Capitolo X

PROBLEMI RIGUARDANTI LA LASTRA PIANA

61. S'intenderà per lastra piana un cilindro retto la cui altezza sia sufficientemente piccola rispetto alle dimensioni delle basi, nel senso che sarà meglio chiarito appresso. Nella seguente trattazione essa sarà riferita a un sistema cartesiano nel quale sarà piano $x\,y$ il suo piano mediano (parallelo alle basi e da esse equidistante). Il problema posto per la lastra piana soggetta al sistema più generale di forze verrà a scindersi in problemi particolari di cui si daranno soluzioni approssimate: la scissione fondamentale, che si presenterà naturalmente, è quella delle azioni che lasciano praticamente piana ogni sezione della lastra parallela alle basi, e in particolare la suddetta sezione mediana (che resterà piana esattamente quando tali azioni siano simmetriche rispetto ad essa), dalle azioni che producono una deformazione consistente invece essenzialmente nell'incurvamento della sezione medesima (flessione della lastra). Del problema riguardante queste ultime azioni si esporranno due diverse soluzioni, che sono quella ordinaria, nella forma dovuta sostanzialmente a Kirchhoff (1850), ed una data di recente (1945) da E. Reissner; le quali varranno rispettivamente come esempi di applicazione del teorema della minima energia potenziale totale e del teorema di Menabrea.

Si considerino per ogni segmento parallelo all'asse z e avente gli estremi sulle basi della lastra i valori medi delle componenti della tensione:

$$\overline{\sigma_x} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, dz,$$

e analogamente per le altre componenti, essendo h lo spessore della lastra (altezza del cilindro). Integrando termine a termine rispetto a z le prime due equazioni indefinite d'equilibrio, e dividendo per h, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\sigma}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial y} + \overline{X} = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial y} + \overline{Y} = 0, \end{cases} \tag{55}$$

posto

$$\overline{X} = \frac{1}{h} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X\, dz + \tau_{zx}\left(\frac{h}{2}\right) - \tau_{zx}\left(-\frac{h}{2}\right) \right\},$$

e analogamente per $\overline{Y}$ (246).

Dalla prima delle equazioni di congruenza nella forma (48) (§ 56) si ottiene poi con semplicissime trasformazioni

$$m\Delta_0 \left(\sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_z\right) - (m+1)\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\, \partial y}\right) = 0$$

(essendo riferito l'operatore Δ_0 alle sole variabili x, y). Integrando tale relazione termine a termine rispetto a z e dividendo per h si ha, tenuto conto delle relazioni precedenti,

$$m\Delta\left(\overline{\sigma}_x + \overline{\sigma}_y\right) + (m+1)\left(\frac{\partial \overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right) - \Delta\, \overline{\sigma}_z = 0. \tag{56}$$

Si consideri infine la terza equazione d'equilibrio,

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\,;$$

e, immaginando che lo spessore h vada tendendo a zero, si ponga che si mantengano finite la componente Z della forza di massa e le derivate $\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$ sulle basi, e divenga infinitesima la differenza $\sigma_z\left(\dfrac{h}{2}\right) - \sigma_z\left(-\dfrac{h}{2}\right)$; e che in tali condizioni (riguardanti i dati del problema) (247) tendano

(246) $\overline{X}$ ed $\overline{Y}$ non sono dunque semplicemente i valori medi di X ed Y. L'uso di tali simboli è giustificato dall'analogia delle (55) con le equazioni d'equilibrio dei sistemi piani.

(247) La terza di queste ipotesi, che potrebbe sembrare la meno ovvia, è in realtà una conseguenza necessaria della prima, poichè risultando tendente a zero l'integrale della forza di massa Z sullo spessore della lastra, se non tendesse a zero anche la differenza delle σ_z alle basi si avrebbe la lastra infinitamente sottile gravata di un carico finito per unità di area.

pure a zero i prodotti $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} h$, $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} h$ in ogni punto: quest'ultima è ovviamente una presunzione, giustificata dalla seconda delle ipotesi precedenti (248). Tenderà allora a zero in ogni punto anche il prodotto $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} h$, quindi la differenza dei valori di σ_z in due punti quali si vogliano di ogni segmento normale alla lastra; onde si conclude che per la lastra sufficientemente sottile potrà sostituirsi a $\overline{\sigma}_z$ nella (56) la media delle funzioni assegnate per σ_z sulle due basi, che sarà in generale di un ordine di grandezza superiore a quello della differenza delle funzioni medesime.

La soluzione del sistema (55), (56) colla condizione delle $\overline{\sigma}_n$ e $\overline{\tau}_{nt}$ assegnate alla superficie laterale (essendo n e t rispettivamente la normale e la tangente alla direttrice della superficie medesima) potrà ottenersi allora ponendo da prima $\overline{\sigma}_z = 0$, indi risolvendo il sistema delle due prime equazioni rese omogenee ($\overline{X} = \overline{Y} = 0$) e della terza con

$$\overline{\sigma}_z = \frac{1}{2}\left\{\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) + \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}$$

e con la superficie laterale considerata libera. Per quest'ultimo problema si ha ovviamente

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\partial^2 (F_1 - F_2)}{\partial y^2}, \quad \overline{\sigma}_y = \frac{\partial^2 (F_1 - F_2)}{\partial x^2}, \quad \overline{\tau}_{xy} = \frac{\partial^2 (F_2 - F_1)}{\partial x \, \partial y},$$

essendo F_1 una funzione sodisfacente all'equazione

$$\Delta F_1 = \frac{1}{2m}\left\{\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) + \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

ed F_2 la funzione biarmonica definita (a meno di una funzione lineare additiva) dalle condizioni al contorno

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial n \, \partial t} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial n \, \partial t} \text{ (249).}$$

---

(248) E' anzi da presumere che $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$ si mantengano finite anche all'interno. Si avverte inoltre che anche le differenze $\tau_{zx}\left(\frac{h}{2}\right) - \tau_{zx}\left(-\frac{h}{2}\right)$, $\tau_{yz}\left(\frac{h}{2}\right) - \tau_{yz}\left(-\frac{h}{2}\right)$ dovranno tendere a zero per la lastra infinitamente sottile, dovendo ovviamente restare finite insieme con X ed Y anche $\overline{X}$ ed $\overline{Y}$.

(249) Il problema della determinazione della funzione F_2 è dunque quello stesso riguardante la funzione di Airy, di cui s'è detto al paragrafo 58.

Si vuol ricordare che le derivate $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial n \, \partial t}$ vanno riferite alle direzioni t ed n riguardate come direzioni fisse. Si può vedere facilmente che si ha, detta $\frac{d}{ds}$ la derivata

Tale soluzione rappresenta in particolare l'effetto di una sollecitazione di *trazione* o *compressione* ripartita con legge arbitraria sulle basi della lastra; caso di secondaria importanza rispetto a quelli che saranno considerati appresso (250).

Il sistema con $\overline{\sigma}_z = 0$ coincide con quello trovato per il sistema piano di deformazione, salvo la sostituzione di $m+1$ ad m: esso vale dunque a determinare i valori medi $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$, $\overline{\tau}_{xy}$ in funzione delle forze $\overline{\overline{X}}$, $\overline{\overline{Y}}$ sopra definite e dei suddetti valori medi $\overline{\sigma}_n = \overline{f}_n$, $\overline{\tau}_{nt} = \overline{f}_t$, essendo f_n, f_t le componenti della forza alla superficie laterale secondo gli assi n e t. Dunque $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$, $\overline{\tau}_{xy}$ risultano in ogni caso indipendenti dalla ripartizione delle forze $\overline{X}$, $\overline{Y}$ fra gli estremi (forze tangenziali alle basi) e i punti interni di ogni segmento parallelo a z, e dalla distribuzione di questa seconda parte (forza di massa) lungo il segmento medesimo; e così pure dalla distribuzione lungo le generatrici della superficie laterale della forza parallela al piano $x\,y$, e infine dalla forza di massa Z e dalla differenza delle σ_z alle basi, nonchè dalla componente f_z.

Si ammetterà che le tensioni σ_x, σ_y, τ_{xy} possano riguardarsi praticamente come costanti sullo spessore della lastra, e coincidenti pertanto coi loro valori medi determinati come sopra è detto, ogni volta che la lastra di spessore sufficientemente piccolo nel senso già dichiarato, tale cioè che risulti trascurabile la variazione della σ_z lungo ogni segmento

---

di una funzione dei punti del contorno (dunque per t ed n variabili) nel senso positivo della tangente t,

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial^2}{\partial n\,\partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{d^2}{ds^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial n},$$

essendo ϱ il raggio di curvatura del contorno, da intendere positivo dove questo sia convesso verso l'esterno. (Perciò quando per esempio la F_1 fosse scelta costante al contorno, si avrebbe

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_1}{\partial n}.)$$

(250) Si osservi che tutte le componenti della tensione risulteranno esattamente nulle fuorchè la σ_z quando questa sia assegnata sulle basi con ripartizione lineare (e non vi siano altre forze), come s'è visto al paragrafo 60. Per ogni ripartizione armonica risulteranno nulli i valori medi $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$, $\overline{\tau}_{xy}$, anche in presenza di altre forze purchè siano nulle $\overline{X}$, $\overline{Y}$ e le $\overline{f}_n$, $\overline{f}_t$ alla superficie laterale.

Indipendentemente dalla forma analitica del problema è poi interessante la considerazione intuitiva che nell'intorno di ogni punto di massimo valore assoluto della σ_z le σ_x e σ_y saranno dello stesso segno di essa (per la tendenza del materiale a deformarsi lateralmente in misura maggiore che nella zona circostante), risultando così nell'intorno medesimo uno stato di tensione, che nel caso della compressione è meno pericoloso dello stato monoassiale.

ad essa normale, non sia soggetta ad azioni che tendano ad infletterla, vale a dire a produrre un incurvamento della sua sezione mediana. Si intuisce facilmente come tali azioni siano:

1) la risultante delle forze normali alla lastra per ogni cilindro elementare e per ogni striscia elementare della superficie laterale nella direzione medesima; rappresentata la prima (per unità di area della sezione) dall'espressione

$$p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\, dz + \sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right) \text{ (251)},$$

la seconda (per unità di lunghezza della direttrice del contorno) da

$$r_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z\, dz ;$$

2) i momenti risultanti delle forze parallele alla lastra, per ciascuno degli stessi cilindri e per ciascuna delle stesse strisce elementari, rispetto al punto di mezzo dell'asse del cilindro o della striscia medesima:

$$\mu'_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Yz\, dz - \frac{h}{2}\left\{\tau_{yz}\left(\frac{h}{2}\right) + \tau_{yz}\left(-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

$$\mu'_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Xz\, dz + \frac{h}{2}\left\{\tau_{zx}\left(\frac{h}{2}\right) + \tau_{zx}\left(-\frac{h}{2}\right)\right\};$$

$$\mu_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_n\, z\, dz, \qquad \mu_n = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_t\, z\, dz.$$

(251) Il carico p (che per analogia colle definizioni di $\overline{X}$ ed $\overline{Y}$ potrebbe anche indicarsi con $h\overline{Z}$) dovrà essere infinitesimo per la lastra infinitamente sottile, come s'è già osservato alla nota (247). Si vedrà precisamente nella trattazione del problema della lastra inflessa (§ 64, nota (275)) che per avere tensioni σ_x, σ_y, τ_{xy} finite bisogna porre p infinitesimo di second'ordine rispetto allo spessore della lastra, e risultano infinitesime di prim'ordine le tensioni τ_{zx}, τ_{yz}.

Mentre per tale intuizione può affermarsi che le tensioni dovute all'azione di forze per le quali siano nulle le risultanti p ed r_z nonchè le coppie μ'_x, μ'_y e μ_t saranno da reputare praticamente caratterizzate dalle condizioni

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0,$$

segue da quanto s'è visto precedentemente che le tensioni dovute all'azione di forze, per le quali siano invece nulle le risultanti $h\overline{X}$, $h\overline{Y}$, $h\overline{f}_t$, $h\overline{f}_n$ e la media $\frac{1}{2}\left\{\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) + \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}$, saranno praticamente caratterizzate dalle condizioni

$$\overline{\sigma}_x = \overline{\sigma}_y = \overline{\tau}_{xy} = 0.$$

Assegnato allora un sistema di forze quale si voglia, si potranno valutare le suddette forze e coppie risultanti p, r_z, μ'_x, μ'_y, μ_t, μ_n, e porre il problema per esse in forma tale che siano sodisfatte a priori queste ultime condizioni ([252]); e a parte, valutate le $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{f}_t$ ed $\overline{f}_n$, nonchè la media $\frac{1}{2}\left\{\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) + \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)\right\}$, si risolveranno i due problemi sopra indicati. Il primo di questi potrà dirsi ovviamente di *sollecitazione della lastra nel proprio piano mediano,* o anche problema dello *stato piano di tensione in senso pratico* ([253]).

([252]) Tali condizioni, necessarie a rendere la soluzione determinata, equivalgono per quanto s'è visto all'annullarsi di $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{f}_n$, $\overline{f}_t$ e $\Delta\,\overline{\sigma}_z$: si pone così in sostanza che non vi siano altre azioni oltre alle forze e coppie suddette. Solo non si dimentichi che la $\Delta\,\overline{\sigma}_z = 0$ non riguarderebbe a rigore le assegnate forze.

([253]) Considerate le σ_x, σ_y, τ_{xy} coincidenti coi loro valori medi, si potranno ricavare le tensioni tangenziali τ_{zx}, τ_{yz} dalle due prime equazioni indefinite d'equilibrio in funzione dei valori per esse assegnati alle basi; indi dalla terza delle equazioni medesime resterà determinata in funzione dei valori alle basi anche la σ_z. È chiaro che per la trazione o compressione risulta

$$\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

e che la tensione che così si ottiene in ogni caso, equilibrata punto per punto colle forze assegnate, non potrà sodisfare in generale alle condizioni di congruenza. (Ciò significa che le σ_x, σ_y, τ_{xy} non potranno in realtà essere esattamente indipendenti da z.) Poste in particolare X, Y costanti sullo spessore, risulteranno τ_{zx}, τ_{yz} variabili con z linearmente, quindi costantemente nulle quando siano assegnate nulle alle basi: sarebbero così sodisfatte tutte le condizioni che definiscono il sistema piano di tensione; cosa in generale impossibile, come s'è visto, quando si richieda la congruenza.

Se si osserva infine che nelle condizioni dell'uno e dell'altro di tali due ultimi problemi tutti gli spostamenti dovranno risultare paralleli al piano $x\,y$ (esattamente per i punti del piano mediano quando tutte le forze siano simmetriche rispetto ad esso, dunque sempre nel problema della trazione o compressione; e s'intende ovviamente a meno di un moto rigido), resta scisso il problema generale della lastra, come s'era annunziato, nei due problemi della *lastra deformata nel proprio piano* e della *lastra inflessa*. Alla trattazione di quest'ultimo si premetterà l'esposizione di una notevole soluzione esatta delle equazioni d'equilibrio e di congruenza, la quale potrà applicarsi con approssimazione che sarà specificata ad ogni caso di sollecitazione della lastra nel proprio piano senza forze di massa, e a un tipo particolare di flessione per sole coppie alla superficie laterale.

62. Trattasi della così detta soluzione del *problema di Clebsch*, che è la più generale soluzione delle equazioni indefinite sopra ricordate in assenza di forze di massa e sotto le condizioni

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \text{ [254]}.$$

Le equazioni d'equilibrio divengono allora

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

(restando la terza identicamente sodisfatta); onde si ha intanto come soluzione più generale

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\, \partial y} . \tag{57}$$

dove $\chi(x, y, z)$ sia una funzione arbitraria (purchè ammetta tali derivate seconde continue in ogni punto del corpo insieme colle loro derivate prime rispetto a ciascuna delle tre variabili). Risulta quindi

$$\Psi = \sigma_x + \sigma_y = \Delta_0 \chi, \tag{58}$$

inteso per Δ_0 l'operatore di Laplace rispetto alle variabili x ed y.

La terza, la quinta e la sesta delle equazioni di Beltrami divengono

---

[254] Sono dunque le prime tre condizioni poste per definizione del sistema piano di tensione (il qual nome si trova usato da alcuni autori ad indicare ogni stato definito semplicemente dalle condizioni medesime). Si avverta che restano così necessariamente libere le basi del cilindro.

per le condizioni poste

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z\, \partial x} = 0,$$

onde

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 4k,$$

e

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_0(x, y) + 4kz\,, \tag{59}$$

essendo k una costante arbitraria e Ψ_0 una funzione arbitraria di x ed y (continua insieme colle sue derivate prime). Quindi si ha

$$\Delta \Psi = \Delta_0 \Psi = \Delta \Psi_0 \;(^{255})\,;$$

onde la relazione $\Delta \Psi = 0$, che si verifica ogni volta che siano nulle le forze di massa, può scriversi anche

$$\Delta_0 \Psi = 0 \tag{60}$$

o

$$\Delta \Psi_0 = 0. \tag{60'}$$

La prima equazione di Beltrami,

$$(m+1)\,\Delta \sigma_x + m\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0,$$

diventa per la prima delle (57)

$$(m+1)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Delta_0 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right) + m\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0\,;$$

o anche, posto per la (60) $-\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$ in luogo di $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$, e ricordata la (58),

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\Psi + (m+1)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right\} = 0.$$

Allo stesso modo dalla seconda equazione di Berltrami s'ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\Psi + (m+1)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right\} = 0,$$

---

(255) Per le funzioni delle sole variabili x ed y i simboli Δ e Δ_0 hanno lo stesso significato; perciò si userà sempre il primo.

e dalla quarta

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{\Psi+(m+1)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right\}=0\,;$$

e così, osservato che per la (59) può porsi in queste relazioni Ψ_0 in luogo di Ψ, risulta

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}+\frac{\Psi_0}{m+1}=f(x,\,y,\,z),$$

funzione lineare in x e y. Quindi si ottiene ovviamente

$$\chi(x,\,y,\,z)=-\frac{\Psi_0}{2\,(m+1)}z^2+\chi_1(x,\,y)\,z+\chi_0(x,\,y)+F(x,\,y,\,z)\,;$$

dove poi la F, ancora lineare in x ed y, può evidentemente esser tolta.

Ottenendosi infine da tale espressione (per le (58) e (60′))

$$\Psi=\Delta_0\chi=\Delta\chi_0+\Delta\chi_1\,z,$$

si ha dal confronto colla (59)

$$\Delta\chi_0=\Psi_0\,,\qquad \Delta\chi_1=4k\,;$$

la prima delle quali indica (sempre per la (60′)) che χ_0 è funzione biarmonica, mentre per la seconda potrà porsi

$$\chi_1=k\,(x^2+y^2)+\varkappa\,(x,\,y),$$

essendo $\varkappa$ una funzione armonica. Si ottiene dunque l'espressione più generale di χ nella forma

$$\chi(x,\,y,\,z)=\chi_0(x,\,y)+\{k\,(x^2+y^2)+\varkappa\,(x,\,y)\}\,z-\frac{\Delta\chi_0}{2\,(m+1)}z^2. \qquad (61)$$

Le componenti dello spostamento sono date, come può verificarsi senza difficoltà, dalle espressioni

$$\xi=\bar{\xi}(x,\,y)+\frac{1}{mE}\left\{-(m+1)\frac{\partial\chi_0}{\partial x}+\left[2(m-1)kx-(m+1)\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right]z+\frac{\partial\,\Delta\chi_0}{\partial x}\frac{z^2}{2}\right\},$$

$$\eta=\bar{\eta}(x,\,y)+\frac{1}{mE}\left\{-(m+1)\frac{\partial\chi_0}{\partial y}+\left[2(m-1)ky-(m+1)\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right]z+\frac{\partial\,\Delta\chi_0}{\partial y}\frac{z^2}{2}\right\},$$

$$\zeta=-\frac{1}{mE}\{(m-1)\,k\,(x^2+y^2)-(m+1)\,\varkappa+\Delta\chi_0\,z+2kz^2\}\,, \qquad (62)$$

essendo $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ funzioni armoniche coniugate definite a meno di una funzione lineare (rappresentante un moto rigido) dalle condizioni

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = \frac{\Delta \chi_0}{E}.$$

(Si confronti la nota (242).)

Essendo risultata la χ funzione razionale intera di secondo grado della variabile z, è chiaro che la stessa forma rispetto a tale variabile conserveranno le derivate seconde di essa rispetto ad x ed y, cioè le espressioni (57) delle componenti di tensione σ_x, σ_y, τ_{xy}. Su ogni elemento piano parallelo a z di larghezza infinitesima e comprendente tutto lo spessore della lastra (delimitato dunque da due segmenti infinitamente vicini attraversanti la lastra normalmente) si avranno separatamente dai tre termini di tali espressioni tre sistemi di tensioni parallele, il primo uniforme nello spessore e gli altri due variabili rispettivamente con legge lineare e con legge quadratica, ciascuno secondo una propria direzione (fig. 73) (256). Una simile decomposizione dovrà essere possibile in particolare, quando la soluzione trovata sia applicata a un corpo cilindrico, per le tensioni agenti sugli elementi della superficie laterale lungo ogni generatrice: si conclude così ovviamente che tale soluzione non può adattarsi al cilindro con una ripartizione arbitraria di forze (parallele al piano $x\,y$) sulla superficie medesima.

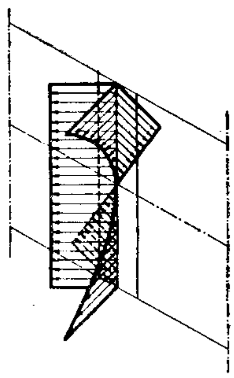
Fig. 73

Ma quando dal caso generale del cilindro si passi a quello della lastra ponendo la condizione dell'altezza sufficientemente piccola rispetto alle altre dimensioni, si porrà il quesito della possibilità di un adattamento approssimato, nel senso che non si richieda l'uguaglianza della tensione in ogni punto della superficie alla forza assegnata, ma solo l'uguaglianza della risultante e del momento risultante delle tensioni nei punti di ogni generatrice della superficie medesima, rispettivamente alla risultante e al momento risultante delle forze assegnate per gli stessi punti. L'affermazione della sufficienza di tali condizioni complessive può intendersi compresa in un postulato più generale, noto come *principio di De Saint-Venant*, che sarà enunciato per semplicità nella seguente forma (che è quella in cui viene direttamente applicato nella risoluzione del problema detto appunto di Saint-Venant).

(256) La direzione dipende ovviamente, per l'elemento di normale n generica, dal rapporto di σ_n a τ_{nt}, che per ciascun termine è indipendente da z. Dalla composizione di tali tensioni in ogni punto si otterrà naturalmente una tensione di direzione variabile.

Dato un corpo elastico, e considerata una porzione della sua superficie di dimensioni abbastanza piccole rispetto alla massima dimensione di esso, se al sistema delle forze agenti in tale porzione se ne sostituisce un altro che abbia lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante (cioè ad esso equivalente nel senso della statica dei sistemi rigidi), lo stato di tensione del corpo varia in modo apprezzabile soltanto in una parte di esso, comprendente la medesima porzione della superficie, di dimensioni paragonabili a quelle della porzione medesima [257].

Si tratta evidentemente di un'affermazione generica, alla quale è stato attribuito nel caso della lastra un senso più esteso di quello letterale di tale enunciato. La sostituzione di forze sopra considerata si estende infatti all'intera superficie laterale, essendo eseguita d'altra parte non per singole porzioni di dimensioni finite, ma per ogni striscia di larghezza infinitesima; e si presume che la conseguente variazione dello stato di tensione risulti apprezzabile solo in una parte esteriore della lastra, compresa fra il contorno e un'altra superficie cilindrica non definita (com'è nella natura stessa del postulato), la cui distanza dal contorno medesimo sia dell'ordine di grandezza dello spessore. Ammesso tale principio, si vuol dunque vedere se dalla soluzione del problema di Clebsch possano ottenersi forze al contorno che abbiano generatrice per generatrice un vettore risultante e un momento risultante arbitrariamente assegnati, indipendentemente dalla variazione di esse lungo le generatrici medesime.

Conviene premettere alcune definizioni riguardanti le tensioni sulle già considerate strisce infinitesime. Si porrà

$$n_x = h\,\overline{\sigma}_x\,, \qquad t_{xy} = h\,\overline{\tau}_{xy}\,, \qquad m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\, z dz\,, \qquad m_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, z dz\,;$$

$$n_y = h\,\overline{\sigma}_y, \qquad t_{yx} = h\,\overline{\tau}_{yx}\,, \qquad m_{yx} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y\, z dz\,, \qquad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx}\, z dz \qquad \text{(fig. 74).}$$

[257] S'intende che in realtà la variazione della tensione si estende a tutto il corpo: il principio afferma solo che agli effetti pratici potrà essere trascurabile in ogni punto non compreso nella parte accennata.

Si diranno n_x, n_y le *componenti normali*, rispettivamente sulle strisce normali ad x e su quelle normali ad y; e così $t_{xy} = t_{yx}$ si dirà la *componente tangenziale* sulle une e sulle altre strisce (s'intende componenti del vettore risultante delle tensioni sulle strisce medesime per unità di larghezza di queste ultime); m_{xy} ed m_{yx} si diranno *momenti flettenti*, rispettivamente sulle strisce normali ad x e su quelle normali ad y, m_x ed m_y i *momenti torcenti* sulle strisce medesime, che risultano così opposti (componenti del momento risultante rispetto al punto di mezzo delle rispettive strisce, sempre per unità di larghezza) (258). I segni sono stati scelti considerando le tensioni sulla faccia positiva della striscia, cioè quella rivolta al verso positivo dell'asse a questa normale, rappresentato dal primo indice, ed esprimendo le componenti del vettore e del momento risultante nella direzione positiva dell'asse rappresentato dal secondo indice. (Un indice solo sta al posto di due indici uguali.) (259)

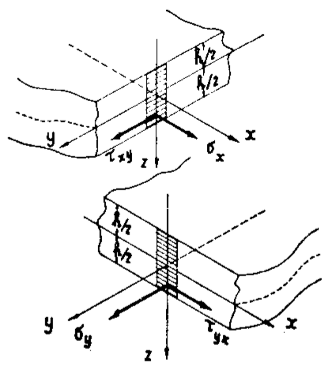

Fig. 74

È da avvertire che mentre i nomi di tali *caratteristiche di sollecitazione* sono quelli usuali, diversi sono invece i simboli dei momenti e la convenzione dei segni per i momenti torcenti, che usualmente sono considerati uguali anzichè opposti. Il criterio sopra esposto è conforme a quello usualmente seguito nel definire le analoghe caratteristiche di sollecitazione delle travi.

Analogamente dalle forze esterne alla superficie laterale si avranno, con riferimento agli assi n, t della fig. 75, le componenti del vettore e del momento risultante per ogni generatrice

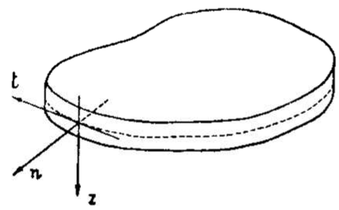

Fig. 75

$$r_n = h\overline{f_n}, \quad r_t = h\overline{f_t}, \quad \mu_n = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_t\, z dz, \quad \mu_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_n\, z dz \;(260):$$

(258) I nomi dei momenti si giustificano osservando che l'uno avrebbe azione di flessione, l'altro di torsione su una trave ricavata dalla lastra in direzione normale alla striscia cui essi si riferiscono.

(259) Si ricordi che momento di una forza $\boldsymbol{F}$ rispetto a un punto O è il vettore $(P - O) \wedge \boldsymbol{F}$, essendo P un punto qualunque della retta d'azione di $\boldsymbol{F}$; posto, per definizione del senso del prodotto vettoriale, che, detti $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ i versori secondo gli assi, sia $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$.

(260) I nomi di coppia flettente e coppia torcente che sogliono attribuirsi rispettivamente alle μ_t e alle μ_n si spiegano come già s'è osservato sopra in proposito dei momenti m: non è da intendere che si possa parlare in generale di una sollecitazione di torsione della lastra.

questi ultimi già indicati cogli stessi simboli al paragrafo precedente.

Dalle (57), posto

$$\chi^{\mathrm{I}}(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi \, dz, \qquad \chi^{\mathrm{II}}(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi \, z dz,$$

risulta ovviamente

$$n_x = \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}, \quad n_y = \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = t_{yx} = -\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial x \, \partial y};$$

$$m_{xy} = \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{II}}}{\partial y^2}, \quad m_{yx} = -\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{II}}}{\partial x^2}, \quad m_x = -m_y = \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{II}}}{\partial x \, \partial y};$$

e le condizioni alla superficie laterale da porre secondo il principio di Saint-Venant, inteso come sopra è dichiarato, sono allora

$$\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial t^2} = r_n, \quad \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial n \, \partial t} = -r_t;$$

$$\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{II}}}{\partial t^2} = \mu_t, \quad \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{II}}}{\partial n \, \partial t} = \mu_n$$

(essendo sempre da riguardare n e t come direzioni fisse). Si tratta dunque di vedere se tali condizioni possano effettivamente restar sodisfatte quando siano assegnate r_n ed r_t, μ_t e μ_n come funzioni arbitrarie del punto lungo la direttrice della superficie laterale. Per le funzioni χ^{I} e χ^{II} risultano dalla (61) le espressioni generali

$$\begin{aligned} \chi^{\mathrm{I}} &= h\,\chi_0 - \frac{h^3}{24\,(m+1)} \Delta\chi_0, \\ \chi^{\mathrm{II}} &= \frac{h^3}{12} \{ k\,(x^2 + y^2) + \varkappa \}. \end{aligned} \tag{63}$$

È chiaro così che restano separati i due problemi riguardanti rispettivamente le forze e le coppie assegnate, riducendosi il primo alla determinazione della funzione biarmonica χ_0, l'altro alla determinazione (ove esistano) della funzione armonica $\varkappa$ e della costante k. Il primo problema si presenta nella stessa forma di quello del sistema piano con forze di massa nulle, essendo funzione di Airy la χ^{I}, evidentemente biarmonica; determinata la quale si trova subito la χ_0 osservando che dalla prima delle (63) si ha

$$\Delta\chi_0 = \frac{1}{h} \Delta\chi^{\mathrm{I}},$$

e quindi

$$\chi_0 = \frac{1}{h}\,\chi^{\mathrm{I}} + \frac{h}{24\,(m+1)}\,\Delta\chi^{\mathrm{I}}$$ ([261]).

Si osservi che qualunque sia la ripartizione della forza lungo le generatrici della superficie laterale, risulta all'interno, cioè a sufficiente distanza dalla superficie medesima, la tensione su ogni striscia infinitesima composta di una parte uniforme e di una con ripartizione parabolica (aventi direzioni diverse): si può dire che tale è la « ripartizione naturale » della tensione sullo spessore della lastra sollecitata solo dalle considerate forze al contorno. È da avvertire per altro che per la lastra sufficientemente sottile la parte parabolica diviene in generale trascurabile rispetto a quella uniforme, per essere il prodotto $\Delta\chi_0\, z^2$ dell'ordine di grandezza della χ_0 moltiplicata per il quadrato del rapporto fra lo spessore e l'estensione della lastra ([262]); e si ha così sostanzialmente una conferma della presunta uniformità delle σ_x, σ_y, τ_{xy} sullo spessore della lastra sollecitata nel proprio piano, per il caso particolare delle forze di massa nulle. Dalle espressioni (63) dello spostamento (con k e $\varkappa$ nulle) riceve infine conferma anche ciò che per la stessa sollecitazione s'era presunto circa la deformazione delle sezioni, e in particolare della sezione mediana.

Nel problema riguardante le coppie μ_t e μ_n si presentano le condizioni al contorno per la χ^{II} allo stesso modo di quelle per la χ^{I} nel pro-

---

([261]) La χ^{I} biarmonica sodisfacente alle condizioni

$$\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial t^2} = r_n, \qquad \frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial n\,\partial t} = -\,r_t$$

esisterà sempre, s'intende purchè le r_n, r_t costituiscano un sistema di forze equilibrato, cioè sotto le condizioni

$$\int_{(c)} (r_n\, n + r_t\, t)\, ds = 0, \qquad \int_{(c)} (P - O) \wedge (r_n\, n + r_t\, t)\, ds = 0.$$

([262]) Per tale affermazione si richiede solo che la χ_0 vari con una certa regolarità, cioè senza troppi cambiamenti di segno delle derivate prime e seconde, come si verificherà nella grandissima maggioranza delle applicazioni.

La parte parabolica risulterà nulla, per qualunque spessore della lastra, quando la funzione $\Delta\chi^{\mathrm{I}}$ risulti lineare, e tale quindi anche $\Delta\chi_0$: risulterà allora

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\,\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x\,\partial y},$$

e si avrà un sistema piano di tensione in senso esatto (con forze di massa nulle).

blema precedente: poichè esse definiscono a meno di un termine lineare, com'è noto dal problema del sistema piano, un'unica funzione biarmonica, esisterà la soluzione solo nel caso particolare che questa risulti della forma della χ^{II} rappresentata dalla seconda delle (63), ossia sodisfacente alla condizione (ovviamente più restrittiva) $\Delta\chi^{\text{II}} = \text{cost.}$ Si conclude che le coppie al contorno, contrariamente a quanto s'è visto per le forze, non possono essere assegnate ad arbitrio sotto la sola condizione complessiva d'equilibrio ([263]). Ogni particolare flessione della lastra dovuta all'azione di coppie al contorno della forma

$$\mu_t = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad \mu_n = \frac{\partial^2 F}{\partial n \, \partial t},$$

essendo F una funzione a laplaciano costante, compresa pertanto nella soluzione del problema di Clebsch, potrà distinguersi (per la mancanza delle tensioni tangenziali τ_{zx}, τ_{yz}) col nome di *flessione semplice* ([264]).

Un caso particolare di flessione semplice si ha ponendo $\varkappa(x, y) = 0$, ossia

$$\chi = k(x^2 + y^2)\, z.$$

Risulta

$$\sigma_x = \sigma_y = 2\, kz, \quad \tau_{xy} = 0\,;$$

onde

$$m_{xy} = -\, m_{yx} = \text{cost.}, \quad m_x = m_y = 0\,:$$

non si hanno dunque momenti torcenti, e il momento flettente ha lo stesso

---

([263]) Bisogna ricordare anche che per l'esistenza della χ^{II} biarmonica sono necessarie (e sufficienti) le condizioni

$$\int_{(c)} (\mu_t\, n - \mu_n\, t)\, ds = 0, \qquad \int_{(c)} (P - 0) \wedge (\mu_t\, n - \mu_n\, t)\, ds = 0,$$

che corrispondono a quelle indicate nella nota ([261]), come risulta senz'altro dall'analogia col problema del sistema piano. Mentre la prima equivale evidentemente alla condizione d'equilibrio complessiva

$$\int_{(c)} (\mu_n\, n + \mu_t\, t)\, ds = 0,$$

la seconda è effettivamente una condizione in più, necessaria dunque ma non sufficiente per la possibilità del problema qui considerato.

([264]) Lo stesso nome si dà nella teoria delle travi a un caso particolare del problema di Saint-Venant, caratterizzato anch'esso dalla condizione $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$. Ma contrariamente a quanto si ha per la lastra, la flessione semplice della trave è sempre uniforme, cioè a momento costante.

valore in ogni punto e per ogni direzione (265). Si tratta della flessione detta *uniforme o sferica* (266).

63. Passando ora al problema generale della flessione, si considereranno agenti sulla lastra forze di massa con componente Z arbitraria e componenti X, Y nulle in media su ogni segmento parallelo a z; forze alle basi giacenti sulle basi stesse ed opposte agli estremi di ciascuno di tali segmenti,

$$\tau_{zx}\left(\frac{h}{2}\right) = \tau_{zx}\left(-\frac{h}{2}\right), \quad \tau_{yz}\left(\frac{h}{2}\right) = \tau_{yz}\left(-\frac{h}{2}\right);$$

e infine forze alla superficie laterale aventi generatrice per generatrice risultante parallela a z arbitrariamente variabile lungo la direttrice, e momento risultante arbitrario rispetto al punto di mezzo della generatrice medesima (267). La risoluzione seguente è un notevole esempio di applica-

---

(265) La differenza di segno di m_{xy} ed m_{yx} dipende ovviamente, per la sopra dichiarata convenzione, dall'essere

$$k \wedge i = j, \qquad k \wedge j = -i.$$

(266) La sezione mediana deve infatti ovviamente deformarsi secondo una superficie sferica. Dalle espressioni (62) dello spostamento si ha per i punti di tale sezione

$$\xi = \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{m-1}{mE} k(x^2 + y^2):$$

risulterebbe quindi un paraboloide di rivoluzione, le cui ordinate considerate infinitesime differiscono per infinitesimi del terz'ordine da quelle della sfera osculatrice nel vertice.

(267) Si è posta nulla la σ_z alle basi perchè l'azione di una $\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) = -\sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right)$ può stimarsi pari a quella di una risultante di forze di massa

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\, dz = 2\sigma_z\left(\frac{h}{2}\right),$$

da reputare a sua volta (sempre prescindendo da quanto riguarda la componente σ_z) indipendente dalla ripartizione lungo il segmento normale alla lastra. (La σ_z, che nella soluzione qui esposta si porrà identicamente nulla, potrebbe ricavarsi infine in ogni caso dalla terza equazione d'equilibrio.)

L'uguaglianza delle τ_{zx}, τ_{yz} alle basi è conseguenza dell'aver posto nulli i valori medi di X ed Y, dovendo risultare $\overline{X} = \overline{Y} = 0$: a tale condizione ci si può ovviamente zione del teorema della minima energia potenziale totale.

Si assuma uno spostamento di forma particolare ponendo

$$\zeta = \zeta_0(x, y) + \frac{\Delta\zeta_0}{2(m-1)} z^2, \qquad \xi = -\frac{\partial\zeta_0}{\partial x} z, \qquad \eta = -\frac{\partial\zeta_0}{\partial y} z; \tag{64}$$

onde risulta

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = -\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} z, \qquad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} z, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta\zeta_0}{m-1} z; \\ \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y} z, \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{2(m-1)}\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial y} z^2, \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{2(m-1)}\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial x} z^2. \end{gathered} \tag{65}$$

Le proprietà caratteristiche della deformazione considerata sono le seguenti:

1) i segmenti normali alla lastra si mantengono rettilinei (componenti ξ ed η proporzionali a z) e normali alla superficie deformata della sezione mediana ($\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$ per $z = 0$);

2) la sezione mediana s'inflette, assumendo la forma data dalla ordinata variabile ζ_0, senza estensione ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ per $z = 0$). Risultano inoltre evidentemente σ_x, σ_y, τ_{xy} proporzionali a z, quindi sodisfacenti alle condizioni $\overline{\sigma_x} = \overline{\sigma_y} = \overline{\tau_{xy}} = 0$ considerate alla fine del paragrafo 61; e la σ_z, già posta nulla alle basi, risulta nulla in ogni punto.

Si tratta di determinare la funzione $\zeta_0(x, y)$ mediante la condizione di minimo dell'espressione $\Phi - \mathcal{U}$, a meno di un termine lineare (rappresentante ovviamente un moto rigido) (268). Dovranno pertanto esprimersi le variazioni prime $\delta\Phi$ e $\delta\mathcal{U}$.

Espressione di $\delta\Phi$.

Ricordata la (46_2) che esprime il potenziale elastico unitario φ in funzione delle componenti di deformazione, si tralasceranno in essa i termini

---

sempre ridurre con l'aggiunta di forze di massa X ed Y costanti sullo spessore e di forze alle basi

$$\tau_{zx}\left(\frac{h}{2}\right) = -\tau_{zx}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2}X, \qquad \tau_{yz}\left(\frac{h}{2}\right) = -\tau_{yz}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2}Y,$$

restando così mutate solo le stesse τ_{zx}, τ_{yz} (per l'aggiunta di una parte variabile sullo spessore linearmente) e la σ_z (cfr. la nota (252)).

Non occorre da ultimo ricordare che l'insieme di tutte le forze assegnate deve sodisfare alle sei condizioni complessive d'equilibrio.

(268) Si potrebbe ovviamente togliere tale indeterminazione fissando i valori di ζ_0 e delle sue derivate prime in un punto.

in γ_{zx}, γ_{yz}, com'è consentito nel caso presente dalla piccolezza di tali componenti rispetto alle altre: risulta infatti dalle (65) che il rapporto dei rispettivi ordini di grandezza sarà in generale quello dello spessore della lastra alla sua estensione ([269]). Resta così

$$\varphi = \frac{1}{2}\lambda\,\Theta^2 + \mu\,(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}\,\mu\gamma_{xy}^2 \,.$$

Dalla

$$\Theta = -\,\frac{m-2}{m-1}\,\varDelta\zeta_0\, z,$$

che si ha dalle (65), si ottiene, ricordando che

$$\lambda = \frac{2\mu}{m-2} \qquad \text{e} \qquad \mu = G,$$

$$\lambda\,\Theta^2 = 2G\,\frac{m-2}{(m-1)^2}\,(\varDelta\zeta_0)^2\, z^2;$$

e così l'espressione precedente diventa

$$\varphi = G\left\{\frac{m}{m-1}\,(\varDelta\zeta_0)^2 + 2\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right]\right\} z^2.$$

Per il potenziale elastico totale Φ risulta dunque l'espressione

$$\Phi = \int\limits_{(\Sigma)} dA \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi\, dz = G\,\frac{h^3}{12}\int\limits_{(\Sigma)}\left\{\frac{m}{m-1}\,(\varDelta\zeta_0)^2 + 2\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right]\right\} dA.$$

Considerando ora separatamente le variazioni dei due termini di tale integrale, si ha per il primo

$$\delta\int\limits_{(\Sigma)} (\varDelta\zeta_0)^2\, dA = 2\int\limits_{(\Sigma)} \varDelta\zeta_0\left(\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial y^2}\right) dA\,;$$

onde, osservando che

$$\varDelta\zeta_0\,\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varDelta\zeta_0\,\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial\varDelta\zeta_0}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial x}\,,$$

([269]) Si ricordi la nota ([262]). Si ha così naturalmente un'altra causa d'approssimazione, che si aggiunge a quella consistente nella forma fissata a priori per lo spostamento.

e analogamente per $\Delta\zeta_0 \dfrac{\partial^2 \delta\zeta_0}{\partial y^2}$, e applicando il lemma di Gauss, si ottiene

$$\delta \int_{(\Sigma)} (\Delta\zeta_0)^2 \, dA = 2 \int_{(c)} \Delta\zeta_0 \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial n} \, ds - 2 \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x} \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial y} \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial y} \right) dA.$$

Essendo ancora

$$\frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x} \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial x} \delta\zeta_0 \right) - \frac{\partial^2 \Delta\zeta_0}{\partial x^2} \delta\zeta_0 ,$$

risulta infine con un'altra applicazione del lemma di Gauss

$$\delta \int_{(\Sigma)} (\Delta\zeta_0)^2 \, dA = 2 \int_{(c)} \Delta\zeta_0 \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial n} \, ds - 2 \int_{(c)} \frac{\partial \Delta\zeta_0}{\partial n} \delta\zeta_0 \, ds + 2 \int_{(\Sigma)} \Delta^2\zeta_0 \, \delta\zeta_0 \, dA.$$

Per il secondo dei termini suddetti si ha

$$\delta \int_{(\Sigma)} \left\{ \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} \right\} dA = \int_{(\Sigma)} \left\{ 2 \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta\zeta_0}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta\zeta_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta\zeta_0}{\partial x^2} \right\} dA =$$

$$= \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial x} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial y} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial x} \right) \right\} dA ;$$

che per il lemma di Gauss diventa, con ovvio passaggio,

$$\int_{(c)} \left\{ \left(\alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \, \partial y} - \alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial y} + \left(\alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \, \partial y} - \alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial x} \right\} ds =$$

$$= \int_{(c)} \left\{ \left(\alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \, \partial y} - \alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial n} \alpha_y + \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial t} \alpha_x \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \, \partial y} - \alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial n} \alpha_x - \frac{\partial\, \delta\zeta_0}{\partial t} \alpha_y \right) \right\} ds$$ [270].

---

[270] Essendo la coppia n, t orientata come la coppia x, y, si ha

$$\alpha_{nx} = \alpha_{ty} , \qquad \alpha_{ny} = - \alpha_{tx} ,$$

onde

$$\frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial n} \alpha_y + \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial t} \alpha_x , \qquad \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial n} \alpha_x - \frac{\partial \delta\zeta_0}{\partial t} \alpha_y .$$

Essendo poi

$$\alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} - \alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}, \quad \alpha_y \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} - \alpha_x \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y},$$

l'espressione precedente diventa

$$\int_{(c)} \left(\alpha_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial n}\, ds + \int_{(c)} \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial t}\, ds\,;$$

e per essere

$$\alpha_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2}, \quad \alpha_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t},$$

essa diventa anche

$$- \int_{(c)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial n}\, ds + \int_{(c)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t} \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial t}\, ds.$$

Osservato infine che

$$\int_{(c)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t} \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial t}\, ds = - \int_{(c)} \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t}\, \delta \zeta_0\, ds$$

(perchè $$\int_{(c)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t}\, \delta \zeta_0\right) ds = 0),$$

risulta

$$\delta \int_{(\Sigma)} \left\{\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right\} dA = - \int_{(c)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial n}\, ds - \int_{(c)} \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t}\, \delta \zeta_0\, ds.$$

Così si ha in tutto

$$\delta \Phi = \frac{G h^3}{6} \left\{\frac{m}{m-1} \int_{(\Sigma)} \Delta^2 \zeta_0\, \delta \zeta_0\, dA - \right.$$

$$\left. - \int_{(c)} \left(\frac{m}{m-1} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial n} + \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial n\, \partial t}\right) \delta \zeta_0\, ds + \int_{(c)} \left(\frac{m}{m-1} \Delta \zeta_0 - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2}\right) \frac{\partial\, \delta \zeta_0}{\partial n}\, ds \right\}.$$

Espressione di $\delta\mathcal{U}$.

S'introdurrà qui una nuova approssimazione considerando trascurabile il secondo termine dell'espressione di ζ rispetto al primo: si porrà cioè, nell'esprimere il lavoro delle forze esterne $\delta\mathcal{U}$, che ogni segmento parallelo a z, e in particolare ogni generatrice del contorno, si muova rigidamente compiendo una traslazione nella propria direzione, oltre alla rotazione di componenti $-\frac{\eta}{z}=\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}$, $\frac{\xi}{z}=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}$, rispettivamente secondo gli assi x ed y, intorno al proprio punto di mezzo ([271]). Posto allora

$$\left.\begin{aligned} p &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z\,dz, \qquad \mu_x' = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Yz\,dz - h\,\tau_{yz}\left(\pm\frac{h}{2}\right), \\ \mu_y' &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Xz\,dz + h\,\tau_{zx}\left(\pm\frac{h}{2}\right), \qquad r_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z\,dz \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

(indicando sempre con f la forza al contorno), e ricordate le definizioni di μ_t e μ_n del precedente paragrafo, risulta ovviamente

$$\delta\mathcal{U} = \int_{(\Sigma)} p\delta\zeta_0\,dA + \int_{(\Sigma)}\left(\mu_x'\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial y} - \mu_y'\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial x}\right)dA +$$

$$+ \int_{(c)} r_z\,\delta\zeta_0\,ds + \int_{(c)}\left(\mu_n\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial t} - \mu_t\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial n}\right)ds.$$

Ora dalla relazione

$$\int_{(\Sigma)} \mu_x'\frac{\partial\,\delta\zeta_0}{\partial y}\,dA = \int_{(c)} \mu_x'\,\alpha_y\,\delta\zeta_0\,ds - \int_{(\Sigma)}\frac{\partial\mu_x'}{\partial y}\,\delta\zeta_0\,dA$$

([271]) Così il secondo termine suddetto è stato messo in conto solo nell'espressione di ε_z, che è essenziale nella valutazione di $\delta\Phi$. (Si vedrà infatti che tale secondo termine può essere vantaggiosamente modificato, ma in modo da non alterare l'espressione medesima.)

La contradizione fra la condizione $\sigma_z=0$ sopra considerata e la $\varepsilon_z=0$ che si considera invece nella valutazione di $\delta\mathcal{U}$ non ha particolare importanza, trattandosi di una soluzione approssimata: basta che i termini tralasciati siano effettivamente abbastanza piccoli rispetto agli altri termini coi quali andrebbero sommati.