

e dall'analogia riguardante $\int_{(\Sigma)} \mu'_y \frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial x} dA$ risulta

$$\int_{(\Sigma)} \left(\mu'_x \frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial y} - \mu'_y \frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial x} \right) dA = \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \mu'_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu'_x}{\partial y} \right) \delta \zeta_0 dA - \int_{(c)} \mu'_t \delta \zeta_0 ds,$$

essendo

$$\mu'_t = \mu'_y \alpha_x - \mu'_x \alpha_y.$$

Siccome poi è ovviamente

$$\int_{(c)} \mu_n \frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial t} ds = - \int_{(c)} \frac{d\mu_n}{ds} \delta \zeta_0 ds,$$

si ottiene infine

$$\delta \mathcal{U} = \int_{(\Sigma)} \left(p + \frac{\partial \mu'_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu'_x}{\partial y} \right) \delta \zeta_0 dA + \int_{(c)} \left(r_z - \mu'_t - \frac{d\mu_n}{ds} \right) \delta \zeta_0 ds - \int_{(c)} \mu_t \frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial n} ds.$$

Dalle espressioni trovate di $\delta \Phi$ e $\delta \mathcal{U}$ risulta, ricordando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (in senso più esteso che al paragrafo 28, osservando cioè che dev'essere identicamente nulla anche la funzione che moltiplica l'arbitraria derivata normale $\frac{\partial \delta \zeta_0}{\partial n}$), che condizioni necessarie e sufficienti per l'uguaglianza delle due variazioni prime sono le seguenti:

$$\frac{Gh^3}{6} \frac{m}{m-1} \Delta^2 \zeta_0 = p + \frac{\partial \mu'_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu'_x}{\partial y}; \quad (67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Gh^3}{6} \left(\frac{m}{m-1} \Delta \zeta_0 - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} \right) = - \mu_t \\ - \frac{Gh^3}{6} \left(\frac{m}{m-1} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial n} + \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n \partial t} \right) = r_z - \mu'_t - \frac{d\mu_n}{ds}. \end{array} \right. \quad (67')$$

L'equazione differenziale (67) si dirà *equazione di Lagrange* (nome che si dà comunemente alla relazione medesima col secondo membro costituito dal solo termine p). Le (67') sono le condizioni naturali al contorno accennate alla nota⁽²⁰⁷⁾, che insieme con l'equazione differenziale determinano la soluzione in funzione degli assegnati secondi membri. Che effettivamente tale soluzione resti così univocamente determinata, cioè che

resti determinata la funzione ζ_0 a meno di un termine lineare, è confermato dall'osservazione che la differenza tra due funzioni soddisfacenti alle stesse (67) e (67') è una ζ_0 soddisfacente all'equazione medesima e alle medesime condizioni al contorno, rese l'una e le altre omogenee: risultando evidentemente nulla la corrispondente $\delta\mathcal{L}$, risulterà anche $\delta\Phi = 0$. Ma essendo $\Phi = \int_{(S)} \varphi dV$, e φ una forma quadratica definita delle derivate seconde di ζ_0 , è chiaro che ponendo $\delta\zeta_0 = \varepsilon \zeta_0$ (con ε numero costante infinitesimo) si ha $\delta\Phi = 2\varepsilon\Phi$; dunque dovrà risultare nullo per la ζ_0 considerata lo stesso potenziale elastico Φ , quindi nullo identicamente φ , e tali tutte le derivate seconde della ζ_0 medesima ⁽²⁷²⁾.

64. Può osservarsi subito che la coppia μ' di componenti μ'_x, μ'_y interviene solo col suo rotazionale e colla componente normale al contorno (rispettivamente nell'equazione indefinita e nella seconda delle annesse condizioni), e che quando quest'ultima sia nulla l'effetto di tale coppia si dimostra pari a quello di un carico p uguale al rotazionale di essa. Naturalmente questa equivalenza è da intendere nello stess'ordine di approssimazione secondo il quale è accettabile nell'uno e nell'altro problema l'espressione dello spostamento nella forma fissata da principio. In tale proposito è da avvertire per altro che alle stesse equazioni (67), (67') si giunge, con le approssimazioni successivamente introdotte, movendo da un'espressione dello spostamento alquanto più generale che si ottiene con l'aggiunta di un termine alla componente ζ , ponendo cioè in luogo della prima delle (64)

$$\zeta = \zeta_0(x, y) + \frac{\Delta\zeta_0}{2(m-1)}(z^2 - ch^2),$$

dove sia c una costante numerica indeterminata. Risultano infatti analogamente modificate le sole espressioni di γ_{zx}, γ_{yz} , trascurate nella valutazione di $\delta\Phi$ ⁽²⁷³⁾; mentre nella valutazione di $\delta\mathcal{L}$ sarà da tenere ancora

⁽²⁷²⁾ Si avverta che per una variazione dello spostamento in forma di moto rigido è nulla la variazione di ogni funzione delle sole componenti della deformazione; e nulla risulta infatti per una tale variazione dello spostamento la variazione della considerata espressione di Φ , benchè essa non sia che un'espressione approssimata del potenziale elastico per lo spostamento del tipo prefissato (mancando i termini dovuti alle γ_{zx}, γ_{yz}). Dovrà allora essere anche $\delta\mathcal{L} = 0$; onde si conclude ovviamente che per l'esistenza della soluzione del problema analitico definito nel modo sopra esposto sono necessarie le condizioni complessive d'equilibrio delle forze e coppie considerate nell'espressione di $\delta\mathcal{L}$:

$$\int_{(\Sigma)} p dA + \int_{(c)} r_z ds = 0, \int_{(\Sigma)} \mu'_x dA + \int_{(c)} (\mu_n \alpha_x - \mu_t \alpha_y) ds = 0, \int_{(\Sigma)} \mu'_y dA + \int_{(c)} (\mu_t \alpha_x + \mu_n \alpha_y) ds = 0.$$

⁽²⁷³⁾ Non risultando più nulli tali scorrimenti per $z = 0$, i segmenti normali alla lastra non restano più normali alla superficie deformata della sezione mediana.

per ζ il solo primo termine⁽²⁷⁴⁾. Sarà possibile allora distinguere i due casi del carico p e della coppia μ' scegliendo per ciascuno un valore di c , il quale consenta la miglior possibile concordanza delle forze che effettivamente equilibrano la tensione derivante dallo spostamento trovato con i dati dei rispettivi problemi. A tal fine si comincerà con l'esprimere le componenti della tensione medesima ricavandoli ovviamente dalle (65), posto nelle due ultime $z^2 - ch^2$ in luogo di z^2 . Si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2G \left(\frac{\Delta\zeta_0}{m-1} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right) z, & \sigma_y &= -2G \left(\frac{\Delta\zeta_0}{m-1} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right) z, & \sigma_z &= 0; \\ \tau_{xy} &= -2G \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} z, & \tau_{zx} &= \frac{G}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x} (z^2 - ch^2), \\ \tau_{yz} &= \frac{G}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial y} (z^2 - ch^2) \quad (275).\end{aligned}$$

Risultano così dalle equazioni indefinite d'equilibrio le forze di massa

$$X = \frac{2m-1}{m-1} G \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x} z, \quad Y = \frac{2m-1}{m-1} G \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial y} z, \quad Z = -\frac{1}{2(m-1)} G \Delta^2 \zeta_0 (z^2 - ch^2);$$

e si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z dz &= \left(c - \frac{1}{12} \right) \frac{Gh^3}{2(m-1)} \Delta^2 \zeta_0; \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X z dz + h\tau_{zx} \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \left(\frac{4m+1}{12} - c \right) \frac{Gh^3}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x}, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y z dz + h\tau_{yz} \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \left(\frac{4m+1}{12} - c \right) \frac{Gh^3}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial y}.\end{aligned}$$

(274) La nuova parte che così viene a trascurarsi (che sarebbe per ogni segmento parallelo a z una traslazione da aggiungere alla ζ_0) è infatti dello stesso ordine di grandezza di quella trascurata precedentemente, posto che non sia troppo grande il numero c : si ha dunque così anche nella valutazione di $\delta\mathcal{L}$ la stessa approssimazione precedente.

(275) Si vede da queste espressioni (come già dalle stesse (64), (65)) che per la lastra infinitamente sottile con tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ finite si ha uno spostamento ζ infinito come $\frac{1}{h}$, e che le tensioni τ_{zx}, τ_{yz} risultano allora infinitesime di prim'ordine. Dalla (67) si ha poi che risulta infinitesimo di second'ordine il carico p .

Il primo membro della (67) è per ogni valore di c la somma della prima di queste espressioni con la seconda derivata rispetto ad x e la terza derivata rispetto ad y . Dunque da ogni soluzione ζ_0 dell'equazione medesima, cioè dallo spostamento da essa definito secondo le (64), anche coll'aggiunta del termine contenente l'arbitraria costante c , si ottiene una tensione equilibrata da forze di massa e di superficie soddisfacenti a tale combinazione delle poste condizioni (66); ma non è evidentemente possibile mediante la scelta della c far sì che resti invece soddisfatta allo stesso modo, in generale, ciascuna delle condizioni medesime. Solo quando l'assegnata coppia μ' sia nulla, cioè quando si consideri l'azione del solo carico p , è chiaro che si conseguirà tale scopo assumendo $c = \frac{4m + 1}{12}$: in tal caso, che è d'altra parte il più importante (e il solo comunemente considerato) la (67) assume così il significato di equazione d'equilibrio alla traslazione secondo la direzione z per ogni cilindro elementare parallelo all'asse medesimo; mentre restano soddisfatte dallo spostamento considerato con una ζ_0 arbitraria le due condizioni d'equilibrio dello stesso cilindro elementare alla rotazione. Nel caso invece in cui agisca la sola coppia μ' si vede che non è possibile render soddisfatte queste due ultime condizioni, cioè ritrovare le due assegnate componenti di tale coppia; ma con $c = \frac{1}{12}$ si ritrova per la (67) il rot μ' , mentre resta soddisfatta per una ζ_0 arbitraria la condizione $p = 0$ ⁽²⁷⁶⁾.

Non si dimentichi che la diversa scelta del numero c rende diverse soltanto le componenti di tensione τ_{zx}, τ_{yz} , le quali, come s'è osservato in proposito dei corrispondenti scorrimenti, sono di un ordine di grandezza inferiore a quello delle componenti $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ⁽²⁷⁷⁾. (S'è anche già osservato nella nota ⁽²⁷⁵⁾ che tale ordine è invece superiore anch'esso a quello del carico p che produce l'inflessione.)

⁽²⁷⁶⁾ Risulta nullo, come si vede considerando anche la (67'), l'effetto di una coppia $\mu' = \text{grad } \varphi$ agente su una lastra la cui superficie laterale, posta libera, abbia per direttrice una linea di livello della funzione $\varphi(x, y)$. (Si avverta che essendo

$$\int_{(\Sigma)} \text{grad } \varphi \, dA = \int_{(c)} \varphi \, n \, ds, \text{ si ha in tal caso } \int_{(\Sigma')} \mu' \, dA = 0.)$$

⁽²⁷⁷⁾ È da osservare che le τ_{zx}, τ_{yz} sulle basi non risultano nulle nella soluzione riguardante il solo carico p (com'è necessario, non risultando nulle le coppie costituite dalle X e dalle Y , che sono indipendenti da c , lungo ogni segmento normale alla lastra): si ha

$$\tau_{zx} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \frac{2m - 1}{12(m - 1)} Gh^2 \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x}, \quad \tau_{yz} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \frac{2m - 1}{12(m - 1)} Gh^2 \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y}.$$

Quando sia effettivamente $X = Y = 0$, e quindi anche $\tau_{zx} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \tau_{yz} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0$,

La proiezione sul piano xy del vettore risultante per ogni generatrice delle tensioni alla superficie laterale risulta ovviamente nulla per essere $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ proporzionali a z ; la componente secondo l'asse z è

$$t_{nz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nz} dz = \left(\frac{1}{12} - c \right) \frac{G h^3}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial n}.$$

Le componenti del momento risultante sugli assi n e t sono rispettivamente

$$m_n = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt} z dz = \frac{G h^3}{6} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n \partial t},$$

$$m_{nt} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n z dz = - \frac{G h^3}{6} \left(\frac{\Delta \zeta_0}{m-1} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n^2} \right) = - \frac{G h^3}{6} \left(\frac{m}{m-1} \Delta \zeta_0 - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} \right).$$

Da quest'ultima espressione risulta che la prima delle condizioni al contorno (67') esprime l'uguaglianza dell'effettiva coppia flettente m_{nt} all'assegnata μ_t . Dalle due precedenti, osservando che

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (X\alpha_x + Y\alpha_y) z dz + h \tau_{nz} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \left(\frac{4m+1}{12} - c \right) \frac{G h^3}{2(m-1)} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial n}$$

considerando ugualmente valide le espressioni di $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ si potranno ricavare τ_{zx} e τ_{yz} rispettivamente dalla prima e dalla seconda equazione d'equilibrio, ottenendo

$$\tau_{zx} = \frac{m}{m-1} G \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{m}{m-1} G \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right):$$

resterà soddisfatta anche la terza delle equazioni medesime quando sia posto

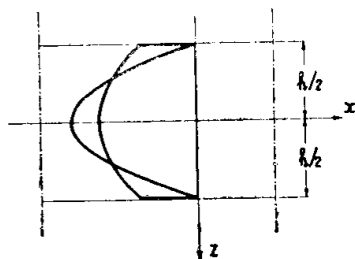


Fig. 76

$$Z = \frac{m}{m-1} G \Delta^2 \zeta_0 \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

La tensione così definita sarà equilibrata in tal caso con l'assegnata forza di massa; ma è chiaro che non sarà più congruente. La fig. 76 mette a confronto la τ_{zx} o la τ_{yz} così ricavate (nulle alle basi) con quella derivante dallo spostamento sopra definito (col suddetto valore di c).

Analoghe considerazioni potrebbero farsi nel caso della coppia μ' .

(come si ha dalle analoghe espressioni delle componenti dello stesso momento secondo gli assi x ed y , poco sopra trovate), risulta che il primo membro della seconda delle medesime (67') è effettivamente la somma dei valori che assumono nella soluzione trovata le quantità che compaiono al secondo membro coi valori per esse rispettivamente assegnati; ma tali valori non potranno invece ritrovarsi separatamente dalla soluzione medesima, per nessuna scelta del numero c . Nel caso che sia nullo il valore assegnato di μ'_i al contorno converrà assumere come precedentemente $c = \frac{4m + 1}{12}$ affinchè tale condizione resti soddisfatta per una ζ_0 arbitraria,

e si ritrovi così l'assegnata combinazione $r_z = \frac{d\mu_n}{ds}$.

L'equivalenza di una r_z con una $\frac{d\mu_n}{ds}$ può spiegarsi, come è stato suggerito da Thomson e Tait, mediante una particolare applicazione del principio di Saint-Venant in forma analoga a quella già considerata (278).

La flessione prodotta da sole coppie alla superficie laterale ($p = 0$, $\mu'_x = \mu'_y = 0$, $r_z = 0$) è ovviamente caratterizzata dall'essere la funzione ζ_0 biarmonica. Considerata in particolare una ζ_0 a laplaciano costante, che potrà sempre porsi nella forma

$$\zeta_0 = -\frac{m-1}{mE} k(x^2 + y^2) + \frac{m+1}{mE} \varkappa(x, y),$$

(278) Alla coppia agente sulla striscia generica i^a della superficie laterale si sostituiscono due forze d'intensità $\mu_n^{(i)}$, media delle μ_n sulla striscia medesima, agenti in senso opposto secondo le generatrici estreme di essa (fig. 77): eseguita tale sostituzione per ogni striscia, risulta agente secondo la generatrice di separazione delle strisce i^a e $(i+1)^a$ la forza $\mu_n^{(i)} - \mu_n^{(i+1)}$. Al limite, facendo tendere a zero la larghezza di ogni striscia, si ottiene la forza ripartita $-\frac{d\mu_n}{ds}$. (Si avverta la differenza tra questa applicazione del principio di Saint-Venant e quella precedente, per la quale s'intendevano assegnate solo forze e coppie risultanti su ogni generatrice: questa volta non si ha la equivalenza delle forze per ogni striscia infinitesima, ma solo per ciascuna delle strisce infinitesime considerate, e non per le strisce delimitate per esempio dalle mediane di quelle.)

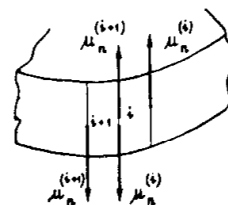


Fig. 77

Analogamente si potrebbe spiegare anche l'equivalenza, risultante dalla (67), di un carico p con un'uguale differenza $\frac{\partial \mu'_x}{\partial y} - \frac{\partial \mu'_y}{\partial x}$, ricorrendo a un postulato in certo modo analogo a quello di Saint-Venant, riguardante sostituzioni di forze che conservino l'equilibrio di cilindri elementari paralleli a z , anche se estese a tutta la lastra.

essendo k una costante e \varkappa una funzione armonica, può riscontrarsi facilmente che risultano dalle (67') le stesse coppie μ_t e μ_n della flessione uniforme, soluzione del problema di Clebsch con $\chi_0 = 0$ ⁽²⁷⁹⁾. Si tratta dunque in questo caso di una soluzione esattamente equilibrata con tali coppie.

Si avrà il vincolo rigido completo alla superficie laterale della lastra quando siano assegnati i valori al contorno di ζ_0 e di $\frac{\partial \zeta_0}{\partial n}$: poichè infatti dai primi si ottengono quelli di $\frac{\partial \zeta_0}{\partial t}$, resterà così definito in ogni punto della superficie medesima lo spostamento del tipo fissato. Tali condizioni saranno allora da considerare con l'equazione (67) invece delle condizioni naturali (67'). Procedendo col metodo dei moltiplicatori di Lagrange si otterrebbero invece le stesse (67') con la incognita funzione λ_1 , moltiplicatore riguardante la condizione dell'assegnata ζ_0 , al posto di $r_z - \mu_t - \frac{d\mu_n}{ds}$, e l'incognita λ_2 , moltiplicatore riguardante la condizione dell'assegnata $\frac{\partial \zeta_0}{\partial n}$, al posto di $-\mu_t$. Espressa la $\zeta_0(x, y)$ per mezzo di tali funzioni λ_1, λ_2 , vale a dire risolto il problema come se queste ultime fossero assegnate, le condizioni medesime servirebbero infine per la determinazione di esse.

65. Una trattazione dello stesso problema quando sia posto $\mu_t' = \mu_n' = 0$, cioè il problema della flessione dovuta al carico p , alla forza r_z e alle coppie μ_t, μ_n , la quale consente di porre a priori punto per punto le condizioni $X = Y = 0$ e le $\tau_{zx} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \tau_{yz} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0$ (forze tangenziali nulle alle basi), e di soddisfare inoltre separatamente alle condizioni delle assegnate μ_n ed r_z , è stata data recentemente da E. Reissner mediante l'applicazione del teorema di Menabrea.

Si assuma questa volta un particolare tipo di tensione soddisfacente

⁽²⁷⁹⁾ Per quanto riguarda la coppia torcente è da avvertire che dalla seconda delle (67') resta determinata solo la derivata $\frac{d\mu_n}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \chi^{II}}{\partial n \partial t}$; ma delle μ_n aventi tale derivata la $\mu_n = \frac{\partial^2 \chi^{II}}{\partial n \partial t}$ è la sola che insieme colla $\mu_t = \frac{\partial^2 \chi^{II}}{\partial t^2}$ renda soddisfatta la seconda delle condizioni indicate nella nota ⁽²⁶³⁾. (La prima sarebbe soddisfatta anche con l'aggiunta di una costante, essendo $\int t ds = 0$.)

(c)

alle condizioni $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\tau}_{xy} = 0$, ponendo

$$\sigma_x = \frac{z}{h} \varphi(x, y), \quad \sigma_y = \frac{z}{h} \psi(x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{z}{h} \vartheta(x, y), \quad (68)$$

dove siano φ, ψ, ϑ tre funzioni indeterminate, continue insieme colle derivate prime e seconde in ogni punto della sezione della lastra. Per le sopra ricordate condizioni riguardanti le forze di massa e le forze tangenziali alle basi si avrà allora dalle due prime equazioni indefinite d'equilibrio

$$\tau_{zx} = \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) h \Omega_x, \quad \tau_{yz} = \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) h \Omega_y, \quad (69)$$

dove

$$\Omega_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \Omega_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (70)$$

Le componenti τ_{zx}, τ_{yz} variano dunque con z parabolicamente (come nella soluzione di Kirchhoff), per essere stata ammessa la variazione lineare di $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Posto ora (fig. 78)

$$p(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z dz + \sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_z \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (71)$$

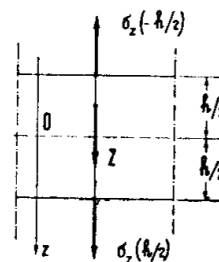


Fig. 78

(espressione del carico per unità di area, non ammettendosi qui la $\sigma_z = 0$), si osservi che integrando la terza equazione d'equilibrio lungo il segmento generico normale alla lastra si ottiene

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz + p = 0;$$

ossia, per la (69),

$$p = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right). \quad (72)$$

Si ponga infine

$$\sigma_z = p f(z), \quad (73)$$

ammettendo la proporzionalità della σ_z nei punti di una stessa sezione al rispettivo carico p , nonchè la variazione di essa lungo ogni segmento normale alla lastra secondo una medesima legge, che si riguarderà come

assegnata. Così per la (72) anche l'ultima componente della tensione resta espressa per mezzo delle tre funzioni φ, ψ, ϑ di x ed y , che saranno quindi le incognite del problema variazionale. La tensione per tal modo definita soddisfa identicamente, cioè per qualunque determinazione di tali funzioni, alle due prime condizioni d'equilibrio con forze di massa X, Y nulle: si porrà invece come condizione del problema variazionale la (72) con un carico $p(x, y)$ assegnato, condizione complessiva d'equilibrio per ogni cilindro elementare parallelo a z . Si avverta che restando determinata la σ_z dalla posizione (73) (dunque indipendentemente dalla soluzione del problema) sarà data anche, per la (71), la ripartizione del carico p tra le forze di superficie alle basi, $\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right)$ e $-\sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)$, e l'integrale delle

forze di massa $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z dz$ ⁽²⁸⁰⁾.

⁽²⁸⁰⁾ Se alla f si aggiunge una costante, ciascuna di tali due parti di p resta invariata, variando solo la suddivisione della prima tra l'una e l'altra base della lastra.

Affinchè resti soddisfatta la terza condizione d'equilibrio punto per punto si richiede, assegnata la f (o anche solo la $\frac{df}{dz}$) una particolare variazione di Z : risulta infatti da tale condizione, per le (69),

$$Z = -p \frac{df}{dz} - \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2}\right) h \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y}\right),$$

ossia, per la (72),

$$Z = \left(\frac{3}{2h} - \frac{6z^2}{h^3} - \frac{df}{dz}\right) p.$$

In ogni caso dunque tale variazione di Z sarà analoga a quella posta per σ_z , cioè

$$Z = p g(z).$$

E' chiaro che in generale l'inflessione della lastra non potrà dipendere sostanzialmente che dal carico p (oltrechè, s'intende, dalle condizioni alla superficie laterale); perciò la condizione posta $\sigma_z = p f(z)$ e la particolare scelta della funzione f non potranno avere importanza sostanziale. Si ricordi che nella soluzione di Kirchhoff s'era

posto σ_z identicamente nulla, ossia $f(z)=0$, e $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z dz = p$. Nella soluzione del Reissner sono

poste propriamente le condizioni

$$\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) = p, \quad \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad Z = 0,$$

considerandosi così tutto il carico p su una delle basi: si tratta evidentemente della

Si consideri ora l'espressione del potenziale elastico in funzione delle componenti della tensione (dedotta ovviamente dalla (46₁))

$$\Phi = \frac{1}{2G} \int_{(S)} \left\{ \frac{m}{2(m+1)} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{m+1} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\} dV,$$

la quale per le (68) e (69) diviene

$$\Phi = \frac{1}{2G} \int_{(S)} \left\{ \frac{m}{2(m+1)} (\varphi^2 + \psi^2) \frac{z^2}{h^2} + \frac{m}{2(m+1)} \sigma_z^2 - \frac{1}{m+1} \varphi \psi \frac{z^2}{h^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{m+1} (\varphi + \psi) \sigma_z \frac{z}{h} + \vartheta^2 \frac{z^2}{h^2} + h^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right)^2 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \right\} dV.$$

Si esprima quindi la variazione prima $\delta\Phi$ per una variazione arbitraria delle funzioni φ, ψ e ϑ , considerando invariabile come s'è detto σ_z . Si ottiene, osservando che

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{h}{12}, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right)^2 dz = \frac{h}{120},$$

e ponendo

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z z dz = kh^2 p,$$

ossia

$$k = \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) f'(z) z dz, \quad (281)$$

$$\delta\Phi = \frac{h}{12G} \delta \int_{(S)} \left\{ \frac{m}{4(m+1)} (\varphi^2 + \psi^2) - \frac{1}{2(m+1)} \varphi\psi - \right. \\ \left. - \frac{6k}{m+1} p (\varphi + \psi) + \frac{1}{2} \vartheta^2 + \frac{h^2}{20} (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \right\} dA.$$

stessa soluzione qui esposta colla scelta particolare della funzione

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{z}{h} - \frac{2z^3}{h^3}.$$

(Cambiando il segno al termine costante si verrebbe a considerare tutto il carico sull'altra base; e la soluzione, come si vedrà nella nota seguente, rimarrebbe esattamente la stessa.)

(281) Si manifesta dunque la dipendenza del problema analitico dall'assegnata fun-

Mettendo in conto la condizione (72) col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, deve aggiungersi alla variazione $\delta\Phi$ il termine

$$\frac{h^2}{12} \int_{(\Sigma)} \lambda \delta \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) dA$$

(o all'espressione (74) lo stesso termine moltiplicato per $\frac{12G}{h}$). Si trova facilmente il significato del moltiplicatore λ confrontando tale termine con quello che andrebbe aggiunto alla $\delta\Phi$ quando si considerasse posto il problema assegnando in ogni punto la componente ζ dello spostamento, e restando sempre fissata la σ_z nella forma $\sigma_z = q(x, y) f(z)$. (S'è accennato nella nota⁽²¹⁶⁾ a tal forma del problema con spostamenti assegnati anche in punti interni). Conforme all'enunciato del teorema di Menabrea tale termine è infatti

$$-(\delta\mathcal{L})_1 = - \int_{(S)} \zeta \delta Z dV,$$

e per la terza equazione d'equilibrio, osservando che per ipotesi $\delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$, e tenendo conto poi delle (69),

$$\begin{aligned} -(\delta\mathcal{L})_1 &= \int_{(S)} \zeta \delta \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dV = \\ &= \int_{(\Sigma)} dA \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} h \zeta \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) dz = \frac{h^2}{12} \int_{(\Sigma)} \bar{\zeta} \delta \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) dA, \end{aligned}$$

essendo $\bar{\zeta}$ lo spostamento medio definito dalla relazione

$$\bar{\zeta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) dz,$$

ossia

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) dz \quad (282). \quad (75)$$

(282) Si avverta che la funzione $\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2}$ è positiva in tutto l'intervallo d'integrazione.

E' chiaro che risultano così equivalenti tutti gli spostamenti assegnati aventi la stessa media $\bar{\zeta}$ lungo ogni normale alla lastra. E' questa ovviamente una conseguenza dell'essere fissata lungo ogni normale la σ_z e la variazione delle τ_{zx}, τ_{yz} , e quindi anche (con la stessa legge parabolica) la variazione di δZ .

Se si osserva infine che l'espressione (74) di $\delta\Phi$, tolti come s'è detto i termini in k (nei quali andrebbe sostituita la funzione assegnata $q(x, y)$ alla p che sarebbe incognita) resterebbe invariata, si conclude dal suddetto raffronto che

$$\lambda(x, y) = \bar{\zeta}(x, y) \text{ (283) .}$$

Per quanto riguarda la superficie si osservi innanzi tutto che non c'è più da porre nessuna condizione alle basi, dove si hanno i valori assegnati di σ_z e sono poste nulle le forze tangenziali. Alla superficie laterale non è ovviamente possibile, col tipo di tensione fissato mediante le (68), assegnare la forza punto per punto; ma si possono invece porre le tre condizioni $m_{nt} = \mu_t$, $m_n = \mu_n$, $t_{nz} = r_z$, riguardanti funzioni delle sole variabili x ed y : mentre le due prime saranno condizioni per le stesse tre funzioni incognite φ , ψ , ϑ , la terza riguarderà, come mostrano le (69) e (70), le derivate prime delle funzioni medesime. Esse si scriveranno come risultano immediatamente dalle (68) e (69) colla sola osservazione che σ_n e τ_{nt} hanno la stessa forma in z di σ_x , σ_y , τ_{xy} e τ_{nz} ha la stessa forma di τ_{zx} , τ_{yz} :

$$\frac{h}{z} \sigma_n = \frac{12}{h^2} \mu_t, \quad \frac{h}{z} \tau_{nt} = -\frac{12}{h^2} \mu_n, \quad \Omega_n = \frac{12}{h^2} r_z, \quad (76)$$

dove

$$\Omega_n = \Omega_x \alpha_x + \Omega_y \alpha_y.$$

Per mettere in conto tali condizioni col metodo dei moltiplicatori di Lagrange si dovrà aggiungere alla variazione $\delta\Phi$ il termine

$$-\frac{h^2}{12} \int_{(c)} \left\{ \lambda'_1 \delta\Omega_n + \lambda'_2 \delta\left(\frac{h}{z} \sigma_n\right) + \lambda'_3 \delta\left(\frac{h}{z} \tau_{nt}\right) \right\} ds.$$

Il significato dei moltiplicatori si ricava anche qui dal confronto di questa espressione con quella del termine $-(\delta\mathcal{U})_2$ da aggiungere a $\delta\Phi$ quando si considerino invece assegnati nei punti della superficie laterale le componenti dello spostamento s_n , s_t , ζ , cioè

$$\begin{aligned} -(\delta\mathcal{U})_2 &= - \int_{(\Sigma')} (s_n \delta\sigma_n + s_t \delta\tau_{nt} + \zeta \delta\tau_{nz}) dA = \\ &= - \int_{(c)} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_n z dz \cdot \delta\left(\frac{h}{z} \sigma_n\right) - \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_t z dz \cdot \delta\left(\frac{h}{z} \tau_{nt}\right) + h \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2}\right) dz \cdot \delta\Omega_n \right\} ds. \end{aligned}$$

(283) E' evidente la concordanza di tale risultato col significato dei moltiplicatori di Lagrange riguardanti le condizioni indefinite d'equilibrio, già osservato nella nota (246).

Risulta dunque

$$\lambda'_1 = \frac{12}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \left(\frac{1}{8} - \frac{z^2}{2h^2} \right) dz = \bar{\zeta}, \quad \lambda'_2 = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_n z dz = \bar{\omega}_t, \quad \lambda'_3 = - \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_t z dz = \bar{\omega}_n. \quad (75')$$

Lo spostamento medio $\bar{\zeta}$ così definito è lo stesso considerato sopra per il generico segmento normale alla lastra; $\bar{\omega}_t$ ed $\bar{\omega}_n$ sono *rotazioni medie* delle generatrici rispettivamente intorno agli assi t ed n , come si riconosce se si osserva che può scriversi

$$\bar{\omega}_t = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial s_n}{\partial z} \right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_n}{\partial z} \right)_1, \quad \bar{\omega}_n = - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial s_t}{\partial z} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_t}{\partial z} \right)_1,$$

significando con l'indice $_0$ la media ordinaria, con l'indice $_1$ una media definita ponendo

$$g_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(z) z^2 dz \quad (284).$$

L'espressione della condizione di minimo del teorema di Menabrea è dunque

$$\delta \Phi + \frac{h^2}{12} \int_{(\Sigma)} \bar{\zeta} \delta \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) dA - \frac{h^2}{12} \int_{(c)} \left\{ \bar{\zeta} \delta \Omega_n + \bar{\omega}_t \delta \left(\frac{h}{z} \sigma_n \right) + \bar{\omega}_n \delta \left(\frac{h}{z} \tau_{nt} \right) \right\} ds = 0.$$

$$(284) \quad \int_{-a}^a l(z) z dz = l(z) \frac{z^2}{2} \Big|_{-a}^a - \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{dl}{dz} z^2 dz = \left\{ \left(\frac{dl}{dz} \right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dz} \right)_1 \right\} a^3.$$

Il fatto che si dimostrino equivalenti tutti gli spostamenti ζ_0 assegnati che abbiano lungo ogni generatrice la stessa media $\bar{\zeta}$, come tutti gli s_n e tutti gli s_t che diano rispettivamente le stesse rotazioni medie $\bar{\omega}_t$ ed $\bar{\omega}_n$, è ovviamente una conseguenza della legge parabolica prefissata per la variazione lungo le generatrici di τ_{nz} , e quindi della legge lineare prefissata per la variazione di σ_n e di τ_{nt} .

Si osservi anche qui la concordanza del significato dei moltiplicatori $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ con quello riconosciuto nell'applicazione esatta del teorema di Menabrea alla nota (216). E' ovvio anche il confronto col significato dei moltiplicatori nella soluzione di Kirchhoff, osservato alla fine del paragrafo 64.

Osservando che

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \bar{\zeta} \delta \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) dA - \int_{(c)} \bar{\zeta} \delta \Omega_n ds &= - \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \delta \Omega_x + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \delta \Omega_y \right) dA = \\ &= \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \delta \varphi + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \delta \psi + 2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y} \delta \vartheta \right) dA - \\ &- \int_{(c)} \left\{ \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \alpha_x \delta \varphi + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \alpha_y \delta \psi + \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \alpha_y + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \alpha_x \right) \delta \vartheta \right\} ds \quad (285), \end{aligned}$$

e introducendo l'espressione di $\delta \Phi$ data dalla (74) privata dei termini in k , si ha

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \left\{ \left[\frac{m}{2(m+1)} \varphi - \frac{1}{2(m+1)} \psi - \frac{h^2}{10} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \right] \delta \varphi + \right. \\ \left. + \left[\frac{m}{2(m+1)} \psi - \frac{1}{2(m+1)} \varphi - \frac{h^2}{10} \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right] \delta \psi + \right. \\ \left. + \left[\vartheta - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + 2Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y} \right] \delta \vartheta \right\} dA + \\ + \int_{(c)} \left\{ \left(\frac{h^2}{10} \Omega_x - Gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) \alpha_x \delta \varphi + \left(\frac{h^2}{10} \Omega_y - Gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) \alpha_y \delta \psi + \right. \\ \left. + \left[\frac{h^2}{10} (\Omega_x \alpha_y + \Omega_y \alpha_x) - Gh \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \alpha_y + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \alpha_x \right) \right] \delta \vartheta \right\} ds - \\ - Gh \int_{(c)} \left\{ \bar{\omega}_t \delta \left(\frac{h}{z} \sigma_n \right) + \bar{\omega}_n \delta \left(\frac{h}{z} \tau_{nt} \right) \right\} ds = 0. \end{aligned}$$

(285) Il primo passaggio è lecito perchè si ammette implicitamente la continuità della $\bar{\zeta}$ al contorno, come in ogni punto interno. Tenendo distinta la $\bar{\zeta}$ nell'integrale di linea (ossia il moltiplicatore λ'_1) dalla $\bar{\zeta}$ al contorno nell'integrale di superficie (ossia il limite del moltiplicatore λ al contorno), si troverebbe facilmente l'eguaglianza di esse, cioè la suddetta continuità dello spostamento medio $\bar{\zeta}$, come conseguenza della stessa condizione di minimo, com'è naturale trattandosi di una condizione di congruenza. (Si confronti ancora con la nota (246).)

Per l'altro passaggio si ricordi la definizione (70) di Ω_x, Ω_y , e si osservi che

$$-\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \delta \varphi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \delta \varphi \right),$$

e analogamente per

$$-\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \vartheta}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \vartheta}{\partial y}.$$

Risulta così dall'integrale di superficie il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2(m+1)} (\varphi + \psi) - \frac{h^2}{10} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} &= - Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \psi - \frac{1}{2(m+1)} (\varphi + \psi) - \frac{h^2}{10} \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} &= - Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \\ \vartheta - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) &= - 2Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right. \quad (77)$$

Il primo integrale di linea, essendo

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \alpha_x - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \alpha_y, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \alpha_y + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \alpha_x,$$

e analogamente

$$\Omega_x = \Omega_n \alpha_x - \Omega_t \alpha_y, \quad \Omega_y = \Omega_n \alpha_y + \Omega_t \alpha_x$$

(con ovvio significato di Ω_t), può scriversi

$$\int_{(c)} \left\{ \left(\frac{h^2}{10} \Omega_n - Gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right) \delta \left(\frac{h}{z} \sigma_n \right) - \left(\frac{h^2}{10} \Omega_t - Gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{h}{z} \tau_{nt} \right) \right\} ds.$$

Anch'esso dipende dunque, come l'altro integrale di linea, dalle sole variazioni $\delta \left(\frac{h}{z} \sigma_n \right)$, $\delta \left(\frac{h}{z} \tau_{nt} \right)$; e risultano così due sole condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{h}{10} \Omega_n &= G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \bar{\omega}_t \right) \\ \frac{h}{10} \Omega_t &= G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} - \bar{\omega}_n \right) \quad (286). \end{aligned} \right. \quad (77')$$

Il significato di tali condizioni naturali è evidente. I primi membri sono infatti rispettivamente, come risulta dalle (69) che esprimono la va-

(286) Si ricordi dalla nota precedente che in realtà una terza condizione (quando sia dato il carico p) è quella della continuità dello spostamento $\bar{\zeta}$ al contorno con quello all'interno.

riazione parabolica di τ_{nz} , τ_{tz} lungo ogni generatrice,

$$\frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nz}^2 dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nz} dz}, \quad \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{tz}^2 dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{tz} dz},$$

dunque valori medi delle stesse tensioni tangenziali, e precisamente i $\frac{6}{5}$ delle rispettive medie ordinarie (o i $\frac{4}{5}$ dei valori massimi) ⁽²⁸⁷⁾; mentre i secondi membri sono valori medi (definiti in modo diverso) delle espressioni

$$G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \frac{\partial s_n}{\partial z} \right), \quad G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial s_t}{\partial z} \right),$$

come si riconosce dalle definizioni di $\bar{\zeta}$ e di $\bar{\omega}_t$, $\bar{\omega}_n$: si tratta dunque di relazioni complessive (per ogni generatrice) che stanno in luogo delle analoghe relazioni tra gli scorrimenti γ_{nz} , γ_{tz} (punto per punto della superficie laterale) e le derivate delle componenti dello spostamento. Con $\bar{\zeta}$, $\bar{\omega}_t$, $\bar{\omega}_n$ indeterminate (moltiplicatori di Lagrange) esse rappresentano pertanto condizioni di congruenza, come infatti dev'essere per il significato del teorema di Menabrea.

66. Le equazioni differenziali (77) e (72) e le condizioni al contorno (77') e (76) (nelle quali ultime σ_n , τ_{nt} e Ω_n possono esprimersi per i valori al contorno delle funzioni φ , ψ , ϑ e delle loro derivate) debbono servire, assegnati il carico p e le coppie e forze al contorno $\underline{\mu}_t$, $\underline{\mu}_n$, \underline{r}_z , a determinare le funzioni incognite $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\vartheta(x, y)$, $\bar{\zeta}(x, y)$, $\bar{\omega}_t(s)$, $\bar{\omega}_n(s)$ (le tre ultime funzioni dei punti del contorno). Si può osservare subito che dall'ultima delle (76) e dalla prima delle (77') si ottiene, per quanto s'è già visto circa il primo membro di questa,

$$\frac{12}{h} r_z = 10G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \bar{\omega}_t \right):$$

⁽²⁸⁷⁾ Sono evidentemente quei valori medi che possono sostituirsi ai valori effettivi delle τ nei termini dell'espressione del potenziale elastico $\frac{1}{2} \int \tau \gamma dV$.

equazione che può pertanto sostituirsi a questa medesima. Convieni poi procedere all'eliminazione delle incognite φ , ψ , ϑ mediante i seguenti passaggi.

Sommando le prime due (77) si ottiene

$$\frac{m-1}{2(m+1)}(\varphi + \psi) - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + Gh \Delta \bar{\zeta} = 0.$$

Sommando la prima di esse moltiplicata per 2 e derivata rispetto ad x con la terza derivata rispetto ad y si ottiene, ricordata la definizione di Ω_x ,

$$\Omega_x - \frac{h^2}{5} \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x \partial y} \right) + 2Gh \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial x} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial x} = 0.$$

Sommando poi questa colla precedente moltiplicata per $\frac{2}{m-1}$ e derivata rispetto ad x , risulta

$$\Omega_x - \frac{h^2}{10} \Delta \Omega_x - \frac{m+1}{m-1} \frac{h^2}{10} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \frac{2m}{m-1} Gh \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial x} = 0;$$

ossia, per la (72),

$$\Omega_x - \frac{h^2}{10} \Delta \Omega_x + \frac{2m}{m-1} Gh \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{6}{5} \frac{m+1}{m-1} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (78)$$

Se si considera insieme con questa l'analoga relazione riguardante Ω_y , che analogamente si ottiene dalle stesse (77), si possono eliminare infine anche Ω_x ed Ω_y derivando l'una rispetto ad x e l'altra rispetto ad y e sommandole: risulta così, ancora per la (72),

$$\frac{m}{m-1} \frac{Gh^3}{6} \Delta^2 \bar{\zeta} = p - \frac{m}{m-1} \frac{h^2}{5} \Delta p; \quad (79_1)$$

equazione che non contiene più nessuna delle incognite suddette (nè, si intende, delle loro derivate)⁽²⁸⁸⁾.

⁽²⁸⁸⁾ Contiene cioè la sola funzione incognita $\bar{\zeta}$, che è il moltiplicatore di Lagrange all'interno (s'intende quando sia assegnato come sopra è detto, il carico p).

La (79₁) è in sostanza la stessa equazione di Lagrange nel senso usuale, cioè per il problema qui considerato (senza le coppie μ'_i, μ'_n): è chiaro infatti che il secondo membro si riduce praticamente al solo termine p , quando la lastra sia abbastanza sottile, per ogni assegnazione della funzione medesima. E' ovvio poi come potrebbe in ogni caso cercarsi invece per successive approssimazioni il carico p , assegnato lo spostamento $\bar{\zeta}$.

Se si pone poi

$$\chi(x, y) = \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial x}, \quad (80)$$

essendo

$$\Delta \Omega_x = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{12}{h^2} \frac{\partial p}{\partial x},$$

e analogamente

$$\Delta \Omega_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{12}{h^2} \frac{\partial p}{\partial y},$$

la (78) e l'analogia per Ω_y divengono

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \frac{h^2}{10} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{2m}{m-1} Gh \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial x} - \frac{12}{5} \frac{m}{m-1} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \Omega_y &= -\frac{h^2}{10} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{2m}{m-1} Gh \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial y} - \frac{12}{5} \frac{m}{m-1} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (81)$$

dove gli ultimi termini dei secondi membri, in $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}$, saranno sempre trascurabili per la lastra abbastanza sottile, come risulta dalle (79₁). Ora si possono esprimere le funzioni eliminate per l'incognita rimasta $\bar{\zeta}$ e la nuova incognita χ : mentre infatti l'ultima delle (77) esprime già la ϑ in funzione della $\bar{\zeta}$ e delle Ω_x, Ω_y , per la φ e la ψ si ottengono espressioni siffatte dalla prima e dalla seconda delle equazioni medesime; e non resta allora che sostituire ad Ω_x, Ω_y le (81). Siccome in tali espressioni di φ e di ψ si può far comparire un termine $\frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right)$, converrà ricordare ancora la (72), la quale dice in sostanza, sempre per la (79₁), che tale termine è trascurabile (per la lastra abbastanza sottile) rispetto ad altri dell'espressione medesima⁽²⁸⁹⁾. Tolti infine tutti i termini

⁽²⁸⁹⁾ Si tratta a ogni modo di un termine noto, come quello che s'è detto di trascurare nella (81): tenendolo non si avrebbe una maggior complicazione sostanziale.

ugualmente trascurabili, si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi &= -2Gh \left(\frac{m}{m-1} \Delta \bar{\zeta} - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{50} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \\ \psi &= -2Gh \left(\frac{m}{m-1} \Delta \bar{\zeta} - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \right) - \frac{h^4}{50} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \\ \vartheta &= -2Gh \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y} + \frac{h^4}{100} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) \quad (290). \end{aligned} \tag{82}$$

Per le due funzioni incognite $\bar{\zeta}(x, y)$, $\chi(x, y)$ si hanno le due equazioni separate (79)₁ e

$$\chi - \frac{h^2}{10} \Delta \chi = 0 : \tag{79_2}$$

quest'ultima ottenuta immediatamente dalla definizione (80) e dalla (81). Le condizioni al contorno (76), posto

$$\frac{h}{z} \sigma_n = \varphi \alpha_x^2 + \psi \alpha_y^2 + 2\vartheta \alpha_x \alpha_y, \quad \frac{h}{z} \tau_{nt} = (\psi - \varphi) \alpha_x \alpha_y + \vartheta (\alpha_x^2 - \alpha_y^2),$$

$$\Omega_n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \alpha_x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \alpha_y \quad (291),$$

(290) Si ha

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{m-1} \left\{ \frac{h^2}{10} \left(m \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) - Gh \left(m \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right) \right\} = \\ &= \frac{2}{m-1} \left\{ \frac{h^2}{10} (m-1) \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) - Gh \left[m \Delta \bar{\zeta} - (m-1) \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tolto il termine $\frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right)$, resta oltre ai termini della prima (82) il termine

$$\frac{2m}{5(m-1)} Gh^3 \frac{\partial^2 \Delta \bar{\zeta}}{\partial x^2},$$

ovviamente trascurabile rispetto al primo termine dell'espressione medesima. Analogamente nell'espressione di ψ e in quella di ϑ sono trascurati rispettivamente i termini

$$\frac{-2m}{5(m-1)} Gh^3 \frac{\partial^2 \Delta \bar{\zeta}}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{-2m}{5(m-1)} Gh^3 \frac{\partial^2 \Delta \bar{\zeta}}{\partial x \partial y}.$$

(291) Le prime due dalle posizioni (68), ricordando che $\sigma_n = \bar{t}n \times n$, $\tau_{nt} = \bar{t}n \times t$; la terza dalle (70).

e sostituite a φ , ψ , ϑ le precedenti espressioni, divengono

$$\left\{ \begin{aligned} G \frac{h^3}{6} \left(\frac{m}{m-1} \Delta \bar{\zeta} - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} \right) - \frac{h^6}{600} \frac{\partial^2 \chi}{\partial n \partial t} &= -\mu_t \\ G \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial n \partial t} - \frac{h^6}{1200} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} \right) &= \mu_n \\ -\frac{m}{m-1} G \frac{h^3}{6} \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial n} + \frac{h^4}{120} \frac{d\chi}{ds} &= r_z. \end{aligned} \right. \quad (79_1)$$

Insieme con queste vanno considerate infine le seguenti :

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \frac{m}{m-1} G h^2 \frac{d\Delta \bar{\zeta}}{ds} + \frac{h^3}{10} \frac{\partial \chi}{\partial n} &= -10G \left(\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n \right) \\ \frac{12}{h} r_z &= 10G \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \bar{\omega}_t \right); \end{aligned} \right. \quad (79_2)$$

la prima delle quali è la seconda delle condizioni naturali (77'), posta per Ω_t l'espressione analoga alle (81), e l'altra è quella che si è già detto di sostituire alla prima delle (77') medesime.

Si può vedere ora da prima come sia da presumere che il problema resti effettivamente determinato quando siano assegnate al contorno le funzioni r_z , $\bar{\omega}_t$ e $\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n$ ⁽²⁹²⁾. Assegnata quest'ultima risulta infatti dalla prima delle (79₂) che per ogni funzione $\frac{d\Delta \bar{\zeta}}{ds}$ si ha una $\frac{\partial \chi}{\partial n}$, e quindi dalla (79₂) si ottiene una χ determinata ⁽²⁹³⁾; la terza delle (79₁) dà allora $\frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial n}$, e quindi dalla (79₁) si ottiene $\Delta \bar{\zeta}$ a meno di una costante, dunque ancora una $\frac{d\Delta \bar{\zeta}}{ds}$; e si ha così un'equazione riguardante solo quest'ultima

⁽²⁹²⁾ S'è già osservato in proposito delle (77') che come $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \bar{\omega}_t = \frac{5}{6Gh} r_z$, così $\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n = \frac{5}{6Gh} t_{tz}$. Ma a differenza di r_z la t_{tz} non potrebb'essere in alcuna applicazione un dato del problema, trattandosi della risultante di componenti interiori della tensione al contorno (le τ_{tz}), che non ha relazione diretta colle forze di superficie.

⁽²⁹³⁾ L'equazione omogenea (79₂) colla condizione omogenea al contorno $\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$ non ammette che la soluzione $\chi = 0$.

funzione del contorno. Siccome poi dalla seconda delle (79₂) si ha $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n}$, resta determinata anche la costante della $\Delta \bar{\zeta}$ (294), e infine la $\bar{\zeta}$ a meno di una costante.

Assegnate invece insieme con la risultante r_z le coppie μ_t, μ_n , è da presumere che le due prime condizioni (79') poste per la soluzione ora considerata valgano a rendere determinate le due funzioni $\bar{\omega}_t, \frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n$ dalle quali essa dipende, e quindi la soluzione medesima (295).

Si avverta da ultimo che la differenza fra le tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ di questa nuova soluzione e quelle della soluzione di Kirchhoff, consistente essenzialmente nei termini dipendenti dalla funzione χ , all'introduzione della quale accanto alla $\bar{\zeta}$ si deve la possibilità di considerare le tre distinte condizioni alla superficie laterale, andrà presumibilmente in ogni caso diminuendo in valore assoluto con grande rapidità dalla superficie medesima verso l'interno della lastra (296).

$$(294) \text{ Dall'ovvia condizione } \int_{(\Sigma)} \Delta \bar{\zeta} dA = \int_{(c)} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} ds.$$

(295) In modo analogo può vedersi come resti presumibilmente determinata la soluzione nell'altra posizione del problema già sopra considerato, quando cioè siano assegnate al contorno le funzioni $\bar{\zeta}, \bar{\omega}_t, \bar{\omega}_n$ che definiscono lo spostamento (si ricordi la nota (284)): essendo date così le funzioni $\bar{\omega}_t$ e $\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n$, si può considerare la soluzione dipendente solo dalla risultante r_z , e riguardare allora la terza delle (79₁) come una condizione per la determinazione di quest'ultima. Ma è da osservare che i casi normali di flessione della lastra non risultano da un'assegnazione generica dei tre dati suddetti. Mentre infatti la quantità $G \left(\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n \right) = \frac{h}{10} \Omega_t$ dev'essere in generale, per la (72), dell'ordine di grandezza del carico p moltiplicato per il rapporto fra l'estensione e lo spessore della lastra, si deduce dalla (79₁) che $G \frac{d\bar{\zeta}}{ds}$ sarà in generale dell'ordine di p moltiplicato per il cubo del rapporto medesimo: dunque i casi normali saranno quelli in cui la differenza $\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \bar{\omega}_n$ sia dell'ordine di ciascuno dei suoi termini per il quadrato del rapporto inverso. (Alla stessa conclusione si giunge osservando che la rotazione $\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\zeta}}{ds} + \bar{\omega}_n \right)$ risulterà in generale dell'ordine della deformazione per il rapporto suddetto, e che nella stessa deformazione le componenti $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ sono dell'ordine delle γ_{zx}, γ_{yz} per il medesimo rapporto, come si deduce dalle (68), (69).) Per questa ragione non è trascurabile il primo termine delle prime (79'₁).

Dello stesso ordine dovrà poi risultare il rapporto fra la somma $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} + \bar{\omega}_t$ e ciascuno dei suoi termini.

(296) Sostanzialmente diverse, pur rappresentando ancora una variazione parabolica sullo spessore della lastra, risultano invece le espressioni di τ_{zx}, τ_{yz} : è questa un'ovvia

67. Si vuol terminare con l'esempio di un caso molto semplice di flessione di una lastra rettangolare soggetta all'azione di sole forze e coppie al contorno, cioè con carico nullo. Per tale condizione potrà porsi, come risulta dalla (79₁),

$$\bar{\zeta} = - \frac{xy}{c},$$

essendo c una lunghezza arbitraria⁽²⁹⁷⁾; e si porrà per χ la somma di due funzioni soddisfacenti all'equazione omogenea (79₂), rispettivamente della sola x e della sola y , cioè

$$\chi = \frac{20G}{hc} \left(\frac{\cosh \frac{\sqrt{10} x}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} a}{h}} - \frac{\cosh \frac{\sqrt{10} y}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} b}{h}} \right),$$

essendo a e b le lunghezze dei semilati della lastra paralleli rispettiva-

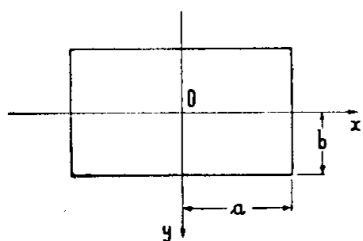


Fig. 79

mente agli assi x ed y (fig. 79). Le coppie e forze al contorno che producono lo stato di tensione rappresentato dalle (68), (69) e (82), poste in queste ultime tali espressioni di $\bar{\zeta}$ e χ , sono espresse dalle (79₁): risulta evidentemente $\mu_t = 0$ su tutt'e quattro i lati; e per μ_n ed r_z risulta: sui lati $x = \pm a$ ($n \equiv \pm x$, $t \equiv \pm y$)

$$\mu_n = \frac{Gh^3}{6c} \frac{\cosh \frac{\sqrt{10} y}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} b}{h}}, \quad r_z = \mp \sqrt{10} \frac{Gh^2}{6c} \frac{\sinh \frac{\sqrt{10} y}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} b}{h}} = - \frac{d\mu_n}{ds};$$

conseguenza del modo affatto diverso in cui s'è dovuto porre il problema per quanto riguarda le forze tangenziali alle basi. Si ricordi d'altra parte che già nella soluzione precedentemente esposta le τ_{zx} , τ_{yz} erano state sostanzialmente mutate da quelle della soluzione di Kirchhoff coll'introduzione della costante $c = \frac{4m+1}{12}$.

(297) S'intende sempre che questa $\bar{\zeta}$ moltiplicata per un numero infinitesimo costante sarà lo spostamento dovuto alle forze e coppie che sotto saranno indicate, moltiplicate per l'infinitesimo stesso. In pratica $\bar{\zeta}$ potrà essere l'effettivo spostamento medio dovuto a tali forze e coppie quando c sia abbastanza grande rispetto alla lunghezza dei lati della lastra.

sui lati $y = \pm b$ ($n \equiv \pm y$, $t \equiv \mp x$)

$$\mu_n = -\frac{Gh^3}{6c} \frac{\cosh \frac{\sqrt{10} x}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} a}{h}}, \quad r_z = \mp \sqrt{10} \frac{Gh^2}{6c} \frac{\sinh \frac{\sqrt{10} x}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} a}{h}} = -\frac{d\mu_n}{ds}.$$

Si hanno così i diagrammi della fig. 80.

All'interno risulta

$$m_{xy} = m_{yx} = 0; \quad m_x = -m_y = -\frac{Gh^3}{6c} \left(1 - \frac{\cosh \frac{\sqrt{10} x}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} a}{h}} - \frac{\cosh \frac{\sqrt{10} y}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} b}{h}} \right);$$

$$t_{zx} = -\sqrt{10} \frac{Gh^2}{6c} \frac{\sinh \frac{\sqrt{10} y}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} b}{h}} = -\frac{\partial m_x}{\partial y},$$

$$t_{yz} = -\sqrt{10} \frac{Gh^2}{6c} \frac{\sinh \frac{\sqrt{10} x}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10} a}{h}} = \frac{\partial m_y}{\partial x}.$$

In particolare si hanno per $y = 0$ e per $x = 0$, cioè per le sezioni coi piani xz ed yz , i diagrammi dei momenti torcenti della fig. 81. Col va-

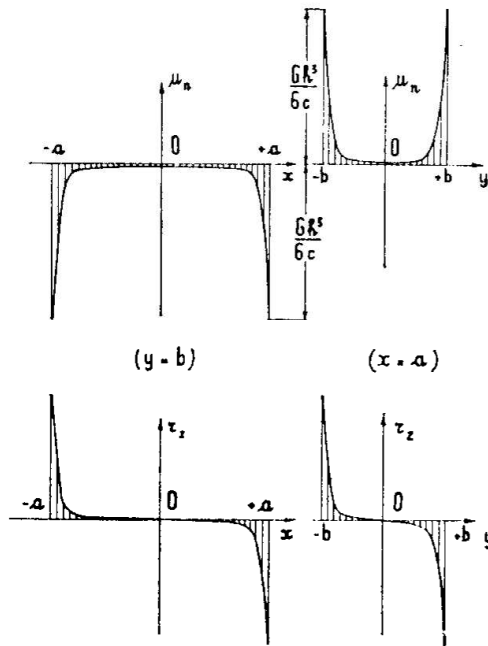


Fig. 80

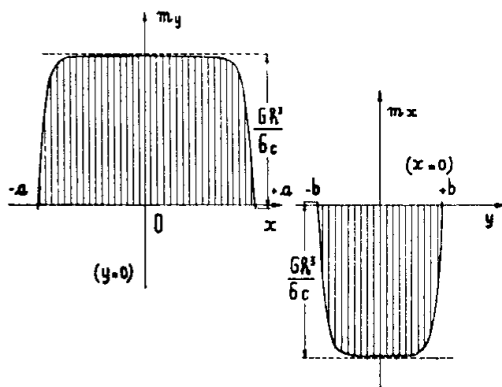


Fig. 81

riare di y da 0 a b e di x da 0 ad a tali diagrammi vanno traslando nella direzione delle ordinate fino a sovrapporsi rispettivamente al primo e al secondo dei diagrammi di μ_n della fig. 80: traslazione da prima assai lenta (per la lastra sottile), e rapida alla fine. I diagrammi di t_{zx}

e t_{yz} coincidono tutti rispettivamente col primo e col secondo dei diagrammi di r_z .

Facendo tendere a zero i rapporti $\frac{h}{a}$, $\frac{h}{b}$, il momento torcente μ_n tende a mantenersi nullo sull'intera superficie laterale eccettuato un intorno infinitesimo di ogni spigolo, dove si mantiene sempre finito (tendendo il massimo valore assoluto a $\frac{Gh^3}{6c}$), mentre la risultante delle r_z tende a concentrarsi sugli spigoli medesimi, in ciascuno dei quali viene ad agire al limite una forza $\frac{Gh^3}{3c}$, con segno alterno (fig. 82). La soluzione consi-

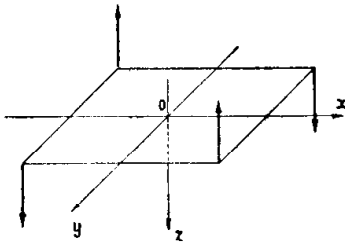


Fig. 82

derata può rappresentare così in modo sufficientemente approssimato la inflessione della lastra sufficientemente sottile per effetto di quattro forze siffatte praticamente concentrate agli spigoli. A una distanza dal contorno non inferiore ad un certo limite, dell'ordine di grandezza dello spessore, si avranno dunque per tale sollecitazione i momenti torcenti pratica-

ticamente costanti ed uguali in valore assoluto a ciascuna delle forze medesime; mentre saranno nulli i momenti flettenti, e si ridurranno pure costantemente a zero le risultanti t_{zx} , t_{yz} ⁽²⁹⁸⁾.

⁽²⁹⁸⁾ Può dirsi in sostanza che le coppie $G \frac{h^3}{3c} 2a$, $-G \frac{h^3}{3c} 2b$, costituite dalle forze agenti da una stessa parte rispettivamente della sezione generica normale ad y e di quella normale ad x (cioè dalla parte positiva dei rispettivi assi, ai quali il segno di esse va riferito), si ritrovano ripartite uniformemente lungo ciascuna delle sezioni medesime alla suddetta distanza dal contorno.

Si ha ad esempio per

$$x = a - h, \quad \frac{\cosh \frac{\sqrt{10}(a-h)}{h}}{\cosh \frac{\sqrt{10}a}{h}} = \infty e^{-\sqrt{10}} = 0,04;$$

dunque la differenza tra il momento m_x della sezione $x = a - h$ e quello della sezione $x = 0$ (per la quale la medesima espressione diviene praticamente nulla anche per valori non tanto piccoli del rapporto $\frac{h}{a}$) è pari a circa $\frac{1}{25}$ del valore dello stesso m_x all'origine. A distanza h dal contorno il diagramma di m_x ha compiuto così soltanto $\frac{1}{25}$ della traslazione che lo porta a sovrapporsi sul contorno medesimo al diagramma di μ_n . D'altra parte risulta anche dallo stesso computo, essendo $r_z = -\frac{d\mu_n}{ds}$, che i $\frac{24}{25}$ della

forza $\int_0^a r_z dx = \infty - \frac{Gh^3}{6c}$ agiscono sul tratto del lato da $x = a - h$ ad $x = a$, e i $\frac{4}{5}$ sul-

la seconda metà del tratto medesimo: è chiaro dunque che potrà praticamente considerarsi ciascuna delle forze $\frac{Gh^3}{3c}$ concentrata sullo spigolo quando i rapporti $\frac{h}{a}, \frac{h}{b}$ siano dell'ordine di $\frac{1}{10}$.

Si osservi infine che dalla soluzione di Kirchhoff con $\zeta_0 = -\frac{xy}{c}$ si ottiene praticamente la stessa tensione in ogni punto non troppo vicino al contorno: risulta infatti $m_{xy} = m_{yx} = 0, t_{zx} = t_{yz} = 0, m_x = -m_y = -\frac{Gh^3}{6c}$. Al contorno si ha così, oltre a $\mu_t = 0, r_z = 0, \mu_n = \pm \frac{Gh^3}{6c}$ con cambiamento di segno ad ogni spigolo, che sono condizioni affatto diverse da quelle sopra considerate; ma la differenza $r_z - \frac{d\mu_n}{ds}$, nulla per ogni altra generatrice, diviene infinita agli spigoli come nel caso limite in cui l'integrale di essa esteso a un intorno infinitesimo di ogni spigolo assuma alternativamente i valori $\pm \frac{Gh^3}{3c}$. Si ha cioè rispetto alla soluzione del Reissner lo scambio della forza concentrata con la discontinuità di μ_n , che può riguardarsi come integrale concentrato di $\frac{d\mu_n}{ds}$. (Nella soluzione del Reissner invece la discontinuità di μ_n ad ogni spigolo compensa la somma degli integrali di $\frac{d\mu_n}{ds}$ lungo i semilati delle due parti dello spigolo stesso.) L'esempio conferma dunque l'equivalenza della forza r_z alla derivata $-\frac{d\mu_n}{ds}$, per quanto riguarda la tensione a una certa distanza dal contorno.