggio, per ciascuno dei quali sia assegnato un certo cedimento, si otterrà il vettore spostamento del punto conducendo per un'origine tre vettori rappresentanti i cedimenti assegnati e per gli estremi di essi i rispettivi piani normali, il cui punto d'incontro sarà l'estremo del vettore spostamento. Dalle tre singole reazioni (o azioni esercitate dal corpo su ciascuno dei tre apparecchi) si otterrà invece la reazione totale mediante l'ordinaria operazione di somma vettoriale.

traslazione (essendo assunto per semplicità il punto fisso P_0 coincidente con l'origine O degli assi). Le componenti degli spostamenti dei punti vincolati secondo le rispettive direzioni assegnate, nel senso riguardato per ciascuna di esse come positivo, si esprimeranno nella forma

$$a_{1i}\,\omega_{x_0} + a_{2i}\,\omega_{y_0} + \dots + b_{3i}\,\zeta_0 + \overline{s_i}\,,$$

essendo $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$ le componenti di $\boldsymbol{\omega}_0$, ξ_0, η_0, ζ_0 le componenti di $\boldsymbol{s}_0$, ed $\overline{s_i}$ il termine dato dallo spostamento $\overline{\boldsymbol{s}}$ (cioè le stesse componenti suddette per tale particolare spostamento). Se s_i è il valore assegnato per la medesima componente nella rispettiva condizione di vincolo, dovrà essere

$$a_{1i}\,\omega_{x_0} + a_{2i}\,\omega_{y_0} + a_{3i}\,\omega_{z_0} + b_{1i}\,\xi_0 + b_{2i}\,\eta_0 + b_{3i}\,\zeta_0 = s_i - \overline{s_i} \quad (^{78}) \qquad (19)$$
$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Queste relazioni costituiscono un sistema lineare di n equazioni per le sei incognite $\omega_{x_0}, \dots, \zeta_0$, il quale deve ammettere soluzioni affinchè l'assegnata deformazione e le assegnate condizioni di vincolo siano fra loro compatibili: perciò le eventuali condizioni di possibilità di tale sistema potranno dirsi intanto condizioni di compatibilità.

Indicata con c la caratteristica della matrice incompleta del sistema (19), si osservi da prima che se $c < 6$ il corpo è *labile*, e il numero $6 - c$ ne rappresenta il *grado di labilità* (o numero dei gradi di labilità): il sistema omogeneo ammette infatti $6 - c$ soluzioni linearmente indipendenti, e pertanto qualora il sistema effettivo (non omogeneo) ammetta una soluzione, dovrà ammetterne anch'esso $6 - c$ linearmente indipendenti. (Un corpo con $n < 6$ condizioni di vincolo è sempre labile.) Per l'equilibrio del corpo labile debbono intercedere tra le forze ad esso direttamente applicate tante relazioni lineari indipendenti quanti sono i gradi di labilità, ciascuna delle quali ottenibile com'è noto dall'applicazione del principio dei lavori virtuali (nella forma ordinaria) al corpo con i vincoli resi rigidi in senso stretto, assunto come spostamento virtuale uno dei suddetti moti rigidi indipendenti, soluzioni del sistema omogeneo corrispondente al sistema (19) (moto dunque consentito al corpo indeformato e coi vincoli così considerati, cioè per $\overline{s_i} = s_i = 0$). Tali relazioni possono inten-

---

(78) Dette x_i, y_i, z_i le coordinate del punto cui si riferisce la i^a condizione di vincolo, e $\alpha_{x_i}, \alpha_{y_i}, \alpha_{z_i}$ i coseni della direzione della condizione medesima, si ha evidentemente

$$a_{1i} = y_i\,\alpha_{z_i} - z_i\,\alpha_{y_i}, \qquad a_{2i} = z_i\,\alpha_{x_i} - x_i\,\alpha_{z_i}, \qquad a_{3i} = x_i\,\alpha_{y_i} - y_i\,\alpha_{x_i};$$

$$b_{1i} = \alpha_{x_i}, \qquad b_{2i} = \alpha_{y_i}, \qquad b_{3i} = \alpha_{z_i}.$$

dersi ottenute eliminando tutte le reazioni dal sistema delle sei equazioni di equilibrio del corpo: le condizioni indipendenti per le reazioni sono dunque soltanto c, e ciò significa che c è pure la caratteristica della matrice incompleta del sistema suddetto, come può anche riscontrarsi direttamente ricordando le espressioni degli elementi $a_{1i}, \ldots, b_{1i}, \ldots$ della matrice del sistema (19) date nella nota ([78]). (Si ha anche qui come al paragrafo 3 lo scambio delle linee con le colonne.) Per $c = 6$ il corpo si dirà *fisso*.

Le condizioni di vincolo saranno indipendenti quando sia $c = n$; per $c < n$ si hanno $n - c$ condizioni *sovrabbondanti* di vincolo (i cui primi membri sono combinazioni lineari dei primi membri delle rimanenti), che possono togliersi senza che vengano ad aggiungersi soluzioni indipendenti del sistema omogeneo, nè pertanto condizioni d'equilibrio per le forze direttamente applicate. Siccome tra i sistemi di forze che mantengono il corpo in equilibrio è certamente compreso quello costituito da forze applicate ai punti vincolati secondo le rispettive direzioni dei vincoli ([79]), si conclude che sotto l'azione di forze siffatte d'intensità arbitraria il corpo deve restare in equilibrio anche quando siano tolte le $n - c$ condizioni di vincolo suddette. In particolare un sistema di forze d'intensità arbitraria al posto delle reazioni dei vincoli medesimi può essere sempre equilibrato dalle reazioni degli altri vincoli; dunque le equazioni d'equilibrio, cioè le suddette condizioni indipendenti per le reazioni, lasciano effettivamente tali reazioni indeterminate. Esse si diranno perciò reazioni *staticamente indeterminate,* o *iperstatiche*; e lo stesso nome si darà alle rispettive condizioni di vincolo, che sono dunque quelle stesse sovrabbondanti. Iperstatico si dirà anche allora il sistema dei vincoli, e *grado di iperstaticità* il numero $n - c$. (Per $n > 6$ il sistema sarà sempre iperstatico.)

L'identità delle condizioni iperstatiche con quelle sovrabbondanti poteva dimostrarsi anche, come al paragrafo 3, osservando che nella scelta delle une come in quella delle altre si deve solo badare che resti ancora c la caratteristica della matrice incompleta del rispettivo sistema, cioè il sistema (19) per le condizioni sovrabbondanti, quello delle sei equazioni di equilibrio per le condizioni iperstatiche.

Le condizioni di vincolo iperstatiche risultano in generale per il corpo deformato incompatibili con le altre: essendo infatti i primi membri delle equazioni (19) ad esse corrispondenti combinazioni lineari dei primi membri delle altre, il sistema ammetterà soluzione solo quando le medesime relazioni lineari intercedano fra i rispettivi secondi membri (cioè quando la matrice completa abbia la stessa caratteristica c dell'incompleta). Si

---

([79]) Ciascuna di tali forze può essere equilibrata dalla reazione del rispettivo vincolo.

tratta delle già accennate condizioni di compatibilità, che sono dunque $n - c$ relazioni tra le differenze $s_i - \bar{s}_i$; e poichè gli spostamenti $\bar{s}_i$ dipendono dall'assegnata deformazione, esse vanno riguardate come condizioni da porre per quest'ultima affinchè sia possibile lo spostamento sodisfacente alle assegnate condizioni di vincolo, cioè con le assegnate componenti di spostamento. Potranno perciò chiamarsi anch'esse *condizioni di congruenza*, di natura per altro diversa da quella delle condizioni di congruenza «intrinseche» finora considerate (riguardanti l'esistenza e la continuità dello spostamento, nonchè la monodromia nel caso dei corpi ciclici), le quali potrebbero anche dirsi assolute (espresse da equazioni omogenee), mentre queste ora introdotte sono condizioni relative al sistema di vincoli assegnato, e in particolare agli assegnati valori dei cedimenti. Esse risultano evidentemente indipendenti dalla scelta del particolare spostamento $\bar{s}$ corrispondente all'assegnata deformazione.

Si può accennare fin d'ora che posto di saper esprimere la deformazione in funzione delle forze assegnate e di tutte le reazioni dei vincoli, le $n - c$ condizioni di congruenza qui considerate serviranno insieme con le c equazioni d'equilibrio indipendenti sopra indicate a determinare le reazioni medesime[80].

Poichè i cofficienti a_{hi}, b_{hi} delle (19) non variano se si pensa ciascuno dei punti vincolati spostato nella direzione della rispettiva condizione di vincolo, il grado di labilità e il grado di iperstaticità dipendono solo dalla posizione delle rette condotte per tali punti nelle direzioni medesime (rette delle reazioni). Condizione necessaria affinchè il corpo sia fisso è che tali rette non incontrino tutte una medesima retta (propria od impropria), cioè non appartengano a uno stesso fascio di piani. Come casi particolari (oltre a quello del sostegno improprio, vale a dire delle rette parallele a un medesimo piano) si possono osservare quelli di due gruppi di rette appartenenti ciascuno ad un piano, o di sei rette passanti a tre a tre per un punto. Un sistema di sei o più condizioni di vincolo che non renda

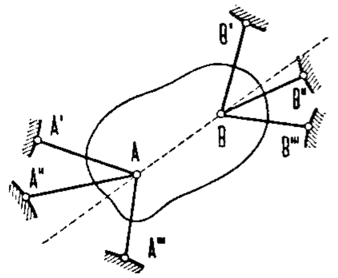

Fig. 38

(80) E' chiaro che dovrà escludersi a priori che vi siano più di tre condizioni di vincolo in uno stesso punto. In tal caso infatti i primi membri delle rispettive equazioni (19) sarebbero legati linearmente; ma poichè la medesima relazione lineare si verificherebbe ovviamente tra le corrispondenti $\bar{s}_i$ per qualunque deformazione, non vi sarebbe questione di congruenza: sarebbe invece necessario che si adeguassero a tali relazioni anche le assegnate componenti s_i, e risulterebbero allora delle identità. Le singole reazioni di tali vincoli resterebbero indeterminate, essendo determinata invece la loro risultante.

Allo stesso modo è da escludere che vi siano in un punto più di due condizioni di vincolo in un medesimo piano.

il corpo fisso sarà necessariamente iperstatico; e le condizioni di congruenza dipenderanno evidentemente dai punti vincolati (non solo dalle rette delle reazioni) e dagli asseganti cedimenti (81). Per esempio nel caso della fig. 38 è chiaro che resta libera la rotazione del corpo intorno alla retta AB (e che perciò dovrà esser nullo il momento delle forze assegnate rispetto alla retta medesima); e la condizione di congruenza consiste nell'uguaglianza della componente secondo AB dello spostamento relativo dei punti A, B, in uno qual si voglia degli spostamenti $\bar{\boldsymbol{s}}$ corrispondenti alla considerata deformazione, con la differenza delle analoghe componenti dei cedimenti assegnati per i punti medesimi (82).

Nel piano si consegue la fissità in condizioni isostatiche mediante tre condizioni di vincolo, posto solo che le tre rette delle reazioni non passino per un punto.

17. A maggior chiarimento dell'analogia tra le condizioni di congruenza che si sono dette intrinseche e quelle riguardanti i vincoli possono valere le seguenti considerazioni.

Dato un corpo soggetto ad un sistema di vincoli iperstatico, e assegnata una deformazione intrinsecamente congruente, cioè derivante da uno spostamento continuo (e monodromo) in ogni punto del corpo medesimo, si pensi di dividerlo in parti, ciascuna delle quali resti vincolata isostaticamente, sicchè possa in ciascuna liberamente effettuarsi l'assegnata deformazione. È chiaro che in generale le parti così deformate non potranno riportarsi tutte a combaciare, per ricostituire l'intero corpo, mediante i moti rigidi a ciascuna di esse consentiti dall'eventuale labilità dei rispettivi vincoli: lo spostamento corrispondente all'assegnata deformazione, continuo in ciascuna di esse parti, presenterà dunque in generale discontinuità non eliminabili attraverso le superficie di separazione; le quali ovviamente, per la supposta congruenza intrinseca della deformazione, dovranno essere in forma di moto rigido (si confronti la nota (59).) Una deformazione non congruente per incompatibilità coi vincoli può dunque anche considerarsi tale per corrispondere a uno spostamento sodisfacente a tutte le condizioni di vincolo ma necessariamente discontinuo attraverso certe superficie, da assumere ad arbitrio sotto la condizione di dividere il corpo in parti vincolate isostaticamente.

Si può anche pensare di assumere tali superficie in modo da isolare un intorno di ciascun punto vincolato. Ove poi si passi al limite facendo

(81) Quando non sia dichiarato espressamente il contrario si porrà che i punti vincolati appartengano alla superficie del corpo, con ovvio riferimento alla possibilità di porre in concreto le condizioni di vincolo.

(82) Si vuol ricordare ancora che la componente del cedimento non è la somma delle proiezioni dei cedimenti assegnati per le tre condizioni di vincolo.

tendere ogni intorno al punto medesimo, si capisce come per mantenersi tutti aderenti ai vincoli tali punti possano essere costretti a distaccarsi materialmente dal corpo (eccettuati al più sei di essi).

Si consideri da ultimo il caso particolare di un corpo semplicemente connesso e vincolato in modo che operando in esso un taglio secondo una certa superficie, ciascuna delle due parti che risultano resti fissa e in condizioni isostatiche: per una deformazione generica intrinsecamente congruente si determinerà attraverso la superficie del taglio, come nel caso più generale considerato sopra, una discontinuità dello spostamento in forma di moto rigido. Si può allora osservare l'analogia tra la condizione dell'annullarsi di tale discontinuità, che equivale come s'è visto alla condizione di compatibilità coi vincoli, e la condizione di monodromia dello spostamento in un corpo a connessione doppia; potendo infatti riguardarsi come tale il complesso costituito dal corpo considerato e dal suolo a cui esso è vincolato. (La fig. 39 si riferisce, per semplicità, al caso piano.)

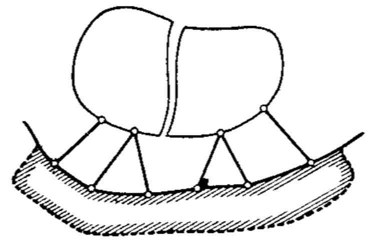

Fig. 39

Le considerazioni precedenti possono estendersi al caso di un sistema costituito di più corpi vincolati rigidamente fra loro e al suolo. È chiaro che quando sia assegnata una deformazione intrinsecamente congruente per ciascuno dei corpi, le altre condizioni di congruenza da porre risultano ancora dall'eliminazione dei parametri di moto rigido da un sistema come il (19) esprimente tutte le condizioni di vincolo esterno (al suolo) ed interno (fra i corpi). Per ogni vincolo interno dovrà ovviamente eguagliarsi la componente dello spostamento relativo dei punti fra loro vincolati nella direzione del vincolo, espressa in funzione dei parametri suddetti e delle componenti degli spostamenti $\bar{s}$ dei rispettivi corpi, al cedimento assegnato (s'intende sempre come spostamento relativo) per il vincolo medesimo. Si avrà in tutto un sistema di n' equazioni, essendo n' il numero totale delle suddette condizioni di vincolo, con $6m$ parametri di moto rigido se m è il numero dei corpi del sistema: dall'eliminazione di tali parametri si ottengono $n' - c'$ condizioni per l'esistenza di un sistema di moti rigidi che consenta ai corpi deformati il rispetto dei vincoli esterni ed interni, essendo c' la caratteristica della matrice incompleta del sistema di equazioni. Quando sia $c' = n'$ il sistema di corpi sarà isostatico; quando sia $c' < 6m$ esso sarà labile, e non potrà essere in equilibrio ove non siano sodisfatte $6m - c'$ relazioni tra le sole forze assegnate.

18. Si vuole ora considerare il caso delle condizioni di vincolo in punti del corpo infinitamente vicini. Per semplicità formale si tratterà il problema nel piano, considerando due condizioni di vincolo in due distinti punti A, B, e ponendo che quest'ultimo si sposti (sul contorno del corpo) tendendo al punto A, mentre la direzione BB' del rispetto vincolo (fig. 40) tenda alla stessa direzione AA' del vincolo in A. (Se tendesse a una direzione diversa, si avrebbero alla fine due diverse condizioni di vincolo nello stesso punto A.) È chiaro che per ogni posizione del punto B le due condizioni di vincolo possono anche riferirsi al punto C d'incontro delle rette AA', BB', da intendere come punto rigidamente collegato al corpo mediante le due aste rigide AC, BC: in tali condizioni infatti gli spostamenti di C nelle direzioni di tali aste saranno necessariamente uguali a quelli assegnati nelle direzioni medesime rispettivamente per il punto A e per il punto B. Al limite il vettore spostamento così assegnato per il punto C tende ad un vettore finito e determinato, come può subito dimostrarsi [83]; e si avrà quindi uno spostamento assegnato per il punto $\overline{C}$, limite a cui tenda C, come se esso

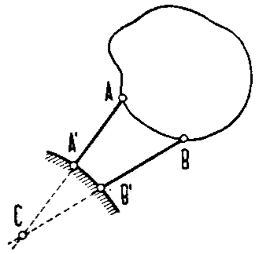

Fig. 40

(83) Si ha dalla fig. 41, dove $\overline{CC_1'} = s$, $C_1 - C = s$, $\mathrm{mod}\, s = s\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega}$, $\mathrm{tg}\,\omega = \dfrac{1}{s}\dfrac{ds}{d\,\widehat{sx}}$, inteso per $\widehat{sx}$ l'angolo che la direzione della condizione di vincolo fa con un asse fisso qualunque.

Con riferimento alle espressioni dei coefficienti delle (19) date nella nota (78), posta in A l'origine delle coordinate ed assunto l'asse x (fig. 42) secondo la direzione limite di

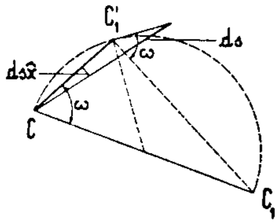

Fig. 41

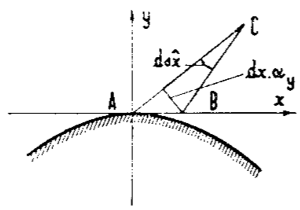

Fig. 42

AB (tangente al contorno), la condizione di vincolo in A si scrive $\alpha_x \xi_0 + \alpha_y \eta_0 = s - \overline{s}$, e quella in B $dx\, \alpha_y\, \omega_0 + (\alpha_x + d\alpha_x)\, \xi_0 + (\alpha_y + d\alpha_y)\, \eta_0 = s + ds - (\overline{s} + d\overline{s})$. A questa può sostituirsi nel sistema (19) la $dx\, \alpha_y\, \omega_0 + d\alpha_x\, \xi_0 + d\alpha_y\, \eta_0 = ds - d\overline{s}$; ossia, essendo $\alpha_x = \cos\widehat{sx}$, $\alpha_y = \sin\widehat{sx}$, quindi $d\alpha_x = -\alpha_y d\,\widehat{sx}$, $d\alpha_y = \alpha_x\, d\,\widehat{sx}$,

$$\frac{dx}{d\,\widehat{sx}}\alpha_y\,\omega_0 - \alpha_y\,\xi_0 + \alpha_x\,\eta_0 = \frac{ds}{d\,\widehat{sx}} - \frac{d\overline{s}}{d\,\widehat{sx}}\,.$$

Questa rappresenta una condizione posta per lo spostamento del punto C in direzione normale ad AC, come si vede osservando che $-\alpha_y$ ed α_x sono i coseni di tale direzione, e che il primo termine esprime lo spostamento di C nella direzione medesima per la rotazione ω_0 intorno ad A. Si hanno così per il punto C le due condizioni riguardanti le componenti dello spostamento nelle due direzioni ortogonali.

fosse soggetto a due condizioni di vincolo secondo direzioni arbitrarie. Non bisogna dimenticare per altro che siccome le due aste suddette tendono a sovrapporsi, una reazione arbitraria passante per C si manifesterà effettivamente come insieme di due forze, l'intensità delle quali tenderà all'infinito.

Diverso e più interessante aspetto assume il considerato caso limite nell'ipotesi del punto C improprio, ossia quando l'angolo delle direzioni AA', BB' sia infinitesimo d'ordine superiore rispetto alla distanza AB, o si mantenga nullo da una certa posizione di B in poi: si può parlare allora di due condizioni di vincolo secondo una stessa direzione in punti infinitamente vicini (84). Si avrà in tal caso nello stesso punto A, insieme colla condizione dello spostamento assegnato nella considerata direzione, un'altra condizione riguardante la derivata secondo la direzione AB della medesima componente dello spostamento (cioè la componente secondo la direzione suddetta riguardata come fissa), che resterà anch'essa evidentemente assegnata (85). Questa seconda condizione s'indicherà come *condizione d'incastro*; e *momento d'incastro* si dirà il momento rispetto al punto A della reazione in B, tendente anche in questo caso all'infinito, ossia quello della risultante finita delle due reazioni, forza avente l'assegnata direzione ma passante a distanza finita dal punto A. Per quanto riguarda il significato pratico del tendere all'infinito delle due reazioni, si avverta fin d'ora che ogni singola reazione finita dev'essere effettivamente ripartita su un certo intorno del punto teoricamente vincolato: è chiaro allora che la reazione risultante e il momento d'incastro possono ottenersi mediante una conveniente ripartizione della forza (con valori di segno opposto) sull'intorno medesimo (86).

---

(84) Quando sia invece la distanza infinitesima d'ordine superiore rispetto all'angolo, il punto C verrà a coincidere con lo stesso punto A. (Nell'ultima equazione della nota precedente diverrà nullo il primo termine.)

(85) L'ultima equazione della nota (83) diventa in questo caso $\alpha_y\,\omega_0 = \frac{ds}{dx} - \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}$. Assumendo per spostamento $\bar{s}$ quello nel quale restino fissi il punto A e la direzione x, onde $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = \varepsilon_x\,\alpha_x$, si ha $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \omega_0 = \frac{1}{\alpha_y}\left(\frac{ds}{dx} - \varepsilon_x\,\alpha_x\right)$: per ogni assegnata deformazione resta dunque fissata in A anche la derivata $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, essendo η la componente secondo y dello spostamento effettivo.

(86) Si avrà cioè praticamente una ripartizione del tipo rappresentato nella figura. Si può pensare che mentre ciascuno dei due intorni di A e di B vada tendendo al rispettivo punto, il secondo si mantenga contiguo al primo, avvicinandosi così indefinitamente il punto B al punto A.

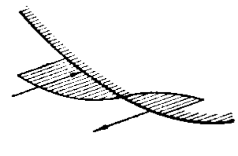

Fig. 43

Le considerazioni precedenti possono estendersi senza difficoltà allo spazio; e si conclude così che tra le condizioni di vincolo definite al paragrafo 16 possono intendersi comprese come caso limite quelle riguardanti le derivate degli spostamenti, ossia le condizioni d'incastro ([87]).

([87]) Ove si ricordi che teoricamente le condizioni di vincolo possono esser poste anche in punti interni del corpo, si vede come le condizioni d'incastro, pur essendo poste in punti della superficie, possono riguardare anche derivate secondo direzioni non appartenenti alla superficie medesima.