Capitolo II

ANALISI DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME

5. Nello studio del cambiamento di configurazione che avvenga in un corpo per l'azione di forze ad esso applicate, o per altre cause, sarà qui ancora supposto che gli spostamenti dei suoi punti, e quindi anche le derivate di essi rispetto ai punti medesimi, siano infinitesimi. È necessaria una breve discussione di tale ipotesi al fine di chiarire quale sia l'effettiva rispondenza di essa alle condizioni del problema fisico.

Cominciando col considerare le derivate prime dello spostamento, che sono dei puri numeri, si pensi d'aver fissato per un certo problema un criterio pratico d'approssimazione, vale a dire l'ordine di grandezza dell' errore relativo ammissibile nella soluzione del problema medesimo $\left(\text{per esempio } \frac{1}{1{\cdot}000}\right)$. Tale criterio dovrà ovviamente essere adeguato di volta in volta alla natura del problema, all'approssimazione colla quale possano intendersi noti i dati di esso, e anche al fine pratico della cercata soluzione. Quando si operi considerando le suddette derivate degli spostamenti come infinitesimi, si consegue nei calcoli un'essenziale semplificazione col tralasciare i termini d'ordine superiore; ma per tener validi i risultati che così si ottengono bisogna vedere se l'errore che si compie per essere in realtà tali derivate dei numeri finiti resti compreso nei limiti fissati dal criterio suddetto.

Quando per esempio sia da considerare l'espressione $(1+\varepsilon)^2 - 1$, riguardando ε come infinitesimo si trascurerà il termine ε^2. Tale trascurabilità può ammettersi in via d'approssimazione anche per ε finito, a condizione che il rapporto $\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon}$, e quindi lo stesso ε, sia di un ordine di grandezza non superiore a quello fissato per l'errore relativo ammissibile. Così dovendo considerarsi in generale una $f(\varepsilon)$ funzione infinitesima dell'infinitesimo ε, basterà porre $f(\varepsilon) = f'(0)\,\varepsilon$, primo termine dello sviluppo in serie di Mac-Laurin. Per vedere quando tale espressione sia sufficientemente approssimata per ε finito, conviene scrivere lo sviluppo abbreviato $f(\varepsilon) = f'(k\varepsilon)\,\varepsilon = f'(0)\,\varepsilon + \{f'(k\varepsilon) - f'(0)\}\,\varepsilon$: è chiaro allora che la condizione è che si mantenga del prefissato ordine di grandezza, per ogni k compreso tra 0 ed 1, il rapporto $\dfrac{f'(k\varepsilon) - f'(0)}{f'(0)}$ (24).

Per l'applicazione di ogni relazione ottenuta considerando ε infinitesimo mediante un certo procedimento analitico bisognerebbe dunque eseguire una valutazione dell'errore in ciascun passaggio del procedimento medesimo (25). Non essendo ciò praticamente possibile, si deve concludere che i limiti del campo di applicabilità di ogni relazione siffatta dovranno infine esser direttamente riconosciuti per mezzo dell'esperienza; indipendentemente dal quale riscontro sperimentale potrà solo affermarsi che ogni singolo risultato sarà accettabile, secondo un dato criterio d'approssimazione, finchè le derivate dello spostamento siano « sufficientemente piccole ».

Ma la piccolezza delle derivate suddette è richiesta, oltre che per la semplificazione delle espressioni analitiche che le contengono, anche per poter trascurare la variazione di orientamento degli elementi di un corpo rispetto alle forze che lo sollecitano, come si fa appunto ovviamente considerando gli spostamenti infinitesimi. Il criterio di tale trascurabilità, sempre riferito a una prefissata approssimazione da conseguire, dev'essere stabilito singolarmente per ciascun problema. Si consideri per esempio la mensola AB (fig. 19) sollecitata all'estremo B da una forza P normale al suo asse, ponendo che con lo spostamento del suo punto d'applicazione essa forza si sposti senza mutar direzione (come un carico in senso proprio, cioè un peso). Mentre nella configurazione indeformata la sezione estrema in B è soggetta solo ad un'azione tangenziale pari all'intera P, nella configurazione deformata AB' viene ad agire sulla medesima sezione insieme con una componente tangenziale T una componente normale N: quest'ultima, che dà nei punti di essa sezione una tensione normale (trazione), è dovuta alla variazione d'orientazione di essa nel passaggio dall'una all'altra configurazione. Nel problema della determinazione di tale tensione normale è ovvio pertanto che la variazione d'orientazione non potrebbe in nessun caso trascurarsi; ma è anche chiaro che il problema stesso è praticamente privo d'interesse, mentre interessa la conoscenza

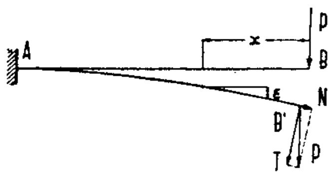

Fig. 19

(24) Se dovesse incontrarsi ad esempio un termine $\varepsilon^{1,1}$ (funzione evidentemente non sviluppabile in serie di Mac-Laurin), che come infinitesimo è trascurabile rispetto ad ε, sarebbe da considerare il rapporto $\dfrac{\varepsilon^{1,1}}{\varepsilon} = \varepsilon^{0,1}$ per metterlo a confronto con l'errore relativo ammissibile. Quand'anche questo fosse $\dfrac{1}{10}$ (cioè il $10^0/_0$), dovrebbe essere $\varepsilon < \left(\dfrac{1}{10}\right)^{10}$.

(25) Non si dimentichi fra l'altro che l'errore relativo di una somma può esser molto maggiore di quelli dei singoli termini.

della tensione normale in una sezione generica S, e in particolare nelle sezioni prossime all'incastro, dove essa è dovuta principalmente allo stato di flessione (per il quale si ha massima trazione nelle fibre estreme superiori e massima compressione nelle fibre estreme inferiori). Mentre la parte dovuta alla componente N è uniforme nella sezione [26], e uguale quindi a $\frac{N}{A} = \frac{P\varepsilon}{A}$, essendo A l'area della sezione medesima, ed ε la rotazione di essa, la suddetta parte dovuta alla flessione è data da un'espressione della forma $\frac{Px}{Ah}$, essendo h una lunghezza dell'ordine delle dimensioni trasversali della stessa sezione: dal rapporto $\varepsilon\frac{h}{x}$ delle due parti si rileva che la prima sarà trascurabile rispetto alla seconda già per una sezione la cui distanza x da B sia dello stesso ordine suddetto, quando sia ε dell'ordine dell'errore ammissibile. Si conclude così che per quanto riguarda intanto l'orientazione delle sezioni rispetto alle forze, risulta lecito sotto quest'ultima condizione lo scambio della configurazione deformata con quella indeformata.

Quanto agli spostamenti, che come tali non interverranno nella formulazione analitica dei problemi di Scienza delle costruzioni se non linearmente (nelle condizioni al contorno), è necessario per altro che siano anch'essi abbastanza piccoli quando si vogliano trascurare come si fa normalmente, considerandoli infinitesimi, le variazioni di posizione dei singoli elementi del corpo rispetto alle forze: si tratta dunque ancora del medesimo scambio (già accennato anche al § 1) della configurazione deformata, che è l'effettiva configurazione d'equilibrio del corpo sotto l'azione delle forze considerate, colla configurazione indeformata, che sarà in generale quella assegnata come dato del problema. Qui è da osservare subito che di piccolezza degli spostamenti non può parlarsi se non per confronto con altre lunghezze, le quali ovviamente non possono essere che le dimensioni del corpo considerato. Ora i corpi per i quali hanno importanza le presenti considerazioni sono quelli aventi una dimensione prevalente sulle altre o due dimensioni prevalenti sulla terza (che possono indicarsi in modo generico rispettivamente come travi e lastre), i quali sono d'altra parte l'oggetto di una grandissima maggioranza delle applicazioni: sarà necessario dunque caso per caso vedere quali di esse dimensioni siano da considerare per paragone degli spostamenti.

---

[26] Quando la sezione considerata sia abbastanza distante dalla sezione estrema, ciò può ammettersi comunque si pensi effettivamente ripartita su quest'ultima la P, purchè la risultante passi per il baricentro B di essa.

Si consideri ancora una mensola, sollecitata da forze normali all'asse, supposte di direzione invariabile (fig. 20). È chiaro che quando il massimo spostamento sia abbastanza piccolo rispetto alla lunghezza della mensola, la componente orizzontale dello spostamento di ogni punto dell'asse sarà piccola a sua volta rispetto allo spostamento medesimo, e trascurabile perciò la variazione della distanza di esso punto da ognuno dei carichi: dunque in questo caso può assumersi per paragone degli spostamenti la lunghezza suddetta, ossia la dimensione massima del corpo (27). Quando invece la mensola sia sollecitata all'estremo B da una forza parallela al suo asse, la variazione della distanza del punto generico di questo dalla linea d'azione della forza medesima è data dalla componente verticale della differenza degli spostamenti di esso punto e del punto B, cioè in sostanza dalla stessa differenza (fig. 21); dunque l'errore relativo massimo (nel punto A) è dato, per quanto attiene a tale distanza, dal rapporto dello spostamento di B all'eccentricità iniziale e della forza. La lunghezza di paragone degli spostamenti sarebbe così questa volta tale eccentricità; se non che, avendo qui importanza anche la tensione dovuta alla componente normale, è chiaro che dovranno considerarsi anche le dimensioni della sezione (come risulta da quanto s'è accennato sopra sulla valutazione della tensione medesima e di quella dovuta alla flessione, cioè alla suddetta distanza). Si conclude facilmente che la tensione sarà valutata con sufficiente approssimazione senza tener conto della variata configurazione quando lo spostamento sia abbastanza piccolo rispetto all'eccentricità o rispetto alle dimensioni della sezione; cioè, nel caso che tali grandezze siano d'ordine diverso, rispetto alla maggiore di esse (28).

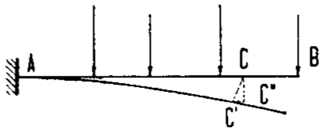

Fig. 20

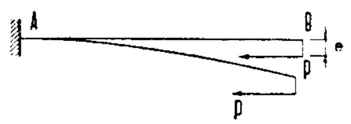

Fig. 21

---

(27) Si ricordi che lo stato di tensione di una sezione generica dipende dalla distanza del baricentro di essa dai carichi che agiscono dalla parte dell'estremo libero della mensola. È da avvertire che la conclusione sulla variazione di tale distanza, fondata sull'ipotesi che i carichi (supposti invariati di direzione) agiscano in punti dell'asse, resta valida anche se i punti di applicazione di essi appartengono invece ai lembi delle rispettive sezioni, benchè la variazione medesima risulti allora diversa.

(28) L'esempio della mensola mostra anche chiaramente che rotazioni e spostamenti non sono fra loro indipendenti, e come per il prevalere di una dimensione possano verificarsi con piccole deformazioni (intesa ancora qui la parola in senso intuitivo generico) grandi rotazioni e spostamenti. Si osservi anche come questi ultimi si accrescano, con l'aumentare della dimensione medesima, in misura maggiore delle prime.

6. Si consideri un solido qualunque, e si ponga che da una certa configurazione esso passi ad un'altra (infinitamente prossima) con uno spostamento infinitesimo di ogni suo punto. Tale spostamento sarà un vettore $\boldsymbol{s}$, assegnato per ogni punto dello spazio occupato dal corpo, le cui componenti rispetto a un sistema cartesiano x, y, z siano rispettivamente ξ, η, ζ: queste saranno dunque funzioni delle coordinate x, y, z, e si porrà che siano in ogni punto continue e derivabili [29]. Considerato un punto P_0 e in un intorno infinitesimo di esso un punto P (fig. 22, proiezione sul piano xy), sarà

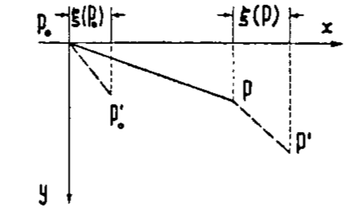

Fig. 22

$$\xi(P) = \xi(P_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 dz + \dots, \tag{1}$$

e analoghe espressioni si avranno per le componenti η e ζ. Ponendo in P_0 l'origine degli assi, e sostituendo pertanto le stesse coordinate ai rispettivi differenziali, la coordinata x' del punto P' in cui si trasferisce il punto P risulta

$$x' = x + \xi = \left\{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0\right\} x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z + \xi(P_0), \tag{2}$$

e in modo analogo risultano espresse y' e z'. Le coordinate del punto P' sono dunque funzioni lineari omogenee di quelle del punto P; o in altre parole, *la corrispondenza fra i due punti è una omografia affine.* (Elementi paralleli, lineari o superficiali, restano paralleli.)

---

(29) È ovvio che la considerata porzione di spazio continuo costituisce un modello su cui si sviluppa la teoria. Lo spostamento praticamente misurabile si riferisce naturalmente a un elemento materiale: si passa al modello ammettendo che esso tenda a un limite determinato quando si facciano tendere a zero le dimensioni dell'elemento nell'intorno di ogni determinato punto. Considerati due elementi a contatto in un punto, e facendoli tendere entrambi al punto medesimo, è chiaro che non potrà ammettersi che gli spostamenti misurati tendano a due limiti distinti, cioè che la differenza di essi si mantenga superiore ad un valore finito, se non quando si pensi avvenuta la separazione dei due elementi, ossia una frattura del corpo. (Per ristabilire il contatto dopo un simile spostamento degli elementi medesimi considerati rigidi, occorrerebbe una variazione finita delle dimensioni di uno almeno di essi, cioè una deformazione infinita.) Una deformazione senza fratture deve dunque essere rappresentata da uno spostamento teorico continuo in ogni punto.

Per quanto attiene invece alla derivabilità, proprietà che ha anch'essa significato in quanto la funzione sia definita in ogni punto, è chiaro che mancando la possibilità di tale effettiva definizione, e non avendo d'altra parte la proprietà medesima alcun riscontro nello spostamento materiale misurabile (come la mancanza di fratture per la continuità), l'ammissione di essa risponde semplicemente ad un'ovvia esigenza di semplicità e di regolarità.

È da notare che tale conclusione vale anche per spostamenti finiti, per essere infinitesimo l'intorno considerato del punto P_0. La corrispondenza potrà cioè in ogni caso riguardarsi come omografia affine con sufficiente approssimazione in un intorno sufficientemente piccolo.

Riprendendo la (1), si osservi che $\xi(P) - \xi(P_0)$ è la componente secondo l'asse x del vettore $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(P) - \boldsymbol{s}(P_0)$, mentre dx, dy, dz sono le componenti del vettore $dP = P - P_0$. La (1) e le analoghe espressioni di $\eta(P) - \eta(P_0)$ e di $\zeta(P) - \zeta(P_0)$ danno dunque le componenti del vettore $d\boldsymbol{s}$ come funzioni lineari omogenee delle componenti del vettore dP: esse esprimono una corrispondenza lineare omogenea tra i due vettori (omografia vettoriale), la quale potrà rappresentarsi nella forma sintetica

$$d\boldsymbol{s} = \mathcal{D}\, dP, \tag{3}$$

essendo l'operatore $\mathcal{D}$ il *tensore doppio derivato del vettore* $\boldsymbol{s}$, espresso in forma cartesiana al modo seguente:

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le tre linee contengono rispettivamente le componenti dei vettori $\mathcal{D}\boldsymbol{i}$, $\mathcal{D}\boldsymbol{j}$, $\mathcal{D}\boldsymbol{k}$, essendo $\boldsymbol{i} = \operatorname{grad} x$, $\boldsymbol{j} = \operatorname{grad} y$, $\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} z$ i versori secondo gli assi [30].

Si decomponga ora il tensore $\mathcal{D}$ in due tensori $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{R}$, rispettiva-

---

[30] L'operatore $\mathcal{D}$ che trasforma il vettore dP nel vettore ds è un ente (tensore) rappresentato dalle sue nove componenti in ogni dato sistema di riferimento. Dalle componenti rispetto a un sistema cartesiano ortogonale x, y, z si passa a quelle rispetto a un altro analogo sistema x', y', z' mediante le relazioni facilmente verificabili

$$t_{i'h'} = \sum_m \cos \widehat{mh'} \sum_n \cos \widehat{ni'} \,.\, t_{nm},$$

dove gl'indici fissi i', h' stanno a rappresentare due degli indici x', y', z', mentre ciascuno degli indici variabili m, n rappresenta uno degli indici x, y, z.

mente *simmetrico* ed *antimetrico*: $\mathcal{D} = \mathcal{D}' + \mathcal{R}$ [31], essendo

$$\mathcal{D}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ove si ponga

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon_z,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz}; \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \omega_z, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = \omega_x, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \omega_y, \tag{5'}$$

le espressioni precedenti divengono

$$\mathcal{D}' \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \tag{6}$$

---

[31] Un tensore doppio è simmetrico quando nella matrice delle sue componenti sono uguali gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale; dicesi antimetrico (o meno propriamente emisimmetrico) quando tali elementi sono contrari (e nulli pertanto quelli della diagonale medesima). E' facile verificare che si tratta di qualità intrinseche del tensore, che restano immutate al mutare del sistema di riferimento.

Il tensore $\mathcal{T}$ è la somma dei due tensori $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$) quando si ha per un vettore $\boldsymbol{u}$ generico $\mathcal{T}\boldsymbol{u} = \mathcal{T}_1\boldsymbol{u} + \mathcal{T}_2\boldsymbol{u}$. Discende immediatamente dalla definizione che le componenti di $\mathcal{T}$ sono le somme delle omonime componenti di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

$$\mathcal{R} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{6'}$$

A tale decomposizione del tensore corrisponde la decomposizione del vettore $\boldsymbol{ds}$ in due: $\boldsymbol{ds} = \mathcal{D}' \, dP + \mathcal{R} \, dP$. Lo spostamento del punto generico P nell'intorno del punto P_0 sarà allora

$$\boldsymbol{s}(P) = \boldsymbol{s}(P_0) + \mathcal{R} \, dP + \mathcal{D}' \, dP. \tag{7}$$

Mentre il primo di questi termini rappresenta una traslazione dell'elemento solido costituente l'intorno considerato, il secondo termine rappresenta una rotazione di esso intorno al punto P_0 definita dal vettore di componenti ω_x, ω_y, ω_z: è infatti $\mathcal{R} \, dP = \boldsymbol{\omega} \wedge dP$ (32). Dunque la somma dei primi due termini rappresenta un moto rigido dell'elemento; e allora la deformazione di questo dipenderà soltanto dalla parte dello spostamento rappresentata dal terzo termine $\mathcal{D}' \, dP$. L'operatore $\mathcal{D}'$ sarà detto *deformazione pura* (33): ciascuna delle componenti di esso ha un semplice significato che risulterà dalle seguenti osservazioni.

Componenti ε. — Posto $dP = dx \, \boldsymbol{i}$, dopo la deformazione tale vettore infinitesimo sarà divenuto $dP' = dP + \boldsymbol{ds} = dx(\boldsymbol{i} + \mathcal{D}\boldsymbol{i})$, le cui componenti sono

$$dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad dx \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad dx \frac{\partial \zeta}{\partial x};$$

---

(32) Si ricordi che $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{s}$, *vorticale* o *rotazionale* del vettore $\boldsymbol{s}$. Mentre la prima denominazione è attinente alla meccanica dei fluidi, la seconda deriva dal significato qui posto in chiaro.

(33) Non è da intendere che possa attribuirsi a tale nome il significato di «deformazione senza moto rigido», essendo tale espressione in sè priva di senso. Si vedrà poco appresso che per la simmetria della $\mathcal{D}'$ esistono in ogni punto tre vettori dP_i ortogonali per i quali $\mathcal{D}' \, dP_i = k_i \, dP_i$: il vettore dP' nel quale si muta per lo spostamento il vettore generico dP, cioè $dP' = dP + ds = dP + \boldsymbol{\omega} \wedge dP + \mathcal{D}' \, dP$, sarà per ciascuno di essi $dP_i' = (1 + k_i) \, dP_i + \boldsymbol{\omega} \wedge dP_i$: essi risulteranno quindi rotati tutt'e tre allo stesso modo, dunque ancora ortogonali; ed è ovvia allora la scelta della rotazione $\boldsymbol{\omega}$ di tale triedro trirettangolo che resta indeformato come rotazione dell'elemento solido. Si vedrà inoltre che date (sotto certe condizioni) le sei componenti di $\mathcal{D}'$ come funzioni del punto in un certo spazio, resta determinata in ogni punto la deformazione totale $\mathcal{D}$ a meno di un'unica rotazione dello spazio medesimo; dunque tali sei componenti sono in realtà i soli elementi della deformazione tra loro indipendenti.

La definizione di una deformazione pura è possibile, secondo un analogo criterio, anche nel caso di uno spostamento finito.

perciò la lunghezza dx di esso vettore sarà divenuta

$$dx\sqrt{\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2}\,.$$

In questa espressione i termini $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2$ potranno trascurarsi quando siano infinitesimi d'ordine superiore a $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ (34): la nuova lunghezza sarà allora semplicemente $dx\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)=dx\,(1+\varepsilon_x)$. La componente ε_x rappresenta dunque il rapporto fra l'allungamento $dx\,\varepsilon_x$ e la lunghezza primitiva del vettore $dx\,\boldsymbol{i}$: essa si dirà pertanto *coefficiente di dilatazione lineare* (o semplicemente *dilatazione*) nella direzione dell'asse x. Analogamente ε_y ed ε_z saranno le dilatazioni nelle direzioni degli assi y e z.

Componenti $\frac{1}{2}\gamma$. — Si considerino ora due elementi P_0P, P_0Q appartenenti rispettivamente agli assi x ed y; e siano P_0', P', Q' le posizioni degli estremi di essi dopo la deformazione (fig. 23). Traslato l'elemento solido deformato (per semplicità della figura) del vettore $P_0 - P_0'$, il punto P_0 ritornerà nella posizione iniziale, e gli altri due si porteranno rispettivamente in P'' e Q''. (La deformazione dell'elemento resta naturalmente immutata). Volendo valutare la variazione dell'angolo retto $\widehat{PP_0Q}$ divenuto l'angolo $P''\widehat{P_0}Q''$, si osservi che potranno sostituirsi ai punti effettivi P'', Q'', non appartenenti in generale al piano xy, le loro proiezioni sul piano medesimo, indicate nella figura con le stesse lettere: mentre infatti la differenza tra l'angolo retto e l'angolo finale così proiettato è infinitesima dell'ordine minore fra quelli di $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ (come risulta dall'espressione che

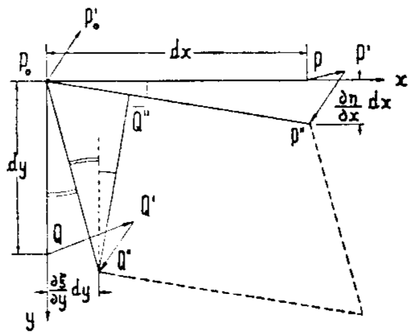

Fig. 23

(34) Tale avvertenza sarebbe ovviamente inutile se per spostamento infinitesimo dovesse intendersi necessariamente un certo spostamento (funzione del punto) moltiplicato per un fattore comune infinitesimo. Ma potrebbe anche pensarsi per esempio di moltiplicare le tre componenti di un dato spostamento rispettivamente per ε, ε^2, ε^3. In modo più naturale si può definire uno spostamento con componenti infinitesime di diverso ordine imponendo condizioni d'invarianza di lunghezze, come nel semplicissimo esempio di una rotazione rigida: un altro esempio si ha considerando lo spostamento di ogni punto di un certo segmento rettilineo (asse di una trave), quando si assegni la componente normale al segmento medesimo, e si ponga la condizione che resti invariata la lunghezza di ogni tratto di esso, per la quale si renderà necessaria una componente ad esso parallela, evidentemente infinitesima di second'ordine.

ora si troverà), è facile vedere che la differenza tra l'angolo proiettato e l'angolo effettivo è infinitesima d'ordine superiore ([35]). La variazione cercata, intesa positiva come diminuzione, risulta così uguale alla somma degli angoli $\widehat{PP_0P''}$ e $\widehat{QP_0Q''}$ formati rispettivamente dal vettore $P'' - P_0$ coll'asse x e dal vettore $Q'' - P_0$ coll'asse y, inteso ciascuno positivo nel senso che dal rispettivo asse conduce all'altro attraverso l'angolo retto (dunque entrambi positivi nel caso della figura); o anche, trattandosi di angoli infinitesimi, alla somma delle loro tangenti. Essendo poi

$$\operatorname{tg} \widehat{PP_0P''} = \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\, dx}{\left(1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \text{infinitesimi d'ordine superiore, e così}$$

$\operatorname{tg} \widehat{QP_0Q''} = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} +$ infinitesimi d'ordine superiore, risulta per la variazione cercata l'espressione $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}$, ossia il doppio della componente $\dfrac{1}{2} \gamma_{xy}$ del tensore $\mathcal{D}'$.

I numeri γ saranno detti *scorrimenti*. Questa denominazione si giustifica considerando insieme con l'elemento P_0P un elemento ad esso parallelo uscente da Q: mentre nello stato indeformato i due elementi hanno gli estremi P_0 e Q allineati secondo una perpendicolare comune (potrebbero cioè dirsi « affacciati »), dopo la deformazione il secondo di essi si ritrova ancora parallelo all'altro, ma non più con esso in tale relazione (cioè non più « affacciato »), essendo scorso rispetto ad esso del vettore $Q'' - P_0$ (fig. 23). La lunghezza di tale scorrimento rapportata alla distanza degli elementi medesimi è espressa evidentemente ancora, sempre

---

([35]) L'angolo effettivo è esprimibile in funzione dei rapporti fra i lati del triangolo avente i vertici nei punti P_0, P'', Q'' effettivi. Indicata con δ la variazione infinitesima nel passaggio dall'effettiva figura deformata alla sua proiezione sul piano x, y, si ha ovviamente

$$\delta \frac{\overline{P_0\,P''}}{\overline{P_0\,Q''}} : \frac{\overline{P_0\,P''}}{\overline{P_0\,Q''}} = \delta\, ln \frac{\overline{P_0\,P''}}{\overline{P_0\,Q''}} = \frac{\delta\, \overline{P_0\,P''}}{\overline{P_0\,P''}} - \frac{\delta\, \overline{P_0\,Q''}}{\overline{P_0\,Q''}} .$$

I due termini dell'ultimo membro, variazioni relative delle lunghezze $\overline{P_0\,P''}$, $\overline{P_0\,Q''}$, sono, per quanto s'è visto in proposito delle dilatazioni, infinitesimi dell'ordine rispettivamente di $\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2$ e $\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2$: la variazione relativa del rapporto $\dfrac{\overline{P_0\,P''}}{\overline{P_0\,Q''}}$, e quindi anche la variazione assoluta di esso, risulta così dell'ordine minore fra quelli di tali due quadrati. Poichè alla stessa conclusione può giungersi analogamente per le variazioni degli altri due rapporti dei lati del triangolo suddetto, e poichè infine l'espressione dell'angolo considerato in funzione di tali rapporti ammette evidentemente derivate prime finite, risulta infinitesima dello stesso ordine la variazione dell'angolo stesso. cioè la differenza tra esso e la sua proiezione. Per poterla trascurare basta dunque ammettere che il quadrato delle derivate di ciascuna delle componenti dello spostamento sia infinitesimo d'ordine superiore a quello di ciascuna delle espressioni γ.

a meno di infinitesimi d'ordine superiore, da γ_{xy}. (Si considera così positivo lo scorrimento quando l'elemento più avanzato nel senso positivo dell'asse y scorre rispetto all'altro nel senso positivo dell'asse x [36].)

Ai sei numeri $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ si dà il nome di *componenti della deformazione* [37]. Quando in un punto queste siano note, sarà nota nel punto medesimo ogni altra grandezza riguardante la deformazione dell'intorno infinitesimo di esso, come già sopra s'è osservato. Come conferma si consideri innanzi tutto che la dilatazione in una direzione qualunque può determinarsi riferendo il tensore $\mathcal{D}'$ a una nuova terna cartesiana ortogonale, un asse della quale abbia tale direzione (si ricordi la nota [30]). Per determinare la variazione dell'angolo formato da due direzioni quali si vogliano si può pensare ad un triangolo infinitesimo, due lati del quale passino per il considerato punto ed abbiano tali direzioni: si deduce allora la variazione cercata dalle variazioni di lunghezza dei tre tali, cioè dalle rispettive dilatazioni. E così infine la determinazione della variazione di un diedro è riconducibile a quella delle dilatazioni in sei direzioni, cioè quelle degli spigoli di un tetraedro avente un vertice nel punto considerato (fig. 24) e un diedro coincidente con quello di cui si ricerca la variazione [38].

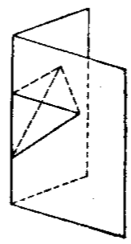

Fig. 24

7. Per la validità del significato delle espressioni ε e γ basta ammettere come s'è visto (si ricordi anche la nota [35]) che il quadrato di ognuna delle derivate delle componenti di spostamento sia infinitesimo d'ordine superiore a quello di tutte le espressioni medesime. Si tratta di una condizione che potrebbe considerarsi sempre sodisfatta in teoria, inteso lo spostamento infinitesimo nel modo più ovvio, cioè come uno spostamento determinato moltiplicato per un fattore numerico infinitesimo indipendente dal punto (vedasi la nota [34]); ma che non può invece essere sempre dimenticata nell'applicazione ai casi reali secondo i concetti esposti al paragrafo 5. Essa si muta infatti in tale applicazione nella condizione della trascurabilità, conforme a un assegnato criterio d'approssimazione, di ciascuno dei quadrati delle derivate suddette rispetto a ciascuna delle espressioni ε e γ; ossia, poichè tali derivate (escluse le stesse ε) si esprimono come combinazioni lineari delle γ e delle componenti del vettore $\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{s}$, nella condizione della trascurabilità, sempre rispetto alle ε

[36] E' chiaro che la stessa $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ misura anche lo scorrimento di due elementi paralleli all'asse y nel piano xy, rapportato alla loro distanza.

[37] Si ricordi che mentre le ε sono le componenti del tensore $\mathcal{D}'$ disposte sulla diagonale principale, ognuna delle γ è il doppio di una delle altre componenti.

[38] Si avverta che i suddetti triangoli e tetraedri contengono lati e spigoli non passanti per il punto considerato. Ma appartenendo essi a un intorno infinitesimo di tale punto, le loro dilatazioni sono (anche nel caso di una deformazione finita) da considerare pari a quelle degli elementi condotti parallelamente per il punto medesimo.

e alle γ, del quadrato del vettore medesimo [39]. È poi da osservare che in caso contrario potrà anche non essere più lecito, conforme allo stesso criterio d'approssimazione, attribuire ad ω nella (7) (dove sia posto $\mathcal{R}\, dP = \omega \wedge dP$) il significato di rotazione, e concludere quindi che in $\mathcal{D}'$ è contenuta l'intera deformazione: quando la suddetta condizione non sia sodisfatta le espressioni ε e γ potranno dunque perdere insieme col significato specifico sopra trovato anche quello più generico di componenti della deformazione pura, e potranno divenire così inaccettabili certi risultati della teoria che sarà sviluppata sul fondamento di quest'ultimo significato.

Ora il caso che la rotazione acquisti valori maggiori di quelli della deformazione è da considerare tutt'altro che eccezionale, verificandosi appunto per quei corpi già indicati genericamente al paragrafo 5 come lastre e travi, oggetto delle più usuali applicazioni. La ragione sta nel fatto che si sommano lungo cammini dell'ordine di grandezza della dimensione massima del corpo le differenze tra le rotazioni medie di tronchi contigui dell'ordine delle dimensioni minime; le quali differenze, occorrenti a mantenere il contatto dei tronchi deformati, sono in generale dell'ordine stesso della deformazione. Ciò risulterà in forma più precisa dall'espressione della rotazione come integrale di combinazioni lineari di derivate della deformazione (§ 12); ma potrà servire intanto di chiarimento un semplice esempio. (Si ricordi anche la nota [28].) Nel caso della mensola sollecitata da una coppia all'estremo (fig. 25) la deformazione, consistente essenzialmente in una dilatazione positiva delle fibre da una parte (inferiore) e negativa delle fibre dall' altra parte del piano passante per l' asse e parallelo al momento della coppia, si mantiene costante per ogni sezione, mentre la rotazione risulta proporzionale alla distanza dalla sezione di incastro. Da una certa sezione in poi, quando la mensola di determinata sezione sia sufficientemente prolungata, la condizione sopra ricordata non sarà più sodisfatta, e non saranno più accettabili le ordinarie espressioni della deformazione e della rotazione [40]: come conseguenza risulterà un errore non trascurabile nella valutazione dello spostamento [41].

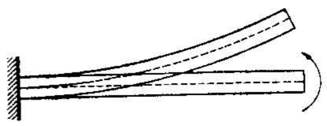

Fig. 25

---

[39] Quando le espressioni ε e γ non siano tutte del medesimo ordine di grandezza, potrà bastare che il quadrato di ω sia trascurabile rispetto a quelle d'ordine maggiore, anche se possa risultare notevole l'errore nell'espressione delle altre.

[40] S'intende che tali espressioni resteranno accettabili per ogni tronco della mensola non troppo lungo, quando per ciascuno di essi tronchi si consideri aggiunta allo spostamento una rotazione rigida, contraria per esempio a quella della sezione di mezzo del tronco medesimo (e quindi anche quando ciascun tronco sia riferito ad un diverso sistema di assi).

[41] Si è considerata la mensola sollecitata dalla coppia per tener distinto l'effetto di cui trattasi da quello della variata configurazione del corpo, che ovviamente in tal caso è nullo; mentre per altre sollecitazioni può essere invece prevalente, come risulta da quanto s'è osservato al paragrafo 5 (compresa sempre anche la nota [28]).

8. Ogni tensore simmetrico è riducibile a *forma canonica*, vale a dire a una forma nella quale siano diverse da zero soltanto le componenti della diagonale principale. Si consideri infatti il tensore simmetrico $\mathcal{T}$, e si ponga la condizione $\mathcal{T}\boldsymbol{i}' = k\boldsymbol{i}'$ esprimente che l'applicazione di esso al versore $\boldsymbol{i}'$ trasformi quest'ultimo in un vettore della stessa direzione. Dette α_x, α_y, α_z le componenti di $\boldsymbol{i}'$ (cioè rispettivamente $\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{k}$), ed esprimendo quindi tale condizione nella forma

$$\begin{aligned} t_{xx}\,\alpha_x + t_{yx}\,\alpha_y + t_{zx}\,\alpha_z &= k\,\alpha_x \\ t_{xy}\,\alpha_x + t_{yy}\,\alpha_y + t_{zy}\,\alpha_z &= k\,\alpha_y \\ t_{xz}\,\alpha_x + t_{yz}\,\alpha_y + t_{zz}\,\alpha_z &= k\,\alpha_z\,, \end{aligned}$$

si ottiene il sistema omogeneo

$$\left\{\begin{aligned} (t_{xx}-k)\,\alpha_x + t_{yx}\,\alpha_y + t_{zx}\,\alpha_z &= 0 \\ t_{xy}\,\alpha_x + (t_{yy}-k)\,\alpha_y + t_{zy}\,\alpha_z &= 0 \\ t_{xz}\,\alpha_x + t_{yz}\,\alpha_y + (t_{zz}-k)\,\alpha_z &= 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

nelle incognite α_x, α_y, α_z. Affinchè esso ammetta una soluzione diversa da quella triviale è necessario e sufficiente che sia

$$\begin{vmatrix} t_{xx}-k & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy}-k & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz}-k \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

dove per ipotesi $t_{xy} = t_{yx}$, $t_{yz} = t_{zy}$, $t_{zx} = t_{xz}$: equazione di terzo grado nell'incognita k, nota come *equazioni secolare*, che si dimostra ammettere sempre tre radici reali. Queste sono dunque, conforme al significato della condizione posta, i valori della dilatazione nelle direzioni dei vettori che l'operatore $\mathcal{T}$ non fa rotare: tali direzioni sono definite, per ciascuno dei valori medesimi, dal sistema omogeneo (8). Per vedere che esse sono a due a due ortogonali, si osservi che per la simmetria di $\mathcal{T}$ si ha $\mathcal{T}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathcal{T}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, essendo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vettori arbitrari ([42]). Applicando tale relazione ai versori $\boldsymbol{i}'_1$, $\boldsymbol{i}'_2$ corrispondenti alle radici k_1, k_2 dell'equazione secolare, si

([42]) Tale relazione è verificata per la stessa definizione di simmetria a riguardo dei versori fondamentali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Si ottiene quindi immediatamente $\mathcal{T}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i} = \mathcal{T}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{u}$ per $\boldsymbol{u}$ vettore arbitrario (basta esprimerlo per i versori fondamentali); e per essere $\boldsymbol{i}$ di direzione generica (si ricordi l'osservazione della nota ([31])), la relazione medesima è così dimostrata in generale.

ha $k_1 \, \boldsymbol{i}_1' \times \boldsymbol{i}_2' = k_2 \, \boldsymbol{i}_2' \times \boldsymbol{i}_1'$, onde $\boldsymbol{i}_1' \times \boldsymbol{i}_2' = 0$ purchè sia $k_1 \neq k_2$. Nel caso di una radice doppia $k_1 = k_2$ restano invariate tutte le direzioni del piano normale alla direzione corrispondente alla terza radice; fra le quali potranno scegliersi ad arbitrio due direzioni ortogonali (43).

I tre assi secondo le direzioni ora definite sono detti assi principali del tensore simmetrico $\mathcal{T}$. Gli assi principali del tensore $\mathcal{D}'$ si dicono anche *assi principali della deformazione*; e le rispettive dilatazioni, radici ε_1, ε_2, ε_3 della equazione (nell'incognita ε)

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

si dicono *dilatazioni principali*. Il tensore $\mathcal{D}'$ riferito al sistema di assi cartesiani secondo le direzioni principali assume la *forma canonica*

$$\mathcal{D}' \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Si consideri la forma quadratica, associata a $\mathcal{D}'$,

$$\varepsilon_x \, x^2 + \varepsilon_y \, y^2 + \varepsilon_z \, z^2 + \gamma_{xy} \, xy + \gamma_{yz} \, yz + \gamma_{zx} \, zx \,, \tag{10}$$

osservando che riguardate le variabili x, y, z come componenti di un vettore generico $\boldsymbol{u}$, essa rappresenta il prodotto scalare $\mathcal{D}'\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}$. Per un versore $\boldsymbol{n}$ di componenti α_{nx}, α_{ny}, α_{nz} (coseni direttori), ricordando che per definizione $\mathcal{D}'\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = \varepsilon_n$, risulta

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \, \alpha_{nx}^2 + \varepsilon_y \, \alpha_{ny}^2 + \varepsilon_z \, \alpha_{nz}^2 + \gamma_{xy} \, \alpha_{nx} \, \alpha_{ny} + \gamma_{yz} \, \alpha_{ny} \, \alpha_{nz} + \gamma_{zx} \, \alpha_{nz} \, \alpha_{nx}$$

---

(43) Ciò può dimostrarsi osservando che per tale valore di k la caratteristica della matrice del sistema (8) diventa 1. Ma si può anche considerare il caso delle due radici coincidenti come caso limite di quello delle radici distinte: le direzioni ad esse corrispondenti, sempre ortogonali, resteranno tali anche al limite; e valendo allora le (8) con uno stesso valore di k per due distinte direzioni, varranno ovviamente per ogni direzione del piano di esse. Nel caso della radice tripla (che può riguardarsi a sua volta come caso limite del precedente) sarà $\mathcal{T}\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u}$ per qualunque vettore $\boldsymbol{u}$.

(come poteva aversi anche dalla formula di trasformazione della nota ([30])). Se il vettore generico $\boldsymbol{u}$ di modulo u ha la direzione del versore $\boldsymbol{n}$, quindi le componenti $x = u\,\alpha_{nx}$, $y = u\,\alpha_{ny}$, $z = u\,\alpha_{nz}$ si ha così

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{xy}\,xy + \gamma_{yz}\,yz + \gamma_{yx}\,zx = u^2\,\mathcal{D}'\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = u^2\,\varepsilon_n\,.$$

E quando in particolare sia $\boldsymbol{u} = P - O$, essendo O l'origine degli assi (cioè un punto fisso arbitrario) e P un punto generico, ossia quando le variabili x, y, z della forma quadratica siano le coordinate del punto P, la forma medesima rappresenterà il prodotto $\overline{OP}^2\,\varepsilon$, essendo ε la dilatazione nella direzione generica OP ([44]). Se allora si pone l'equazione

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{xy}\,xy + \gamma_{yz}\,yz + \gamma_{zx}\,zx = \pm\,k^2 \tag{11}$$

(dove sia k una lunghezza arbitraria), risulta $\overline{OP}^2\varepsilon = \pm k^2$, ossia $\overline{OP} = \dfrac{k}{\sqrt{\pm\,\varepsilon}}$. Il segno in evidenza nel radicando dovrà essere ovviamente quello stesso di ε.

Si conclude che la lunghezza del raggio vettore avente origine in O e termine nel punto generico P di una delle quadriche rappresentate dall'equazione (11) è inversamente proporzionale alla radice quadrata del modulo della dilatazione nella direzione del raggio stesso. Tali quadriche danno così una rappresentazione della variabilità della dilatazione secondo le diverse direzioni nel punto del corpo cui si riferisce il tensore $\mathcal{D}'$. La dilatazione sarà positiva o negativa secondo che P appartenga alla superficie corrispondente al segno $+$ o al segno $-$ del secondo membro della (11). Si ricordi che questa rappresenta due iperboloidi, uno ad una falda e uno a due falde, oppure un ellissoide reale ed uno immaginario (il quale ultimo ovviamente non ha significato in queste considerazioni); e si osservi che gli assi principali di esse quadriche (riferita ai quali la (11) assume la forma canonica) sono i medesimi assi principali della deformazione. Considerando da prima il caso dei due iperboloidi (fig. 26), e ponendo che l'iperboloide a due falde, rappresentato nella figura dall'iperbole (a), corrisponda alle dilatazioni positive (cioè al segno $+$ della (11)), al minore OP dei raggi vettori dell'iperboloide medesimo corrisponderà la dilatazione massima, e al minore dei

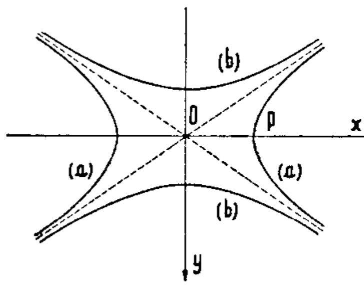

Fig. 26

([44]) Tale forma rappresenta dunque una funzione del punto P indipendente dal sistema di riferimento (al variare del quale variano i coefficienti della forma, che sono le componenti del tensore $\mathcal{D}'$, e le coordinate del punto).

raggi vettori dell'altro iperboloide (avente due assi reali) la dilatazione minima; mentre la terza delle dilatazioni principali, intermedia fra le due, sarà negativa. Nel caso invece che l'iperboloide a due falde corrisponda alle dilatazioni negative, si avranno due dilatazioni principali positive ed una negativa: quest'ultima sarà pertanto la minima, ed una delle altre due sarà la massima. Quando le due quadriche si riducano al solo ellissoide reale tutt'e tre le dilatazioni principali saranno dello stesso segno, che sarà lo stesso di ogni altra dilatazione, e due di esse saranno la massima e la minima fra tutte.

Il cono asintotico comune alle due quadriche, reale nel caso degl'iperboloidi, la cui equazione è la stessa (11) col secondo membro nullo, separa le due regioni in ciascuna delle quali la dilatazione si mantiene di un medesimo segno: nelle direzioni delle generatrici di esso la dilatazione è nulla, come risulta anche dall'essere infiniti i rispettivi raggi vettori.

9. Un concetto di particolare importanza è quello della *dilatazione cubica* (45). Si definisce come tale, in un dato punto e per un'assegnata deformazione, il rapporto fra l'incremento del volume di un elemento infinitesimo nell'intorno del punto e il volume dell'elemento medesimo indeformato: $\Theta = \dfrac{dV' - dV}{dV}$, essendo dV e dV' rispettivamente i volumi dell'elemento avanti e dopo la deformazione. Indicate con x, y, z le coordinate cartesiane del punto generico nella configurazione indeformata, e con x', y', z' le coordinate rispetto allo stesso sistema di assi dello stesso punto del corpo nello stato deformato (46), si effettui in questo secondo stato un *cambiamento di variabili* attribuendo al punto medesimo ancora le coordinate (non più cartesiane) x, y, z. È noto dall'analisi che il volume dV' dell'elemento si esprime per queste nuove variabili nella forma $dV' = \left|\dfrac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}\right| dV$, essendo $\dfrac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}$ il determinante funzionale, o jacobiano, delle funzioni x', y', z' rispetto alle variabili x, y, z (47): risulta così

$$\Theta = \left|\frac{D(x', y', z')}{D(x, y', z)}\right| - 1 ;$$

(45) Si tralascia la considerazione della dilatazione superficiale, che è di minor interesse.

(46) S'intende il punto distinto materialmente dagli altri punti del corpo.

(47) Lo jacobiano è stato posto in valore assoluto per generalità. (Si ricordi anche che il cambiamento di variabili è da operare sotto la condizione che esso si mantenga di uno stesso segno, che è condizione necessaria per la biunivocità della corrispondenza) In effetto dallo stesso significato di tale valore assoluto come rapporto degli elementi di volume dV' e dV si deduce che nel caso di cui trattasi esso jacobiano è sempre positivo in ogni punto, anche per spostamenti finiti, atteso che questi debbono avvenire gradualmente senza che il volume dell'elemento venga mai ad annullarsi.

ed essendo $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$,

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} - 1,$$

che è l'espressione esatta, valida cioè per spostamenti finiti. Nel caso degli spostamenti infinitesimi, trascurando nello sviluppo del determinante i termini di 2^0 e di 3^0 ordine resta semplicemente

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ (48)}. \tag{12}$$

Tale espressione è indipendente, come naturalmente doveva risultare, dalla scelta degli assi : si tratta infatti dell'invariante lineare del tensore $\mathcal{D}'$ o della forma quadratica ad esso associata.

10. Si presenta ora ovviamente il problema della determinazione dello spostamento da cui derivi una deformazione assegnata in un dato spazio (cioè in ogni punto di esso): alla discussione del quale si stima opportuno premettere i seguenti brevi richiami d'analisi.

Ordine di connessione di un campo.

Un campo connesso, cioè tale che due punti presi in esso ad arbitrio possano riunirsi mediante una linea continua tutta in esso contenuta, dicesi *aciclico*, o *a connessione semplice*, quando ogni sua linea chiusa può ridursi per deformazione continua, sempre senza uscire dal campo stesso, ad un punto; dicesi *ciclico*, o *a connessione multipla*, nel caso contrario. Si diranno *di una stessa specie* due linee chiuse di un campo che per deformazione continua possano ridursi l'una all'altra: in particolare apparterranno ad una stessa specie tutte le linee chiuse di un campo riducibili a un punto.

Per deformazione continua ogni linea chiusa di un dato campo spaziale potrà trasferirsi sul contorno di esso, costituito da una o da più superficie chiuse; nel qual ultimo caso vi saranno linee del campo trasferibili interamente su una di tali superficie, e altre che potranno scindersi

---

(48) Basta ammettere anche qui la condizione già dichiarata al paragrafo 7, ricordando che sarà allora infinitesimo d'ordine superiore rispetto a ciascuna delle derivate delle componenti di spostamento anche il prodotto di due di esse quali si vogliano.

in due o più trasferibili su superficie diverse (49). Su ciascuna di queste una linea che abbia punti doppi potrà poi scindersi in più linee semplici, cioè prive di punti doppi. Ognuna di queste ultime che divida la superficie in due parti sarà riducibile sulla superficie medesima ad un punto, e così sarà evidentemente riducibile a un punto la linea del campo spaziale da cui essa provenga; ma si avverta che potrà invece provenire da una linea di tale campo riducibile a un punto anche una linea che non divida la superficie in due parti, quindi non riducibile invece ad un punto sulla superficie medesima. Una linea siffatta appartenente per esempio al campo esterno ad una superficie torica potrà trasferirsi su un parallelo di questa, che è su tale superficie una linea non riducibile a un punto.

Su ogni superficie chiusa si avrà un numero massimo di linee chiuse senza punti doppi, che insieme non la dividano almeno in due parti. Ogni sistema di linee in numero uguale a tale massimo, che lasci la superficie indivisa, potrà riguardarsi in essa come sistema fondamentale; già che ogni altra linea non riducentesi a un punto, e sempre senza punti doppi, costituendo insieme con alcune di quelle (da una a tutte) il contorno di ciascuna delle due parti in cui dalle linee medesime deve per ipotesi restar divisa la superficie, potrà ridursi per deformazione continua all'insieme delle altre (50). (Nella fig. 27, rappresentante un doppio anello, è mostrato come possa deformarsi la linea (1) per ridursi all'insieme delle (2) e (3). Anche ogni linea con punti doppi potrà ridursi mediante la decomposizione in linee semplici alle stesse linee fondamentali, colla differenza che ciascuna di queste potrà esser contata più volte.

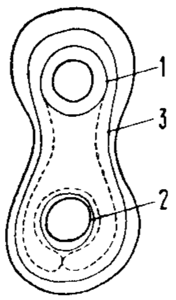

Fig. 27

Risulta così che ogni linea chiusa del campo spaziale, non riducibile a un punto, è riducibile all'insieme delle linee fondamentali delle superficie costituenti il contorno del campo medesimo, tolte quelle che nello spazio divengano riducibili a un punto come nell'esempio sopra indicato, contata ciascuna un certo numero di volte (ovviamente compreso lo zero). Poichè d'altra parte nessuna di tali linee sarà riducibile in esso campo all'insieme delle altre (51), potranno riguardarsi le linee medesime come linee

(49) La scissione avverrà ovviamente, per deformazione continua, dopo che siano stati portati a coincidere due distinti punti della linea considerata.

(50) E' chiaro che tale deformazione potrà avvenire tanto sull'una quanto sull'altra delle due parti della superficie, e che la linea con le sue successive deformate verrà a ricoprire interamente la parte medesima.

(51) Si avrebbe infatti una superficie, cioè quella ricoperta dalla linea considerata colle sue successive deformate nel ridursi all'insieme delle altre, contenuta nel campo e delimitata da linee appartenenti al contorno di esso; la quale potrebbe per deformazione continua, mantenendosi invariate le linee medesime, sovrapporsi allo stesso contorno, e così la considerata riduzione dovrebb'essere possibile anche in quest'ultimo.

fondamentali del campo. Il loro numero aumentato di 1 si dirà *l'ordine di connessione* di questo; ed essendo i tale numero, si dirà anche che il campo è i volte connesso. Può anche dirsi che i è il numero delle specie di linee chiuse indipendenti del campo medesimo, compresa la linea riducibile a un punto.

Per esempio il campo racchiuso da una superficie torica è due volte connesso, poichè ogni linea non riducibile a un punto potrà ridursi a un cerchio concentrico ad uno dei paralleli, contato una o più volte; e a connessione doppia è pure il campo esterno alla superficie medesima, illimitato o limitato per esempio da una superficie sferica, nel quale ogni linea non riducibile a un punto può ridursi invece ad un cerchio concentrico a una mezza sezione meridiana, contato una o più volte. (Nel primo caso la mezza sezione meridiana è invece riducibile a un punto, come nel secondo caso il parallelo.) Due volte connesso è anche il campo illimitato esterno a un cilindro (e questo può considerarsi come caso limite del precedente), o quello esterno al cilindro e interno a una sfera che da esso sia attraversata, intendendosi che a tali superficie possano sostituirsene altre che ad esse siano riducibili: si ha così un contorno costituito da un'unica superficie. Un campo a connessione tripla è l'anello doppio (fig. 27), come il campo a questo esterno, o esterno a due anelli, racchiuso o no da una superficie riducibile ad una sfera; e così il campo racchiuso da una superficie siffatta, dal quale siano esclusi due cilindri, o due tubi che attraversino quest'ultima (campo limitato da un'unica superficie); e così via.

Se si considera un taglio eseguito secondo una superficie (a due facce) che abbia per contorno una o più linee chiuse appartenenti al contorno del campo, il campo medesimo potrà restare diviso in due parti, non esistendo in esso dopo il taglio alcuna linea che congiunga un punto appartenente ad una faccia di tale superficie con un punto appartenente all'altra faccia. Il campo resterà invece ancora connesso quando esista una linea siffatta, ed esista pertanto nel campo non tagliato una linea chiusa attraversante la superficie suddetta in un solo punto (e con un sol ramo); la quale linea resterà dal taglio interrotta, e con essa ogni linea della medesima specie (poichè per deformazione continua il punto d'attraversamente non potrebbe evidentemente uscire dalla superficie senza uscire dal campo). Siccome poi ogni linea chiusa attraversante la superficie una sola volta potrà ridursi all'insieme di una fissa e di una non attraversante la superficie medesima, si conclude che il taglio interrompe una sola linea fondamentale, diminuendo così di 1 l'ordine di connessione del campo. Quindi risulta che tale ordine è anche il numero dei tagli occorrenti a dividere il campo in due parti semplicemente connesse. Poichè infatti tra essi tagli non può evidentemente esservene più d'uno che da solo divida il campo, basta osservare che senza questo eventuale taglio il campo dovrà trovarsi ridotto aciclico (perchè costituito di due parti acicliche), e che a tal effetto occorrono $i - 1$ tagli. Risulta infine che considerato il campo diviso in due parti da un solo taglio, e detti i_1, i_2 gli ordini di connessione di esse, si ha la relazione $i_1 + i_2 = i + 1$.

Lemma di Gauss (o di Green).

Considerando per semplicità d'esposizione il caso del piano, sia $f(x, y)$ una funzione finita e continua in ogni punto di un campo Σ comunque connesso, ed ammettente la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$ integrabile rispetto ad x nel campo medesimo. Si vuol dimostrare la relazione

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_{(c)} f \alpha_x ds, \tag{13}$$

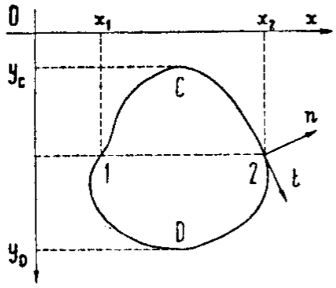

Fig. 28

essendo c il contorno di Σ, costituito di una o più linee chiuse, ed α_x il coseno direttore rispetto all'asse x della normale esterna al contorno medesimo.

Posto da prima che c sia costituito di una sola linea (senza punti doppi), che sia incontrata da ogni parallela all'asse x in due soli punti, si ha ovviamente (fig. 28)

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_{y_C}^{y_D} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_{y_C}^{y_D} \{f[x_2(y), y] - f[x_1(y), y]\} dy;$$

onde la (13) per essere $dy = ds|\cos \widehat{ty}|$ (52), dove sia t la direzione della tangente ottenuta da quella della normale esterna mediante rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, cioè la stessa che porta dalla direzione x alla y: basta infatti osservare che $\cos \widehat{ty} = \cos \widehat{nx}$, e che l'angolo $\widehat{nx}$ è acuto nei punti 2 che sono punti d'uscita della retta parallela ad x, ottuso nei punti 1 che sono punti d'entrata; perciò in 2 è $dy = \alpha_x ds$, in 1 è $dy = -\alpha_x ds$.

Quando il contorno del campo Σ non sodisfaccia alle condizioni poste, ci si ricondurrà al caso considerato decomponendo il campo medesimo in parti per mezzo di parallele ad x tangenti al contorno, come mostra la fig. 29 nel caso di un campo

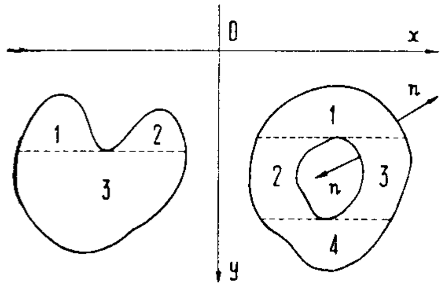

Fig. 29

(52) Si osservi che ds e dy sono da considerare essenzialmente positivi.

aciclico e nel caso di un campo ciclico (53): basta evidentemente sommare le relazioni (13) scritte per le singole parti, per ottenere la relazione medesima riferita all'intero campo Σ. Nel caso del corpo ciclico essendo costituito il contorno di più linee chiuse, il secondo membro della (13) s'intende esteso all'insieme di esse.

Se la f avesse una linea di discontinuità, non sarebbe più $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(x_2, y) - f(x_1, y)$, perciò la (13) non sarebbe più valida. Non toglierebbe invece la validità della relazione medesima un punto isolato di discontinuità della f, poichè basterebbe escludere dal campo un intorno infinitesimo del punto stesso, e l'integrale curvilineo esteso al contorno di questo ultimo sarebbe ovviamente infinitesimo, eccettuato il caso che il punto considerato fosse un punto d'infinito. In quest'ultimo caso la differenza dei due membri della (13) assumerebbe un valore in generale diverso da zero. (Si avverta che il punto d'infinito toglie l'integrabilità della $\frac{\partial f}{\partial x}$ lungo la parallela ad x per il punto stesso.)

Nello spazio il lemma di Gauss assume la forma

$$\int_{(S)} \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_{(\Sigma)} f \alpha_x \, dA, \qquad (13')$$

essendo Σ il contorno dello spazio S. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente.

Integrabilità della forma differenziale lineare $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

Si vuol dimostrare che condizione *necessaria e sufficiente* per tale integrabilità, quando P e Q siano funzioni finite e continue in ogni punto di un campo semplicemente connesso, ammettenti le derivate $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ finite e continue nel punto generico del campo medesimo (54), è che sia identicamente

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(53) L'ordine di connessione di un campo piano si definisce in modo del tutto analogo a quello di un campo spaziale. Si vede subito che l'ordine di connessione di un campo piano (finito) delimitato da un certo numero di linee chiuse senza punti doppi è pari al numero stesso.

(54) Dicendo nel punto generico s'intende qui (e così s'intenderà appresso nell'esprimere analoghe condizioni) che possa essere escluso nel caso del campo superficiale un numero finito di punti isolati o di linee, nel caso del campo spaziale anche un numero finito di superficie.