## Capitolo I

# CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

**1.** Per poter giudicare della resistenza di una costruzione (sia edificio, ponte, macchina, o altro) bisogna conoscere lo stato di deformazione e lo stato di tensione [1] prodotti in ogni elemento di essa dall'azione delle forze ad essa applicate, ed eventualmente da cause di natura diversa come variazioni termiche. Forze ed altre cause dovrebbero essere considerate in funzione del tempo (o almeno nella loro successione temporale) anche quando non vi sia un notabile effetto dinamico, vale a dire anche quando risultino praticamente trascurabili le forze d'inerza; ma è da avvertire fin d'ora che ogni assegnata sollecitazione (intendendo per tale parola il sistema delle forze e l'insieme delle altre cause accennate), la cui intensità non superi certi limiti, è compatibile con un unico sistema di tensioni e di deformazioni: tale sistema dipende allora in ogni istante dalla sola sollecitazione dell'istante medesimo, e si ha così, quando sia trascurabile l'effetto dinamico, un problema statico nel senso ordinario, indipendente cioè da ogni considerazione di situazioni precedenti. Questo sarà poi in ogni caso da riguardare come il problema essenziale, poichè il passaggio al problema dinamico non richiede nulla più dei noti concetti della Meccanica razionale. Entro i limiti accennati sarà compresa di regola, conforme a un conveniente criterio cautelativo, ogni prevista sollecitazione effettiva della considerata costruzione.

Parlando di deformazione si è già implicitamente abbandonata la considerazione del corpo rigido, definito in modo puramente geometrico mediante la condizione di invariabilità della distanza di ogni coppia di punti, per quella del corpo solido, la cui deformabilità in generale assai limitata (in ciò consistendo la differenza tra essi e i corpi fluidi o pa-

---

(1) Di tali stati si darà appresso una precisa definizione. Qui si fa riferimento ad una comune nozione intuitiva.

stosi) (2), ma non mai assolutamente nulla, potrà essere definita in termini fisici ponendola in relazione con lo stato di tensione. Per l'equilibrio di un corpo solido si richiedono ovviamente tra le forze le note condizioni della statica dei corpi rigidi, alle quali non sono da aggiungerne altre, dovendo intendersi naturalmente che esse condizioni siano verificate quando il corpo si trovi nella sua configurazione già variata per l'azione delle forze medesime. (Con lo spostamento dei punti del corpo varia la posizione rispettiva delle forze, anche posto che queste non varino di intensità e direzione). Nella Scienza delle costruzioni è da reputare normale il caso in cui la piccolezza degli spostamenti (a paragone delle dimensioni del corpo, nel senso che sarà chiarito al capitolo seguente) consenta di superare in pratica tale distinzione, e di considerare pertanto l'equilibrio del solido indeformato.

Tra le forze vanno considerate ovviamente le reazioni dei vincoli, la determinazione delle quali costituisce in generale un problema non distinto sostanzialmente da quello riguardante la tensione e la deformazione. S'intende che quando le condizioni elementari di vincolo siano indipendenti, cioè tali da lasciar libera la deformazione del corpo (3) (necessariamente non più di 6), le reazioni resteranno determinate dalle suddette condizioni di equilibrio; ma nel caso generale queste lasceranno invece il problema indeterminato: esistendo cioè una soluzione del sistema delle condizioni medesime, ne esisteranno infinite. Vi saranno dunque altre condizioni che varranno a rendere effettivamente determinato il problema concreto; e queste non potranno essere più le stesse per tutti i corpi astrattamente raggruppati nella categoria dei solidi, ma dovranno dipendere dalla particolare definizione della deformabilità nel senso sopra accennato. Poichè infatti il rispetto dei vincoli condiziona la deformazione, è chiaro che dovrà essere posta in relazione quest'ultima con le forze, quindi in particolare colle incognite reazioni; e a ciò potrà pervenirsi quando sia nota una relazione tra essa deformazione e la tensione, per essere questa direttamente legata alle forze come facilmente s'intuisce.

Si consideri ad esempio la trave della fig. 1, incastrata in $A$ ed appoggiata in $B$, soggetta alla forza $P$ applicata in $C$. L'equilibrio può aversi evidentemente con qualunque valore della reazione $Y$; ma tale

(2) Il concetto di piccolezza della deformazione sarà chiarito al Cap. II. Si vuol qui osservare che molti corpi che si comportano normalmente come solidi, e segnatamente i metalli, possono in particolari stati di tensione esser soggetti a *deformazioni plastiche* anche non limitate.

(3) Non saranno indipendenti, per esempio, le condizioni di vincolo poste in due punti nella direzione della loro congiungente. Anche questi concetti saranno meglio chiariti al capitolo seguente.

inderminazione scompare quando si tenga conto della deformazione della trave, supponendola nota in funzione delle forze che la sollecitano. Si potrà infatti porre allora la condizione che la trave senza l'appoggio in $B$ (mensola), che per l'azione della sola forza $P$ assumerebbe una configurazione come quella della fig. 1 *b*, si deformi invece per l'azione simultanea delle forze $P$ ed $Y$ in modo che lo spostamento (verticale) dell'estremo $B$ risulti nullo (fig. 1 *c*).

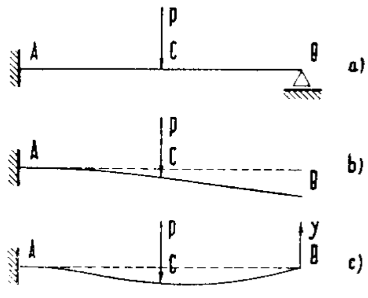

Fig. 1

2. A chiarimento delle precedenti considerazioni si pensa che possa giovare anche la trattazione di un particolare tipo di costruzione molto semplice (e per altro di notevole importanza anche pratica), cioè delle *travature reticolari piane*.

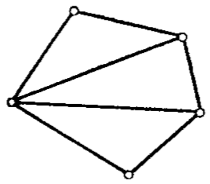
Fig. 2

Un certo numero di punti di un piano ed i segmenti rettilinei che li colleghino due a due in modo generico costituiscono lo schema di una travatura reticolare piana (fig. 2). I segmenti rappresentano le *aste*, solidi di forma allungata nella direzione di essi (ma che potrebbero in astratto essere anche di forma qualunque, purchè simmetrici rispetto al piano suddetto [4]), articolati a cerniera alle estremità dei segmenti medesimi con punti materiali, che sono i *nodi* [5]. Per essere considerato effettivamente come travatura reticolare il sistema descritto dovrà essere sollecitato soltanto da forze (comprese le reazioni) applicate ai nodi e giacenti nel piano di essi.

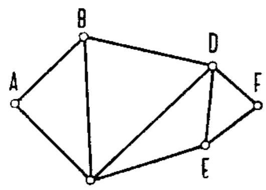

Fig. 3

Considerate indipendentemente dalle condizioni di vincolo, le travature reticolari possono essere *indeformabili* o *deformabili*. Si dirà indeformabile una travatura quando, supposta rigida ogni asta (e invariata pertanto la distanza dei nodi ai suoi estremi), non possa muoversi che di moto rigido; deformabile nel caso contrario. È indeformabile la travatura della fig. 3, come risulta osservando che il nodo $D$ è collegato al triangolo $ABC$, ovviamente indeformabile, per mezzo di due aste (non allineate), e allo stesso modo i nodi $E$ ed $F$ sono collegati successivamente a travature parziali indeformabili. Se si toglie

(4) Tale condizione assicura che sotto l'azione delle forze che saranno considerate i nodi non tenderanno ad uscire dal detto piano.

(5) Si ricordi che il collegamento a cerniera consente solo la rotazione relativa dei due corpi collegati intorno al punto nel quale è posta la cerniera medesima.

l'asta $CD$ si ottiene la travatura deformabile della fig. 4: i due triangoli $ABC$, $DEF$, collegati dalle due aste $BD$ e $CE$, possono rotare l'uno rispetto all'altro intorno al punto $O$ d'incontro degli assi delle aste medesime (rette cui appartengono i segmenti che le rappresentano) [6].

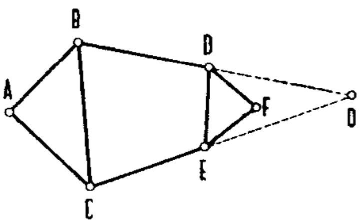

Fig. 4

Considerate invece insieme colle condizioni di vincolo (poste esclusivamente nei nodi, per quanto s'è avvertito), le travature reticolari possono distinguersi in *fisse* e *labili*. Si dirà fissa una travatura reticolare quando, sempre nell'ipotesi di rigidezza delle aste, e posti rigidi i vincoli [7], nessun nodo di essa possa spostarsi; labile nel caso contrario. La fig. 5 rappresenta una travatura indeformabile e fissa: mentre infatti la cerniera in $A$ consente la rotazione intorno al punto medesimo, l'appoggio in $B$ consente la rotazione intorno a un punto qualunque della retta $r$, che non contiene il punto $A$. La fig. 6 dà l'esempio di una travatura deformabile ma fissa: alle due parti $I$ e $II$ sono consentite rispettivamente le rotazioni intorno ad $A$ e intorno a $B$, mentre la rotazione relativa delle parti medesime è consentita intorno al punto $C$, che non appartiene alla retta $AB$. La fig. 7 rappresenta una travatura deformabile e labile, poichè la parte $II$, alla quale è consentita qui la rotazione intorno a un punto qualunque della retta $r$, potrà effettivamente rotare intorno al punto $D$ allineato con $A$ e $C$. E infine si ha ovviamente nella fig. 8 l'esempio di una travatura indeformabile ma labile (potendo rotare intorno al punto $C$).

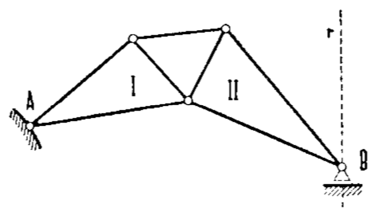

Fig. 5

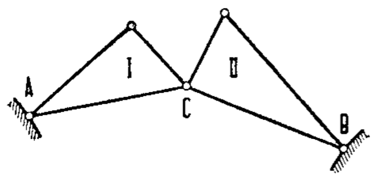

Fig. 6

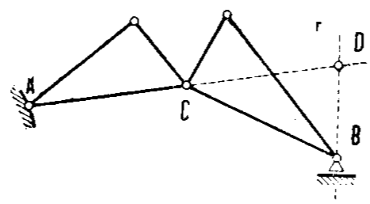

Fig. 7

In tutti i precedenti esempi si sono evidentemente considerate le rotazioni infinitesi-

---

(6) Lo spostamento del punto $D$ rispetto al sistema indeformabile $ABC$ è dato da una rotazione intorno a $B$, quindi (trattandosi, come sarà chiarito fra breve, di spostamenti infinitesimi) normale a $BD$; perciò il moto del sistema indeformabile $DEF$ dev'essere una rotazione intorno a un punto di tale retta. Per analoga ragione esso deve anche essere una rotazione intorno a un punto della retta $CE$.

(7) S'intende rigidi in senso stretto, secondo la definizione che sarà data al Cap. II: ogni condizione elementare di vincolo consiste cioè nel porre nulla una certa componente dello spostamento del nodo vincolato.

me; ed è chiaro infatti che alla possibilità di spostamenti infinitesimi è essenzialmente da riferire la deformabilità o la labilità di una travatura, poichè ciò che importa è che il moto possa o non possa aver inizio. Nel caso della fig. 9, per esempio, è evidente la possibilità geometrica di una diversa posizione del nodo $C$, cioè la posizione $C'$ simmetrica rispetto alla retta $AB$; ma è ugualmente chiaro che la travatura in realtà resta fissa, poichè il passaggio alla seconda posizione dovrebbe iniziarsi con la variazione di lunghezza di almeno una delle aste (8). Più interessante è la considerazione del caso inverso di una travatura che sia da considerare labile pur non essendo possibile uno spostamento finito: è il caso della fig. 10, colle tre cerniere $A$, $B$, $C$ allineate. È chiaro infatti che nessuno spostamento è consentito a rigore al punto $C$ senza variazioni di lunghezza delle aste; ma per uno spostamento infinitesimo normale ad $AB$, cui corrisponda una rotazione $\alpha$ di ciascuna delle aste medesime, si ha per queste un allungamento $l\,\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$, dunque infinitesimo di second'ordine rispetto allo spostamento, che è $l\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Questa possibilità dello spostamento infinitesimo significa che in realtà potrebbe aversi un piccolo spostamento di $C$ $\left(\text{per esempio dell'ordine di } \dfrac{1}{100}\,l\right)$ per un allungamento delle aste o un cedimento dei vincoli di un ordine di grandezza minore $\left(\dfrac{1}{10{\cdot}000}\,l\right)$: la fissità del punto $C$, riferita allo spostamento finito, avrebbe dunque un significato puramente teorico.

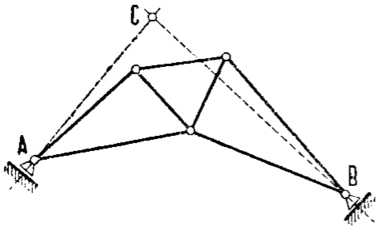

Fig. 8

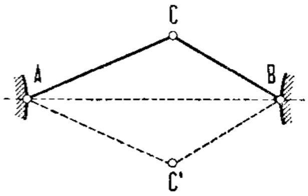

Fig. 9

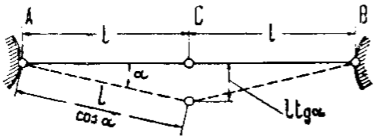

Fig. 10

**3.** Si consideri una generica travatura reticolare piana, e sia

$n$ il numero dei nodi,

$a$ il numero delle aste,

$a'$ il numero delle condizioni elementari di vincolo.

Assegnati ai nodi spostamenti arbitrari, si esprimano le condizioni di invarianza delle lunghezze delle aste osservando che lo spostamento relativo dei due estremi dovrà esser dato da una rotazione intorno ad uno

(8) S'intende che vanno considerati solo movimenti nel piano della travatura; perciò è da escludere la rotazione intorno alla retta $AB$.

di essi, e risultare perciò (trattandosi di rotazione infinitesima) normale all'asta medesima: si uguaglierà dunque a zero la differenza degli spostamenti degli estremi di ogni asta proiettati sulla direzione di essa (fig. 11), esprimendo in modo ovvio tali proiezioni in funzione delle componenti degli spostamenti medesimi rispetto ad una coppia di assi cartesiani. Alle equazioni così ottenute si aggiungano poi quelle riguardanti le condizioni di vincolo, ovviamente espresse per le medesime componenti degli spostamenti dei nodi vincolati, ottenendo così un sistema di $a+a'$ equazioni lineari omogenee per le $2n$ incognite che saranno le suddette componenti di spostamento. Quando tale sistema non ammetta che la soluzione triviale (valori nulli di tutte le incognite), la travatura sarà evidentemente fissa; in caso contrario essa sarà labile(9).

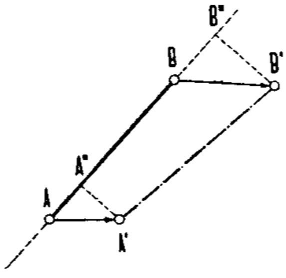

Fig. 11

Detta $c$ la caratteristica della matrice dei coefficienti del sistema, se è $c \leq 2n$, la differenza $2n - c$ è il numero delle soluzioni indipendenti di

(9) Si reputano qui opportuni alcuni richiami sui sistemi di equazioni lineari, cominciando dal teorema fondamentale (di Rouché): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema non omogeneo sia risolubile è che la caratteristica della matrice completa sia uguale a quella della matrice incompleta. Se tale caratteristica comune è uguale al numero delle incognite, e solo in tal caso, la soluzione è unica.*

Sia $e$ il numero delle equazioni, $i$ il numero delle incognite, $c$ la caratteristica della matrice incompleta. Possono allora enunciarsi come segue alcuni teoremi, che si faranno discendere dal precedente.

*Sistemi omogenei.* — *Un sistema omogeneo è risolubile se e solo se $c < i$* (non contando la soluzione triviale), *ed è $i - c$ il numero delle incognite cui possono attribuirsi valori arbitrari, quindi anche il numero delle soluzioni linearmente indipendenti.* Scelte infatti $i - c$ incognite in modo che la matrice privata delle colonne ad esse corrispondenti abbia ancora la caratteristica $c$, attribuendo ad esse valori arbitrari si ottiene un sistema non omogeneo, che per il teorema precedente ammette una e una sola soluzione. Basta osservare che la matrice completa di tale sistema ha anch'essa la caratteristica $c$ (poichè ogni determinante di essa contenente la colonna dei termini noti può esprimersi come combinazione lineare di determinanti del medesimo ordine appartenenti alla matrice del sistema omogeneo dato), e che è $c$ anche il numero delle incognite rimaste. Queste ultime resteranno così univocamente determinate. È noto poi che i sistemi linearmente indipendenti di $m$ numeri arbitrariamente scelti sono in numero di $m$. (Ciò può dimostrarsi ricorrendo allo stesso teorema precedente, applicato al sistema omogeneo negli $n$ coefficienti di una combinazione lineare di $n$ sistemi di tali numeri, che si ponga uguale a zero: è chiaro infatti che per $n > m$ si avrà sempre $c < n$, quindi il sistema ammetterà soluzione; mentre per $n = m$ si avrà in generale, cioè per valori generici degli $m$ numeri, $c = n$, e il sistema non ammetterà soluzione.)

*Se $c < e$, $e - c$ è il numero delle equazioni che possono togliersi dal sistema senza che aumenti il numero delle soluzioni indipendenti, cioè senza che si introducano nuove soluzioni.* È esso (esclusa la soluzione triviale): ciò significa che sono possibili in tal caso per i nodi della travatura $2n - c$ sistemi di spostamenti fra loro indipendenti. Si dirà che $2n - c$ è il *grado di labilità* della travatura (o anche che la travatura ha $2n - c$ gradi di labilità) ([10]).

Se è $c < a + a'$, la differenza $a + a' - c$ è il numero delle equazioni che si possono togliere al sistema senza che $c$ diminuisca; dunque il numero delle aste e condizioni di vincolo che si possono togliere alla travatura senza aumentarne il grado di labilità. Saranno aste e condizioni di vincolo da considerare *sovrabbondanti,* perchè inutili al fine della limitazione della possibilità di movimento dei nodi (sempre s'intende supposta la rigidità delle aste e dei vincoli).

Risulta da quanto s'è detto che la condizione affinchè una travatura sia fissa e senza elementi (aste o condizioni di vincolo) sovrabbondanti è che sia

$$c = 2n = a + a'.$$

È dunque necessaria ma non sufficiente la condizione $a = 2n - a'$, che diventa $a = 2n - 3$ nel caso particolare che le condizioni di vincolo siano nel numero minimo occorrente per la fissità della travatura.

Si avverta che essendo qui le incognite le stesse componenti di spostamento dei nodi, le $a'$ equazioni esprimenti le condizioni di vincolo sono

---

una conseguenza immediata del teorema precedente. È importante osservare che tale numero è anche quello delle relazioni lineari indipendenti che intercedono fra le equazioni del sistema medesimo: ciò risulta osservando che ognuna delle equazioni suddette dev'essere una combinazione lineare di quelle rimaste, ed è confermato dall'essere tale il numero delle soluzioni indipendenti del sistema omogeneo che definisce gli $e$ coefficienti di una delle suddette relazioni lineari (sistema che ha la stessa matrice di quello considerato, scambiate le linee con le colonne).

*Sistemi non omogenei.* — *Se $c < i$, essendo $c$ anche la caratteristica della matrice completa, $i - c$ è anche qui il numero delle incognite cui possono attribuirsi valori arbitrari, ossia il numero delle soluzioni indipendenti.* Basta ricordare che le soluzioni del sistema non omogeneo si ottengono sommando una qualunque di esse con una soluzione del corrispondente sistema omogeneo.

*Se $c < e$, $e - c$ è il numero delle relazioni indipendenti che debbono intercedere fra i termini noti affinchè il sistema ammetta soluzione.* Tale è infatti, come sopra s'è visto, il numero delle relazioni lineari indipendenti fra i primi membri delle equazioni del sistema; e affinchè questo sia possibile (dunque affinchè sia $c$ anche la caratteristica della matrice completa) le stesse relazioni dovranno ovviamente intercedere fra i rispettivi termini noti.

([10]) Cioè il numero dei gradi di libertà del sistema degli $n$ nodi (punti materiali) vincolati rigidamente fra loro dalle aste, e al suolo dagli stessi vincoli della travatura.

in ogni caso fra loro indipendenti ([11]) (e ciascuna di esse è indipendente da tutte le equazioni riguardanti le aste): segue che è sempre $c \geq a'$, quindi $a + a' - c \leq a$, e che la scelta degli elementi sovrabbondanti, soggetta alla sola condizione che la loro soppressione lasci invariata la caratteristica, può sempre farsi tra le sole aste ([12]).

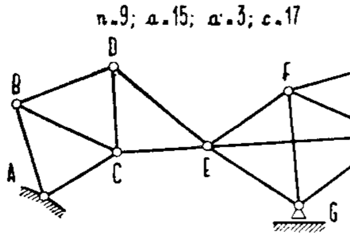

Fig. 12

Per illustrare con alcuni semplici esempi quanto s'è esposto, si vuol osservare da prima la travatura della fig. 12, labile di grado 1 (o con un grado di labilità) al pari di quella della fig. 7, ma con un'asta sovrabbondante; è chiaro infatti che l'asta $EI$ può essere tolta restando ugualmente fissata la distanza dei suoi estremi, per l'indeformabilità del sistema formato dai due triangoli $EFG$, $FGI$. Le stesso grado 1 di labilità ha la travatura della fig. 13, ed ha anch'essa un elemento sovrabbondante: l'appoggio in $D$ può infatti esser tolto restando ugualmente impedito lo spostamento di tale punto nella direzione $AD$, dovendo il sistema indeformabile $ABCD$ rotare intorno ad $A$. È chiaro anche che come elemento sovrabbondante potrà scegliersi invece di tale appoggio una qualunque delle aste del sistema medesimo.

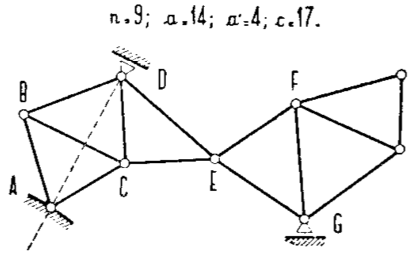

Fig 13

Fissa e senza elementi sovrabbondanti è la travatura della fig. 14 (e tale diverrebbe la precedente cambiando la direzione dell'appoggio in $D$). Nel caso della fig. 10, infine, si ha $n = 3$, $a = 2$, $a' = 4$, $c = 5$, poichè evidentemente le 6 equazioni non sono indipendenti: fissati infatti i punti $A$ e $B$, dall'invarianza della lunghezza di una delle aste segue (per spostamento infinitesimo) quella della lunghezza dell'altra. Una di queste è dun-

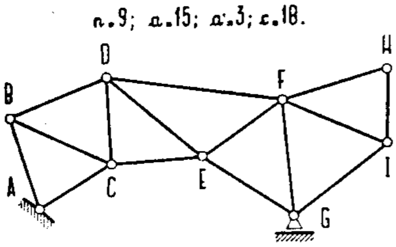

Fig. 14

([11]) Non si confonda con l'indipendenza delle condizioni di vincolo nel senso ricordato al § 1. S'intende che non si porranno più di due condizioni in un medesimo nodo.

([12]) Ciò significa che è sempre possibile in un sistema parziale di $c$ equazioni con caratteristica $c$ sostituire ad una delle equazioni riguardanti le aste un'equazione esprimente una qual si voglia condizione di vincolo, che non sia già compresa nel sistema medesimo, lasciando la caratteristica invariata: quest'ultima equazione sarà infatti necessariamente una combinazione lineare di quelle di esso sistema, ma dovrà essere una combinazione contenente almeno una delle equazioni riguardanti le aste; e basterà alque sovrabbondante, e lo spostamento che resta libero è quello del punto $C$ nella direzione ad esse normale.

Alle precedenti considerazioni cinematiche (anzi propriamente geometriche) si fanno ora seguire alcune considerazioni statiche, che con quelle si dimostreranno strettamente connesse.

Data una travatura soggetta a un certo sistema di forze, si considerino le azioni esercitate su un nodo generico da parte delle aste che in esso concorrono. Esse debbono avere la direzione delle aste medesime, poichè le corrispondenti reazioni alle estremità di ciascun'asta (azioni che questa riceve dai nodi) debbono essere opposte, com'è ovviamente richiesto dall'equilibrio dell'asta medesima, che per ipotesi non è soggetta ad altre forze. Si dirà *sforzo di un'asta* generica l'intensità delle opposte azioni che essa trasmette ai due nodi ai suoi estremi, con segno positivo o negativo secondo che l'asta sia tesa o compressa, cioè secondo che tali azioni siano rivolte verso l'asta medesima (fig. 15) o in senso contrario.

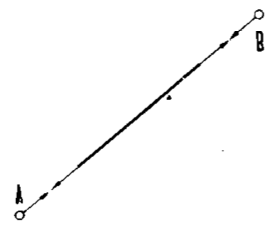

Fig. 15

Il nodo generico è in equilibrio sotto l'azione delle suddette forze trasmesse dalle aste e delle forze esterne ad esso applicate; compresa ovviamente fra queste ultime, per ogni nodo vincolato, la reazione del vincolo. Scrivendo per ciascun nodo (punto materiale) le due condizioni d'equilibrio riferite alle direzioni degli assi coordinati, si ottiene un sistema di $2n$ equazioni, con $a + a'$ incognite che sono gli sforzi delle aste e le reazioni dei vincoli (cioè propriamente l'intensità della reazione di ogni condizione elementare di vincolo, con segno positivo per la reazione in un prefissato verso): sistema questa volta non omogeneo, essendo costituito il termine noto di ogni equazione dalla somma delle proiezioni delle forze direttamente applicate al rispettivo nodo su uno degli assi coordinati [13]. È facile vedere che la matrice incompleta di questo sistema s'identifica con quella del sistema precedentemente considerato, scambiate le linee con le colonne [14]: segue che la caratteristica di essa

lora togliere una di queste sopprimendo la rispettiva asta, affinchè la nuova equazione resti indipendente da tutte le altre.

[13] Dicendo forze direttamente applicate s'intende escludere le reazioni dei vincoli.

[14] Nelle considerazioni geometriche si proiettano sulle direzioni delle aste e dei vincoli le incognite componenti secondo gli assi coordinati degli spostamenti dei nodi; qui si proiettano sulle direzioni degli assi le incognite forze trasmesse ai nodi dalle aste e dai vincoli nella loro direzione: ogni linea della seconda matrice, corrispondente ad una delle equazioni del sistema considerato precedentemente, come ogni colonna della prima matrice, corrispondente ad una certa incognita del sistema qui considerato,

è ancora quella precedentemente indicata con $c$. Lo stesso numero $2n - c$, grado di labilità della travatura, è dunque anche il numero delle relazioni che debbono intercedere fra i termini noti affinchè il suddetto sistema ammetta soluzione; vale a dire il numero delle condizioni cui debbono sodisfare le forze direttamente applicate affinchè ogni nodo della travatura possa trovarsi in equilibrio, e si trovi quindi in equilibrio la travatura medesima (essendosi già presupposto l'equilibrio di ogni asta). Tali relazioni, che risultano dall'eliminazione di tutte le incognite, possono ottenersi nel modo più semplice considerando i moti indipendenti consentiti ai nodi, cioè le soluzioni indipendenti del sistema omogeneo precedentemente considerato. Se si ricorda infatti che in tali moti restano invariate le lunghezze delle aste e sodisfatte le condizioni di vincolo, si vede facilmente che sommando le equazioni che esprimono per ognuno di essi l'annullamento del lavoro delle forze agenti su ciascun nodo (ovvia conseguenza delle equazioni considerate) si ottengono $2n - c$ relazioni indipendenti tra le sole forze direttamente applicate: queste possono così intendersi ottenute dall'applicazione del principio dei lavori virtuali, nella forma ordinaria, alla travatura considerata come sistema degli $n$ nodi rigidamente vincolati fra loro e al suolo (15).

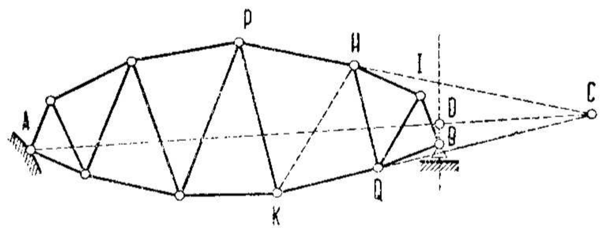

Fig. 16

Si consideri per esempio la travatura della fig. 16, che ha un grado di labilità: si vede subito che la parte di essa tra la cerniera in $A$ e l'asta $PK$ (compresa) può rotare intorno alla cerniera stessa, e la parte $HQBI$ intorno a $D$, punto d'incontro della retta per $B$ secondo la direzione del vincolo con la $AC$, essendo $C$ il punto d'incontro delle rette cui appartengono le due

contiene dunque i coseni degli angoli che l'asta o il vincolo elementare cui si riferisce la suddetta equazione o rispettivamente la suddetta incognita (componente dello sforzo o della reazione) fa coi due assi coordinati.

(15) Effettivamente la parte sostanziale del principio dei lavori virtuali consiste nell'ammettere che ogni condizione di vincolo posta per lo spostamento di un punto, o per lo spostamento relativo di due punti, secondo una certa direzione sia causa di una reazione, o di un'azione mutua, nella direzione medesima, restando quindi nulle le componenti di reazione nelle direzioni secondo le quali lo spostamento resti libero (si tratta di vincoli senza attrito). Da tale ammissione e dalle condizioni di equilibrio del corpo rigido libero, le quali notoriamente possono fondarsi su altri postulati di più immediata evidenza, si deduce facilmente l'ordinario enunciato del principio.

Nello scrivere le equazioni del sistema qui considerato si è appunto ammessa la suddetta proprietà per quanto riguarda i vincoli esterni ed interni (per i quali ultimi essa proprietà deriva dalla stessa definizione della travatura reticolare).

aste $PH$, $QK$ che collegano le due parti della travatura. Tale punto $C$ è infatti il centro della rotazione relativa delle parti medesime, la quale dev'essere insieme risultante di due rotazioni intorno a $P$ e ad $H$ e di due rotazioni intorno a $Q$ e a $K$; perciò il centro di rotazione della seconda parte dev'essere un punto di $AC$, mentre per il vincolo della parte stessa dev'essere un punto della suddetta retta per $B$. Poichè infine le due rotazioni debbono evidentemente essere di uno stesso segno e inversamente proporzionali alle distanze da $C$ dei rispettivi centri, resta determinato a meno di un comune fattore numerico (infinitesimo) lo spostamento consentito ad ogni nodo della travatura, da introdurre nell'espressione del lavoro virtuale.

Si osservi ora, considerando sempre lo stesso sistema non omogeneo, che se $c < a + a'$, è $a + a' - c$ il numero delle soluzioni indipendenti che si avranno ogni volta che siano sodisfatte le suddette condizioni di equilibrio, ossia il numero delle incognite a cui si possono assegnare valori arbitrari senza che risultino necessarie nuove condizioni. Poichè la scelta di tali incognite è vincolata solo dalla condizione che resti ancora $c$ la caratteristica della matrice privata delle colonne ad esse corrispondenti, è chiaro che esse si riferiscono alle medesime aste e condizioni di vincolo già indicate come sovrabbondanti [16]. Tali incognite, sforzi e reazioni, si diranno *staticamente indeterminate,* o *iperstatiche*; e iperstatica si dirà pure in tal caso la travatura, con *grado d'iperstaticità* (o numero dei gradi di iperstaticità) $a+a'-c$. Quando sia invece $c = a + a'$ la travatura si dirà *isostatica*, o *staticamente determinata*: gli sforzi e le reazioni resteranno allora determinati dal sistema di equazioni considerato per ogni sistema di forze direttamente applicate sodisfacente alle eventuali condizioni d'equilibrio di cui sopra s'è detto.

La travatura della fig. 10 è una volta iperstatica (cioè di grado 1, o con un grado d'iperstaticità): assegnato ad arbitrio lo sforzo di una delle aste, si trova infatti lo sforzo dell'altra tenendo conto della forza applicata in $C$ secondo la direzione delle aste medesime. La condizione di possibilità consiste nell'essere necessariamente nulla la forza applicata in direzione normale.

**4.** L'indeterminazione degli sforzi e delle reazioni non può ovviamente essere intesa in senso fisico. Se non si sono trovate altre condi-

---

(16) Dal sistema precedentemente considerato si toglievano infatti $a + a' - c$ equazioni, quindi altrettante linee dalla corrispondente matrice, sempre badando che la caratteristica restasse ancora $c$.

Si può anche osservare che togliere certe aste e condizioni di vincolo equivale per l'aspetto statico ad assegnare ai rispettivi sforzi e reazioni il valore arbitrario zero.

zioni che rendano determinato il problema analitico, ciò si deve all'ipotesi della rigidità, che dando delle aste e dei vincoli una definizione puramente geometrica, non consente di mettere in conto nessuna proprietà fisica delle une e degli altri. Si vuol vedere ora come si presenti il problema quando, considerati ancora rigidi i vincoli (per non introdurre in esso elementi che non dipendano esclusivamente dalla travatura [17]), si ponga di conoscere una legge che leghi l'allungamento (positivo o negativo) di ciascun'asta al rispettivo sforzo.

Si risolva il sistema non omogeneo sopra considerato riguardando come noti gli sforzi delle aste sovrabbondanti, ed esprimendo così gli sforzi delle altre aste come funzioni lineari (non omogenee) di tali *incognite iperstatiche* [18]: si potranno allora esprimere in funzione delle medesime incognite, per la legge sopra accennata, gli allungamenti di tutte le aste. Tali espressioni si pongano (invece dello zero) a secondo membro delle equazioni riguardanti gli allungamenti medesimi, considerate nella precedente discussione geometrica: si avrà così, aggiungendo ancora le equazioni (invariate) che esprimono le condizioni di vincolo, un sistema non omogeneo di $a + a'$ equazioni lineari con $2n$ incognite, la cui matrice incompleta sarà ancora quella già considerata di caratteristica $c$. Per la possibilità di tale sistema saranno allora necessarie $a + a' - c$ condizioni, cioè relazioni lineari fra i termini noti (le stesse che intercedono fra i primi membri); e saranno queste, contenenti le $a + a' - c$ incognite iperstatiche, le equazioni occorrenti per la determinazione delle incognite medesime. Esse si diranno *equazioni di congruenza*, in quanto esprimono l'esigenza che le variazioni di lunghezza delle aste risultino da un certo spostamento di ogni nodo, senza sconnessione della travatura o rimozione di alcun vincolo.

Finchè la relazione tra sforzi ed allungamenti si consideri generica, potrà solo presumersi che il sistema delle equazioni di congruenza ammetta un'unica soluzione che si adatti al problema concreto. L'esistenza e l'unicità della soluzione può invece facilmente dimostrarsi quando si ponga che la suddetta relazione sia per ogni asta una semplice proporzionalità, con coefficiente positivo [19]. Le equazioni di congruenza risultano in tal caso lineari nelle incognite iperstatiche, con termini noti costituiti da combinazioni lineari omogenee delle forze assegnate: essendo

---

(17) Come sarebbero le relazioni tra gli spostamenti dei punti vincolati e le rispettive reazioni. Analiticamente il problema resterebbe immutato.

(18) S'è già osservato che come elementi sovrabbondanti si possono sempre scegliere solo aste.

(19) Quest'ultima condizione significa che a sforzi di trazione e di compressione corrispondono rispettivamente, com'è ovvio, allungamenti e accorciamenti.

il numero di esse pari a quello delle incognite, basterà dimostrare che il determinante $D$ del sistema risulta necessariamente diverso da zero; e tale dimostrazione si ottiene osservando che se fosse $D = 0$ ammetterebbe soluzione il corrispondente sistema omogeneo, che si ha ponendo tutte le forze nulle. Per vedere infatti come ciò sia impossibile, si esprima l'annullarsi del lavoro dell'insieme di tutte le forze applicate ad ogni nodo (cioè le sole azioni delle aste, essendo nullo per ipotesi il lavoro delle reazioni nei nodi vincolati, e qui nulle anche le forze direttamente applicate) per lo spostamento del nodo medesimo risultante dalla soluzione del sistema precedentemente considerato, avente per termini noti gli allungamenti delle aste: soluzione che deve esistere per quei valori delle incognite iperstatiche che rendono sodisfatte, conforme all'ipotesi, le equazioni di congruenza. Sommando le relazioni così ottenute, risulta evidentemente eguagliata a zero la somma dei prodotti degli sforzi per gli accorciamenti delle rispettive aste (20); e non potendo per dato nessuno di tali prodotti essere $> 0$, la suddetta ipotesi dell'esistenza di valori non nulli delle incognite iperstatiche si dimostra contradittoria (21).

Può farsi l'osservazione che mentre i primi membri delle equazioni riguardanti gli allungamenti delle aste esprimono tali allungamenti nell'ipotesi che gli spostamenti dei nodi siano infinitesimi (nel senso di spostamenti finiti moltiplicati per un numero infinitesimo), i secondi membri successivamente introdotti, esprimendo gli allungamenti medesimi in funzione dei rispettivi sforzi conforme ad una proprietà fisica, risulterebbero finiti. In effetto deve intendersi che si tratti del caso limite che si ha ponendo moltiplicate per uno stesso numero infinitesimo anche tutte le forze assegnate; tuttavia la soluzione che si ottiene può considerarsi praticamente ancora valida per forze finite, e quindi per spostamenti finiti, risultando questi ultimi almeno in generale abbastanza piccoli a paragone delle dimensioni della travatura, da rendere sufficientemente approssimate le suddette espressioni degli allungamenti delle aste (22).

---

(20) Basta riunire le coppie di termini riguardanti le azioni opposte esercitate da ciascun'asta sui nodi ai suoi estremi.

(21) Basta che siano effettivamente deformabili, cioè con rapporto fra l'allungamento e lo sforzo diverso da zero, tutte le aste già considerate sovrabbondanti, o altre in ugual numero che tali possano considerarsi.

(22) Si può osservare che se la trattazione del caso limite degli spostamenti infinitesimi avesse interesse solo teorico, sarebbe stata da introdurre senz'altro da principio l'ipotesi della proporzionalità fra gli allungamenti delle aste e i rispettivi sforzi. Ma nell'indicata applicazione pratica al caso effettivo degli spostamenti finiti potrebbe avvenire che questi fossero piccoli abbastanza da rendere accettabili le espressioni semplificate degli allungamenti, e non invece abbastanza al fine di rendere accettabile la relazione di semplice proporzionalità di questi ultimi agli sforzi. In altre parole, i ter-

S'intende evidentemente che in pratica è da evitare non solo ogni situazione di labilità, ma anche ogni situazione che ad essa si avvicini (23): dove ad esempio concorrano in un nodo due sole aste, l'angolo di esse non dovrà essere troppo piccolo (fig. 17). Ciò non solo perchè gli spostamenti dei nodi potrebbero condurre alla configurazione labile (allineamento o parziale sovrapposizione delle aste $AB$, $BC$, rispettivamente nei due casi della figura); ma perchè anche nella configurazione indeformata, se le forze non si approssimano alla condizione che in tal caso diverrebbe necessaria, gli sforzi occorrenti ad equilibrarle possono facilmente superare la resistenza delle aste. L'accrescersi oltre ogni limite degli sforzi con l'avvicinarsi alla configurazione di labilità, evidente nell'esempio della fignra, risulta chiaro in generale se si osserva che la soluzione del sistema delle equazioni d'equilibrio dei nodi viene a perdersi tendendo all'infinito. Un altro esempio è dato dalla figura 18, in cui la retta della reazione dell'appoggio $B$ passa a poca distanza dal punto fisso $A$ : tendendo a zero tale distanza divengono infinite le reazioni, e tali quindi gli sforzi.

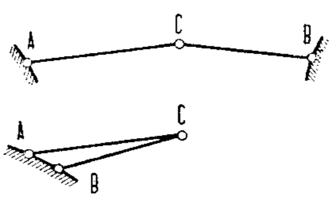

Fig. 17

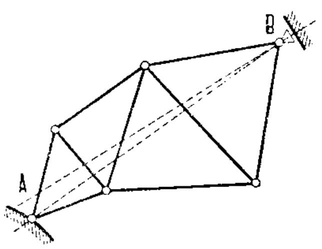

Fig. 18

Si vuol ricordare da ultimo che per considerare spostamenti finiti bisognerebbe anche modificare la definizione delle condizioni elementari di vincolo (assegnandone la direzione per ogni posizione del punto vincolato in un certo intorno della posizione iniziale), e scrivere tutte le equazioni sopra considerate riguardando come configurazione della travatura quella finale, da riferire all'assegnata configurazione iniziale mediante gl'incogniti spostamenti. Il problema si complicherebbe perdendo il carattere lineare; ma non resterebbe alterata la sostanza delle precedenti considerazioni.

---

mini d'ordine superiore della relazione effettiva potrebbero non essere trascurabili rispetto ai termini di prim'ordine per essere effettivamente troppo ampio l'intervallo di variazione degli allungamenti, anche se abbastanza ristretto per quanto riguarda la trascurabilità dei termini d'ordine superiore delle espressioni degli allungamenti medesimi in funzione degli spostamenti dei nodi.

(23) A scopo di studio potranno considerarsi travature labili, risultanti dalla scissione di travature effettive.