

## CAPITOLO X

### PROBLEMI PIANI

#### 109. Stati elastici piani.

Una importante classe di problemi interessanti le applicazioni conduce alla formulazione dei cosiddetti problemi piani di deformazione o di tensione. Essi riguardano solidi di forma cilindrica riferiti a un sistema di coordinate materiali  $x_1, x_2, x_3$  avente gli assi  $x_1, x_2$  nel piano di una sezione trasversale retta e l'asse  $x_3$  parallelo all'asse del cilindro.

Il carattere fondamentale di tali problemi è rappresentato dall'ipotesi che lo stato di deformazione o lo stato di tensione siano *piani*, cioè esprimibili mediante tre sole componenti di deformazione  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  nel primo caso o tre sole componenti di tensione  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  nel secondo. Molti problemi applicativi possono essere ricondotti a tale forma. Ad esempio, in un solido cilindrico molto lungo, soggetto a forze di massa e di superficie perpendicolari alle sue generatrici e costanti lungo  $x_3$ , la zona media si trova in uno stato piano nella deformazione e gli spostamenti dei suoi punti appartengono a piani perpendicolari a  $x_3$ . Così, per una lastra piana sottile soggetta a forze giacenti nei piani paralleli al piano medio e distribuite uniformemente lungo lo spessore, si può ammettere con buona approssimazione che le componenti di tensione dirette secondo  $x_3$  siano nulle e di conseguenza lo stato sia piano nella tensione.

La formulazione dei problemi piani discende immediatamente dalla trattazione generale e può essere data con il semplice riferimento alle relazioni già ottenute pur di limitare la convenzione della somma ai valori 1, 2 degli indici anzichè 1, 2, 3.

L'analisi dei problemi piani sarà svolta secondo lo stesso procedimento logico seguito sinora. Cioè, premesse le considerazioni fonda-

mentali sulla congruenza dello stato di deformazione e sull'equilibrio dello stato di tensione, verranno formulate le equazioni significative del problema sulla base di un legame costitutivo di tipo elastico isotropo lineare tra le componenti di deformazione e le componenti di tensione. In tal modo sarà impostato il problema relativo a uno *stato elastico piano*, che potrà rappresentare il fondamento per successive estensioni a legami costitutivi diversi da quello elastico e permettere così la trattazione di problemi relativi a *stati anelastici* o, in particolare, a *stati elastoplastici*.

### 110. Problema piano di deformazione.

Lo studio di un solido cilindrico soggetto a una distribuzione di forze esterne tale che le componenti di deformazione secondo l'asse del cilindro si annullino e le altre componenti siano costanti lungo questo asse conduce a un problema piano nella deformazione. Precisamente, diremo che un solido si trova in uno *stato piano di deformazione* parallelo al piano  $(x_1, x_2)$  se risultano verificate le seguenti condizioni per le componenti di deformazione:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{11,3} = \varepsilon_{22,3} = \varepsilon_{12,3} = 0. \quad [110. 1]$$

Come fu detto in generale nel § 17, le componenti di deformazione, intese come funzioni arbitrarie del punto, potranno rappresentare una deformazione congruente se derivabili da funzioni di spostamento  $u_1, u_2, u_3$  continue, monodrome e differenziabili, cioè se, per deformazioni infinitesime, sussistono nel caso attuale le relazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{1,3} + u_{3,1}, & 0 &= u_{2,3} + u_{3,2}, & 0 &= u_{3,3}, \\ \varepsilon_{11} &= u_{1,1}, & \varepsilon_{22} &= u_{2,2}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}). \end{aligned} \quad [110. 2]$$

A meno di moti rigidi di insieme le componenti di rotazione dell'elemento generico in sè sono ottenute dalla (17. 12) nella forma:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \int_0^P [(\varepsilon_{21,1} - \varepsilon_{11,2}) dx_1 + (\varepsilon_{22,1} - \varepsilon_{12,2}) dx_2], \\ \omega_{32} &= 0, & \omega_{13} &= 0, \end{aligned} \quad [110. 3]$$

da cui, per le seconde tre [110. 1], l'unica componente di rotazione diversa da zero risulta unicamente funzione di  $x_1$  e  $x_2$ .

A loro volta le componenti di spostamento valgono per le [17. 14], sempre a meno di moti rigidi:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^P [\varepsilon_{11} dx_1 + (\varepsilon_{12} + \omega_{12}) dx_2], \\ u_2 &= \int_0^P [(\varepsilon_{21} + \omega_{21}) dx_1 + \varepsilon_{22} dx_2], \\ u_3 &= 0, \end{aligned} \quad [110. 4]$$

e sono anche esse unicamente funzioni delle sole variabili  $x_1$  e  $x_2$ . Vediamo dunque che la definizione di stato piano di formazione può essere espressa, in alternativa alle [110. 1], dalle condizioni equivalenti:

$$u_3 = 0, \quad u_{1,3} = 0, \quad u_{2,3} = 0. \quad [110. 5]$$

Quando il comportamento fisico del solido sia caratterizzato da un legame lineare di tipo elastico isotropo, le componenti di tensione si ottengono dalla particolarizzazione delle [40. 5], osservando che nel caso in esame, cioè per  $\varepsilon_{33} = 0$ , la dilatazione cubica vale  $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ . Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), & \tau_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), & \tau_{23} &= 0, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), & \tau_{31} &= 0, \end{aligned} \quad [110. 6]$$

e sommando membro a membro le prime due, con riguardo alla definizione [40. 13] del rapporto di contrazione trasversale  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ , otteniamo dal confronto con la terza:

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad [110. 7]$$

Poichè  $\sigma_{33}$  non dipende da  $x_3$ , le equazioni indefinite di equilibrio [27. 3] mostrano che la componente delle forze di volume secondo tale direzione,  $p_3 = \rho g_3$ , deve essere necessariamente nulla, e si riducono perciò alle sole due:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \tau_{21,2} + p_1 &= 0, \\ \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} + p_2 &= 0. \end{aligned} \quad [110. 8]$$

nelle quali le componenti  $p_1, p_2$  devono risultare indipendenti da  $x_3$ . Analogamente le equazioni di equilibrio ai limiti [27. 4] si riducono pure a due sole:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 &= f_1, \\ \tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= f_2. \end{aligned} \quad [110. 9]$$

con riguardo alla circostanza che  $n_3 = 0$  e quindi  $f_3 = 0$ .

Se nelle relazioni di legame [110. 6] esprimiamo le componenti di deformazione in termini delle derivate di spostamento secondo le tre ultime [110. 2], cioè:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu u_{1,1} + \lambda (u_{1,1} + u_{2,2}), \\ \sigma_{22} &= 2\mu u_{2,2} + \lambda (u_{1,1} + u_{2,2}), \\ \tau_{12} &= \mu (u_{1,2} + u_{2,1}),\end{aligned}\tag{110. 10}$$

le equazioni indefinite di equilibrio assumono la forma [41. 3]:

$$\begin{aligned}\mu \nabla u_1 + (\lambda + \mu) (u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} + p_1 &= 0, \\ \mu \nabla u_2 + (\lambda + \mu) (u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} + p_2 &= 0,\end{aligned}\tag{110. 11}$$

avendo indicato con  $\nabla$  l'operatore di Laplace nelle due variabili  $x_1, x_2$ . In modo analogo le equazioni di equilibrio ai limiti [110. 9] assumono la forma [41. 5]:

$$\begin{aligned}\mu [2u_{1,1}n_1 + (u_{1,2} + u_{2,1})n_2] + \lambda (u_{1,1} + u_{2,2})n_1 &= f_1, \\ \mu [2u_{2,2}n_2 + (u_{1,2} + u_{2,1})n_1] + \lambda (u_{1,1} + u_{2,2})n_2 &= f_2,\end{aligned}\tag{110. 12}$$

nelle due variabili  $x_1, x_2$ .

Le equazioni differenziali del secondo ordine [110. 11] rappresentano la particolarizzazione al problema piano di deformazione delle equazioni di Navier, e ne consentono la risoluzione in termini di spostamenti: abbiamo in tal caso un problema al contorno per spostamenti assegnati. Poichè  $u_1, u_2$  non dipendono da  $x_3$ , dobbiamo considerare solo lo stato di deformazione in un qualsiasi piano parallelo a  $(x_1 x_2)$ . Le equazioni [110. 11] devono perciò essere verificate nel dominio piano  $A$  costituito da una qualsiasi sezione trasversale del cilindro, nel rispetto degli spostamenti  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  assegnati sul contorno  $C$  di  $A$ , come indicato in figura 117 a).

Le condizioni al contorno sulle basi del cilindro non devono essere considerate in quanto le ipotesi adottate sulla natura della deformazione impongono sulle basi stesse le condizioni:

$$\tau_{13} = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad u_3 = 0, \tag{110. 13}$$

cioè le facce terminali del cilindro devono essere libere da forze agenti nei loro piani e rigidamente fissate nei riguardi di spostamenti secondo  $x_3$ , pur essendo permessa una libertà di movimento nei piani stessi.

Un secondo problema al contorno può essere formulato per lo stato piano di deformazione esclusivamente in termini di tensioni come caso particolare delle equazioni sviluppate nel § 41 b). Esso ha interesse quando sul contorno  $C$  di  $A$  siano assegnate le forze di superficie  $f_1$ ,  $f_2$  come indicato in fig. 117 b).

Alle equazioni di equilibrio, indefinite [110. 8] ed ai limiti (110. 9), già espresse in termini delle componenti di tensione, dovremo associare

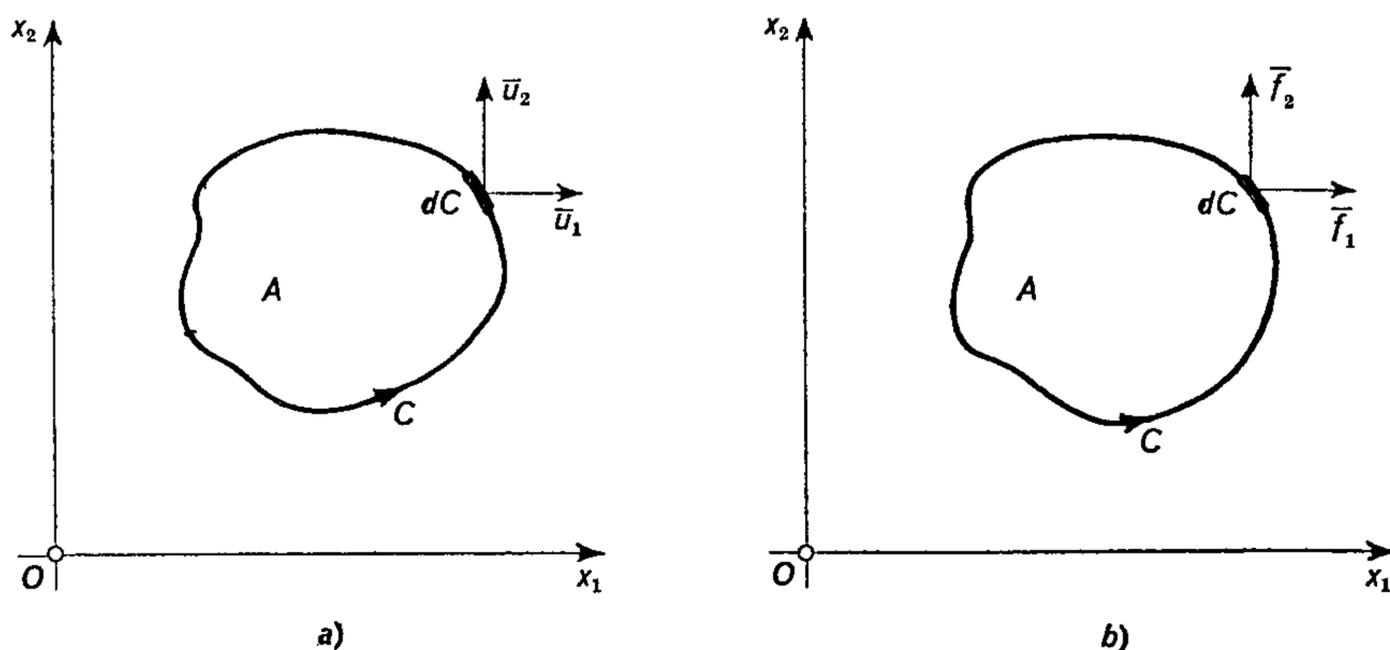


Fig. 117.

in questo secondo caso le equazioni di congruenza nella forma di Beltrami-Michell [41. 17]. Ora, nel problema piano in esame, le equazioni esplicite di congruenza [17. 10] nelle derivate seconde delle componenti di deformazione si riducono alla prima di esse:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad [110. 14]$$

essendo le altre cinque identicamente soddisfatte perchè i termini in esse contenuti sono nulli, o come derivate rispetto a  $x_1$  e  $x_2$  di componenti nulle, o come derivate rispetto a  $x_3$  di componenti funzioni delle sole  $x_1$  e  $x_2$ .

Con riguardo alla [110. 7] le relazioni inverse delle [110. 6] divengono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{12}, \end{aligned} \quad [110. 15]$$

e sostituite nella [110. 14] permettono di esprimere questa equazione in termini di tensioni:

$$(1 - \nu) \nabla (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{11,11} + \sigma_{22,22} + 2\tau_{12,12}. \quad [110. 16]$$

Il secondo membro della relazione così ottenuta può essere ulteriormente trasformato tenendo presenti le equazioni indefinite di equilibrio [110. 8]. Precisamente, derivando la prima rispetto a  $x_1$ , la seconda rispetto a  $x_2$  e sommando:

$$\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22} + 2\tau_{12,12} = - (p_{1,1} + p_{2,2}), \quad [110. 17]$$

per cui possiamo scrivere, in definitiva, l'equazione di congruenza per il problema piano di deformazione nella forma:

$$(1 - \nu) \nabla (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + p_{1,1} + p_{2,2} = 0. \quad [110. 18]$$

Il problema espresso dalle [110. 8] e [110. 14] viene così formulato completamente in termini di tensioni e può essere affrontato nel rispetto delle condizioni [110. 9] sul contorno  $C$  dove sono assegnate le forze  $f_1, f_2$ .

### 111. Problema piano di tensione.

Un problema duale di quello discusso nel § 110 si ottiene nell'ipotesi che le componenti di tensione secondo l'asse  $x_3$  si annullino e le altre componenti si mantengano costanti lungo tale asse.

Diremo in questo caso che il solido si trova in uno *stato piano di tensione* parallelo al piano ( $x_1 x_2$ ) se risultano verificate le seguenti condizioni per le componenti di tensione:

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{11,3} = \sigma_{22,3} = \tau_{12,3} = 0. \quad [111. 1]$$

Le equazioni indefinite di equilibrio [27. 3] risultano immediatamente nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \tau_{21,2} + p_1 &= 0, \\ \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} + p_2 &= 0, \end{aligned} \quad [111. 2]$$

e le corrispondenti condizioni ai limiti [27. 4] sul contorno  $C$  di  $A$  si riducono alle:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 &= f_1, \\ \tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= f_2. \end{aligned} \quad [111. 3]$$

Le forze esterne, di volume e di superficie, devono avere componenti nulle secondo  $x_3$  ( $p_3 = 0, f_3 = 0$ ) e giacere quindi nel piano ( $x_1 x_2$ ).

Nel caso di elasticità lineare isotropa le [40. 5] forniscono le seguenti relazioni tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & \tau_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & 0 &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ 0 &= 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), & 0 &= 2\mu\varepsilon_{23}.\end{aligned}\quad [111. 4]$$

Dalla terza di queste, cioè dalla condizione  $\sigma_{33} = 0$ , si deduce la seguente relazione:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad [111. 5]$$

che rappresenta la forma duale della [110. 7]. Introdotta la posizione:

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{2\mu + \lambda}, \quad [111. 6]$$

le prime due [111. 4] divengono:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).\end{aligned}\quad [111. 7]$$

Esse sono formalmente analoghe alle prime due [110. 6] e di conseguenza anche le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti risulteranno identiche alle [110. 11] pur di sostituire  $\lambda$  con  $\lambda^*$ .

Sommando membro a membro le [111. 7] otteniamo:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\mu + \lambda^*)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad [111. 8]$$

e con la nuova posizione:

$$\nu^* = \frac{\lambda^*}{2(\mu + \lambda^*)}, \quad [111. 9]$$

possiamo scrivere le [111. 7] nella forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \nu^*(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \nu^*(\sigma_{11} + \sigma_{22}).\end{aligned}\quad [111. 10]$$

Risolvendo rispetto a  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  otteniamo infine le seguenti espressioni per le componenti di deformazione:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu^*) \sigma_{11} - \nu^* \sigma_{22}], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu^*) \sigma_{22} - \nu^* \sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{12},\end{aligned}\tag{111. 11}$$

formalmente identiche alle [110. 15] pur di sostituire il rapporto di contrazione trasversale  $\nu$  con  $\nu^*$ .

Le equazioni esplicite di congruenza [17. 10] si riducono nel caso presente alle quattro seguenti:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2\varepsilon_{12,12}, \\ \varepsilon_{33,11} = 0, \quad \varepsilon_{33,22} = 0, \quad \varepsilon_{33,12} = 0,\end{aligned}\tag{111. 12}$$

per l'annullarsi di termini rappresentati o dalle derivate rispetto a  $x_1$ ,  $x_2$  di componenti di deformazione nulle o dalle derivate rispetto a  $x_3$  di componenti di deformazione indipendenti da tale variabile.

Con riguardo alle [111. 11] la prima [111. 12] diviene:

$$(1 - \nu^*) \nabla (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{11,11} + \sigma_{22,22} + 2\tau_{12,12},\tag{111. 13}$$

e tenendo presente la trasformazione delle equazioni di equilibrio che ci condusse alla [110. 16], anche:

$$(1 - \nu^*) \nabla (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + p_{1,1} + p_{2,2} = 0,\tag{111. 14}$$

formalmente analoga alla [110. 18].

Con riguardo alla [111. 5] ed alla [111. 8] le ultime tre [111. 12] divengono invece:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} = 0, \quad (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} = 0, \quad (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} = 0,\tag{111. 15}$$

ed impongono perciò all'invariante lineare di tensione  $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22}$  di essere una funzione lineare in  $x_1$  e  $x_2$  ed indipendente dal prodotto  $x_1 x_2$ , cioè della forma:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3.\tag{111. 16}$$

Data tale struttura lineare l'operatore di Laplace che compare al primo membro della equazione di congruenza [111. 14] risulta identicamente nullo, per cui lo stato piano di tensione può esistere se, e solo se:

$$\text{Div } \mathbf{p} \equiv p_{1,1} + p_{2,2} = 0 . \quad [111. 17]$$

Il problema piano di tensione, dunque, malgrado la analogia formale con il problema piano di deformazione, si differenzia profondamente da questo non solo sotto l'aspetto fisico ma anche da un punto di vista analitico. La condizione imposta allo stato di tensione dalla [111. 16] restringe la portata applicativa del problema.

Tale grave difficoltà viene superata attraverso due procedimenti di carattere piuttosto discutibile. Il primo<sup>1</sup> consiste nell'ignorare le tre equazioni di congruenza [111. 15] e quindi evitare la restrizione imposta dalla [111. 16]; il secondo<sup>2</sup> nel sostituire al problema piano come esposto in precedenza un problema diverso, detto *generalizzato*, nel quale alle tensioni  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$  vengono sostituite opportune medie calcolate lungo l'altezza del cilindro. Appaiono chiari i motivi che rendono criticabili entrambi i procedimenti. Infatti per quanto riguarda il primo di essi le soluzioni così ottenute non sono congruenti mentre per quanto riguarda il secondo le soluzioni potranno anche essere numericamente accettabili purchè l'altezza del cilindro sia molto piccola rispetto alle dimensioni della sezione trasversale, cioè si tratti di una lastra sottile sollecitata nel proprio piano.

## 112. Funzione di tensione.

Consideriamo il caso in cui le forze di volume risultino nulle, cioè  $p_1 = p_2 = 0$ : allora accanto al problema piano di deformazione esiste anche il problema piano di tensione, se pure quest'ultimo non possa fornire in generale risultati significativi a causa della condizione restrittiva [111. 16].

Le equazioni di equilibrio [110. 8] assumono la forma omogenea:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \tau_{21,2} &= 0 , \\ \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 . \end{aligned} \quad [112. 1]$$

La prima di queste equazioni rappresenta la condizione per l'esistenza di una certa funzione  $\Psi_1(x_1, x_2)$ , tale che:

$$\sigma_{11} = \Psi_{1,2} , \quad \tau_{21} = -\Psi_{1,1} , \quad [112. 2]$$

<sup>1</sup> S. TIMOŠENKO, *Theory of Elasticity*, pp. 22-24, New York, 1934.

<sup>2</sup> L. N. G. FILON, *Phil. Trans. Roy. Soc. London (A)*, 201, 63 (1903).

mentre la seconda richiede, in modo analogo, l'esistenza di una certa funzione  $\Psi_2(x_1, x_2)$ , tale che:

$$\sigma_{22} = \Psi_{2,1}, \quad \tau_{12} = -\Psi_{2,2}. \quad [112. 3]$$

Dalla uguaglianza delle tensioni tangenziali,  $\tau_{21} = \tau_{12}$ , discende la relazione:  $\Psi_{1,1} = \Psi_{2,2}$ , che esprime la condizione per l'esistenza di una funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  le cui derivate prime siano uguali alle  $\Psi_2, \Psi_1$  rispettivamente, cioè:

$$\Psi_{,1} = \Psi_2, \quad \Psi_{,2} = \Psi_1. \quad [112. 4]$$

In definitiva la soluzione generale del sistema differenziale [112. 1] sarà espressa da componenti di tensione della forma:

$$\sigma_{11} = \Psi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \Psi_{,11}, \quad \tau_{12} = -\Psi_{,12}, \quad [112. 5]$$

cioè uguali alle derivate parziali seconde di una funzione  $\Psi(x_1, x_2)$ , introdotta per la prima volta da Airy <sup>1</sup> e denominata *funzione di tensione per lo stato piano*. Le equazioni indefinite di equilibrio del problema piano, di deformazione e di tensione, sono quindi verificate da qualsiasi funzione  $\Psi(x_1, x_2)$ , continua in  $A$  e tre volte differenziabile.

Nel problema piano di deformazione una limitazione nella scelta della funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  viene imposta in primo luogo dalla equazione di congruenza [110. 16] che, nella supposta assenza delle forze di volume, assume la forma omogenea:

$$\nabla(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad [112. 6]$$

Sostituendo allora per  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  le loro espressioni in termini della funzione di Airy otteniamo:

$$\nabla\nabla\Psi(x_1, x_2) \equiv \Psi_{,1111} + 2\Psi_{,1122} + \Psi_{,2222} = 0, \quad [112. 7]$$

cioè la funzione di tensione deve risultare *biarmonica*. Nel problema piano di tensione la funzione  $\Psi(x_1, x_2)$ , ancora biarmonica, deve soddisfare ad una ulteriore restrizione e precisamente che  $\nabla\Psi$  sia una funzione lineare in  $x_1$  e  $x_2$  del tipo [111. 16].

In secondo luogo la scelta della funzione di tensione deve rimanere subordinata alle condizioni imposte sul contorno  $C$  del dominio piano  $A$ . Esprimendo nelle equazioni di equilibrio ai limiti [110. 9] le componenti di tensione in termini delle derivate parziali della  $\Psi(x_1, x_2)$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \Psi_{,22}n_1 - \Psi_{,12}n_2 &= f_1, \\ -\Psi_{,12}n_1 + \Psi_{,11}n_2 &= f_2, \end{aligned} \quad [112. 8]$$

<sup>1</sup> G. B. AIRY, *Brit. Ass. Rep.* (1862); *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **153**, 49 (1863).

o anche con riferimento alla fig. 118, introdotti i coseni direttori della tangente,  $\nu_1 = -n_2$ ,  $\nu_2 = n_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{,2}}{ds} &\equiv \Psi_{,12} \frac{dx_1}{ds} + \Psi_{,22} \frac{dx_2}{ds} = f_1, \\ -\frac{d\Psi_{,1}}{ds} &\equiv -\Psi_{,11} \frac{dx_1}{ds} - \Psi_{,12} \frac{dx_2}{ds} = f_2, \end{aligned} \quad [112. 9]$$

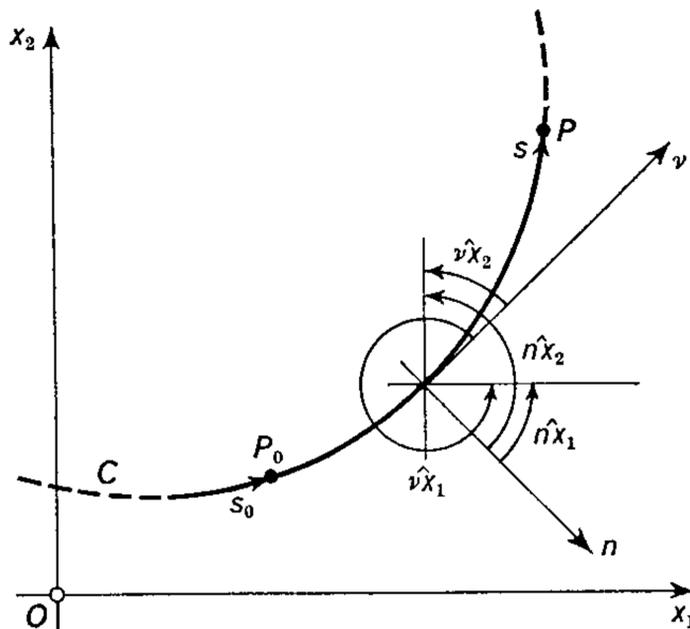


Fig. 118.

Integrando lungo il contorno da un punto fisso  $P_0$  di coordinata curvilinea  $s_0$  ad un punto variabile  $P$  di coordinata curvilinea  $s$ , otteniamo le derivate parziali della  $\Psi$  nella forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{,2} &= \int_{s_0}^s f_1(s) ds = F_1(s) + c_1, \\ -\Psi_{,1} &= \int_{s_0}^s f_2(s) ds = F_2(s) + c_2, \end{aligned} \quad [112. 10]$$

dove gli integrali sono stati indicati per semplicità di scrittura con  $F_1$ ,  $F_2$ , mentre  $c_1$ ,  $c_2$  esprimono due costanti di integrazione.

Il problema al contorno per la funzione biarmonica  $\Psi(x_1, x_2)$  espresso dalle [112. 10] rappresenta un problema classico di importanza notevole in molti campi della Fisica-Matematica. Una utile trasformazione si ottiene integrando il sistema differenziale [112. 10]:

$$\Psi(s) = \int_{s_0}^s (F_1 dx_2 - F_2 dx_1) = F(s) + c, \quad [112. 11]$$

ed osservando che la derivata della funzione  $\Psi$  rispetto alla normale esterna  $n$  al contorno può essere scritta come:

$$\frac{d\Psi}{dn} \equiv \Psi_{,1} n_1 + \Psi_{,2} n_2 = -(F_2 + c_2) \frac{dx_2}{ds} + (F_1 + c_1) \frac{dx_1}{ds} = G(s). \quad [112. 12]$$

Le funzioni  $F(s)$  e  $G(s)$  così introdotte restano assegnate sul contorno  $C$  dalla conoscenza delle forze di superficie  $f_1, f_2$ ; in definitiva le condizioni del problema biarmonico sul contorno  $C$  assumono la forma equivalente:

$$\Psi = F(s) + c, \quad \frac{d\Psi}{dn} = G(s). \quad [112. 13]$$

La trattazione del problema piano in termini della funzione di Airy, come fu avvertito, presuppone l'annullarsi delle forze di volume. Ma la linearità delle equazioni ci permette di utilizzare i risultati ottenuti, in quanto, se indichiamo con  $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \tau_{12}^0$  la soluzione del problema omogeneo [112. 1], cioè in assenza di forze di volume, e con  $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\tau}_{12}$  una soluzione del problema completo [110. 8], deve essere:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \bar{\sigma}_{11}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \bar{\sigma}_{22}, \quad \tau_{12} = \tau_{12}^0 + \bar{\tau}_{12}. \quad [112. 14]$$

Non è difficile trovare delle soluzioni del sistema completo, almeno per certe classi particolari di forze di volume, quali le forze di gravità e le forze centrifughe.

Ad esempio per forze gravitazionali dirette secondo l'asse  $x_2$ , cioè per:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\rho g, \quad [112. 15]$$

una soluzione particolare risulta immediatamente della forma:

$$\bar{\sigma}_{11} = 0, \quad \bar{\tau}_{12} = 0, \quad \bar{\sigma}_{22} = \rho g x_2, \quad [112. 16]$$

e quindi dalle [112. 14] si può ottenere la soluzione generale del problema.

Nel caso di forze gravitazionali, poichè  $p_1, p_2$  sono costanti, risulta evidentemente soddisfatta la condizione [111. 17]: è quindi possibile l'esistenza anche del problema piano di tensione. Al contrario, nel caso di forze centrifughe di componenti:

$$p_1 = \rho \dot{\omega}^2 x_1, \quad p_2 = \rho \dot{\omega}^2 x_2, \quad [112. 17]$$

essendo  $\dot{\omega}$  la velocità angolare di rotazione intorno all'asse  $x_3$ , risulta  $\text{Div } \mathbf{p} = 2\rho \dot{\omega}^2$  e non può esistere il problema piano di tensione. Appare dunque discutibile la trattazione del problema del disco rotante come problema piano di tensione, seguita da alcuni Autori.

### 113. Tensioni principali e linee isostatiche.

Determinata la funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  dalla risoluzione del problema al contorno nella forma [112. 8] o [112. 13], sono immediatamente note dalle [112. 5] le componenti di tensione  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$  in ogni punto del

sistema piano. Nei problemi concreti può interessare la ricerca dello stato di tensione su piani diversi da quelli paralleli ai piani coordinati  $(x_1 x_3)$  e  $(x_2 x_3)$  ai quali sono riferite tali componenti. Allora le tensioni,

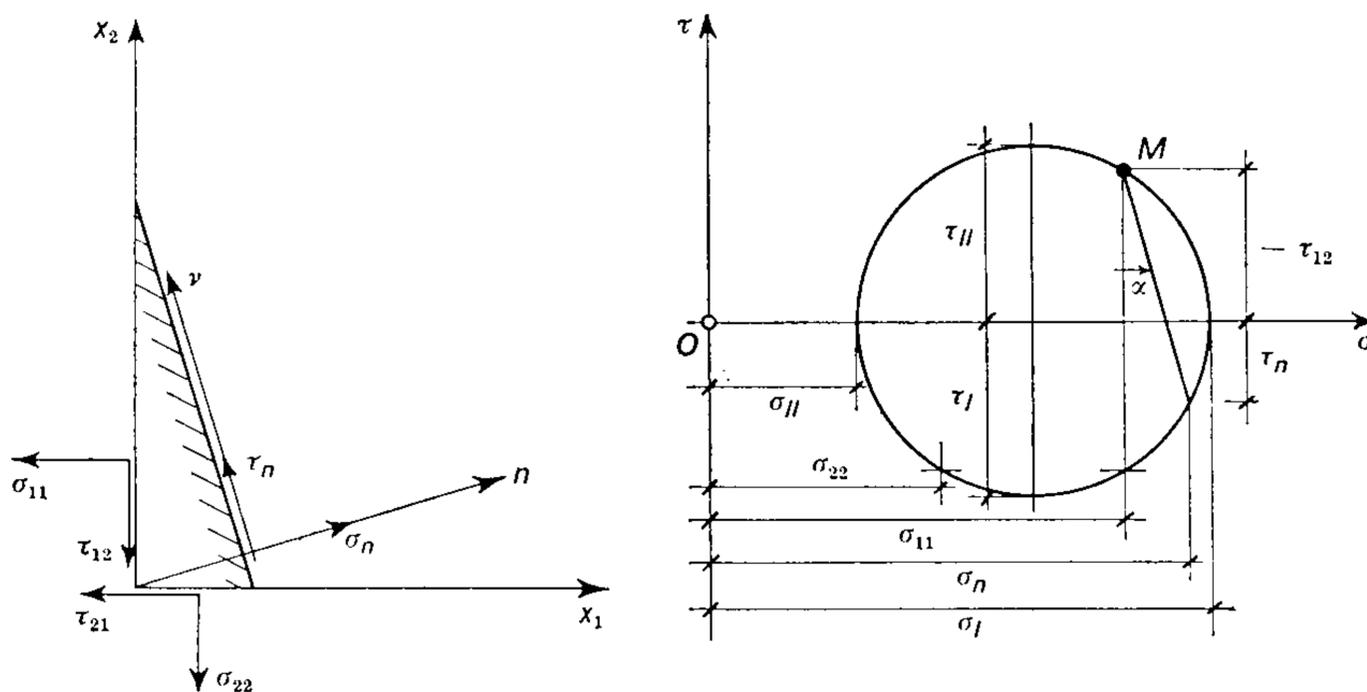


Fig. 119.

normale  $\sigma_n$  e tangenziale  $\tau_n$ , agenti sopra un piano generico di normale  $n$  ed appartenente al fascio avente per sostegno un asse parallelo a  $x_3$ , si ottengono dalla costruzione piana di Mohr riportata nella fig. 119.

È opportuno ricordare, perchè non sussistano ambiguità nei versi da considerare positivi o negativi per le componenti di tensione, che queste sono da considerarsi positive se concordi con il verso positivo

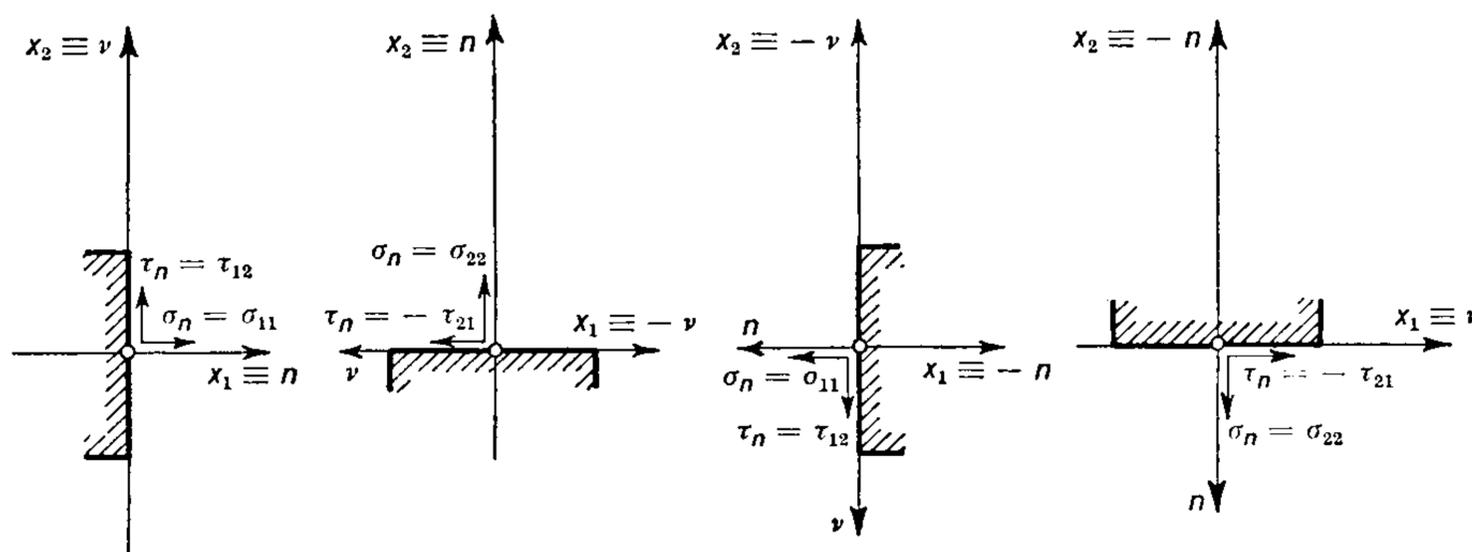


Fig. 120.

degli assi coordinati quando rappresentino l'azione esercitata su un elemento piano generico dalla porzione di piano situato dalla parte degli assi positivi. Tale convenzione, costantemente adottata, è chiarita dalla fig. 120 dove sono indicati i versi delle componenti di tensione, normale  $\sigma_n$

e tangenziale  $\tau_n$ , in base a quanto si deduce dalla particolarizzazione delle [20. 5] al caso piano in esame, cioè dalle [26. 1]:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\tau_{12}n_1n_2, \\ \tau_n &= \sigma_{11}n_1\nu_1 + \sigma_{22}n_2\nu_2 + \tau_{12}n_1\nu_2 + \tau_{21}n_2\nu_1.\end{aligned}\quad [113. 1]$$

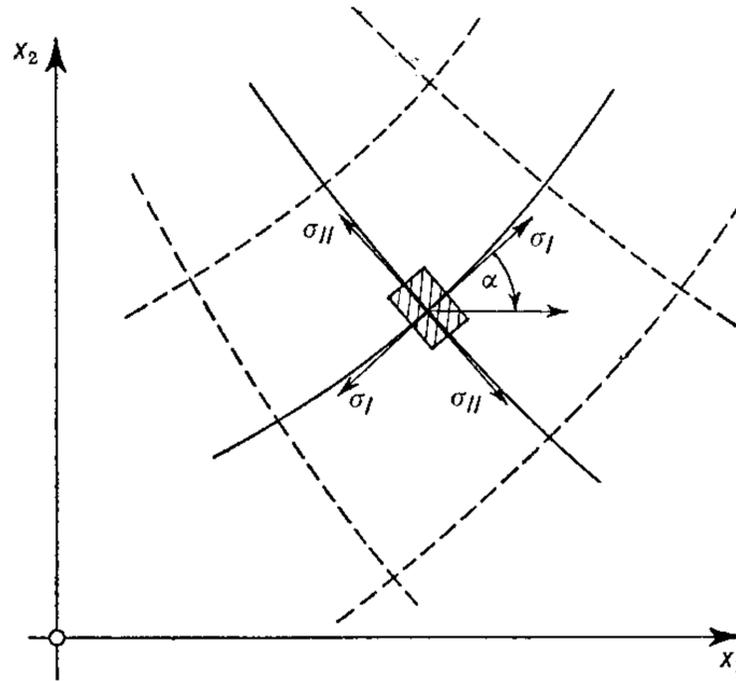


Fig. 121.

Tra tutti gli elementi superficiali piani del fascio avente per sostegno un asse parallelo a  $x_3$ , ne esistono due mutuamente ortogonali sui quali agiscono esclusivamente tensioni normali  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  (fig. 121):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}. \quad [113. 2]$$

Sono le giaciture dei piani principali, le cui normali restano individuate dai valori  $\alpha_0$  dell'angolo  $\alpha$  tali che:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad [113. 3]$$

Le direzioni principali della tensione sono tangenti a due famiglie di curve, le linee isostatiche, lungo le quali il materiale è semplicemente teso o compresso. Se esprimiamo con  $x_2 = y(x_1)$  l'equazione di una linea isostatica, indicando con un apice la derivata rispetto a  $x_1$ , cioè  $y' = dx_2/dx_1$ , poichè  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'$ , otteniamo dalla [113. 3] espressa in termini di  $\operatorname{tg} \alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \equiv \frac{2\operatorname{tg} \alpha_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \frac{2y'}{1 - y'^2}, \quad [113. 4]$$

da cui l'equazione differenziale delle isostatiche:

$$y'^2 + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\tau_{12}} y' - 1 = 0. \quad [113. 5]$$

Determinate in ogni punto dalla risoluzione del problema piano le componenti di tensione che compaiono nel secondo termine, l'integrazione della [113. 5] fornirà l'equazione delle isostatiche in termini finiti.

In modo analogo le direzioni delle tensioni tangenziali estreme  $\tau_I, \tau_{II}$  restano individuate dall'angolo  $\alpha_T$ , tale che:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_T = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau_{12}}, \quad [113. 6]$$

e quindi, esprimendo  $\operatorname{tg} 2\alpha_T$  in termini di  $\operatorname{tg} \alpha_T = y'_T$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_T \equiv \frac{2\operatorname{tg} \alpha_T}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_T} = \frac{2y'_T}{1 - y'^2_T}, \quad [113. 7]$$

si deduce così l'equazione differenziale per le direzioni delle tensioni tangenziali estreme:

$$y'^2_T - \frac{4\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} y'_T - 1 = 0, \quad [113. 8]$$

la cui integrazione può essere effettuata una volta noti i valori delle componenti di tensione in ogni punto del sistema.

#### 114. Soluzioni in coordinate cartesiane.

Nel caso di sistemi piani di forma rettangolare si possono costruire in modo elementare <sup>1</sup> alcune soluzioni del problema al contorno [112. 8] che presentano un certo interesse applicativo.

Ad esempio, per una distribuzione uniforme di forze perpendicolari ai bordi come indicato in fig. 122, evidentemente la tensione tangenziale  $\tau_{12}$  è nulla lungo i bordi stessi. Le condizioni al contorno sono allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -f_1 & \text{per } x_1 = 0, x_1 = a_1; n_1 = \mp 1, n_2 = 0, \\ \sigma_{22} &= -f_2 & \text{per } x_2 = 0, x_2 = a_2; n_1 = 0, n_2 = \mp 1. \end{aligned} \quad [114. 1]$$

Assunta la funzione di tensione nella forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2), \quad [114. 2]$$

otteniamo come componenti di tensione le:

$$\sigma_{11} \equiv \Psi_{,22} = -f_2, \quad \sigma_{22} \equiv \Psi_{,11} = -f_1, \quad \tau_{12} \equiv -\Psi_{,12} = 0, \quad [114. 3]$$

<sup>1</sup> A. MESNAGER, *Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris*, **132**, 1475 (1901).

che verificano così le condizioni al contorno. Lo stato di tensione è dunque uniforme; l'equazione differenziale [113.3] si riduce alla  $\text{tg } 2\alpha_0 = 0$  e le linee isostatiche risultano due famiglie di rette paral-

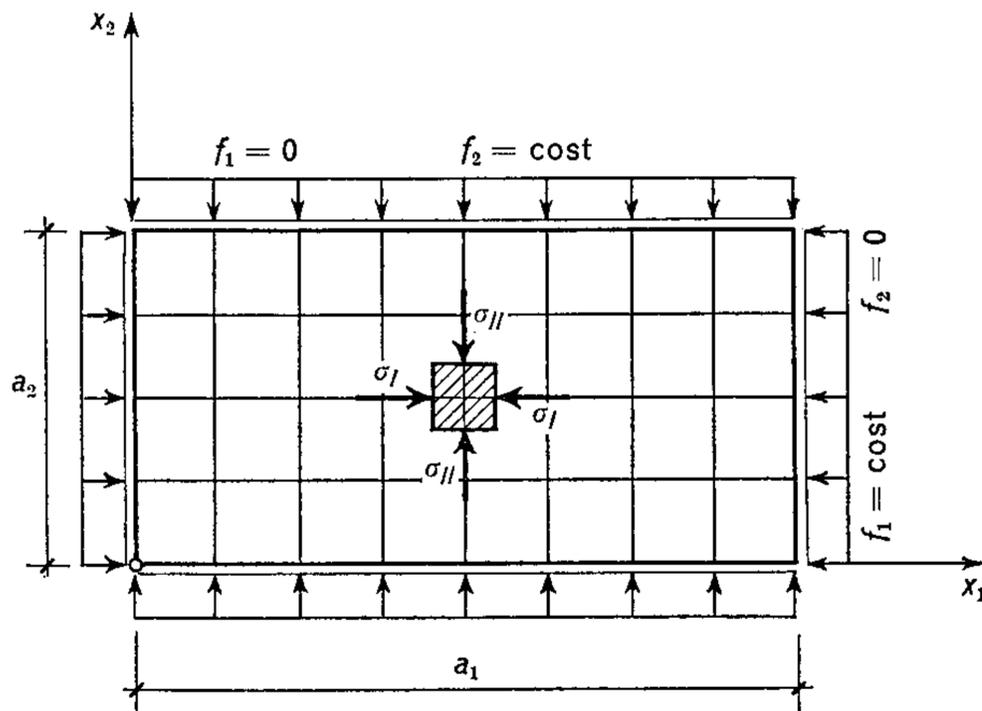


Fig. 122.

lele agli assi coordinati  $x_1, x_2$  rispettivamente. Lungo tali rette si hanno tensioni principali di compressione  $\sigma_I = -f_1, \sigma_{II} = -f_2$ .

Come secondo esempio consideriamo una distribuzione uniforme di forze tangenti al contorno indicata in fig. 123.

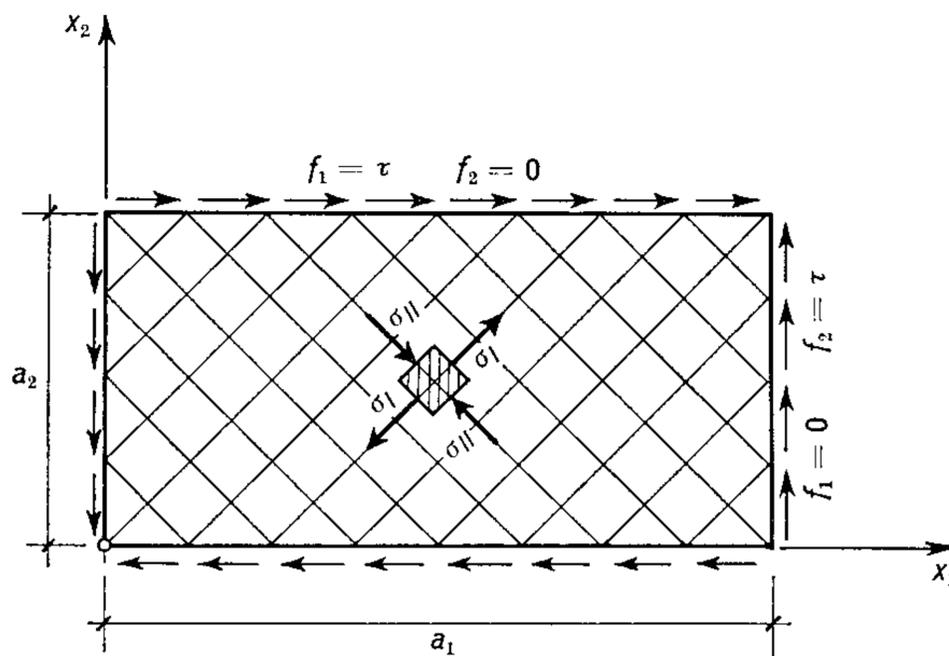


Fig. 123.

Le componenti normali della tensione sono nulle lungo i bordi e le condizioni al contorno divengono:

$$\begin{aligned} \tau_{12} = f_1 = \tau & \quad \text{per: } x_1 = 0, x_1 = a_1; n_1 = \mp 1, n_2 = 0, \\ \tau_{12} = f_2 = \tau & \quad \text{per: } x_2 = 0, x_2 = a_2; n_1 = 0, n_2 = \mp 1. \end{aligned} \quad [114.4]$$

Assunta la funzione delle tensioni nella forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = -\tau x_1 x_2, \quad [114.5]$$

otteniamo come componenti di tensione le:

$$\sigma_{11} \equiv \Psi_{,22} = 0, \quad \sigma_{22} \equiv \Psi_{,11} = 0, \quad \tau_{12} \equiv -\Psi_{,12} = \tau, \quad [114.6]$$

che verificano le condizioni al contorno.

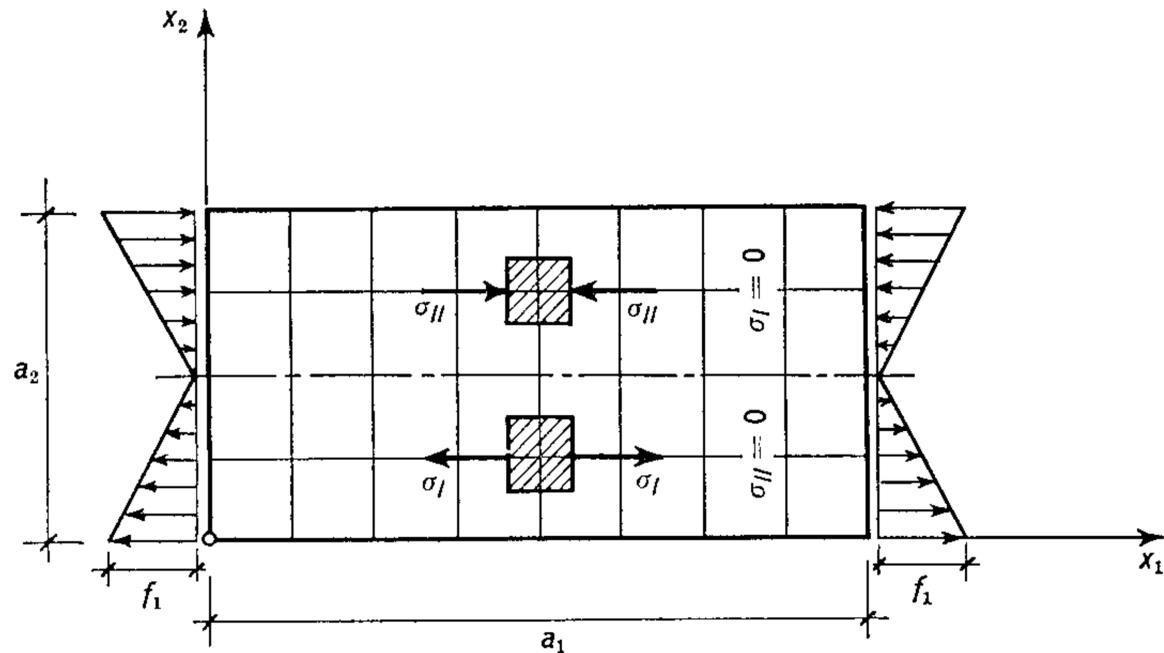


Fig. 124.

L'equazione differenziale [113.4] degenera nella  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty$ , quindi le linee isostatiche sono rappresentate da due famiglie di rette ortogonali inclinate di  $\pi/4$  rispetto agli assi  $x_1, x_2$  rispettivamente. Come mostra la rappresentazione piana di Mohr, lungo le rette di una famiglia si hanno tensioni principali di trazione  $\sigma_I = \tau$ , mentre lungo le rette dell'altra si hanno tensioni principali di compressione  $\sigma_{II} = -\tau$ .

Come ulteriore esempio consideriamo una distribuzione lineare di forze applicate sui bordi paralleli all'asse  $x_2$ , indicate in fig. 124 ed equivalenti nel loro complesso ad un momento flettente. Le condizioni al contorno divengono:

$$\sigma_{11} = f_1 \left(1 - \frac{2x_2}{a_2}\right) \text{ per: } x_1 = 0, x_1 = a_1; n_1 = \mp 1, n_2 = 0, \quad [114.7]$$

$$\sigma_{22} = 0 \quad \text{per: } x_2 = 0, x_2 = a_2; n_1 = 0, n_2 = \mp 1,$$

essendo  $\sigma_{22} = 0, \tau_{12} = 0$  lungo tutto il contorno.

Assunta come funzione di tensione la:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{f_1}{a_2} \left( \frac{a_2 x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right), \quad [114.8]$$

otteniamo le componenti di tensione nella forma:

$$\sigma_{11} = f_1 \left( 1 - \frac{2x_2}{a_2} \right), \quad \sigma_{22} = 0, \quad \tau_{12} = 0, \quad [114.9]$$

che verificano le condizioni al contorno.

Lungo la retta  $x_2 = a_2/2$  si hanno tensioni  $\sigma_{11} = 0$ , al disotto di tale retta ( $x_2 < a_2/2$ ) si hanno solo tensioni principali di trazione  $\sigma_I = \sigma_{11}$  e al disopra di essa ( $x_2 > a_2/2$ ) solo tensioni principali di compressione  $\sigma_{II} = -\sigma_{11}$ . Le linee isostatiche sono, come nel primo esempio discusso, rette parallele agli assi coordinati  $x_1, x_2$ .

Data la linearità delle equazioni del problema è possibile sovrapporre le diverse soluzioni elementari e pervenire così alla risoluzione di casi più complessi.

### 115. Trasformazione in coordinate polari.

La trattazione di molti problemi piani riesce semplificata dall'impiego di coordinate polari in modo che la posizione del punto gene-

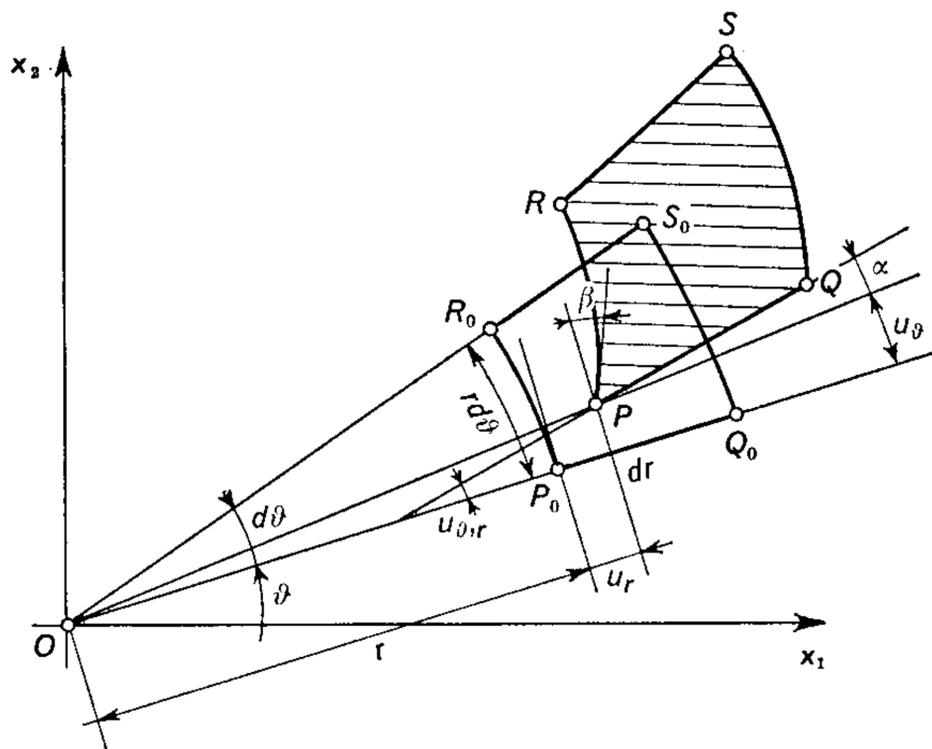


Fig. 125.

rico  $P_0$  sia individuata dalla sua distanza  $r$  dall'origine e dall'angolo  $\vartheta$ , detto anomalia, formato dal raggio vettore  $r$  con un certo asse prefissato, ad esempio  $x_1$ .

Con riferimento alla fig. 125 consideriamo un elemento superficiale di area  $dA = r d\vartheta dr$  nella sua configurazione indeformata. Indicando con  $u_r, u_\vartheta$  le componenti di spostamento e con  $d_r, d_\vartheta$  gli incrementi differenziali, nelle direzioni radiale  $r$  e circonferenziale  $\vartheta$ , possiamo de-

terminare in base a considerazioni geometriche le corrispondenti dilatazioni, lineari  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\vartheta$  ed angolare  $2\varepsilon_{r\vartheta}$ .

Infatti, se  $u_r$  rappresenta lo spostamento radiale del punto  $P_0$ , la nuova lunghezza  $\overline{PQ}$  dell'elemento  $\overline{P_0Q_0}$  vale  $dr + d_r u_r = (1 + u_{r,r}) dr$ , e quindi:

$$\varepsilon_r \equiv \frac{\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0}}{\overline{P_0Q_0}} = \frac{(1 + u_{r,r}) dr - dr}{dr} = u_{r,r}. \quad [115. 1]$$

La componente  $\varepsilon_\vartheta$  dipende non solo da  $u_\vartheta$  ma anche da  $u_r$ : per effetto del primo si ha un allungamento dell'elemento  $\widehat{P_0R_0}$  pari a  $d_\vartheta u_\vartheta = u_{\vartheta,\vartheta} d\vartheta$ , mentre per effetto del secondo la nuova lunghezza dell'elemento  $\widehat{P_0R_0}$  risulta uguale a  $(r + u_r) d\vartheta$ , e quindi:

$$\varepsilon_\vartheta \equiv \frac{\widehat{PR} - \widehat{P_0R_0}}{\widehat{P_0R_0}} = \frac{u_{\vartheta,\vartheta} d\vartheta + (r + u_r) d\vartheta - r d\vartheta}{r d\vartheta} = \frac{1}{r} (u_r + u_{\vartheta,\vartheta}). \quad [115. 2]$$

La componente  $\varepsilon_{r\vartheta}$  si ottiene infine osservando che l'angolo  $\alpha$  risulta dalla differenza tra l'angolo  $u_{\vartheta,r}$  tra le direzioni  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P_0Q_0}$  e l'angolo  $u_\vartheta/r$  di rotazione dell'elemento in sè, mentre l'angolo  $\beta$  compreso tra le tangenti in  $P_0$  ed in  $P$  risulta  $u_{r,\vartheta}/r$ , per cui:

$$\varepsilon_{r\vartheta} \equiv \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left( u_{\vartheta,r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{u_{r,\vartheta}}{r} \right). \quad [115. 3]$$

Per quanto riguarda le componenti di tensione, normali  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\vartheta$  e tangenziale  $\tau_{r\vartheta}$ , consideriamo l'equilibrio alla traslazione secondo  $r$  e  $\vartheta$  dell'elemento di volume  $dV = r d\vartheta dr dx_3$  come indicato in fig. 126. In assenza di forze di massa l'equazione di equilibrio nella direzione radiale  $r$  è:

$$(\sigma_r + \sigma_{r,r} dr) (r + dr) d\vartheta + \tau_{\vartheta r,\vartheta} d\vartheta dr - \sigma_r r d\vartheta - \sigma_\vartheta dr d\vartheta = 0, \quad [115. 4]$$

ed analogamente l'equazione di equilibrio nella direzione circonferenziale risulta:

$$(\tau_{r\vartheta} + \tau_{r\vartheta,r} dr) (r + dr) d\vartheta - \tau_{r\vartheta} r d\vartheta + \sigma_{\vartheta,\vartheta} d\vartheta dr + \tau_{\vartheta r} dr d\vartheta = 0. \quad [115. 5]$$

Le equazioni indefinite di equilibrio in coordinate polari  $r$  e  $\vartheta$  sono dunque in definitiva:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{\vartheta r,\vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} &= 0, \\ \tau_{r\vartheta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\vartheta,\vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad [115. 6]$$

in quanto  $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta r}$  per l'equilibrio alla rotazione.

Per completare la trasformazione del problema piano in coordinate polari dobbiamo esprimere gli operatori di derivata parziale rispetto alle variabili  $x_1, x_2$ , indicati brevemente con  $\partial_1, \partial_2$ , mediante gli operatori corrispondenti  $\partial_r, \partial_\vartheta$  di derivata parziale rispetto alle variabili  $r, \vartheta$ , cioè:

$$\partial_1 = \partial_r \partial_1 r + \partial_\vartheta \partial_1 \vartheta, \quad \partial_2 = \partial_r \partial_2 r + \partial_\vartheta \partial_2 \vartheta. \quad [115. 7]$$

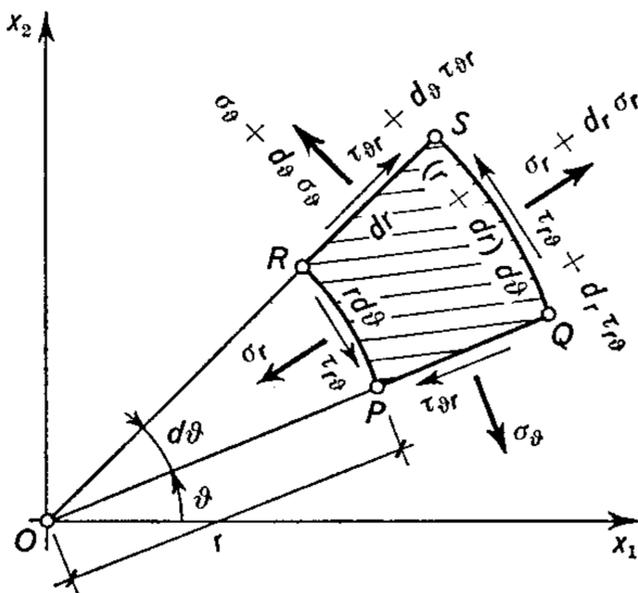


Fig. 126.

Con riguardo alle relazioni fondamentali tra le coordinate cartesiane  $x_1, x_2$  e le coordinate polari  $r, \vartheta$ :

$$x_1 = r \cos \vartheta, \quad x_2 = r \sin \vartheta, \quad [115. 8]$$

e le loro inverse:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad [115. 9]$$

otteniamo le derivate parziali di  $r, \vartheta$  rispetto a  $x_1, x_2$  nella forma:

$$\begin{aligned} \partial_1 r &= \frac{x_1}{r} = \cos \vartheta, & \partial_1 \vartheta &= -\frac{x_2}{r^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r}; \\ \partial_2 r &= \frac{x_2}{r} = \sin \vartheta, & \partial_2 \vartheta &= \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos \vartheta}{r}. \end{aligned} \quad [115. 10]$$

Si hanno quindi le seguenti formule di trasformazione per gli operatori di derivata parziale del primo ordine:

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \cos \vartheta \partial_r - \frac{\sin \vartheta}{r} \partial_\vartheta, \\ \partial_2 &= \sin \vartheta \partial_r + \frac{\cos \vartheta}{r} \partial_\vartheta, \end{aligned} \quad [115. 11]$$

ed analogamente quelle per gli operatori di derivata parziale del secondo ordine:

$$\begin{aligned}\partial_{11}^2 &= \cos^2 \vartheta \partial_{rr}^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{r} \left( \partial_r + \frac{1}{r} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \right) + \frac{\sin 2\vartheta}{2r} \left( \frac{1}{r} \partial_\vartheta - \partial_{r\vartheta}^2 \right), \\ \partial_{22}^2 &= \sin^2 \vartheta \partial_{rr}^2 + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} \left( \partial_r + \frac{1}{r} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \right) - \frac{\sin 2\vartheta}{2r} \left( \frac{1}{r} \partial_\vartheta - \partial_{r\vartheta}^2 \right), \\ \partial_{12}^2 &= \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \left( \partial_{rr}^2 - \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \right) - \frac{\cos 2\vartheta}{r} \left( \frac{1}{r} \partial_\vartheta - \partial_{r\vartheta}^2 \right).\end{aligned}\quad [115.12]$$

Se facciamo coincidere l'asse  $x_1$  con il raggio vettore  $r$ , i precedenti operatori [115.12], per  $\vartheta = 0$ ,  $\sin \vartheta = 0$ ,  $\cos \vartheta = 1$ , assumono le espressioni semplificate:

$$\partial_{11}^2 = \partial_{22}^2, \quad \partial_{22}^2 = \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2, \quad \partial_{12}^2 = -\frac{1}{r^2} \partial_\vartheta + \frac{1}{r} \partial_{r\vartheta}^2. \quad [115.13]$$

Ma in tal caso le componenti di tensione in coordinate polari coincidono con le componenti di tensione in coordinate cartesiane, cioè  $\sigma_r = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_\vartheta = \sigma_{22}$ ,  $\tau_{r\vartheta} = \tau_{12}$ , per cui, con riguardo alle [115.13], possiamo esprimere le prime in termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2) \equiv \Psi(r, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r &\equiv \Psi_{,22} = \frac{1}{r} \Psi_{,r} + \frac{1}{r^2} \Psi_{,\vartheta\vartheta}, \\ \sigma_\vartheta &\equiv \Psi_{,11} = \Psi_{,rr}, \\ \tau_{r\vartheta} &\equiv -\Psi_{,12} = \frac{1}{r^2} \Psi_{,\vartheta} - \frac{1}{r} \Psi_{,r\vartheta}.\end{aligned}\quad [115.14]$$

L'operatore di Laplace in coordinate polari risulta poi dalle [115.13] come:

$$\nabla \equiv \partial_{11}^2 + \partial_{22}^2 = \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2, \quad [115.15]$$

e quindi la biarmonicità della funzione di tensione viene espressa in coordinate polari dalla condizione:

$$\nabla \nabla \Psi \equiv \left( \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \right) \left( \partial_{rr}^2 \Psi + \frac{1}{r} \partial_r \Psi + \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \Psi \right) = 0. \quad [115.16]$$

Nell'ipotesi di un legame costitutivo di tipo lineare elastico isotropo otteniamo le relazioni tra le componenti di deformazione e le componenti di tensione in coordinate polari nella forma:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2\mu}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\vartheta], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{2\mu}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_r], \\ \tau_{r\vartheta} &= 2\mu\varepsilon_{r\vartheta},\end{aligned}\tag{115.17}$$

e le relazioni inverse:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta], \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r], \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{r\vartheta}.\end{aligned}\tag{115.18}$$

Esprimendo in queste ultime le componenti di deformazione in termini delle [115.1], [115.2], [115.3], si ottengono tre equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}u_{r,r} &= \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta], \\ \frac{1}{r}(u_r + u_{\vartheta,\vartheta}) &= \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r], \\ u_{\vartheta,r} + \frac{1}{r}(u_{r,\vartheta} - u_\vartheta) &= \frac{1}{\mu} \tau_{r\vartheta},\end{aligned}\tag{115.19}$$

dalle quali, determinate le componenti di tensione dalla soluzione del problema biarmonico, è possibile ricavare per integrazione le componenti di spostamento  $u_r$ ,  $u_\vartheta$ .

Dovremo infine considerare la componente di tensione  $\sigma_{33}$  secondo l'asse  $x_3$ , necessaria per garantire lo stato piano di deformazione  $\varepsilon_{33} = 0$ . Convienne per uniformità di notazione riferirci ad un sistema di coordinate cilindriche  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  nel quale  $r$ ,  $\vartheta$  hanno il significato [115.9] mentre  $z$  coincide semplicemente con  $x_3$ , per cui la componente assiale di tensione sarà indicata con  $\sigma_z = \sigma_{33}$ .

### 116. Stati piani simmetrici.

Particolarmente semplice risulta l'impiego di coordinate polari quando la distribuzione di tensioni-deformazioni sia simmetrica rispetto al centro  $O$  del sistema piano. In tal caso la tensione tangenziale  $\tau_{r\vartheta}$  deve risultare identicamente nulla e le tensioni normali, radiale  $\sigma_r$  e circonferenziale  $\sigma_\vartheta$ , devono essere indipendenti dall'anomalia  $\vartheta$ .

Le equazioni di equilibrio [115. 6] si riducono ad una sola equazione differenziale ordinaria nella variabile indipendente  $r$ :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0. \quad [116. 1]$$

L'equazione di congruenza [115. 16] diviene semplicemente:

$$\nabla \nabla \Psi \equiv \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) = 0, \quad [116. 2]$$

e, posto l'operatore di Laplace nella forma equivalente:

$$\nabla \Psi \equiv \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{dr} \right), \quad [116. 3]$$

assume la forma compatta:

$$\nabla \nabla \Psi \equiv \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{dr} \right) \right] \right\} = 0. \quad [116. 4]$$

L'integrale generale di tale equazione risulta immediatamente, indicando con  $c_1, c_2, c_3, c_4$  quattro costanti:

$$\Psi(r) = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4, \quad [116. 5]$$

per cui le componenti di tensione [115. 14] hanno le espressioni:

$$\begin{aligned} \sigma_r &\equiv \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} = \frac{c_1}{r^2} + c_2 (1 + 2 \ln r) + 2c_3, \\ \sigma_\vartheta &\equiv \frac{d^2 \Psi}{dr^2} = -\frac{c_1}{r^2} + c_2 (3 + 2 \ln r) + 2c_3. \end{aligned} \quad [116. 6]$$

Esprimiamo ora nelle [115. 19] le componenti di tensione  $\sigma_r, \sigma_\vartheta$  in termini delle [116. 6] e teniamo presente che per  $\tau_{r\vartheta} = 0$  è anche

$\varepsilon_{r\vartheta} = 0$ . Risultano in tal modo le tre equazioni:

$$u_{r,r} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{c_1}{r^2} + c_2[1 - 4\nu + 2(1 - 2\nu)\ln r] + 2c_3(1 - 2\nu) \right\},$$

$$\frac{1}{r}(u_r + u_{\vartheta,\vartheta}) = \frac{1}{2\mu} \left\{ -\frac{c_1}{r^2} + c_2(3 - 4\nu)\ln r + 2c_3(1 - 2\nu) \right\}, \quad [116. 7]$$

$$ru_{\vartheta,r} + u_{r,\vartheta} - u_{\vartheta} = 0.$$

Integrando la prima equazione rispetto a  $r$  otteniamo la componente di spostamento  $u_r$  nella forma:

$$u_r = \frac{1}{2\mu} \left\{ -\frac{c_1}{r} + c_2r[2(1 - 2\nu)\ln r - 1] + \right. \quad [116. 8]$$

$$\left. + 2c_3r(1 - 2\nu) \right\} + f(\vartheta),$$

dove  $f(\vartheta)$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $\vartheta$ . Sostituendo l'espressione trovata per  $u_r$  nella seconda equazione ed integrando rispetto a  $\vartheta$  otteniamo la componente di spostamento  $u_{\vartheta}$ :

$$u_{\vartheta} = \frac{2}{\mu} c_2(1 - \nu)r\vartheta - \int f(\vartheta) d\vartheta + g(r), \quad [116. 9]$$

dove  $g(r)$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $r$ .

Sostituendo dalle [116. 8] e [116. 9] nella terza [116. 7] otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{df}{d\vartheta} + \int f(\vartheta) d\vartheta = r \frac{dg}{dr} + g(r), \quad [116. 10]$$

dalla quale, poichè il primo membro è funzione di  $\vartheta$  ed il secondo funzione di  $r$ , risulta necessariamente:

$$f(\vartheta) = a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta, \quad g(r) = cr, \quad [116. 11]$$

essendo  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $c$  tre costanti arbitrarie.

Abbiamo in definitiva le seguenti espressioni per gli spostamenti:

$$u_r = \frac{1}{2\mu} \left\{ -\frac{c_1}{r} + c_2r[2(1 - 2\nu)\ln r - 1] + 2c_3r(1 - 2\nu) \right\} +$$

$$+ a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta, \quad [116. 12]$$

$$u_{\vartheta} = \frac{2}{\mu} c_2(1 - \nu)r\vartheta + a_1 \cos \vartheta - a_2 \sin \vartheta + cr,$$

a meno di sei costanti  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  da determinarsi in base alle condizioni particolari di ogni singolo problema.

Per  $u_r$ ,  $u_\vartheta$  indipendenti da  $\vartheta$  le equazioni precedenti si semplificano in modo ovvio ponendo  $a_1 = a_2 = 0$ . Le componenti di deformazione, radiale  $\varepsilon_r$  e circonferenziale  $\varepsilon_\vartheta$ , risultano allora dalla particolarizzazione delle [115. 1] e [115. 2] nella forma:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_r}{r}, \quad [116. 13]$$

da cui la seguente equazione esplicita di congruenza in termini di deformazioni:

$$\frac{d(r\varepsilon_\vartheta)}{dr} - \varepsilon_r = 0. \quad [116. 14]$$

Se la sezione è un cerchio le costanti  $c_1$ ,  $c_2$  devono essere identicamente nulle per evitare che le componenti di tensione presentino un punto di infinito nell'origine. Ne consegue che lo stato di tensione risulta uniforme secondo tutte le direzioni del piano ( $x_1 x_2$ ). La presenza di un foro che racchiuda l'origine dà luogo ad un dominio piano a connessione doppia nel quale le costanti  $c_1$ ,  $c_2$  possono essere diverse da zero ed esistono in tal caso stati di tensione non necessariamente uniformi.

A titolo di esempio consideriamo un cilindro circolare cavo soggetto ad una pressione uniforme sulla superficie interna ed esterna: la soluzione originale di tale problema è dovuta a LAMÉ<sup>1</sup>. Con riferimento alla fig. 127 le *tre* costanti di integrazione  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  devono essere determinate dalle *due* condizioni sul contorno interno e sul contorno esterno, cioè:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_a && \text{per } r = a, \\ \sigma_r &= -p_b && \text{per } r = b. \end{aligned} \quad [116. 15]$$

Poichè il numero delle costanti arbitrarie supera quello delle condizioni, la distribuzione delle tensioni sembrerebbe indeterminata. Ciò deriva dalla connessione multipla del dominio: è necessario perciò imporre la condizione che lo spostamento sia una funzione monodroma di  $\vartheta$ . Supponiamo allora che per un certo valore  $\bar{\vartheta}$  dell'anomalia vi sia un taglio in modo che nel dominio a connessione semplice così ottenuto una distribuzione simmetrica della tensione non sia necessariamente associata ad una distribuzione simmetrica dello spostamento.

---

<sup>1</sup> G. LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, pp. 188-193, Paris, 1852.

La seconda [116. 12] mostra come la componente circonferenziale  $u_\vartheta$  dello spostamento sia una funzione polidroma di  $\vartheta$  ed assuma valori diversi quando l'anomalia  $\vartheta$  venga aumentata di  $2\pi$ , cioè arrivando allo stesso punto dopo aver compiuto un giro completo. L'impossibilità fisica di tale risultato impone  $c_2 = 0$ : questa è dunque la condizione ulteriore per rendere la distribuzione delle tensioni determinata senza ambiguità.

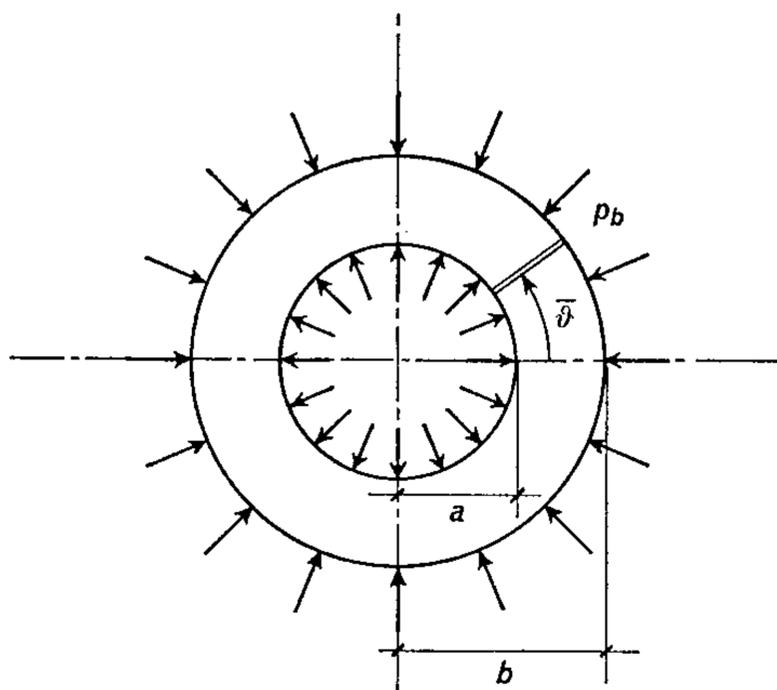


Fig. 127.

Abbiamo allora dalla condizione [116. 15], per  $c_2 = 0$ , con riguardo alla prima [116. 6]:

$$\frac{c_1}{a^2} + 2c_3 = -p_a \quad \text{per } r = a, \quad [116. 16]$$

$$\frac{c_1}{b^2} + 2c_3 = -p_b \quad \text{per } r = b,$$

da cui si ricavano le costanti:

$$c_1 = \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad c_3 = -\frac{p_b b^2 - p_a a^2}{2(b^2 - a^2)}, \quad [116. 17]$$

e quindi in definitiva le componenti di tensione:

$$\sigma_r = -\frac{1}{b^2 - a^2} \left[ p_b b^2 - p_a a^2 - \frac{1}{r^2} (p_b - p_a) a^2 b^2 \right],$$

$$\sigma_\vartheta = -\frac{1}{b^2 - a^2} \left[ p_b b^2 - p_a a^2 + \frac{1}{r^2} (p_b - p_a) a^2 b^2 \right]. \quad [116. 18]$$

La componente di tensione  $\sigma_z$  agente sugli elementi superficiali piani paralleli al piano  $(x_1 x_2)$  e diretta secondo l'asse  $z \equiv x_3$  si ottiene dalla [110. 7] nella forma:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\vartheta) = -2\nu \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2}. \quad [116. 19]$$

Nel caso presente lo spostamento deve essere assialmente simmetrico, cioè  $f(\vartheta) = 0$  e quindi nella [116. 11] le costanti  $a_1 = a_2 = 0$

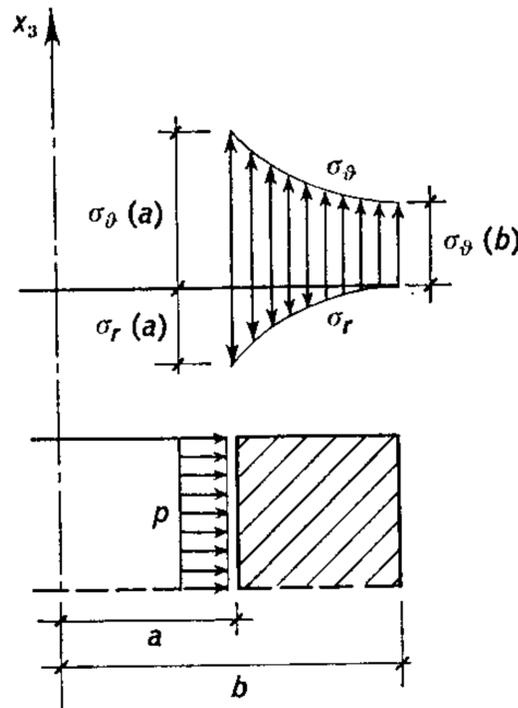


Fig. 128.

per  $\vartheta$  qualsiasi. Sostituendo allora i valori [116. 17] delle costanti  $c_1, c_3$  nelle espressioni [116. 12] otteniamo le componenti di spostamento nella forma:

$$u_r = \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2 + (1 - 2\nu) (a^2 p_a - b^2 p_b) r^2}{2\mu r (b^2 - a^2)}, \quad [116. 20]$$

$$u_\vartheta = cr,$$

e quindi la componente circonferenziale risulta una pura rotazione di moto rigido, che rimane indeterminata essendo il cilindro privo di vincoli.

Nel caso particolare in cui  $p_b = 0$  ed il cilindro sia soggetto unicamente ad una pressione interna  $p = p_a$ , le componenti di tensione risultano dalle [116. 18] e [116. 19], nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\vartheta &= \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_z &= 2\nu \frac{p a^2}{b^2 - a^2}, \end{aligned} \quad [116. 21]$$

e le componenti di spostamento dalle [116. 20]:

$$u_r = \frac{1}{2\mu(b^2 - a^2)} \left[ \frac{p a^2 b^2}{r} + (1 - 2\nu) a^2 p r \right], \quad [116. 22]$$

$$u_\vartheta = cr.$$

Poichè  $b > a$ , per ogni valore di  $r$  la tensione radiale  $\sigma_r$  è sempre una compressione mentre la tensione circonferenziale  $\sigma_\vartheta$  è sempre una trazione: il loro andamento lungo lo spessore del cilindro è indicato in fig. 128. La tensione  $\sigma_z$  è una trazione uniforme.

### 117. Stati piani radiali.

Un'altra classe di problemi piani di trattazione abbastanza semplice è rappresentata dai cosiddetti stati semplicemente radiali, nei quali l'unica componente di tensione diversa da zero è quella radiale  $\sigma_r$ .

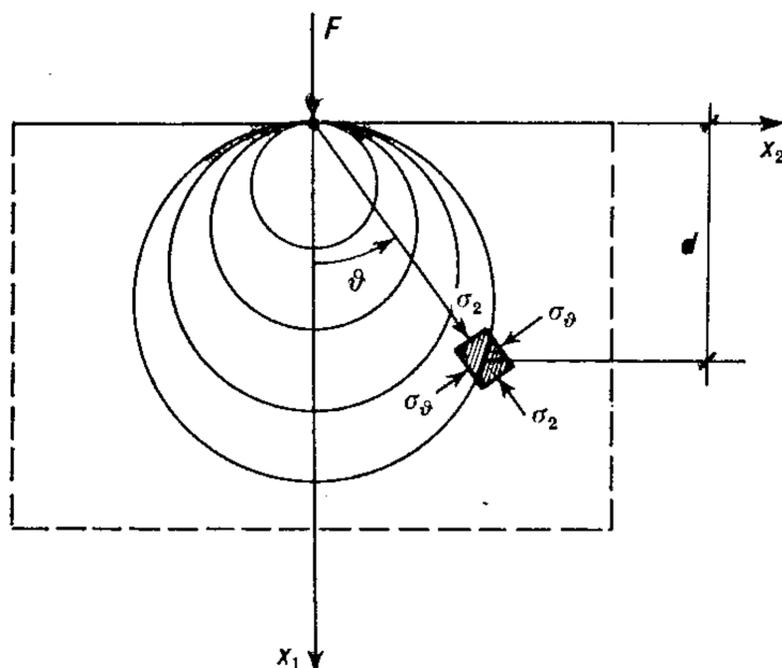


Fig. 129.

Consideriamo un semispazio soggetto ad una distribuzione costante di forze applicate lungo una retta parallela a  $z \equiv x_3$ , come indicato in fig. 129.

Il problema si presenta piano nella deformazione con le seguenti condizioni al contorno:

$$\sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0 \quad \text{per } \vartheta = \pm \pi/2, \quad [117. 1]$$

le quali suggeriscono di assumere come funzione di tensione il prodotto:

$$\Psi(r, \vartheta) = r\psi(\vartheta), \quad [117. 2]$$

dove  $\psi(\vartheta)$  è una funzione incognita della sola  $\vartheta$ .

Abbiamo dalle [115. 14] le componenti di tensione nella forma:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \left[ \psi(\vartheta) + \frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} \right], \quad \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad [117. 3]$$

e dalla [115. 16] l'equazione di congruenza:

$$\left( \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta\vartheta}^2 \right) \left( \frac{1}{r} \psi(\vartheta) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} \right) = 0, \quad [117. 4]$$

che, sviluppata, diviene:

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{d^4\psi}{d\vartheta^4} + 2 \frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \psi(\vartheta) \right) = 0. \quad [117. 5]$$

Per  $r$  arbitrario, l'equazione differenziale del quarto ordine, ottenuta uguagliando a zero l'espressione tra parentesi tonde della [117. 5], ha come integrale generale:

$$\psi(\vartheta) = c_1 \vartheta \sin \vartheta + c_2 \vartheta \cos \vartheta + c_3 \sin \vartheta + c_4 \cos \vartheta, \quad [117. 6]$$

dal quale, con riferimento alla [117. 3], otteniamo la componente radiale di tensione:

$$\sigma_r = \frac{2}{r} (c_1 \cos \vartheta - c_2 \sin \vartheta). \quad [117. 7]$$

La simmetria rispetto all'asse  $x_1$  secondo il quale agisce la forza  $F$ , permette di affermare che la  $\sigma_r$  deve mantenersi inalterata scambiando  $\vartheta$  con  $-\vartheta$ , per cui necessariamente  $c_2 = 0$ .

La costante  $c_1$  viene determinata dalla condizione che la risultante verticale delle forze agenti su una superficie cilindrica generica di raggio  $r$  deve equilibrare la forza  $F$ , e quindi integrando le componenti verticali  $\sigma_r r d\vartheta \cos \vartheta$  agenti su ogni elemento  $r d\vartheta$  di tale superficie:

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \vartheta d\vartheta = -F. \quad [117. 8]$$

Sostituendo il valore [117. 7] per  $\sigma_r$  risulta in definitiva  $c_1 = -F/\pi$ , per cui:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \cos \vartheta, \quad [117. 9]$$

cioè ogni elemento a distanza  $r$  dal punto di applicazione della forza  $F$  è soggetto a semplice compressione secondo la direzione radiale. La tensione  $\sigma_r$  è dunque costante in tutti i punti di un cerchio avente il

centro sull'asse  $x_1$  e tangente all'asse  $x_2$  nel punto di applicazione del carico, dove la tensione stessa diviene infinita. Sui cerchi  $\sigma_r = \text{cost}$ , indicati in fig. 129 è costante anche la tensione tangenziale  $\tau_{\max} = \sigma_r/2$ .

Lo stato di tensione sopra un piano parallelo al piano  $(x_2 x_3)$  e posto alla distanza  $d = r/\cos \vartheta$  da questo si ottiene determinando dalla semplice compressione radiale le componenti cartesiane di tensione mediante le formule di trasformazione [22. 3]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_r \cos^2 \vartheta = -\frac{2F}{\pi d} \cos^4 \vartheta, \\ \sigma_{22} &= \sigma_r \sin^2 \vartheta = -\frac{2F}{\pi d} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta, \\ \tau_{12} &= \sigma_r \sin \vartheta \cos \vartheta = -\frac{2F}{\pi d} \sin \vartheta \cos^3 \vartheta.\end{aligned}\quad [117. 10]$$

Le componenti di spostamento si ottengono ancora dalle [115. 19] tenendo presenti le [117. 3] e la [117. 9], cioè dalle tre equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}u_{r,r} &= -\frac{(1-\nu)F}{\pi r \mu} \cos \vartheta, \\ u_r + u_{\vartheta,\vartheta} &= \frac{\nu F}{\pi \mu} \cos \vartheta, \\ u_{r,\vartheta} - u_{\vartheta} + r u_{\vartheta,r} &= 0.\end{aligned}\quad [117. 11]$$

Integrando la prima equazione abbiamo:

$$u_r = -\frac{(1-\nu)F}{\pi \mu} \ln r \cos \vartheta + f(\vartheta), \quad [117. 12]$$

che sostituita nella seconda permette di ricavare  $u_{\vartheta}$  per integrazione di questa:

$$u_{\vartheta} = \frac{\nu F}{\pi \mu} \sin \vartheta + \frac{(1-\nu)F}{\pi \mu} \ln r \sin \vartheta - \int f(\vartheta) d\vartheta + g(r). \quad [117. 13]$$

Sostituendo i valori trovati nella terza equazione otteniamo infine l'equazione differenziale:

$$\frac{df}{d\vartheta} + \frac{(1-2\nu)F}{\pi \mu} \sin \vartheta + \int f(\vartheta) d\vartheta = g(r) - r \frac{dg}{dr}, \quad [117. 14]$$

che ammette i due integrali generali:

$$f(\vartheta) = -\frac{(1-2\nu)F}{2\pi\mu} \vartheta \sin \vartheta + a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta, \quad [117.15]$$

$$g(r) = cr,$$

dove  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $c$  sono tre costanti arbitrarie.

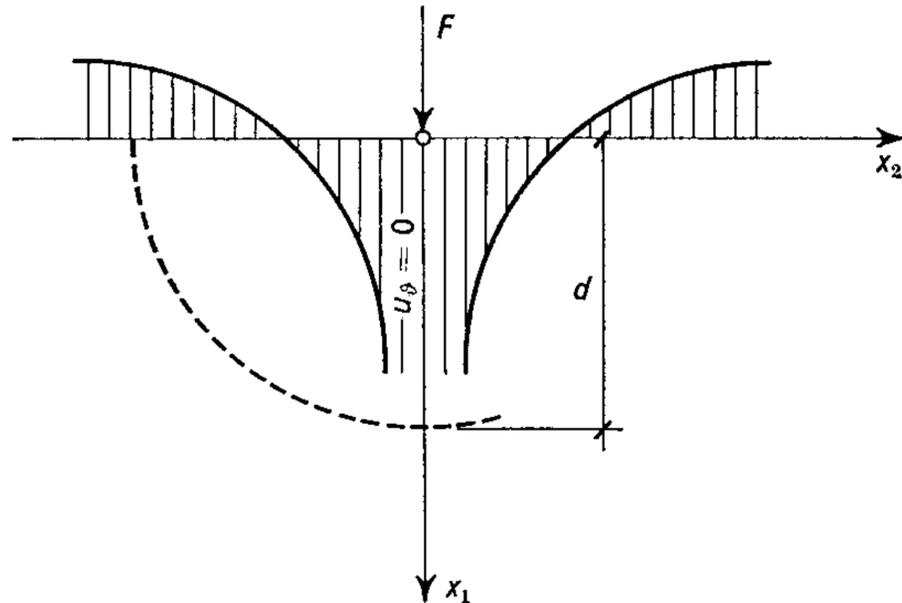


Fig. 130.

Le espressioni [117.12] e [117.13] degli spostamenti assumono la forma:

$$u_r = -\frac{F}{\pi\mu} \left[ (1-\nu) \ln r \cos \vartheta + \frac{1-2\nu}{2} \vartheta \sin \vartheta \right] + a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta, \quad [117.16]$$

$$u_\vartheta = \frac{F}{\pi\mu} \left[ (1-\nu) \ln r \sin \vartheta - (1-2\nu) \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{2} \sin \vartheta \right] + a_1 \cos \vartheta - a_2 \sin \vartheta + cr.$$

La simmetria rispetto a  $x_1$  esclude che nei punti di tale asse si verificano spostamenti orizzontali: la condizione  $u_r = 0$  per  $\vartheta = 0$  richiede  $a_1 = c = 0$ . Se inoltre supponiamo che ad una certa distanza  $d$  dal piano  $x_1 = 0$  lo spostamento verticale del punto  $x_1 = d$  sia nullo, la condizione  $u_\vartheta = 0$ , per  $\vartheta = 0$  e  $r = d$ , richiede:

$$a_2 = (1-\nu) F \ln \frac{d}{\pi\mu}.$$

Nella fig. 130 è riportato il diagramma degli spostamenti verticali  $u_\vartheta$  dei punti posti sull'asse  $x_2$  ( $\vartheta = \pm \pi/2$ ). Su tale asse gli spostamenti orizzontali  $u_r$  hanno un valore costante e sono diretti verso l'origine  $O$ .

In modo analogo può essere trattato il caso di una forza  $F$  applicata in  $O$  e diretta secondo l'asse  $x_2$ , come indicato in fig. 131 a). La componente radiale di tensione risulta in tale caso:

$$\sigma_r = \frac{2F}{\pi r} \sin \vartheta. \quad [117. 17]$$

Sovrapponendo i due casi, di forza perpendicolare al contorno e di forza parallela al contorno, otteniamo la soluzione per una forza  $F$

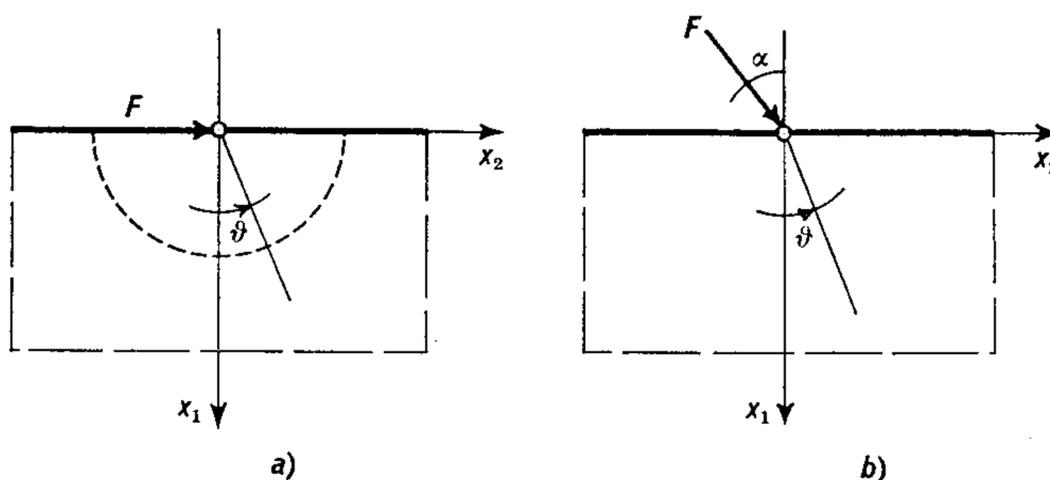


Fig. 131.

inclinata dell'angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale, come è indicato nella fig. 131 b):

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r} (F \cos \alpha \cos \vartheta - F \sin \alpha \sin \vartheta) = -\frac{2F}{\pi r} \cos (\alpha + \vartheta). \quad [117. 18]$$

Con lo stesso procedimento si possono studiare casi più complessi di carico quali una coppia applicata in  $O$ , una successione di forze concentrate o un carico distribuito.

La distribuzione semplicemente radiale può essere utilizzata nell'analisi dello stato di tensione in un cuneo sollecitato da una forza concentrata nel suo vertice, come indicato nella fig. 132.

Nel caso simmetrico di fig. 132 a) le condizioni lungo i lati  $\vartheta = \pm \alpha$  del cuneo sono verificate assumendo:

$$\sigma_r = -\frac{c_1 F \cos \vartheta}{r}, \quad \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad [117. 19]$$

dove la costante  $c_1$  è determinata dalla condizione di equilibrio nell'origine  $O$ , dovendo la forza  $F$  essere equilibrata dalla proiezione ver-

ticale della risultante delle tensioni radiali agenti sulla generica superficie cilindrica di raggio  $r$ :

$$-\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{c_1 F \cos^2 \vartheta}{r} r d\vartheta + F = 0, \quad [117.20]$$

ed effettuando l'integrazione indicata:

$$c_1 = (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)^{-1},$$

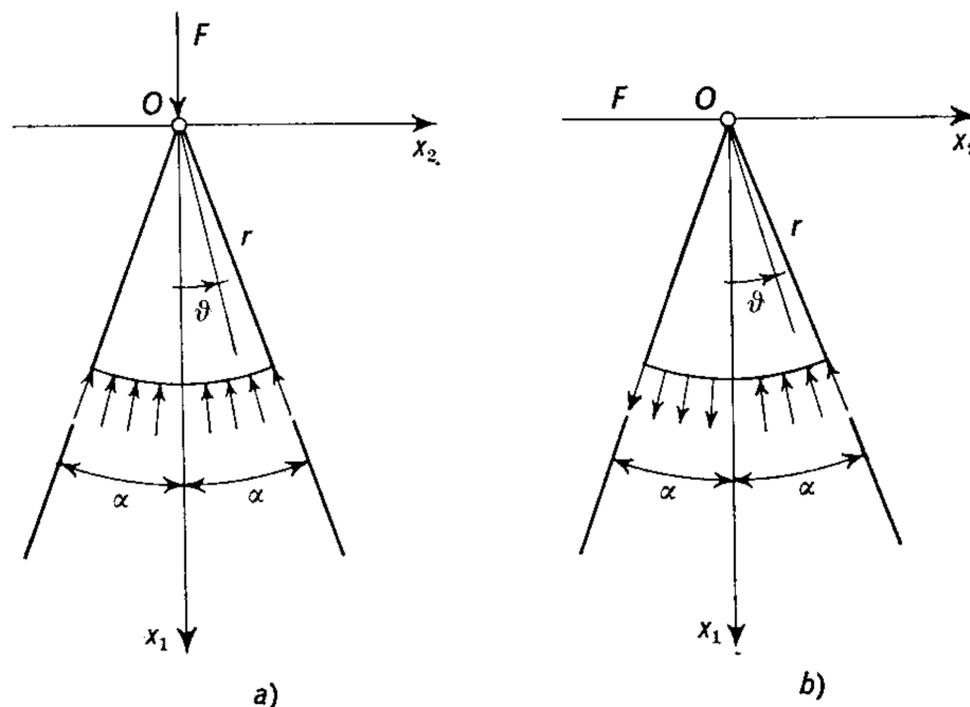


Fig. 132.

da cui:

$$\sigma_r = -\frac{F \cos \vartheta}{r (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}. \quad [117.21]$$

La tensione  $\sigma_r$  trovata si riduce, per  $\alpha = \pi/2$ , alla soluzione corrispondente [117.9] del semispazio.

La distribuzione della tensione radiale non è uniforme: il valore massimo si ha lungo l'asse  $x_1$  per  $\vartheta = 0$ .

Nel caso antisimmetrico di fig. 132 b) assumiamo come componenti di tensione le:

$$\sigma_r = -\frac{c_1 F \sin \vartheta}{r}, \quad \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad [117.22]$$

ed osserviamo che la condizione di equilibrio secondo l'asse  $x_1$  è verificata dalla distribuzione antisimmetrica della tensione radiale. La condizione di equilibrio per la componente orizzontale della risultante delle tensioni agenti su una generica superficie cilindrica di raggio  $r$ :

$$-\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{c_1 F \sin^2 \vartheta}{r} r dr + F = 0 \quad [117.23]$$

permette di ricavare la costante:

$$c_1 = (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)^{-1}$$

e quindi la tensione radiale:

$$\sigma_r = - \frac{F \sin \vartheta}{r (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}. \quad [117. 24]$$

Sovrapponendo le soluzioni [117. 21] e [117. 24] possiamo studiare il caso di una forza  $F$  agente nel vertice  $O$  e comunque diretta nel piano  $(x_1 x_2)$ .

### 118. Concentrazione delle tensioni.

L'impiego delle coordinate polari permette inoltre di trattare in modo semplice l'interessante problema relativo all'influenza di piccoli fori sulla distribuzione delle tensioni.

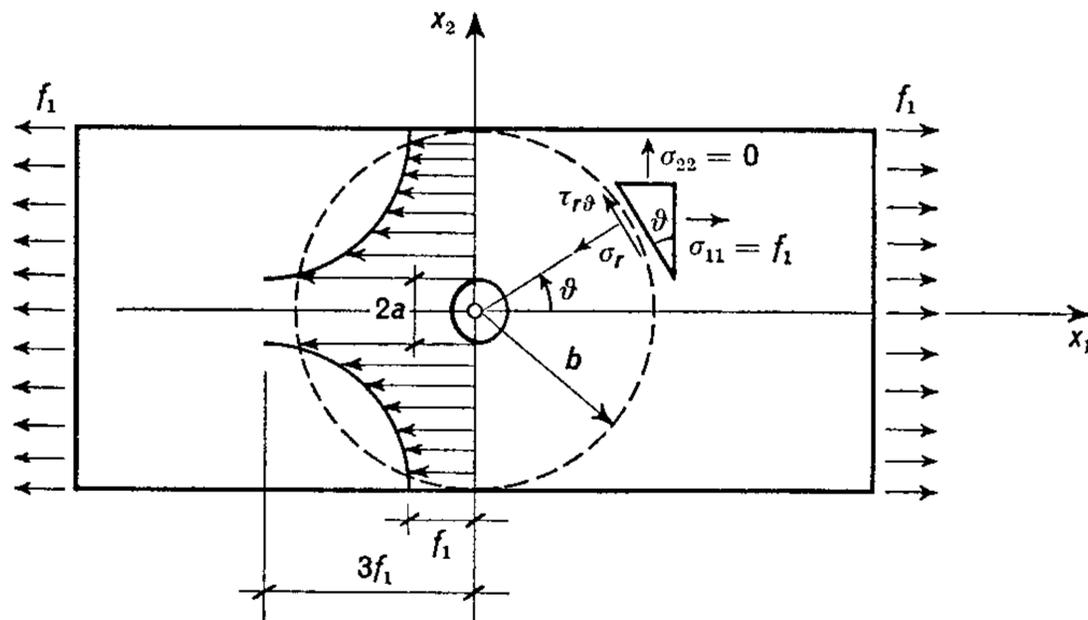


Fig. 133.

Consideriamo un sistema piano di forma rettangolare, con un piccolo foro di raggio  $a$ , sollecitato a trazione uniforme su due lati opposti come indicato in fig. 133. Nei punti del contorno di un cerchio di raggio  $b$  lo stato di tensione non sarà alterato sensibilmente dalla presenza del foro, in quanto il principio di equivalenza elastica, discusso nel § 45, ci assicura che la distribuzione delle tensioni a distanza sufficientemente grande rispetto ad  $a$  sarà praticamente uguale a quella in assenza del foro. Ora quest'ultima risulta una trazione uniforme  $\sigma_{11} = f_1$ , come si ottiene dal primo caso trattato nel § 114.

In coordinate polari la tensione  $\sigma_{11}$  equivale alle due tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_r &\equiv \sigma_{11} \cos \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sigma_{11} (1 + \cos 2\vartheta), \\ \tau_{r\vartheta} &\equiv - \sigma_{11} \cos \vartheta \sin \vartheta = - \frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\vartheta, \end{aligned} \quad [118. 1]$$

che, considerate come forze di superficie applicate al contorno esterno del cilindro cavo di raggi  $a$  e  $b$ , equivalgono ad una componente radiale costante  $\frac{1}{2} \sigma_{11}$  e ad una componente variabile con  $\vartheta$ , costituita da una parte radiale  $\frac{1}{2} \sigma_{11} \cos 2\vartheta$  e da una parte circonferenziale  $-\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$ .

Le tensioni prodotte nell'anello dalla componente costante risultano dal problema risolto nel § 116, precisamente dalle [116. 16] scritte per  $p_b = -\frac{1}{2} \sigma_{11}$ ,  $p_a = 0$  e per  $a/b \simeq 0$ , nell'ipotesi cioè di un raggio  $a$  del foro molto piccolo rispetto a  $b$ :

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_{11}}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma'_\vartheta = \frac{\sigma_{11}}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \quad [118. 2]$$

Le tensioni prodotte nell'anello dalla componente variabile con  $\vartheta$  possono essere derivate da una funzione di tensione della forma:

$$\Psi(r, \vartheta) = \psi(r) \cos 2\vartheta, \quad [118. 3]$$

la quale, sostituita nell'equazione di congruenza [115. 16], fornisce per ogni  $\vartheta$  la seguente equazione differenziale ordinaria del quarto ordine nella  $\psi(r)$ :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{4\psi}{r^2}\right) = 0. \quad [118. 4]$$

L'integrale generale di tale equazione è:

$$\psi(r) = c_1 r^2 + c_2 r^4 + \frac{c_3}{r^2} + c_4, \quad [118. 5]$$

al quale corrispondono la funzione di tensione:

$$\Psi(r, \vartheta) = \left(c_1 r^2 + c_2 r^4 + \frac{c_3}{r^2} + c_4\right) \cos 2\vartheta \quad [118. 6]$$

e le componenti di tensione:

$$\sigma''_r = \frac{1}{r} \left(\Psi_{,r} + \frac{1}{r} \Psi_{,\vartheta\vartheta}\right) = -\left(2c_1 + \frac{6c_3}{r^4} + \frac{4c_4}{r^2}\right) \cos 2\vartheta,$$

$$\sigma''_\vartheta = \Psi_{,rr} = \left(2c_1 + 12c_2 r^2 + \frac{6c_3}{r^4}\right) \cos 2\vartheta, \quad [118. 7]$$

$$\tau''_{r\vartheta} = -\left(\frac{1}{r} \Psi_{,r}\right)_{,r} = \left(2c_1 + 6c_2 r^2 - \frac{6c_3}{r^4} - \frac{2c_4}{r^2}\right) \sin 2\vartheta.$$

Le costanti di integrazione vengono determinate dalle condizioni ai limiti, precisamente dalle [118. 1] sulla circonferenza esterna ( $r = b$ ) e dall'assenza di forze applicate sulla circonferenza interna ( $r = a$ ):

$$\begin{aligned} 2c_1 + \frac{6c_3}{b^4} + \frac{4c_4}{b^2} &= -\frac{1}{2}\sigma_{11}, \\ 2c_1 + 6c_2b^2 - \frac{6c_3}{b^4} - \frac{2c_4}{b^2} &= -\frac{1}{2}\sigma_{11}, \\ 2c_1 + \frac{6c_2}{a^4} + \frac{4c_4}{a^2} &= 0, \\ 2c_1 + 6c_2a^2 - \frac{6c_3}{a^4} - 2c_4 &= 0, \end{aligned} \quad [118. 8]$$

dalle quali risolvendo il sistema e ponendo, al solito,  $a/b \simeq 0$  otteniamo le costanti:

$$c_1 = -\frac{\sigma_{11}}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{a^4\sigma_{11}}{4}, \quad c_4 = \frac{a^2\sigma_{11}}{2}. \quad [118. 9]$$

Sostituendo questi valori nelle [118. 7] e sommando le tensioni [118. 2] prodotte dalla componente uniforme  $\sigma_{11} = f_1$  troviamo le tensioni in coordinate polari<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{f_1}{2} \left[ \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\vartheta \right], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{f_1}{2} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\vartheta \right], \\ \tau_{r\vartheta} &= -\frac{f_1}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad [118. 10]$$

A distanza notevole dal foro, cioè per  $r$  molto grande, le tensioni  $\sigma_r$  e  $\tau_{r\vartheta}$  tendono ai valori [118. 1]. Sul contorno del foro, per  $r = a$ , abbiamo:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\vartheta = f_1 (1 - 2 \cos 2\vartheta), \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad [118. 11]$$

e la tensione circonferenziale assume un massimo  $\sigma_\vartheta = 3f_1$  per  $\vartheta = \pi/2$  e  $\vartheta = 3\pi/2$ , cioè agli estremi del diametro perpendicolare alla direzione della trazione  $f_1$ . In questi punti  $\sigma_\vartheta$  ha dunque un valore triplo di quello corrispondente alla tensione uniforme in assenza del foro.

<sup>1</sup> G. KIRSCH, *Ver. deutsch. Ing.*, 42 (1898).

Negli estremi del diametro parallelo alla direzione della trazione  $f_1$ , per  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = \pi$ ,  $\sigma_\vartheta = -f_1$  ed è quindi una compressione.

Nella sezione mediana perpendicolare all'asse  $x_1$ , la tensione circonferenziale, per  $\vartheta = \pi/2$ , diviene:

$$\sigma_\vartheta = \frac{f_1}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right), \quad [118.12]$$

e si avvicina rapidamente al valore  $f_1$  con l'aumentare di  $r$ , come mostra il diagramma di fig. 133.

La concentrazione di tensioni sul contorno di un foro circolare rappresenta un problema del massimo interesse nelle applicazioni. Nel caso di uno stato di tensione variabile ciclicamente da valori positivi a valori negativi, i conseguenti fenomeni di fatica possono produrre fessure in tali zone particolarmente sollecitate.

### 119. Soluzione generale in termini di potenziali complessi.

Sinora abbiamo discusso alcuni procedimenti particolari per la risoluzione di specifici problemi elastici piani nella deformazione. Nel presente § 119 vogliamo esporre brevemente un metodo generale di soluzione, fondato sull'impiego sistematico della variabile complessa, dovuto sostanzialmente a KOLOSOV<sup>1</sup> e successivamente sviluppato da MUSHELIŠVILI<sup>2</sup>. Seguiremo però i lineamenti di una impostazione diversa, derivata indipendentemente da STEVENSON<sup>3</sup>, la quale appare più diretta e permette una sua immediata estensione al caso più generale in cui siano presenti anche forze di massa.

#### a) Componenti di spostamento e di tensione in forma complessa.

Introdotta la variabile complessa  $z$  e la sua coniugata  $\bar{z}$ , definite rispettivamente:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad [119.1]$$

otteniamo le seguenti espressioni per gli operatori di derivata parziale  $\partial_1, \partial_2$  rispetto alle variabili reali  $x_1, x_2$  e per gli operatori di derivata parziale  $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$  rispetto alle variabili complesse  $z, \bar{z}$ :

$$\partial_1 = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_2 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}); \quad [119.2]$$

<sup>1</sup> G. V. KOLOSOV, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, **146**, 533 (1908); **148**, 1242 (1909); *Zeits. Math. Phys.*, **62**, 384 (1914).

<sup>2</sup> N. I. MUSHELIŠVILI, *Math. Ann.*, **107**, 282 (1932); *Doklady Akad. Nauk URSS*, **3**, 7, 73, 141 (1934).

<sup>3</sup> A. C. STEVENSON, *Phil. Mag.* (7), **34**, 766 (1943); *Proc. Roy. Soc. London (A)*, **184**, 129 (1945).

$$-2\partial_z = \partial_1 - i\partial_2, \quad 2\partial_{\bar{z}} = \partial_1 + i\partial_2. \quad [119.3]$$

Consideriamo allora le equazioni indefinite di equilibrio [110.8] in assenza di forze di massa:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{21,2} = 0, \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \quad [119.4]$$

e sommiamo la seconda alla prima moltiplicata per l'unità immaginaria  $i$ . L'equazione complessa così ottenuta con riguardo alle [119.2]:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12})_{,z} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,\bar{z}} = 0 \quad [119.5]$$

risulta identicamente soddisfatta da una funzione  $F(z, \bar{z})$  tale che:

$$F_{,z} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad -F_{,\bar{z}} = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12}. \quad [119.6]$$

Definito allora lo spostamento complesso:

$$w(z, \bar{z}) = u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2), \quad [119.7]$$

deriviamolo rispetto a  $\bar{z}$  e  $z$  tenendo presenti le [119.3]:

$$2w_{,\bar{z}} = u_{1,1} - u_{2,2} + i(u_{2,1} + u_{1,2}); \quad [119.8]$$

$$2w_{,z} = u_{1,1} + u_{2,2} + i(u_{2,1} - u_{1,2}). \quad [119.9]$$

Con riferimento alle relazioni di legame elastico lineare isotropo [110.10], dove le componenti di deformazione  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  sono espresse in termini delle componenti di spostamento  $u_1$ ,  $u_2$ , sommiamo alla prima di esse la seconda moltiplicata per  $-1$  e la terza moltiplicata per  $2i$ , in modo da ottenere l'equazione complessa:

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12} = 2\mu[u_{1,1} - u_{2,2} + i(u_{1,2} + u_{2,1})]. \quad [119.10]$$

Il confronto di questa equazione con la seconda [119.6] e con la [119.8] permette di scrivere:

$$4\mu w_{,\bar{z}} = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12} = -F_{,\bar{z}}, \quad [119.11]$$

da cui integrando rispetto a  $\bar{z}$ :

$$4\mu w = -F(z, \bar{z}) + f(z), \quad [119.12]$$

dove  $f(z)$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $z$ . Analogamente, sommando membro a membro le prime due [110.10], cioè:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)(u_{1,1} + u_{2,2}), \quad [119.13]$$

possiamo scrivere la [119.9] nella forma:

$$4(\lambda + \mu)w_{,z} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + 2i(\lambda + \mu)(u_{2,1} - u_{1,2}). \quad [119.14]$$

Se ora deriviamo la [119. 12] rispetto a  $z$  e teniamo presente la prima [119. 6]:

$$4\mu w_{,z} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + f'(z), \quad [119. 15]$$

avendo indicato con un apice la derivazione rispetto a  $z$ , potremo eliminare  $w_{,z}$  tra la relazione trovata e la [119. 14] e pervenire così all'equazione:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} - \frac{i\mu}{1-\nu} (u_{2,1} - u_{1,2}) = 4\varphi'(z), \quad [119. 16]$$

dove  $\nu = \lambda/2 (\lambda + \mu)$  è il rapporto di Poisson e:

$$\varphi(z) = \frac{1}{8(1-\nu)} f(z). \quad [119. 17]$$

Indicando con  $\bar{\varphi}'(\bar{z})$  la complessa coniugata della  $\varphi'(z)$ , dove l'apice esprime ora la derivazione rispetto a  $\bar{z}$ , la somma di queste funzioni risulterà uguale al doppio della parte reale di  $\varphi'(z)$ , cioè:

$$2\Re \varphi'(z) = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}). \quad [119. 18]$$

Perciò, tenendo presente la prima [119. 6], la parte reale al primo membro della [119. 16] potrà essere espressa nella forma:

$$F_{,z} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \quad [119. 19]$$

ed integrando rispetto a  $z$ , anche:

$$F(z, \bar{z}) = 2[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})] + \bar{\psi}(\bar{z}), \quad [119. 20]$$

dove  $\bar{\psi}(\bar{z})$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $\bar{z}$ .

Lo spostamento complesso [119. 12], con riferimento alla posizione [119. 17], diviene dunque:

$$2\mu (u_1 + iu_2) = (3 - 4\nu) \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}), \quad [119. 21]$$

mentre le componenti di tensione risultano dalle [119. 6], [119. 19] e [119. 20] come:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12} &= -2[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]. \end{aligned} \quad [119. 22]$$

La distribuzione degli spostamenti e delle tensioni viene data così in termini dei *potenziali complessi*  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$ : separando la parte reale dalla parte immaginaria otteniamo dalla [119. 21] due relazioni per  $u_1$ ,  $u_2$  e dalla [119. 22] tre relazioni per  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$ . Talora riesce utile

sostituire alla seconda [119. 22] una relazione equivalente ottenuta da questa scambiando  $i$  con  $-i$ , cioè:

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} - 2i \tau_{12} = -2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad [119. 23]$$

b) *Restrizioni sui potenziali complessi.*

Se la regione occupata dal sistema piano è a connessione semplice, i potenziali complessi  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  saranno funzioni monodrome in tale

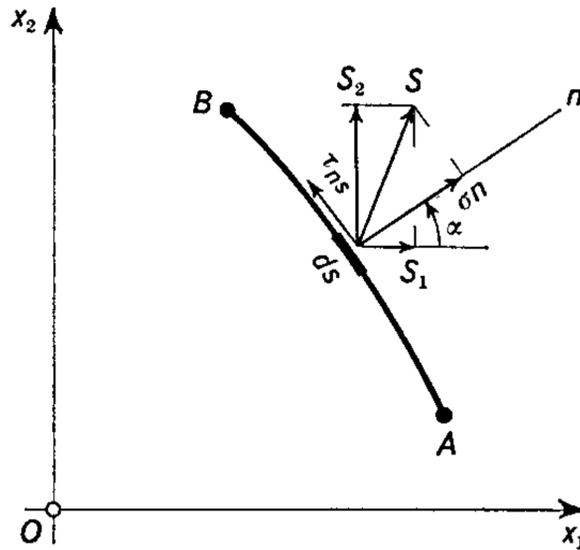


Fig. 134.

regione in virtù del loro carattere analitico, ma se la regione è a connessione multipla allora essi potranno risultare funzioni polidrome.

Indicando con  $[f]_A^B$  l'incremento subito dalla funzione  $f$  nel passaggio dal punto  $A$  al punto  $B$  lungo un percorso  $AB$ , le condizioni per la monodromia delle tensioni risultano dalle [119. 22] nella forma:

$$[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^B = 0, \quad [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]_A^B = 0, \quad [119. 24]$$

su ogni contorno chiuso nella regione. Ne segue che:

$$[\varphi''(z)]_A^A = [\bar{\varphi}''(\bar{z})]_A^A = [\bar{\psi}'(\bar{z})]_A^A = 0. \quad [119. 25]$$

Se gli spostamenti sono monodromi otteniamo dalla [119. 21]:

$$[(3 - 4\nu) \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})]_A^A = 0, \quad [119. 26]$$

da cui derivando rispetto a  $z$  e confrontando con la prima delle equazioni [119. 24]:

$$[\varphi'(z)]_A^A = [\bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^A = 0. \quad [119. 27]$$

Con riferimento alla fig. 134 determiniamo la forza risultante  $R \equiv (R_1, R_2)$  ed il momento risultante  $M$  agenti sopra un arco  $\widehat{AB}$ .

Le componenti della tensione su un elemento  $ds$  di  $\widehat{AB}$  nelle direzioni  $x_1, x_2$  valgono rispettivamente:

$$S_1 = \sigma_n \cos \alpha - \tau_{ns} \sin \alpha, \quad S_2 = \sigma_n \sin \alpha + \tau_{ns} \cos \alpha, \quad [119. 28]$$

ed anche, in forma complessa:

$$S_1 + iS_2 = \sigma_n (\cos \alpha + i \sin \alpha) - \tau_{ns} (\sin \alpha - i \cos \alpha), \quad [119. 29]$$

per cui in definitiva, ricordando le formule di Euler:

$$S_1 + iS_2 = (\sigma_n + i\tau_{ns}) \exp i\alpha. \quad [119. 30]$$

D'altra parte le componenti di tensione  $\sigma_n, \tau_{ns}$  possono essere espresse, come nelle [113. 1], in funzione delle componenti  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \end{aligned} \quad [119. 31]$$

che, sommando la prima moltiplicata per 2 alla seconda moltiplicata per  $2i$ , danno l'equazione complessa:

$$2(\sigma_n + i\tau_{ns}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12}) \exp(-2i\alpha), \quad [119. 32]$$

per cui confrontando con la [119. 30]:

$$S_1 + iS_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \exp i\alpha + (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12}) \exp(-i\alpha). \quad [119. 33]$$

La forma complessa  $R_1 + iR_2$  della risultante delle azioni sull'intero arco  $\widehat{AB}$  si ottiene integrando l'espressione precedente, e quindi con riguardo alle [119. 22]:

$$R_1 + iR_2 = \int_A^B \{[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \exp i\alpha - [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \exp(-i\alpha)\} ds. \quad [119. 34]$$

Sostituendo allora le funzioni esponenziali con le derivate delle variabili complesse  $z, \bar{z}$  rispetto a  $s$ , cioè:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{dx_1}{ds} + i \frac{dx_2}{ds} = i \exp i\alpha, \\ \frac{d\bar{z}}{ds} &= \frac{dx_1}{ds} - i \frac{dx_2}{ds} = -i \exp(-i\alpha), \end{aligned} \quad [119. 35]$$

abbiamo anche:

$$R_1 + iR_2 = \frac{1}{i} \int_A^B \frac{d}{ds} [\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})] ds, \quad [119. 36]$$

e finalmente, integrando:

$$R_1 + iR_2 = -i[\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^B. \quad [119.37]$$

Il momento  $M$  agente sull'intero arco  $\widehat{AB}$  risulta:

$$M = \int_A^B (x_1 S_2 - x_2 S_1) ds = \Re \left[ -i \int_A^B \bar{z} (S_1 + iS_2) ds \right], \quad [119.38]$$

e tenendo presenti le [119.34] e [119.35], anche:

$$M = -\Re \left[ \int_A^B \bar{z} \left\{ [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \frac{dz}{ds} + [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \frac{d\bar{z}}{ds} \right\} ds \right]. \quad [119.39]$$

Raccogliendo l'operatore di derivata rispetto a  $s$  possiamo scrivere:

$$M = -\Re \left\{ \int_A^B \frac{d}{ds} [z\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{z}\bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}(\bar{z})] ds \right\}, \quad [119.40]$$

avendo posto  $\chi'(z) = \psi(z)$ , ed integrando:

$$M = -\Re [\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\varphi'(z)]_A^B. \quad [119.41]$$

Lungo un contorno chiuso si ha infine, con riguardo alla equazione [119.27]:

$$S_1 + iS_2 = -i[\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z})]_A^A, \quad M = \Re [\chi(z) - z\psi(z)]_A^A. \quad [119.42]$$

### c) Relazioni con la funzione di Airy.

I potenziali complessi  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  sono collegati alla funzioni di Airy  $\Psi(x_1, x_2)$ : su tali relazioni Mushelišvili fondò la deduzione delle precedenti equazioni per gli spostamenti e le tensioni in forma complessa. Qui accenneremo brevemente ad un procedimento diverso osservando che dalle posizioni [112.5] discende, con riguardo alle [119.2]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\Psi_{,z\bar{z}}, \quad \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12} = -4\Psi_{,\bar{z}\bar{z}}, \quad [119.43]$$

e di conseguenza le [119.22] divengono:

$$2\Psi_{,z\bar{z}} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}), \quad 2\Psi_{,\bar{z}\bar{z}} = z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}). \quad [119.44]$$

Integrando la prima di tali equazioni rispetto a  $z$  e la seconda rispetto a  $\bar{z}$  otteniamo da entrambe il valore  $2\Psi_{,\bar{z}}$ , per cui uguagliando le espressioni trovate:

$$2\Psi_{,\bar{z}} \equiv \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{g}_1(\bar{z}) = \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + g_2(z), \quad [119.45]$$

essendo  $\bar{g}_1(\bar{z})$  e  $g_2(z)$  due funzioni arbitrarie della sola variabile  $\bar{z}$  e  $z$  rispettivamente. Dal confronto dei due membri della [119.45] risulta necessario che:

$$\bar{g}_1(\bar{z}) = \bar{\psi}(\bar{z}), \quad g_2(z) = \varphi(z), \quad [119.46]$$

e quindi in definitiva:

$$2\Psi_{,\bar{z}} = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}). \quad [119.47]$$

Un'integrazione rispetto a  $\bar{z}$  dà:

$$2\Psi = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z} + \chi(\bar{z}), \quad [119.48]$$

dove  $\chi(z)$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $z$ . Ora, poichè le derivate seconde della  $\Psi$  sono reali, anche la funzione di Airy deve essere reale, a meno di un'eventuale costante immaginaria. Il secondo membro della [119.48] risulterà reale purchè:

$$\int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z} = \bar{\chi}(\bar{z}), \quad [119.49]$$

a meno di una costante complessa inessenziale che può essere posta uguale a zero.

Abbiamo così la relazione classica:

$$2\Psi = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad [119.50]$$

ottenuta da GOURSAT<sup>1</sup> con un procedimento molto più semplice, nel quale però viene presupposta l'analiticità della  $\Psi$ , proprietà invece che discende proprio dalla rappresentazione [119.50].

## 120. Trasformazione conforme delle coordinate.

In molte applicazioni della teoria dei potenziali complessi è opportuno avere le componenti di tensione e di spostamento riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali  $\xi, \eta$ , definito in modo tale che esista una relazione  $z = \omega(\zeta)$  tra i punti  $\zeta = \xi + i\eta$  del piano complesso ( $\zeta$ ) ed i punti  $z = x_1 + ix_2$  del piano complesso ( $z$ ), dove  $\omega(\zeta)$  è una funzione analitica.

### a) Coordinate curvilinee ortogonali.

Consideriamo nel sistema di coordinate curvilinee ortogonali  $\xi, \eta$  le tangenti  $n, s$  alle linee coordinate nel punto generico  $P$ . Le componenti di tensione nel riferimento  $\xi, \eta$  (fig. 135) si ottengono dalla particolarizzazione delle [22.3] nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_\eta &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \end{aligned} \quad [120.1]$$

<sup>1</sup> E. GOURSAT, *Bull. Soc. Math. de France*, **26**, 236 (1898).

e da queste relazioni segue facilmente, sommando e sottraendo dalla prima la seconda e la terza moltiplicata per  $(2i)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta + 2i\tau_{\xi\eta} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12}) \exp(-2i\alpha). \end{aligned} \quad [120. 2]$$

Un incremento infinitesimo della variabile  $z$  in  $P$  lungo una linea  $\eta = \text{cost.}$  vale:

$$dz_\eta = J d\xi \exp i\alpha, \quad [120. 3]$$

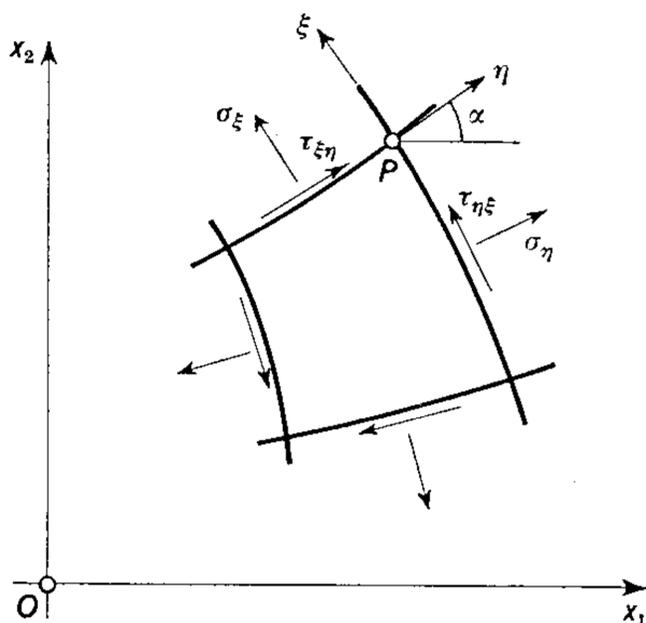


Fig. 135.

con  $J$  reale, e poichè  $z = \omega(\zeta)$  è analitica, la sua derivata  $\omega'(\zeta)$  deve avere per definizione lo stesso valore indipendentemente dal modo con cui tende a zero l'incremento della variabile indipendente  $\zeta$ , cioè:

$$\omega'(\zeta) = J \exp i\alpha, \quad \overline{\omega'}(\bar{\zeta}) = J \exp(-i\alpha). \quad [120. 4]$$

Dividendo membro a membro le relazioni precedenti abbiamo:

$$\exp(-2i\alpha) = \frac{\overline{\omega'}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)}, \quad \exp 2i\alpha = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\bar{\zeta})}, \quad [120. 5]$$

mentre moltiplicando membro a membro le stesse relazioni e ricordando la definizione del modulo di una quantità complessa:

$$J^2 = \omega'(\zeta) \overline{\omega'}(\bar{\zeta}) = |\omega'(\zeta)|^2. \quad [120. 6]$$

Sostituendo allora nelle [120. 2] le espressioni trovate ed introducendo i potenziali complessi dalle [119. 22], perveniamo alle seguenti

formule di trasformazione per le componenti di tensione dal sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  al sistema di coordinate  $(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \\ \sigma - \sigma_\eta + 2i\tau_{\xi\eta} &= -\frac{2\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)}[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]. \end{aligned} \quad [120. 7]$$

Analogamente, se  $u_\xi, u_\eta$  indicano le componenti dello spostamento in  $P$  nelle direzioni  $\xi, \eta$  rispettivamente, tra gli spostamenti complessi  $w(\zeta) = u_\xi + iu_\eta$  e  $w(z) = u_1 + iu_2$  sussisterà la relazione:

$$u_\xi + iu_\eta = (u_1 + iu_2) \exp(-i\alpha), \quad [120. 8]$$

ed in termini dei potenziali complessi, otteniamo dalle [119. 21] e [120. 5], la formula di trasformazione per gli spostamenti:

$$2\mu(u_\xi + iu_\eta) = \frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|} \left[ (3-4\nu)\varphi(z) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) \right]. \quad [120. 9]$$

#### b) *Problema del foro ellittico.*

A titolo di esempio consideriamo un sistema piano indefinito soggetto a trazione uniforme  $S$  e con foro ellittico.

Appare conveniente l'impiego di coordinate ellittiche  $\xi, \eta$  definite dalla trasformazione:

$$z \equiv \omega(\zeta) = c \cosh \zeta \quad (\zeta = \xi + i\eta), \quad [120. 10]$$

e una delle quali, precisamente  $\xi$ , è costante sul contorno ellittico del foro. Infatti dalla relazione:

$$\cosh(\xi + i\eta) = \cosh \xi \cos \eta + i \sinh \xi \sin \eta, \quad [120. 11]$$

separando nella [120. 10] la parte reale dalla parte immaginaria, otteniamo:

$$x_1 = c \cosh \xi \cos \eta, \quad x_2 = c \sinh \xi \sin \eta. \quad [120. 12]$$

Eliminando  $\eta$  per quadratura e somma, abbiamo l'equazione di una famiglia di ellissi omofocali indicate in fig. 136:

$$\frac{x_1^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{x_2^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad [120. 13]$$

con distanza tra i fuochi uguale a  $c$ .

Eliminando  $\xi$  per quadratura e differenza, abbiamo invece una famiglia di iperboli omofocali:

$$\frac{x_1^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{x_2^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1, \quad [120.14]$$

ancora con distanza  $c$  tra i fuochi, pure indicate in fig. 136.

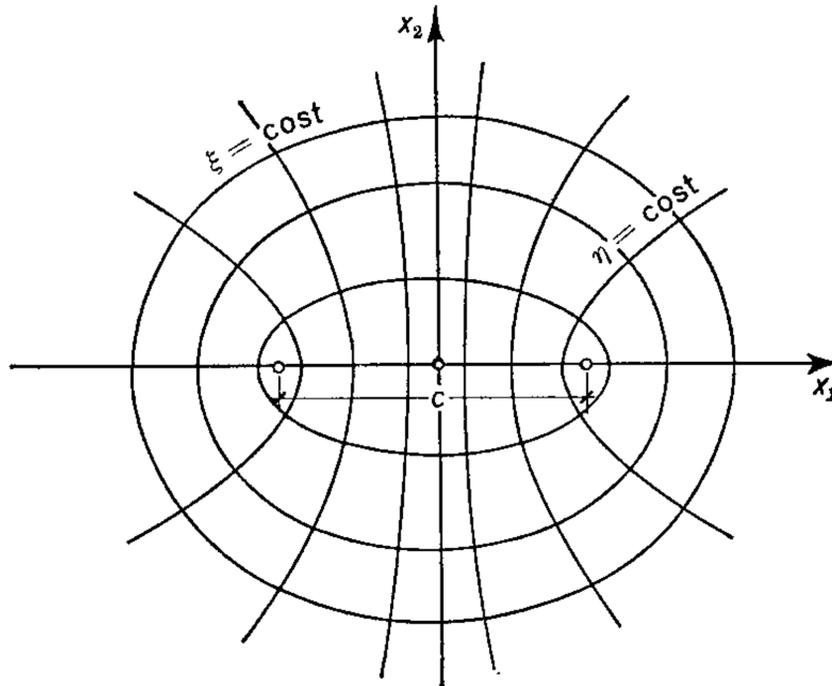


Fig. 136.

Se  $\xi = \xi_0$  indica il contorno del foro ellittico le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = S & \quad \text{per } \xi \rightarrow \infty, \\ \sigma_\xi = \sigma_\eta = 0 & \quad \text{per } \xi = \xi_0 \quad (\zeta + \bar{\zeta} = 2\xi_0). \end{aligned} \quad [120.15]$$

In termini dei potenziali complessi, con riguardo alle [119.22] e [120.7], la prima condizione [120.15] diviene per  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] = 2S, \\ \sigma_\xi + i\tau_{\xi\eta} &= \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 0, \end{aligned} \quad [120.16]$$

dove la legge di trasformazione [120.10] permette di scrivere:

$$\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) = c \sinh \bar{\zeta}, \quad \omega'(\zeta) = c \sinh \zeta. \quad [120.17]$$

Assunti i potenziali complessi nella forma:

$$\varphi(z) = c_1 c \sinh \zeta, \quad \psi(z) = c_2 c \operatorname{cosech} \zeta, \quad [120.18]$$

con  $c_1, c_2$  costanti indeterminate, otteniamo:

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= c_1 c \cosh \zeta \frac{d\zeta}{dz} = c_1 \coth \zeta, \\ \varphi''(z) &= -c_1 \operatorname{cosech}^2 \zeta \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{c_1}{c} \operatorname{cosech}^3 \zeta, \\ \psi'(z) &= -c_2 \operatorname{cosech}^2 \zeta \frac{d\zeta}{dz} = -c_2 \operatorname{cosech}^2 \zeta \coth \zeta.\end{aligned}\quad [120. 19]$$

Tali relazioni mostrano come le funzioni scelte [120. 18] verificano le condizioni [119. 25] e [119. 27] mentre dalle [119. 42] risultano nulli la forza ed il momento agenti sopra un percorso contenente il foro ellittico.

Con riguardo alle [120. 19], poichè per  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\coth \zeta \rightarrow 1$ , dalla prima [120. 16] otteniamo il valore  $a = S/2$ , mentre la seconda [120. 16] diviene:

$$\sigma_\xi + i\tau_{\xi\eta} = \coth \bar{\zeta} (c_1 + c_1 \coth \zeta \coth \bar{\zeta} + c_2 \operatorname{cosech} \zeta \operatorname{cosech} \bar{\zeta}). \quad [120. 20]$$

Questa espressione si annulla sul contorno del foro ellittico,  $2\xi_0 = \zeta + \bar{\zeta}$ , se:

$$c_1 [\sinh \zeta \sinh (2\xi_0 - \zeta) + \cosh \zeta \cosh (2\xi_0 - \zeta)] + c_2 = 0, \quad [120. 21]$$

da cui sviluppando:

$$c_2 = -c_1 \cosh 2\xi_0 = -\frac{S}{2} \cosh 2\xi_0. \quad [120. 22]$$

Determinate così le costanti  $c_1, c_2$  dalle condizioni al contorno, otteniamo le tensioni dalla prima [120. 7]:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\Re \varphi'(z) = 2S \coth \zeta \quad [120. 23]$$

e tenendo presente la relazione:

$$\coth \zeta = \frac{\sinh 2\xi - i \sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}, \quad [120. 24]$$

anche:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2S \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}. \quad [120. 25]$$

Sul contorno del foro ellittico  $\xi = \xi_0$  la componente  $\sigma_\xi$  è nulla ed il massimo valore della componente  $\sigma_\eta$  si verifica in corrispondenza dell'asse maggiore dove  $\eta = 0$  e  $\eta = \pi$ :

$$\max \sigma_\eta = 2S \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - 1}, \quad [120.26]$$

ed indicando con  $a$  e  $b$  i semiassi dell'ellisse, cioè per l'equazione [120.13]:

$$a = c \cosh \xi_0, \quad b = c \sinh \xi_0, \quad c_2 = a_2 - b_2, \quad [120.27]$$

risulta in definitiva:

$$\max \sigma_\eta = 2S \frac{2 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0}{\cosh^2 \xi_0 + \sinh^2 \xi_0 - 1} = \frac{2Sa}{b}. \quad [120.28]$$

Questa espressione vale approssimativamente per  $b \ll a$  anche quando il sistema piano è sollecitato da una trazione uniforme nella direzione perpendicolare all'asse maggiore  $a$ ; tale risultato ci servì nel § 70 nello studio dei fondamenti analitici della teoria sulla rottura dovuta a Griffith.

c) *Carattere conforme della trasformazione.*

La relazione  $z = \omega(\zeta)$  istituisce una corrispondenza tra i punti  $\zeta = \xi + i\eta$  del piano complesso  $\zeta$  ed i punti  $z = x_1 + ix_2$  del piano complesso  $z$ . Se la funzione  $\omega(\zeta)$  è analitica in qualche regione  $F$  del piano  $\zeta$ , allora la totalità dei valori  $z$  appartiene a qualche regione  $G$  del piano  $z$ , e si ottiene una *rappresentazione conforme* di  $F$  su  $G$ , come mostra la fig. 137.

Il carattere conforme di tale trasformazione, tale cioè da conservare gli angoli, risulta considerando una curva di  $F$  percorsa dal punto  $\zeta$  e la curva corrispondente di  $G$  percorsa dal punto  $z$ . Considerando un arco  $\Delta\lambda$  della prima curva e l'arco corrispondente  $\Delta l$  della seconda, osserviamo che il rapporto tra le lunghezze degli archi ha lo stesso limite del rapporto tra le lunghezze delle corde rispettive  $\Delta\zeta$  e  $\Delta z$ , cioè:

$$\lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta\zeta} = \frac{dz}{d\zeta} = \omega'(\zeta). \quad [120.29]$$

Ora, poichè la funzione  $z = \omega(\zeta)$  è analitica, la derivata  $\omega'(\zeta)$  ha un valore unico indipendentemente dal modo con il quale  $\Delta\zeta \rightarrow 0$  e di conseguenza gli elementi di arco passanti per  $\zeta$  in ogni direzione subiscono una variazione di lunghezza determinata dal modulo di  $\omega'(\zeta)$  calcolata in  $\zeta$ .

Gli argomenti dei numeri complessi  $\Delta z$  e  $\Delta\zeta$  sono espressi dagli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  formati dalle corde rispettivamente con gli assi  $x_1$  e  $\xi$ . La differenza tra tali angoli è dunque:

$$\alpha - \alpha' \equiv \arg \Delta z - \arg \Delta\zeta = \arg \frac{\Delta z}{\Delta\zeta}, \quad [120.30]$$

e, per  $\Delta\zeta \rightarrow 0$ , le direzioni di  $\Delta z$  e  $\Delta\zeta$  tendono alle tangenti alle curve in  $z$  e  $\zeta$ . L'angolo di rotazione dell'elemento  $\Delta l$  rispetto all'elemento  $\Delta\lambda$  è dunque  $\omega'(\zeta)$ . Ri-

sulta immediatamente che se due curve del piano  $F$  si intersecano sotto un angolo  $\beta$  le curve corrispondenti del piano  $G$  si intersecano sotto un angolo  $b = \beta$ , poichè le tangenti a queste curve sono ruotate dello stesso angolo.

Abbiamo mostrato che i tentativi di soluzione del problema piano sono facilitati dall'impiego dei potenziali complessi attraverso un'opportuna trasformazione conforme, ma il vantaggio decisivo del procedimento risiede nella possibilità di derivare direttamente i potenziali complessi dalle condizioni al contorno. La regione  $G$ , se finita, viene rappresentata conformemente sul cerchio unitario  $|\zeta| \leq 1$  e, se infinita, sul semipiano  $|\zeta| \geq 1$ . Naturalmente la difficoltà risiede nella costruzione effettiva della trasformazione  $z = \omega(\zeta)$  tale da fornire una rappresentazione conforme di una regione di forma assegnata nel piano  $z$  sul cerchio o sul

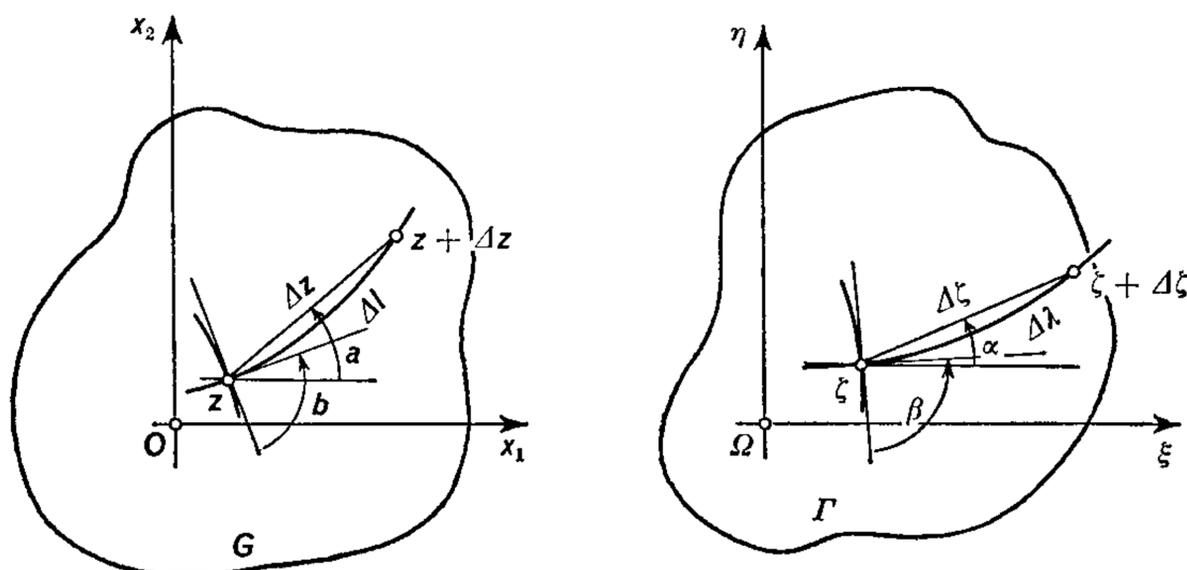


Fig. 137.

semipiano nel piano  $\zeta$ . Esistono alcune formule esplicite per classi particolari di regioni, come, ad esempio, quella che permette di trasformare la regione limitata da un poligono di  $n$  lati sul cerchio di raggio 1:

$$z = A \int_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - \zeta_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - \zeta_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + B, \quad [120.31]$$

dove  $\zeta_i$  sono i punti della circonferenza  $\zeta = 1$  corrispondenti ai vertici del poligono nel piano  $z$ , mentre  $\pi\alpha_i$  esprimono gli angoli interni nei vertici del poligono,  $A$  e  $B$  due costanti opportune. Limitandoci a questi brevissimi cenni rimandiamo il lettore desideroso di un'ampia ed esauriente trattazione all'edizione inglese dell'opera fondamentale di MUSHELIŠVILI<sup>1</sup>, dove sono anche discussi numerosi ed interessanti casi particolari.

## 121. Stati visco-elastici piani.

### a) Relazioni visco-elastiche nel problema piano.

Sinora abbiamo esaminato il problema piano nell'ipotesi di un legame lineare elastico isotropo tra le componenti di deformazione e le

<sup>1</sup> N. I. MUSHELIŠVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Groningen, 1953 (trad. della 3<sup>a</sup> ediz. russa: *Nekotorye osnovnye zadachi matematičeskoj teorii uprugosti*, Moskva, 1949).

componenti di tensione. Quando il legame costitutivo sia di tipo visco-elastico, espresso in generale da operatori visco-elastici, come nelle [52. 9] e [52. 10], tali relazioni nel caso di uno stato piano nella deformazione si riducono immediatamente alle:

$$\begin{aligned} 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{11} &= \mathbf{P} \sigma_{11} - \frac{1}{3K} \mathbf{A} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{22} &= \mathbf{P} \sigma_{22} - \frac{1}{3K} \mathbf{A} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{12} &= \mathbf{P} \tau_{12}, \end{aligned} \quad [121. 1]$$

dove il modulo di dilatazione cubica  $K$  risulta dalla [40. 15] e gli operatori  $\mathbf{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{A}$  dalle [52. 2], [52. 3], [52. 8] rispettivamente.

Dalla condizione  $\varepsilon_{33} = 0$ , che caratterizza il problema piano in discorso, discende l'ulteriore relazione:

$$\mathbf{P} \sigma_{33} = \frac{1}{3K} \mathbf{A} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad [121. 2]$$

e quindi la possibilità di eliminare l'operatore  $\mathbf{A}$  nelle prime due equazioni [121. 1] ed ottenere in definitiva:

$$\begin{aligned} 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{11} &= \mathbf{P} (\sigma_{11} - \sigma_{33}), \\ 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{22} &= \mathbf{P} (\sigma_{22} - \sigma_{33}), \\ 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{12} &= \mathbf{P} \tau_{12}. \end{aligned} \quad [121. 3]$$

Quando il materiale costituente il solido possa essere considerato incompressibile sia nella fase elastica, sia nella fase viscosa, cioè per  $\nu = \frac{1}{2}$ , otteniamo dalla [110. 7]:

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad [121. 4]$$

e quindi sostituendo nelle [121. 3] abbiamo le relazioni costitutive nella forma semplificata:

$$\begin{aligned} 4\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{11} &= \mathbf{P} (\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ 4\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{22} &= \mathbf{P} (\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ 2\mu \mathcal{Q} \varepsilon_{12} &= \mathbf{P} \tau_{12}. \end{aligned} \quad [121. 5]$$

Introducendo la parte isotropa  $\bar{\sigma}$  del tensore di tensione definita nella [24. 2] possiamo scrivere, con riguardo alla [121. 4]:

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad [121. 6]$$

ed esprimere le [121. 5] nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} 2\mu Q \varepsilon_{11} &= P (\sigma_{11} - \bar{\sigma}), \\ 2\mu Q \varepsilon_{22} &= P (\sigma_{22} - \bar{\sigma}), \\ 2\mu Q \varepsilon_{12} &= P \tau_{12}. \end{aligned} \quad [121. 7]$$

Sostituendo allora tali relazioni nelle equazioni indefinite di equilibrio [110. 8] in assenza di forze di massa otteniamo:

$$\begin{aligned} 2\mu Q (\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{21,2}) + P \bar{\sigma}_{,1} &= 0, \\ 2\mu Q (\varepsilon_{12,1} + \varepsilon_{22,2}) + P \bar{\sigma}_{,2} &= 0, \end{aligned} \quad [121. 8]$$

o anche in termini delle derivate di spostamento in base alle seconde tre [110. 2]:

$$\begin{aligned} \mu Q (2u_{1,11} + u_{1,22} + u_{2,12}) + P \bar{\sigma}_{,1} &= 0, \\ \mu Q (2u_{2,22} + u_{2,11} + u_{1,21}) + P \bar{\sigma}_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad [121. 9]$$

La condizione di incompressibilità  $\Delta = 0$  risulta nel caso presente, per  $\varepsilon_{33} = 0$ :

$$\Delta \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = u_{1,1} + u_{2,2} = 0 \quad [121. 10]$$

e permette di semplificare le equazioni [121. 9] nella forma:

$$\begin{aligned} \mu Q \nabla u_1 + P \bar{\sigma}_{,1} &= 0, \\ \mu Q \nabla u_2 + P \bar{\sigma}_{,2} &= 0, \end{aligned} \quad [121. 11]$$

essendo al solito  $\nabla$  l'operatore di Laplace nelle due variabili  $x_1, x_2$ .

Infine, derivando la prima rispetto a  $x_1$ , la seconda rispetto a  $x_2$ , sommando membro a membro e tenendo ancora presente la condizione di incompressibilità [121. 10] otteniamo l'equazione:

$$P \nabla \bar{\sigma} = 0. \quad [121. 12]$$

In alternativa con il procedimento sopra svolto, l'applicazione dell'operatore  $P$  trasforma le equazioni indefinite di equilibrio [110. 8], sempre in assenza di forze di massa, nelle:

$$\begin{aligned} P (\sigma_{11,1} + \tau_{21,2}) &= 0, \\ P (\tau_{12,1} + \sigma_{22,2}) &= 0, \end{aligned} \quad [121. 13]$$

identicamente soddisfatte, in ogni istante  $t$ , da componenti di tensione derivabili da una funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2, t)$  tale che:

$$\sigma_{11} = \Psi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \Psi_{,11}, \quad \tau_{12} = -\Psi_{,12}. \quad [121. 14]$$

Analogamente l'applicazione dell'operatore  $\mathbf{Q}$  trasforma l'equazione di congruenza [110. 14] nella:

$$\mathbf{Q} (\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12}) = 0, \quad [121. 15]$$

o anche, con riguardo al legame costitutivo espresso dalle equazioni [121. 5], nel caso di incompressibilità:

$$\mathbf{P} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})_{,22} + (\sigma_{22} - \sigma_{11})_{,11} - 2\tau_{12,12}] = 0. \quad [121. 16]$$

Infine, in termini delle derivate seconde [121. 14] della funzione di tensione, perveniamo all'equazione:

$$\mathbf{P} [(\Psi_{,22} - \Psi_{,11})_{,22} + (\Psi_{,11} - \Psi_{,22})_{,11} + 4\Psi_{,12,12}] \equiv \mathbf{P} \nabla \nabla \Psi = 0. \quad [121. 17]$$

Le equazioni trovate, nella forma [121. 12] o nella forma [121. 17] rappresentano la formulazione del problema piano per un materiale visco-elastico incompressibile: da esse è possibile ottenere immediatamente le relazioni corrispondenti a operatori visco-elastici particolari.

Ad esempio, nel caso di scorrimento viscoso tipo Maxwell, preso in considerazione nel § 50, cioè per un legame espresso dalla forma [52. 5] degli operatori:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{t_R} + \frac{d}{dt}, \quad [121. 18]$$

con  $t_R = \eta/\mu$ , tempo di rilassamento, otteniamo la [121. 12] nella forma:

$$\nabla \bar{\sigma} + \frac{1}{t_R} \nabla \bar{\sigma} = 0. \quad [121. 19]$$

Introdotta la separazione di variabili:

$$\bar{\sigma}(x_1, x_2, t) = \varphi(t) \bar{\sigma}_0(x_1, x_2, x_3), \quad [121. 20]$$

con  $\varphi(t)$  funzione arbitraria del tempo, abbiamo le due equazioni differenziali:

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{t_R} \varphi(t) = 0, \quad \nabla \bar{\sigma}_0 = 0, \quad [121. 21]$$

e risolvendo l'equazione differenziale temporale per la  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp(-t/t_R), \\ \bar{\sigma}(x_1, x_2, t) &= \bar{\sigma}_0(x_1, x_2) \exp(-t/t_R). \end{aligned} \quad [121. 22]$$

Lo stesso procedimento si applica al problema espresso nella forma [121. 17], in termini cioè della funzione di tensione. Nel caso particolare [121. 18] abbiamo l'equazione differenziale:

$$\nabla \nabla \dot{\Psi} + \frac{1}{t_R} \nabla \nabla \Psi = 0, \quad [121. 23]$$

e con la solita separazione di variabili espressa dalla:

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \varphi(t) \Psi_0(x_1, x_2), \quad [121. 24]$$

otteniamo le due equazioni differenziali:

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{t_R} \varphi(t) = 0, \quad \nabla \nabla \Psi_0(x_1, x_2) = 0. \quad [121. 25]$$

Anche in questo caso la  $\Psi_0(x_1, x_2)$  può essere scelta come soluzione del problema elastico corrispondente e la funzione arbitraria  $\varphi(t)$  determinata dall'equazione differenziale temporale.

b) *Rilassamento della pressione in un problema di forzamento.*

Come applicazione consideriamo il problema del forzamento di un lungo tubo sopra un cilindro circolare: tale esempio si riferisce ad un caso interessante nelle costruzioni meccaniche e navali. Nell'ipotesi di aver eseguito il forzamento con una pressione iniziale  $p_0$  il problema consiste nel determinarne la caduta per rilassamento in modo da poter prevedere un'aderenza sufficiente tra il cilindro cavo esterno ed il nucleo centrale interno, che per semplicità può essere supposto perfettamente rigido.

Una soluzione molto semplice del problema è ottenuta nell'ipotesi di incompressibilità completa, cioè per un valore  $\nu = \frac{1}{2}$  sia nella fase elastica, sia nella fase viscosa. Le tensioni  $\sigma_r^0$ ,  $\sigma_\vartheta^0$ ,  $\sigma_z^0$  all'istante iniziale  $t = 0$  risultano dalla risoluzione in coordinate cilindriche  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  del problema elastico discusso nel § 116 e precisamente dalle [116. 21] scritte per  $\nu = \frac{1}{2}$ , cioè:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\vartheta^0 &= \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z^0 &= \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2}, \end{aligned} \quad [121. 26]$$

associate ad uno spostamento radiale  $u_r^0$  dato dalla prima [116. 20] per  $p_a = p_0$ ,  $p_b = 0$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ :

$$u_r^0 = \frac{p_0 a^2 b^2}{2\mu r (b^2 - a^2)}. \quad [121. 27]$$

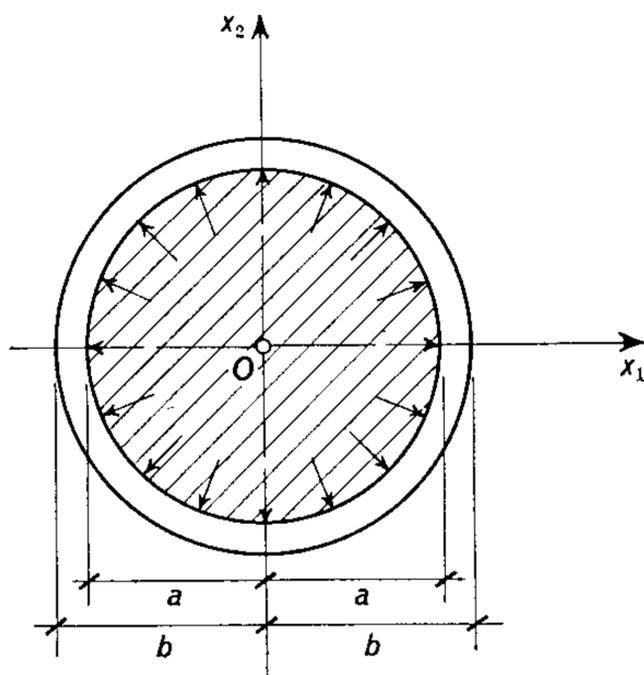


Fig. 138.

Nell'ipotesi che gli operatori visco-elastici siano del tipo [121. 18], le relazioni di legame [121. 5] in coordinate polari, essendo  $\tau_{r\vartheta} = 0$  per ragioni di simmetria, assumono la forma:

$$\begin{aligned} 4\mu \dot{\varepsilon}_r &= \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\vartheta + \frac{1}{t_R} (\sigma_r - \sigma_\vartheta), \\ 4\mu \dot{\varepsilon}_\vartheta &= \dot{\sigma}_\vartheta - \dot{\sigma}_r + \frac{1}{t_R} (\sigma_\vartheta - \sigma_r). \end{aligned} \quad [121. 28]$$

Poichè la supposta rigidità del nucleo centrale impone allo spostamento radiale  $u_r(t)$  nei punti del cilindro di raggio  $a$  di rimanere costantemente uguale a  $u_r^0$ , mentre d'altra parte la lunghezza del cilindro non varia, le tre velocità di deformazione  $\dot{\varepsilon}_r$ ,  $\dot{\varepsilon}_\vartheta$ ,  $\dot{\varepsilon}_z$  devono risultare nulle dappertutto. Perciò le equazioni differenziali nelle tensioni hanno come soluzioni certe espressioni ottenute moltiplicando i loro valori iniziali al tempo  $t = 0$  per la funzione esponenziale  $\exp(-t/t_R)$ . Anche il rilassamento della pressione di forzamento sarà fornito da una legge analoga, per cui:

$$p(t) = p_0 \exp(-t/t_R), \quad [121. 29]$$

e lo stato di tensione all'istante generico  $t$  è ancora fornito dalle [121. 26] pur di sostituire  $p_0$  con  $p(t)$ .

Un'analisi più aderente alla realtà del fenomeno può essere svolta supponendo che il materiale sia compressibile nella fase elastica, con rapporto di contrazione trasversale  $\nu$ , ed incompressibile nella fase viscosa, con rapporto di contrazione trasversale  $\nu = \frac{1}{2}$ .

Le componenti di tensione, radiale  $\sigma_r^0$  e circonferenziale  $\sigma_\vartheta^0$ , al tempo  $t = 0$  sono ancora espresse dalle prime due [121. 26], mentre la componente di tensione assiale  $\sigma_z^0$  e la componente radiale di spostamento  $u_r^0$ , in quanto dipendenti da  $\nu$ , risultano ora:

$$\sigma_z^0 = \nu (\sigma_r^0 - \sigma_\vartheta^0) = \frac{2\nu p_0 a^2}{b^2 - a^2}, \quad [121. 30]$$

$$u_r^0 = \frac{p_0 a^2}{2\mu (b^2 - a^2)} \left[ (1 - 2\nu) r + \frac{b^2}{r} \right].$$

Con riferimento alla definizione [52. 8] dell'operatore  $\mathbf{A}$  e alle espressioni [121. 18] degli operatori  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ , la condizione di deformazione piana [121. 2] si particolarizza nella:

$$\dot{\sigma}_z + \frac{2\mu(1+\nu)}{3\eta} \sigma_z = \nu (\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\vartheta) + \frac{\mu(1+\nu)}{3\eta} (\sigma_r + \sigma_\vartheta), \quad [121. 31]$$

dalla quale si osserva che, essendo  $\sigma_z$  indipendentemente da  $r$ , anche la somma  $\sigma_r + \sigma_\vartheta$  non dipende da tale coordinata.

Specificando gli operatori  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  nella forma [121. 18] le prime due [121. 3] divengono, con riguardo alle [115. 1] e [115. 2]:

$$2\mu \dot{\epsilon}_r = \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_z + \frac{1}{t_R} (\sigma_r - \sigma_z), \quad [121. 32]$$

$$2\mu \dot{\epsilon}_\vartheta = \dot{\sigma}_\vartheta - \dot{\sigma}_z + \frac{1}{t_R} (\sigma_\vartheta - \sigma_z),$$

e la seconda di queste, per  $r = a$ , fornisce la condizione di rilassamento, cioè  $\dot{u}_{r=a} = 0$  in ogni istante  $t$ :

$$\left[ \dot{\sigma}_\vartheta - \dot{\sigma}_z + \frac{1}{t_R} (\sigma_\vartheta - \sigma_z) \right]_{r=a} = 0. \quad [121. 33]$$

Sostituendo le componenti delle velocità di deformazione [121. 32] nell'equazione di congruenza ottenuta dalla [116. 14] in termini di velocità, otteniamo la seguente equazione di congruenza in termini delle componenti di tensione:

$$\frac{d}{dr} (r \dot{\sigma}_\vartheta) - \dot{\sigma}_r + \frac{1}{t_R} \left[ \frac{d(r \sigma_\vartheta)}{dr} - \sigma_r \right], \quad [121. 34]$$

avendo tenuto conto dell'indipendenza di  $\sigma_z$  da  $r$ .

Le equazioni di equilibrio [116. 1] in coordinate polari si riducono alla sola in direzione radiale, valida sia per le componenti di tensione, sia per le loro velocità, cioè:

$$\frac{d(r \sigma_r)}{dr} - \sigma_\vartheta = 0, \quad \frac{d(r \dot{\sigma}_r)}{dr} - \dot{\sigma}_\vartheta = 0. \quad [121. 35]$$

Sommando e sottraendo la prima di queste divisa per  $t_R$  e la seconda dalla [121. 34] abbiamo infine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ \dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\vartheta + \frac{\sigma_r + \sigma_\vartheta}{t_R} \right] &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( \dot{\sigma}_\vartheta - \dot{\sigma}_r + \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_r}{t_R} \right) \right] &= 0, \end{aligned} \quad [121. 36]$$

dalle quali, indicando con  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  due funzioni arbitrarie della variabile temporale, si deduce che:

$$\sigma_r = \varphi_1 - \frac{1}{r^2} \varphi_2, \quad \sigma_\vartheta = \varphi_1 + \frac{1}{r^2} \varphi_2. \quad [121. 37]$$

Le condizioni al contorno,  $\sigma_r = -p(t)$  per  $r = a$  e  $\sigma_r = 0$  per  $r = b$ , risultano così verificate per una scelta di  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  tali che:

$$\sigma_r = \frac{p(t) a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\vartheta = \frac{p(t) a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \quad [121. 38]$$

Sostituendo allora tali espressioni nella condizione [121. 31] ed integrando rispetto a  $t$ , otteniamo la componente assiale  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left[ \nu p(t) + \frac{1 - 2\nu}{2t_R^*} \exp\left(-\frac{t}{t_R^*}\right) \int_0^t p(t) \exp\frac{t}{t_R^*} dt \right], \quad [121. 39]$$

avendo introdotto per brevità la notazione:

$$t_R^* = \frac{3\eta}{2(1+\nu)\mu} = \frac{3t_R}{2(1+\nu)}, \quad [121. 40]$$

dove  $t_R^* = t_R$  per  $\nu = \frac{1}{2}$ .

Analogamente, integrando la condizione di rilassamento [121. 33] e tenendo conto delle condizioni iniziali [121. 26], abbiamo anche:

$$\sigma_z = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ p(t) \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - p_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{b^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{t}{t_R^*}\right) \right]. \quad [121. 41]$$

Il confronto tra le due espressioni trovate per  $\sigma_z$  conduce alla seguente equazione differenziale per la pressione di forzamento  $p(t)$ :

$$\dot{p}(t) + \frac{p}{t_1} = -\frac{p_0 \exp(-t/t_R)}{1/t_R - 1/t_R^*}, \quad [121. 42]$$

avendo introdotto la costante:

$$t_1 = \left[ 1 + (1 - 2\nu) \frac{a^2}{b^2} \right] t_R^*. \quad [121. 43]$$

Infine, l'integrazione della [121. 42] dà luogo alla:

$$p(t) = \frac{p_0 b^2}{b^2 + 3a^2} \left\{ \left[ 1 + (1 - 2\nu) \frac{a^2}{b^2} \right] \exp\left(-\frac{t}{t_R}\right) + 2(1 + \nu) \frac{a^2}{b^2} \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) \right\}, \quad [121. 44]$$

che, per  $\nu = \frac{1}{2}$ , si riduce correttamente alla [121. 29] ottenuta nell'ipotesi di incompressibilità completa.

Lo spostamento radiale risulta nella forma:

$$u_r(t) = \frac{b_0 a^2}{b^2 - a^2} \left\{ \frac{b^2}{r} + (1 - 2\nu) \left[ \frac{a^2}{r} + \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) \right] \right\} \quad [121. 45]$$

Osserviamo dunque che, mentre in un materiale incompressibile tutte e tre le componenti di tensione decrescono con la stessa legge  $\exp(-t/t_R)$ , in un materiale compressibile nella fase elastica il rilassamento della componente assiale di tensione avviene con legge più complessa. Confrontando la trattazione svolta con quella precedente si vede la notevole maggiore difficoltà ora incontrata: tale motivo giustifica pienamente l'ipotesi di incompressibilità completa che, di regola, viene introdotta nell'affrontare problemi di visco-elasticità.

## 122. Stati termo-elastici piani.

In uno stato piano nella deformazione l'interazione di energia termica con l'energia di deformazione elastica conduce alla formulazione di un problema termo-elastico retto da equazioni derivabili dalle [54. 3], cioè:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] + \alpha T, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] + \alpha T, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{12}, \end{aligned} \quad [122. 1]$$

mentre l'ipotesi di deformazione piana,  $\varepsilon_{33} = 0$ , permette di ottenere la seguente condizione:

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2\mu (1 + \nu) \alpha T, \quad [122. 2]$$

avendo introdotto il rapporto  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ . Sostituendo il valore di  $\sigma_{33}$  fornito da questa relazione nelle prime due [122. 1] otteniamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu) \sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] + (1 + \nu) \alpha T, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu) \sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] + (1 + \nu) \alpha T, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{12}. \end{aligned} \quad [122. 3]$$

Una ulteriore relazione, la [54.17], deve essere tenuta presente per la variabile anelastica  $T$ , allo scopo di considerare il rilassamento delle fluttuazioni di temperatura dovuto all'influenza della dilatazione cubica sulla temperatura stessa. Nel presente caso piano, per  $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$  e  $T$  indipendente da  $x_3$ , tale relazione diviene:

$$k_T \nabla T = C_V \dot{T} + k_T (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}), \quad [122.4]$$

essendo  $\nabla$  l'operatore di Laplace nelle due variabili  $x_1$  e  $x_2$ ,  $k_T$  il coefficiente di conduttività termica e  $C_V$  il calore specifico a volume costante.

Supponendo il problema termo-elastico disaccoppiato si trascurerà l'ultimo termine della [122.4]: in tale ipotesi i due fenomeni, elastico e termico, risultano indipendenti. È la situazione normale quando la distribuzione della temperatura nel sistema elastico sia dovuta essenzialmente al calore fornito da sorgenti esterne e possa quindi essere determinata con approssimazione sufficiente per gli scopi concreti dalla semplice legge di conduzione del calore:

$$k_T \nabla T = C_V \dot{T}. \quad [122.5]$$

Con lo stesso procedimento seguito nella deduzione della [110.18] sostituiamo le [122.3] nella equazione di congruenza [110.14] dello stato piano di deformazione e teniamo presenti le equazioni indefinite di equilibrio [110.8] in assenza di forze di massa. Risulta così l'equazione:

$$(1 - \nu) \nabla (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2\mu(1 + \nu) \alpha \nabla T = 0, \quad [122.6]$$

e dal confronto con la [110.18] ne consegue come la variazione di temperatura possa essere assimilata a forze di volume tali che:

$$\text{Div } \mathbf{p} \equiv p_{1,1} + p_{2,2} = \frac{2\mu(1 + \nu)}{1 - \nu} \nabla T. \quad [122.7]$$

Poichè le equazioni di equilibrio risultano identicamente soddisfatte se le componenti di tensione derivano dalla funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  in base alle:

$$\sigma_{11} = \Psi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \Psi_{,11}, \quad \tau_{12} = -\Psi_{,12}, \quad [122.8]$$

anche la [122.6] può essere espressa in termini della  $\Psi(x_1, x_2)$  e diviene in tal caso:

$$\nabla \nabla \Psi = -\frac{2\mu(1 + \nu)}{1 - \nu} \alpha \nabla T. \quad [122.9]$$

Determinata allora la distribuzione della temperatura nel sistema piano per mezzo della [122. 5] e noto quindi  $\nabla \nabla \Psi$ , il problema termoelastico è ridotto alla determinazione della funzione di tensione nel corrispondente problema elastico al contorno.

a) *Distribuzioni simmetriche di temperatura.*

In un lungo cilindro circolare, se la distribuzione della temperatura è simmetrica rispetto al centro e dipende solo dal raggio, la trasformazione delle relazioni termoelastiche [122. 5] in coordinate polari  $r, \vartheta$  conduce alle:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu) \sigma_r - \nu \sigma_\vartheta] + (1 + \nu) \alpha T, \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu) \sigma_\vartheta - \nu \sigma_r] + (1 + \nu) \alpha T,\end{aligned}\tag{122. 10}$$

essendo evidentemente  $\varepsilon_{r\vartheta} = 0$ .

Esprimiamo le [122. 10] rispetto alle componenti di tensione  $\sigma_r, \sigma_\vartheta$ , cioè:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [(1 - \nu) \varepsilon_r + \nu \varepsilon_\vartheta - (1 + \nu) \alpha T], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [(1 - \nu) \varepsilon_\vartheta + \nu \varepsilon_r - (1 + \nu) \alpha T],\end{aligned}\tag{122. 11}$$

e, tenendo presenti le relazioni [116. 13], cioè:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_r}{r},\tag{122. 12}$$

sostituiamo le [122. 11] nella equazione di equilibrio [116. 1], in modo da ricondurci all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{(1 + \nu) \alpha}{1 - \nu} \frac{dT}{dr},\tag{122. 13}$$

Questa può anche essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(r u_r)}{dr} \right] = \frac{(1 + \nu) \alpha}{1 - \nu} \frac{dT}{dr},\tag{122. 14}$$

ed integrata:

$$u_r(r) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \int_0^r T r dr + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}.\tag{122. 15}$$

Dalle [122. 12] possiamo così determinare le componenti di deformazione:

$$\varepsilon_r = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\alpha}{r^2} \int_0^r T r dr - \alpha T \right] + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}, \quad [122. 16]$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha}{r^2} \int_0^r T r dr + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2}.$$

Infine dalle relazioni [122. 11] otteniamo le componenti di tensione nella forma:

$$\sigma_r = -\frac{2\mu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\alpha}{r^2} \int_0^r T r dr + k_1 - \frac{k_2}{r^2}, \quad [122. 17]$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{2\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu} \left( T - \frac{1}{r^2} \right) \int_0^r T r dr + k_1 - \frac{k_2}{r^2},$$

dove per semplicità di scrittura le costanti elastiche sono state conglobate in  $k_1$  e  $k_2$ . La componente assiale di tensione  $\sigma_z = \sigma_{33}$ , risulta dalla [122. 2]:

$$\sigma_z = -\frac{2\mu(1+\nu)\alpha T}{1-\nu} + 2\nu k_1. \quad [122. 18]$$

Indicato con  $a$  il raggio del cilindro e definita la temperatura media  $T_m$  sull'area trasversale  $A$  come:

$$T_m \equiv \frac{1}{\pi a^2} \int_A T r d\vartheta dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a T r dr, \quad [122. 19]$$

dalle condizioni al contorno:  $\sigma_r = \sigma_\vartheta$  per  $r = 0$  e  $\sigma_r = 0$  per  $r = a$ , otteniamo i valori delle costanti:

$$k_1 = \frac{2\mu(1+\nu)}{2(1-\nu)} T_m, \quad k_2 = 0. \quad [122. 20]$$

Le componenti di tensione possono essere espresse allora nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu} \left[ T_m - \frac{2}{r^2} \int_0^r T r dr \right], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu} \left[ T_m - 2T + \frac{2}{r^2} \int_0^r T r dr \right], \\ \sigma_z &= \frac{2\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu} [T_m - T], \end{aligned} \quad [122. 21]$$

ed assumono i seguenti valori, rispettivamente nell'origine  $r = 0$ :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2} \sigma_z = \frac{\mu (1 + \nu) \alpha}{1 - \nu} (T_m - T_0), \quad [122. 22]$$

in quanto il termine contenente l'integrale rappresenta il valore medio di  $T$  sul cerchio generico di raggio  $r$ , e sul contorno esterno  $r = a$ :

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta \equiv \sigma_z = \frac{2\mu (1 + \nu) \alpha}{1 - \nu} (T_m - T_a), \quad [122. 23]$$

dove  $2\mu (1 + \nu) = E$  rappresenta il modulo di elasticità normale.

b) *Distribuzioni stazionarie di temperatura.*

In un sistema piano soggetto a una variazione non uniforme della temperatura esistono, in genere, uno stato di deformazione ed uno stato di tensione; può succedere tuttavia che, in situazioni particolari, lo stato di tensione risulti nullo. Per discutere tale possibilità, posto  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \tau_{12} = 0$  nelle [122. 3], otteniamo le componenti di deformazione nella forma:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = (1 + \nu) \alpha T, \quad \varepsilon_{12} = 0. \quad [122. 24]$$

Ma tali componenti devono ancora soddisfare alla condizione di congruenza [110. 14], per cui:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} \equiv (1 + \nu) \alpha \nabla T = 0. \quad [122. 25]$$

La temperatura è dunque una funzione *armonica piana*, o anche, con riguardo alla legge di conduzione del calore [122. 5] ne consegue  $\dot{T} = 0$ , cioè la temperatura deve risultare stazionaria.

Esprimendo le componenti di deformazione in termini delle derivate di spostamento secondo le ultime tre [110. 2] abbiamo pure:

$$u_{1,1} = u_{2,2} \equiv (1 + \nu) \alpha T, \quad u_{1,2} = -u_{2,1}. \quad [122. 26]$$

Tali condizioni sono del tipo di Cauchy-Riemann [79. 10] e ci assicurano che le funzioni  $u_1, u_2$  sono *armoniche coniugate*, da cui:

$$\nabla u_1 = 0, \quad \nabla u_2 = 0. \quad [122. 27]$$

A titolo di esempio consideriamo un campo stazionario di temperatura agente attraverso il semipiano di fig. 139; impiegando coor-

dinate polari  $r, \vartheta$  supponiamo che la metà di sinistra ( $\vartheta = 0$ ) sia mantenuta alla temperatura  $T = 0$  e la metà di destra ( $\vartheta = \pi$ ) alla temperatura  $T_1$ . Un raggio generico uscente da  $O$  sarà definito da un angolo  $\vartheta$  e sarà soggetto ad una temperatura  $T = T_1\vartheta/\pi$ : le isoterme sono perciò rappresentate dal fascio di raggi di centro  $O$ .

Poichè la temperatura è stazionaria, con riguardo alle [122. 10] abbiamo:

$$\varepsilon_r \equiv \varepsilon_\vartheta = (1 + \nu) \alpha T, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = 0, \quad [122. 28]$$

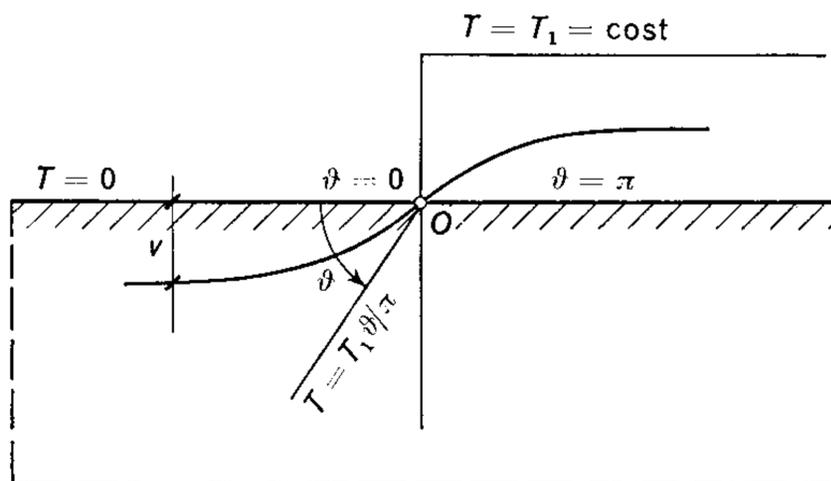


Fig. 139.

o anche in termini di spostamenti secondo le [115. 1] e [115. 2]:

$$\begin{aligned} u_{r,r} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} u_{\vartheta,\vartheta} = & [122. 29] \\ &= \frac{1}{\pi} (1 + \nu) \alpha T_1 \vartheta \frac{1}{r} u_{r,\vartheta} + n_{\vartheta,r} - \frac{1}{r} u_\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Integrando otteniamo a meno di un moto rigido:

$$u_r = (1 + \nu) \alpha T_1 \frac{r \vartheta}{\pi}, \quad u_\vartheta = (1 + \nu) \alpha T_1 \frac{r}{\pi} \ln \frac{a}{r}, \quad [122. 30]$$

dove  $a$  esprime una lunghezza: osserviamo perciò che per  $0 < r < a$  la superficie  $\vartheta = 0$  si abbassa mentre la superficie  $\vartheta = \pi$  si innalza, senza che tale distorsione sia accompagnata da tensioni.

Per un sistema piano a connessione semplice possiamo dunque concludere che per distribuzioni stazionarie di temperatura le componenti di tensione risultano identicamente nulle, mentre la tensione assiale [122. 2] assume il valore:

$$\sigma_z = -2\mu (1 + \nu) \alpha T = -E \alpha T. \quad [122. 31]$$

Al contrario, per un sistema piano a connessione multipla è necessaria una indagine ulteriore: questa conduce ad una notevole analogia formale tra lo stato termoelastico di tensione e le cosiddette distorsioni di VOLTERRA<sup>1</sup>.

### 123. Stati elasto-plastici piani.

Nell'ipotesi che il legame costitutivo del materiale sia rappresentato da relazioni di tipo elasto-plastico tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione, possiamo definire uno *stato elasto-plastico piano nella deformazione* se le condizioni [110. 1] risultano valide, oltre lo snervamento, anche per gli incrementi della deformazione o per le loro velocità, cioè:

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{33} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{11,3} = \dot{\varepsilon}_{22,3} = \dot{\varepsilon}_{12,3} = 0. \quad [123. 1]$$

A tale stato possiamo applicare le considerazioni generali discusse nel Cap. VI ed ottenere la forma assunta nel presente caso particolare dalla condizione di plasticità e dalle relazioni di legame.

#### a) Condizione di plasticità.

Il raggiungimento del limite di plasticità per uno stato piano nella deformazione può essere previsto dalle varie ipotesi esaminate a suo tempo.

Ad esempio, il criterio [62. 1] di Tresca:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq k, \quad [123. 2]$$

con riguardo alle espressioni [113. 2] delle tensioni principali nel caso piano, assume la forma:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \tau_{12}^2 \leq 4k^2. \quad [123. 3]$$

Possiamo dunque ricondurre tale situazione limite a quella di uno stato monoassiale ugualmente pericoloso attraverso il concetto di tensione ideale equivalente introdotto nel § 76. Poichè il criterio prevede lo stesso limite di snervamento del materiale in semplice trazione ed in semplice compressione,  $\sigma_S = 2k$ , le due tensioni ideali coincidono ed il non superamento dello stato limite di plasticità rimane stabilito perciò dall'unica condizione:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} \leq \sigma_S. \quad [123. 4]$$

<sup>1</sup> V. VOLTERRA, *Ann. École Norm. Sup.* (3), **24**, 401 (1907).

Il criterio di plasticità di Mises, nella forma [62. 10], per  $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$  diviene:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\tau_{12}^2 \leq 6k^2, \quad [123. 5]$$

dove  $k = \sigma_S/\sqrt{3}$ , e con riguardo alla condizione di deformazione piana  $\varepsilon_{33} = 0$  od alla condizione equivalente [110. 7], cioè  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , anche:

$$(1 - \nu + \nu^2)(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 3(\sigma_{11}\sigma_{22} - \tau_{12}^2) \leq 3k^2. \quad [123. 6]$$

In caso di incompressibilità del materiale il rapporto di contrazione trasversale assume il valore  $\nu = \frac{1}{2}$ , per cui:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2 \leq k^2, \quad [123. 7]$$

ed il criterio coincide formalmente con quello di Tresca, a parte il diverso valore del secondo membro.

Otteniamo quindi in tal caso l'espressione:

$$\sigma_{id} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} \leq \sigma_S, \quad [123. 8]$$

per la tensione ideale di uno stato monoassiale ugualmente pericoloso nel pervenire ad una situazione limite di snervamento.

#### b) Relazioni elasto-plastiche.

Il legame costitutivo in fase elasto-plastica del tipo [64. 2] di Prandtl-Reuss assume la forma particolare in termini dei deviatori di tensione e di deformazione:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \frac{\dot{s}_{11}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{11}, & \dot{e}_{13} &= \frac{\dot{s}_{13}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{13} = 0, \\ \dot{e}_{22} &= \frac{\dot{s}_{22}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{22}, & \dot{e}_{23} &= \frac{\dot{s}_{23}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{23} = 0, \\ \dot{e}_{12} &= \frac{\dot{s}_{12}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{12}, & \dot{e}_{33} &= \frac{\dot{s}_{33}}{2\mu} + \dot{\lambda}s_{33} = 0. \end{aligned} \quad [123. 9]$$

Esse si riferiscono ad un materiale perfettamente plastico, cioè in assenza di incrudimento, e sono naturalmente associate alla condizione di plasticità di Mises, qualora si voglia rispettare l'ipotesi fondamentale di un potenziale plastico  $P(\sigma_{ij})$  coincidente con la funzione di snervamento  $S(\sigma_{ij})$ . In alcuni problemi si preferisce per semplicità, come

vedremo in *c*), associare invece alle [123. 9] la condizione di plasticità di Tresca: è opportuno rilevare che in tal caso le equazioni di Prandtl-Reuss non rappresentano più un aspetto particolare delle relazioni generali [63. 13].

Le [123. 9] esprimono il legame costitutivo del materiale nella fase plastica, mentre nella zona ancora elastica o dove si hanno ritorni elastici da uno stato plastico, sussistono relazioni di pura elasticità, ottenute dalle [123. 9] per  $\dot{\lambda} = 0$ .

Nella regione elastica si dovrà tener conto anche della condizione di compressibilità [63. 3] per le parti isotrope  $\bar{\varepsilon}$  e  $\bar{\sigma}$  dei tensori di deformazione e di tensione. Nel caso presente, con riguardo alla definizione [40. 15] del modulo di dilatazione cubica  $K$ , tale condizione diviene:

$$\ddot{\varepsilon}_e \equiv \frac{1}{3} (\dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{22}^e) = \frac{1 - 2\nu}{E} \ddot{\sigma} \equiv \frac{1 - 2\nu}{E} (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33}). \quad [123. 10]$$

Possiamo così esprimere le equazioni di Prandtl-Reuss in termini dei tensori di deformazione e di tensione anzichè dei deviatori corrispondenti. Per la parte elastica della deformazione, rappresentata dai primi termini al secondo membro delle [123. 9], abbiamo con riguardo alla [123. 10]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^e &= \bar{\varepsilon}_e + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}) = \frac{1 - 2\nu}{E} \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}), \\ \dot{\varepsilon}_{22}^e &= \bar{\varepsilon}_e + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}) = \frac{1 - 2\nu}{E} \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}), \\ \dot{\varepsilon}_{33}^e &= \bar{\varepsilon}_e + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}) = \frac{1 - 2\nu}{E} \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}), \end{aligned} \quad [123. 11]$$

da cui, ricordando che  $E = 2\mu(1 + \nu)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^e &= \frac{1}{2\mu} \left( \dot{\sigma}_{11} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \bar{\sigma} \right) = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{11} - \nu (\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})], \\ \dot{\varepsilon}_{22}^e &= \frac{1}{2\mu} \left( \dot{\sigma}_{22} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \bar{\sigma} \right) = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{22} - \nu (\dot{\sigma}_{33} + \dot{\sigma}_{11})], \\ \dot{\varepsilon}_{33}^e &= \frac{1}{2\mu} \left( \dot{\sigma}_{33} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \bar{\sigma} \right) = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{33} - \nu (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22})]. \end{aligned} \quad [123. 12]$$

Per la parte plastica della deformazione, rappresentata dai secondi termini al secondo membro delle [123. 9] e supposta incompressibile,

per  $\bar{\dot{\varepsilon}}_p = 0$  abbiamo la coincidenza tra le componenti della velocità del tensore di deformazione e le componenti della velocità del deviatore di deformazione, cioè:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11}^p &\equiv \dot{e}_{11}^p = \dot{\lambda} (\sigma_{11} - \bar{\sigma}) = \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}), \\ \dot{\varepsilon}_{22}^p &\equiv \dot{e}_{22}^p = \dot{\lambda} (\sigma_{22} - \bar{\sigma}) = \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}), \\ \dot{\varepsilon}_{33}^p &\equiv \dot{e}_{33}^p = \dot{\lambda} (\sigma_{33} - \bar{\sigma}) = \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}).\end{aligned}\quad [123. 13]$$

Sovrapponendo le quote elastica [123. 12] e plastica [123. 13] della velocità di deformazione e tenendo presente la condizione di deformazione piana  $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}^e + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0$ , abbiamo le equazioni di Prandtl-Reuss per le componenti con indici uguali nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{11} - \nu (\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})] + \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}), \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{22} - \nu (\dot{\sigma}_{33} + \dot{\sigma}_{11})] + \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}), \\ 0 &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{33} - \nu (\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22})] + \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}),\end{aligned}\quad [123. 14]$$

mentre le equazioni per le componenti con indici distinti conservano lo stesso aspetto anche in termini dei tensori di deformazione e di tensione in quanto le componenti miste di questi coincidono con le componenti miste dei deviatori corrispondenti.

### c) Soluzione dei problemi elasto-plastici piani.

La risoluzione completa di un problema elasto-plastico richiede la determinazione dello stato di tensione e di deformazione sia nella zona elastica sia nella zona plastica. Mentre nella prima la tensione è collegata direttamente con la deformazione attraverso le relazioni di elasticità, nella seconda non esiste una corrispondenza univoca ed un processo di deformazione plastica deve essere inteso come una successione di incrementi della deformazione stessa il cui stato finale dipende dall'intero percorso seguito e quindi in definitiva dal programma di carico. Le soluzioni ottenute nella zona elastica e nella zona plastica devono verificare certe condizioni di continuità per le tensioni e per gli spostamenti lungo la frontiera di separazione tra le

due zone: in generale tale frontiera non è nota *a priori* e rappresenta una incognita del problema. Le difficoltà incontrate nella risoluzione di un problema elasto-plastico sono quindi estremamente gravi e solo in pochi problemi particolari si riesce a fornire una soluzione in modo abbastanza agevole.

A titolo di esempio consideriamo il caso molto semplice di un solido prismatico a sezione rettangolare soggetto a compressione nella direzione  $x_2$  mediante due piastre rigide in condizioni di deforma-

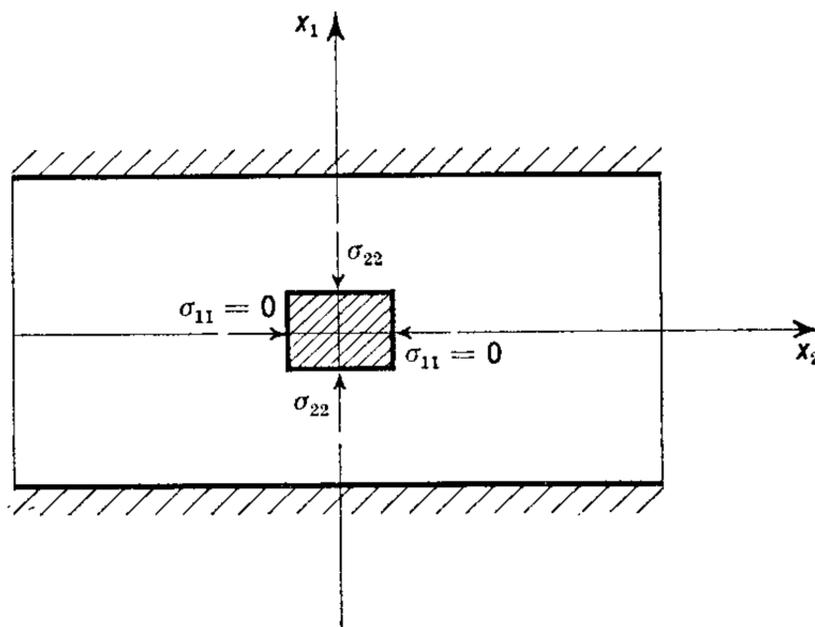


Fig. 140.

zione piana, essendone impedita la deformazione secondo la direzione  $x_3$  normale al piano della fig. 140. Ricordando la soluzione di tale problema ottenuta nel § 114 in fase puramente elastica e di cui alla [114. 3], nel caso attuale lo stato di tensione sarà caratterizzato dalle componenti  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33} = \nu \sigma_{22}$ , essendo identicamente  $\sigma_{11} = \tau_{12} = 0$ . Le direzioni  $x_1, x_2, x_3$  sono dunque principali per lo stato di tensione e precisamente:  $\sigma_{11} = 0$  risulta la tensione principale max,  $\sigma_{33}$  quella intermedia e  $\sigma_{22}$  la minima trattandosi di una compressione.

Adottando la condizione di Mises [123. 5] lo snervamento del materiale sarà raggiunto quando:

$$\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} = 3k^2, \quad [123. 15]$$

o anche, dalla [123. 6]:

$$(1 - \nu + \nu^2) \sigma_{22}^2 = \sigma_S^2. \quad [123. 16]$$

La tensione e la deformazione corrispondenti allo snervamento sono dunque:

$$\sigma_{22}^S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, \quad \varepsilon_{22}^S = \frac{(1 - \nu) \sigma_S}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \quad [123. 17]$$

dove  $\sigma_{22}^S$  risulterà leggermente superiore alla tensione di snervamento  $\sigma_S$  per semplice compressione: per  $\nu = 0,3$  abbiamo  $\sigma_{22}^S = 1,127 \sigma_S$ .

Posto  $\sigma_{11} = 0$  nelle [123. 14] si elimini il parametro  $\lambda$  tra la seconda e la terza di queste equazioni in modo da ottenere:

$$E \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\sigma}_{22} - \nu \dot{\sigma}_{33} - \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2\sigma_{33} - \sigma_{22}} (\dot{\sigma}_{33} - \nu \dot{\sigma}_{22}). \quad [123. 18]$$

Differenziando la condizione di plasticità [123. 15] abbiamo una equazione:

$$(2\sigma_{22} - \sigma_{33}) \dot{\sigma}_{22} + (2\sigma_{33} - \sigma_{22}) \dot{\sigma}_{33} = 0, \quad [123. 19]$$

dalla quale sarà possibile ricavare  $\dot{\sigma}_{22}$  e sostituire tale valore nella [123. 18]:

$$E \dot{\varepsilon}_{22} = - \left( \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2\sigma_{22} - \sigma_{33}} + \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2\sigma_{33} - \sigma_{22}} \right) \dot{\sigma}_{33} - 2\nu \dot{\sigma}_{33}. \quad [123. 20]$$

Questa relazione, con riferimento alla condizione di plasticità [123. 15] può anche essere scritta nel modo seguente:

$$E \varepsilon_{22} = \left[ 1 - 2\nu - \frac{9k^2}{(2\sigma_{22} - \sigma_{33})(2\sigma_{33} - \sigma_{22})} \right] \dot{\sigma}_{33}, \quad [123. 21]$$

da cui integrando otteniamo la componente di deformazione secondo l'asse  $x_2$  a meno di una costante:

$$E \varepsilon_{22} = (1 - 2\nu) \sigma_{33} - \frac{3k}{4} \ln \frac{2k - \sigma_{22}}{2k + \sigma_{33}}. \quad [123. 22]$$

Con l'aumentare di  $\varepsilon_{22}$  la tensione si avvicina al valore  $\sigma_{33} = -2k$ , che sostituito nella condizione di plasticità [123. 15] fornisce  $\sigma_{33} = \sigma_{22}/2$ .

Il problema discusso fu affrontato per via sperimentale da BRIDGMAN<sup>1</sup> su campioni di acciaio a medio contenuto di carbonio. Tenendo conto della difficoltà di realizzare un dispositivo sperimentale capace di impedire la deformazione secondo l'asse  $x_3$ , alcune conclusioni appaiono in accordo con la teoria, come, ad esempio, il risultato riguardante la tensione di snervamento  $\sigma_{22}^S$ , che risultò di circa il 15% più elevata del valore corrispondente ad uno stato monoassiale di semplice compressione.

<sup>1</sup> P. W. BRIDGMAN, *Journ. Appl. Phys.*, **17**, 225 (1946).

### 124. Stati elasto-plastici piani simmetrici.

Quando esiste una simmetria del sistema piano rispetto ad un centro  $O$ , il problema si semplifica con l'impiego di coordinate polari. Le tensioni principali sono espresse in tal caso dalle componenti circonferenziale  $\sigma_\theta$ , radiale  $\sigma_r$  ed assiale  $\sigma_z = \sigma_{33}$ .

Nella ipotesi che quest'ultima si mantenga intermedia alle altre due, per:

$$\sigma_I = \sigma_\theta, \quad \sigma_{II} = \sigma_z, \quad \sigma_{III} = \sigma_r, \quad [124. 1]$$

il criterio di Tresca [123. 2] diviene:

$$\sigma_\theta - \sigma_r \leq 2k. \quad [124. 2]$$

Il criterio di Mises [123. 6], in termini delle tensioni principali, assume l'aspetto:

$$(1 - \nu + \nu^2) (\sigma_\theta + \sigma_r)^2 - 3\sigma_r\sigma_\theta \leq 3k, \quad [124. 3]$$

e per un materiale incompressibile, cioè per  $\nu = \frac{1}{2}$ , si riduce formalmente al precedente:

$$\sigma_\theta - \sigma_r \leq 2k \quad [124. 4]$$

Ad esempio, per un cilindro cavo soggetto a pressione interna  $p(t)$  crescente monotonicamente con il tempo  $t$ , quando il materiale si trova ancora totalmente in fase elastica le tensioni principali sono date dalle [116. 21], precisamente:

$$\sigma_r = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_z = \frac{2\nu p a^2}{b^2 - a^2}. \quad [124. 5]$$

Il criterio di Tresca assume in tal caso la forma:

$$\frac{2 p a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \leq 2k^2. \quad [124. 6]$$

Poichè tale espressione diviene massima in corrispondenza del minimo di  $r$ , una deformazione plastica incipiente si verificherà sulla superficie cilindrica interna di raggio  $r = a$  non appena la pressione  $p(t)$  vi raggiunga il valore limite:

$$p_S = \frac{\sigma_S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right). \quad [124. 7]$$

Nell'ipotesi di incompressibilità del materiale anche in fase elastica il criterio di Mises fornisce una pressione  $2/\sqrt{3}$  volte maggiore della precedente.

Quando la pressione interna supera il valore limite la plasticizzazione procede dal contorno interno estendendosi a zone più esterne: data la simmetria la superficie di separazione è un cilindro di raggio  $\varrho$  (fig. 141) variabile con il progredire dell'espansione. Poichè sulla frontiera elasto-plastica il materiale si trova all'inizio dello snervamento, la condi-

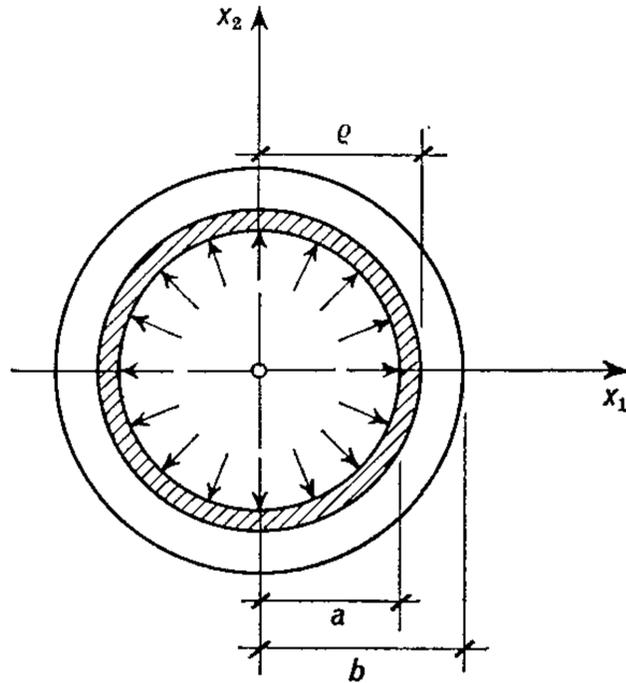


Fig. 141.

zione di plasticità fornisce, per  $r = \varrho$ , il valore della pressione  $p_e$  corrispondente a tale situazione. Adottando ad esempio il criterio di Tresca [124. 6] otteniamo così:

$$p_e = \frac{\varrho^2 \sigma_S (b^2 - a^2)}{2 a^2 b^2}, \quad [124. 8]$$

e quindi dalle [124. 5], per  $p = p_e$ , i valori delle componenti di tensione sulla frontiera elasto-plastica:

$$\sigma_r^{(\varrho)} = \frac{\sigma_S}{2} \left( \frac{\varrho^2}{b^2} - 1 \right), \quad \sigma_\vartheta^{(\varrho)} = \frac{\sigma_S}{2} \left( \frac{\varrho^2}{b^2} + 1 \right), \quad \sigma_z^{(\varrho)} = \frac{\sigma_S \varrho^2}{b^2}. \quad [124. 9]$$

Nella regione plastica  $a \leq r \leq \varrho$  le componenti di tensione dipendono sia dalla posizione della particella considerata, individuata dal raggio  $r$ , sia dalla posizione della frontiera elasto-plastica, individuata dal raggio  $\varrho$ , cioè:

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \varrho), \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(r, \varrho), \quad \sigma_z = \sigma_z(r, \varrho), \quad [124. 10]$$

ed il parametro  $\varrho$  esprime il processo di aumento della pressione durante il programma di carico e può essere assunto quindi come variabile indipendente in luogo del tempo  $t$ .

In tale regione devono quindi sussistere sia l'equazione di equilibrio [116. 1] cioè:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \quad [124. 11]$$

sia la condizione di plasticità [124. 2] cioè:

$$\sigma_\vartheta - \sigma_r = \sigma_S. \quad [124. 12]$$

Otteniamo integrando con riguardo al fatto che  $\sigma_r$  e  $\sigma_\vartheta$  dipendono anche da  $\varrho$ :

$$\sigma_r = \sigma_S \ln r + f(\varrho), \quad \sigma_\vartheta = \sigma_S (1 + \ln r) + f(\varrho), \quad [124. 13]$$

essendo  $f(\varrho)$  una funzione arbitraria della sola  $\varrho$  determinabile dalla condizione che sulla frontiera elasto-plastica le [124. 13] devono assumere i valori [124. 9].

Abbiamo quindi per  $r = \varrho$ :

$$\frac{\sigma_S}{2} \left( \frac{\varrho^2}{b^2} - 1 \right) = \sigma_S \ln \varrho + f(\varrho), \quad [124. 14]$$

da cui le espressioni delle tensioni:

$$\sigma_r = \sigma_S \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varrho^2}{b^2} - 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{r} \right], \quad \sigma_\vartheta = \sigma_S \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varrho^2}{b^2} + 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{r} \right], \quad [124. 15]$$

mentre il valore della pressione risulta:

$$p = -(\sigma_r)_{r=a} = \sigma_S \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varrho^2}{b^2} \right) + \ln \frac{\varrho}{a} \right]. \quad [124. 16]$$

Utilizzando quest'ultima relazione possiamo eliminare l'incognita  $\varrho$  dalle [124. 15] in modo da avere in definitiva:

$$\sigma_r = \sigma_S \ln \frac{r}{a} - p, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_S \left( 1 + \ln \frac{r}{a} \right) - p. \quad [124. 17]$$

La determinazione delle componenti di tensione  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\vartheta$  è stata dunque ottenuta basandosi esclusivamente su considerazioni di puro equilibrio e, naturalmente, sulla condizione di plasticità: parleremo in tal caso di un problema *staticamente determinato* in quanto non è

stato necessario prendere in esame la deformazione. L'analisi precedente è stata svolta trascurando ogni influenza della deformazione sullo stato di tensione: infatti nelle espressioni delle componenti di tensione  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  il raggio interno  $a$  appare coincidere con il suo valore iniziale. Tale ipotesi restringe perciò la validità dei risultati ottenuti al campo delle piccole deformazioni, cioè con buona approssimazione al caso di una plasticizzazione parziale del cilindro cavo, quando la

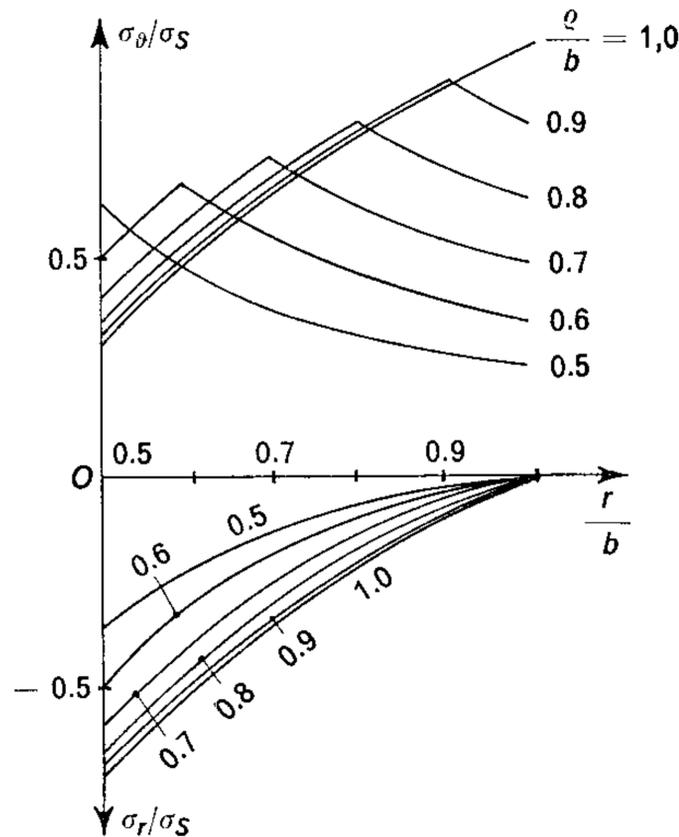


Fig. 142.

deformazione plastica stessa è contenuta dalla parte esterna ancora in fase elastica.

Trascurando dunque la variazione del raggio  $a$  le tensioni  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  sono determinate dalle [124. 15] in funzione del parametro  $\rho$ : la loro distribuzione per un cilindro cavo con rapporto  $b/a = 2$  è indicata nella fig. 142.

La determinazione della componente assiale di tensione  $\sigma_z$  e, naturalmente, dello spostamento radiale  $u_r$ , richiede l'impiego delle relazioni tensioni-deformazioni: si ottengono in definitiva tre equazioni differenziali non lineari la cui integrazione richiede procedimenti di calcolo numerico. Senza insistere ulteriormente rimandiamo per maggiori particolari ad opere specifiche<sup>1</sup> sull'argomento dove si troveranno ampiamente discussi tali aspetti del problema.

<sup>1</sup> R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, p. 106-114, Oxford (1950); W. PRAGER, PH. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, p. 95-121, New York (1951).

### 125. Stati rigido-plastici piani.

Abbiamo visto nei precedenti paragrafi come la risoluzione dei problemi elasto-plastici si presenti ardua anche in casi piuttosto semplici nei quali è possibile prevedere la forma della superficie di separazione tra la regione elastica e la regione plastica: la non-linearità delle equazioni risolutive richiede quasi sempre l'impiego di procedimenti numerici. Alcune difficoltà possono essere evitate introducendo una semplificazione del problema, precisamente l'ipotesi di un comportamento rigido-plastico del materiale: siffatta astrazione corrisponde a considerare trascurabile la parte elastica della deformazione rispetto alla parte plastica, come se le costanti elastiche avessero un valore infinito.

Naturalmente la distribuzione delle tensioni determinata in tal modo è soltanto approssimata ed assolutamente inaccettabile in situazioni nelle quali la regione elastica eserciti un'azione determinante sulla regione plastica, come nell'esempio del cilindro cavo soggetto a pressione interna del § 124. Esistono però molti casi in cui lo scorrimento plastico del materiale non è decisamente contrastato dalla fase elastica adiacente: l'analisi di procedimenti tecnologici come laminazione, estrusione, trafilatura dimostra che in tali esempi di plasticità non contenuta l'ipotesi di un comportamento rigido-plastico del materiale è in buon accordo con l'esperienza.

#### a) *Le equazioni del problema.*

Dal punto di vista analitico la teoria degli stati rigido-plastici conduce ad un legame costitutivo<sup>1</sup> tensioni-deformazioni derivabile dalle relazioni di Prandtl-Reuss [123. 14] per omissione della parte elastica della deformazione, cioè, data la ammessa incompressibilità ( $\nu = \frac{1}{2}$ ) in fase plastica:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}), & \dot{\varepsilon}_{12} &= \dot{\lambda}\tau_{12}, \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}), & \dot{\varepsilon}_{13} &= 0, \\ 0 &= \frac{\dot{\lambda}}{3} (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}), & \varepsilon_{32} &= 0. \end{aligned} \quad [125. 1]$$

<sup>1</sup> B. DE SAINT-VENANT, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, **70**, 473 (1870); M. LEVY, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, **70**, 1323 (1870); R. V. MISES, *Göttinger Nachr. Math. phys. Klasse*, 582 (1913).

La condizione di deformazione piana  $\dot{\varepsilon}_{33} = 0$  permette di ottenere:

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad [125. 2]$$

da cui, sostituendo nelle prime due [125. 1], le seguenti relazioni significative del problema:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \frac{\dot{\lambda}}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}), \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\lambda} \tau_{12}. \quad [125. 3]$$

Il materiale si comporta dunque come perfettamente rigido sino al raggiungimento della fase plastica: questa ha inizio a partire da un limite di snervamento che può essere individuato da un criterio opportuno. Data la incompressibilità del materiale anche in fase elastica, implicitamente ammessa con l'ipotesi di un comportamento perfettamente rigido in tale fase, le condizioni di plasticità di Tresca e di Mises assumono la stessa espressione formale:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2 \leq 4k^2, \quad [125. 4]$$

dove  $k = \sigma_S/2$  nel primo caso e  $k = \sigma_S/\sqrt{3}$  nel secondo.

In assenza di forze di massa le equazioni di equilibrio si riducono alle:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{21,2} = 0, \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \quad [125. 5]$$

mentre la condizione di incompressibilità  $\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} = 0$  diviene in termini di derivate delle velocità di spostamento  $v_1 = \dot{u}_1$ ,  $v_2 = \dot{u}_2$ :

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0. \quad [125. 6]$$

Le direzioni principali di tensione sono caratterizzate da due valori dell'angolo  $\alpha_0$ , cioè:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}, \quad [125. 7]$$

mentre le direzioni principali delle velocità di deformazione plastica sono caratterizzate dai due valori dell'angolo  $\beta_0$ , ottenuti da una espressione formalmente analoga alla precedente:

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}}{\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22}}. \quad [125. 8]$$

In un materiale isotropo le direzioni principali della velocità di deformazione plastica devono coincidere con le direzioni principali di tensione, cioè  $\alpha_0 = \beta_0$ .

Espressa allora la [125. 8] in termini di velocità dei gradienti di spostamento otteniamo la relazione:

$$\frac{2\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{v_{1,1} - v_{2,2}} . \quad [125. 9]$$

Le equazioni precedenti rappresentano la base per la determinazione dello stato di tensione-deformazione nella regione plastica del sistema piano: poichè risultano omogenee nelle velocità le tensioni così calcolate sono indipendenti dalle velocità di deformazione ed il tempo assume il ruolo di un semplice parametro che caratterizza il procedere della deformazione stessa.

La condizione di plasticità [125. 4] e le equazioni di equilibrio [125. 5] costituiscono nel loro complesso un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$ . Una volta trovate le componenti di tensione la condizione di incompressibilità [125. 6] e la [125. 9] sono sufficienti ad individuare le velocità  $v_1$ ,  $v_2$ .

Tale circostanza fa intuire che potranno esistere due tipi di problemi:

I. Nel primo caso le condizioni al contorno riguardano esclusivamente le componenti di tensione. La loro distribuzione nella regione plastica resta pienamente individuata dalle equazioni di equilibrio e dalla condizione di plasticità, senza necessità di ricorrere alle relazioni di legame [125. 3] ed alla determinazione delle velocità: problemi di tale natura vengono detti *staticamente determinati*.

II. Nel secondo caso le condizioni al contorno riguardano anche o totalmente le velocità. La determinazione delle tensioni non può prescindere da quella delle velocità e le equazioni del problema devono essere risolte contemporaneamente: problemi di tale natura vengono detti *staticamente indeterminati*.

#### b) *Linee di scorrimento plastico.*

Con riferimento al § 113 consideriamo le due famiglie di linee ortogonali individuate dai due valori dell'angolo  $\alpha_T$ :

$$\alpha_I = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{II} = \alpha_0 - \frac{\pi}{2}, \quad [125. 10]$$

cioè le linee che hanno per tangenti in ogni punto le direzioni delle tensioni tangenziali estreme  $\tau_I$ ,  $\tau_{II}$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_T = - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau_{12}} . \quad [125. 11]$$



dove  $\alpha_I$  indica l'angolo che la tangente alla linea di scorrimento  $\alpha_I$  forma con l'asse  $x_2$ . Poichè la componente isotropa del tensore di tensione vale  $\bar{\sigma} = (\sigma_I + \sigma_{II})/2$  e la tensione tangenziale max vale:

$$\tau_{\max} \equiv \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II}) = k ,$$

le precedenti relazioni possono essere scritte:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \bar{\sigma} + k \sin 2\alpha_I , \\ \sigma_{22} &= \bar{\sigma} - k \sin 2\alpha_I , \\ \tau_{12} &= k \cos 2\alpha_I . \end{aligned} \quad [125. 13]$$

Sostituendo allora le [125. 13] nelle equazioni di equilibrio [125. 5], queste ultime vengono espresse in termini della tensione media  $\bar{\sigma}$  e dell'angolo  $\alpha_I$ :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{,1} + 2k (\alpha_{I,1} \cos 2\alpha_I + \alpha_{I,2} \sin 2\alpha_I) &= 0 , \\ \bar{\sigma}_{,2} + 2k (\alpha_{I,1} \sin 2\alpha_I - \alpha_{I,2} \cos 2\alpha_I) &= 0 , \end{aligned} \quad [125. 14]$$

dalle quali, moltiplicando la prima per  $\cos \alpha_I$  (rispettivamente per  $\sin \alpha_I$ ), la seconda per  $\sin \alpha_I$  (rispettivamente per  $\cos \alpha_I$ ) otteniamo per somma e differenza:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{,1} \cos \alpha_I + \bar{\sigma}_{,2} \sin \alpha_I + 2k (\alpha_{I,1} \cos \alpha_I + \alpha_{I,2} \sin \alpha_I) &= 0 , \\ \bar{\sigma}_{,1} \sin \alpha_I - \bar{\sigma}_{,2} \cos \alpha_I - 2k (\alpha_{I,1} \sin \alpha_I - \alpha_{I,2} \cos \alpha_I) &= 0 . \end{aligned} \quad [125. 15]$$

Ricordando l'espressione della derivata di una funzione rispetto alle tangenti  $s_I$  e  $s_{II}$  ai due sistemi di curve  $\alpha_I$  e  $\alpha_{II}$ , le precedenti equazioni assumono la forma compatta:

$$\frac{\partial}{\partial s_I} (\bar{\sigma} + 2k\alpha_I) = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial s_{II}} (\bar{\sigma} - 2k\alpha_I) = 0 , \quad [125. 16]$$

da cui si deducono le relazioni dovute a HENCKY<sup>1</sup>:

$$\bar{\sigma} + 2k\alpha_I = c_I , \quad \bar{\sigma} - 2k\alpha_I = c_{II} , \quad [125. 17]$$

dove  $c_I$ ,  $c_{II}$  risultano costanti lungo le rispettive linee di scorrimento  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$ .

Con un procedimento analogo possono essere riferite alle linee di scorrimento anche le equazioni nelle velocità, ottenendo le relazioni dovute a HILDA GEIRINGER<sup>2</sup>:

$$dv_1 - v_2 d\alpha_I = 0 \quad \text{lungo } \alpha_I , \quad dv_2 + v_1 d\alpha_I = 0 \quad \text{lungo } \alpha_{II} . \quad [125. 18]$$

<sup>1</sup> H. HENCKY, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **3**, 241 (1923).

<sup>2</sup> H. GEIRINGER, *Proc. 3rd Int. Congress Appl. Mech.*, **2**, 185, Stockholm (1930).

Esse esprimono il fatto che lungo una linea di scorrimento la velocità della dilatazione lineare deve essere nulla.

Dalle equazioni [125. 17] e [125. 18] discendono alcune interessanti proprietà per le linee di scorrimento, che ne caratterizzano la geometria e possono essere utilizzate per la loro costruzione effettiva. Tali proprietà sono intimamente collegate con il *carattere iperbolico* delle equazioni relative agli stati rigido-plastici: di tali equazioni le linee  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$  rappresentano le cosiddette *caratteristiche*. L'argomento, di natura prevalentemente matematica, esula dai limiti della presente esposizione: rimandiamo perciò ad alcune opere specifiche in materia<sup>1</sup>, dove tali aspetti hanno ricevuto una esauriente trattazione.

c) *Alcune soluzioni elementari.*

Come primo esempio relativo ad un problema particolare di stato rigido-plastico, riprendiamo in esame il caso di un prisma compresso tra due piastre rigide parallele, già considerato nel § 123 nel caso di un comportamento elasto-plastico del materiale. Se l'altezza  $2a$  in direzione  $x_2$  è piccola rispetto alla larghezza in direzione  $x_1$ , nella zona centrale a sufficiente distanza dai bordi le linee di scorrimento avranno un andamento più uniforme e la loro pendenza potrà essere assunta indipendente da  $x_1$ . In tale ipotesi, con riguardo alle [125. 13], anche la  $\tau_{12}$  e la differenza  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  risultano indipendenti da  $x_1$ .

La condizione di plasticità [125. 4] sarà dunque verificata assumendo:

$$\tau_{12} = kf(x_2), \quad \sigma_{11} - \sigma_{22} = 2k\sqrt{1 - f^2(x_2)}, \quad [125. 19]$$

dove  $f(x_2)$  è una funzione arbitraria della sola variabile  $x_2$ . Sostituendo nelle equazioni di equilibrio otteniamo per eliminazione della  $\sigma_{11}$ :

$$\sigma_{22,1} + kf_{,2}(x_2), \quad \sigma_{22,2} = 0. \quad [125. 20]$$

Le equazioni differenziali [125. 20] possono sussistere se e solo se:

$$f(x_2) = c_1 x_2 + c_2, \quad \sigma_{22} = -k(c_1 x_1 + c), \quad [125. 21]$$

essendo  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c$  tre costanti. Poichè le condizioni al contorno richiedono che:

$$\tau_{12} = \pm k \quad \text{per } x_2 = \pm a, \quad [125. 22]$$

---

<sup>1</sup> R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, p. 128-60, Oxford (1950); A. M. FREUDENTHAL-H. GERINGER, *The ideal plastic body*, in « Handbuch der Physik », **6**, p. 322-99, Berlin (1958).

ne consegue:  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = 0$  e quindi le relazioni dovute a PRANDTL<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= k \left( -c - \frac{x_1}{a} + 2 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \right), \\ \sigma_{22} &= k \left( -c - \frac{x_1}{a} \right), \\ \tau_{12} &= \frac{x_2}{a}.\end{aligned}\tag{125. 23}$$

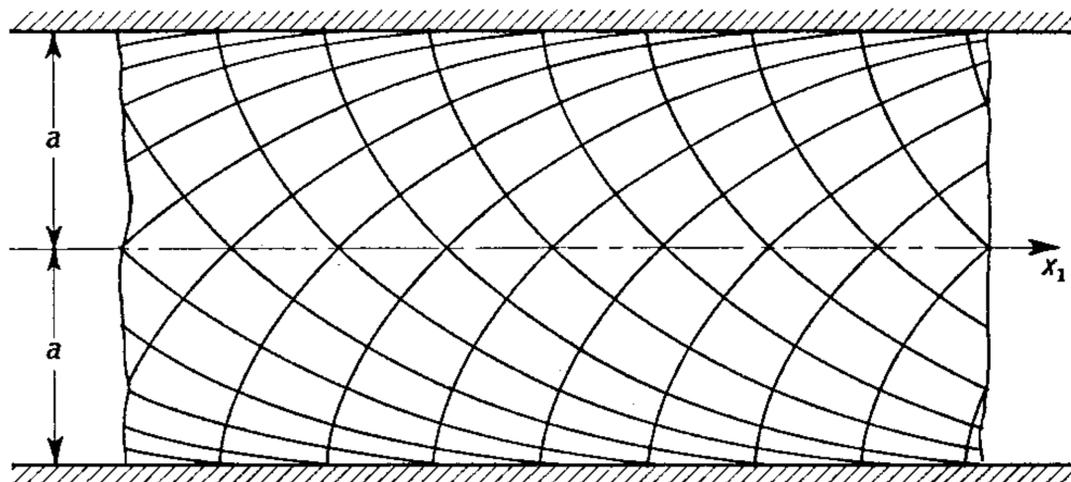


Fig. 144.

Le equazioni delle linee di scorrimento si ottengono sostituendo nella terza delle [125. 13] il valore della tensione tangenziale ottenuto dall'ultima [125. 23]:

$$x_2 = a \cos 2\alpha_I, \tag{125. 24}$$

da cui derivando e ricordando la definizione dell'angolo  $\alpha_I$  dalla figura 143 b) abbiamo le equazioni differenziali per le due famiglie di linee di scorrimento  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$ :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_I &\equiv \operatorname{tg} \alpha_I = -2a\alpha_{I,1} \sin 2\alpha_I, \\ \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{II} &\equiv -\operatorname{cotg} \alpha_I = -2a\alpha_{I,1} \sin 2\alpha_I.\end{aligned}\tag{125. 25}$$

Otteniamo così le seguenti espressioni per la coordinata  $x_1$  (fig. 144):

$$\begin{aligned}x_1 &= -a(2\alpha_I + \sin 2\alpha_I) + c_I \quad \text{su } \alpha_I, \\ x_1 &= a(2\alpha_I - \sin 2\alpha_I) + c_{II} \quad \text{su } \alpha_{II},\end{aligned}\tag{125. 26}$$

<sup>1</sup> L. PRANDTL, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **3**, 401 (1923).

dove in entrambi i casi la  $x_2$  ha il valore [125. 24]. Si riconosce che le due famiglie  $\alpha_I, \alpha_{II}$  sono cicloidi, ottenute dal rotolamento di un cerchio di raggio  $a$  ed intersecantisi ad angolo retto. Ognuna delle due rette  $x_2 = \pm a$ , lungo le quali la tensione tangenziale raggiunge il suo massimo valore uguale a  $k$ , costituisce una frontiera della regione plastica e l'involuppo di una famiglia di linee di scorrimento.

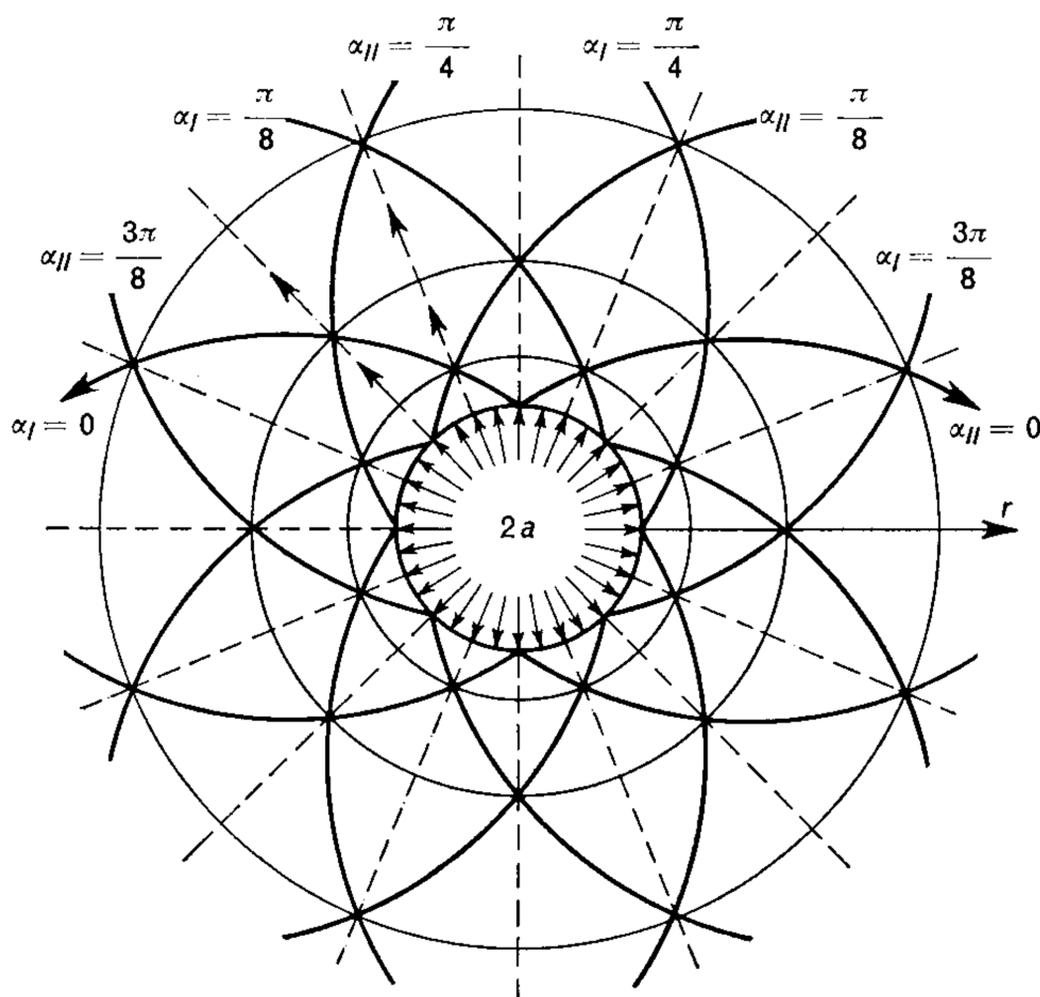


Fig. 145.

Come secondo esempio consideriamo un sistema rigido-plastico piano con un foro circolare di raggio  $a$ , lungo il bordo del quale agisca una pressione radiale uniforme  $p$ . Data la simmetria conviene riferire il problema a coordinate polari  $r, \vartheta$ . Poichè  $\tau_{r\vartheta} = 0$  le componenti  $\sigma_r, \sigma_\vartheta$  sono tensioni principali e devono verificare l'equazione di equilibrio [124. 11]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \tag{125. 27}$$

e la condizione di plasticità [124. 12]:

$$\sigma_r - \sigma_\vartheta = 2k, \tag{125. 28}$$

conglobate nell'unica equazione differenziale:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2k}{r} = 0. \tag{125. 29}$$

Con riguardo alla condizione  $\sigma_r = -p$  sul contorno  $r = a$ , l'integrazione della [125. 29] fornisce la soluzione:

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{a} - p, \quad \sigma_\vartheta = 2k \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) - p. \quad [125. 30]$$

Le linee di scorrimento risultano due famiglie ortogonali di spirali logaritmiche, come indicato nella fig. 145, di equazione:

$$\vartheta \pm \ln \frac{r}{a} = \text{cost}, \quad [125. 31]$$

e non possiedono alcun inviluppo.

Limitando la nostra esposizione ai due semplici esempi sopra discussi rimandiamo alla edizione tedesca dell'opera di SOKOLOVSKIJ<sup>1</sup> dove sono ampiamente trattati numerosi problemi relativi a stati rigido-plastici.

## 126. Analisi limite di stati rigido-plastici piani.

Un sistema piano, soggetto ad una distribuzione di carico proporzionale nel senso specificato nel § 67, perviene ad una situazione di collasso quando si verifichi uno scorrimento plastico che procede senza dover aumentare le forze stesse, cioè quando la deformazione plastica non sia più contenuta.

Nell'ipotesi semplificativa che le forze applicate siano unicamente superficiali, di componenti  $f_1, f_2$ , la situazione limite sarà raggiunta in corrispondenza di un sistema limite di carico  $mf_1, mf_2$ , essendo  $m$  il coefficiente di sicurezza.

La risoluzione di problemi specifici, anche nell'ipotesi di un comportamento del materiale schematizzato a rigido-plastico, presenta difficoltà notevoli: appare quindi interessante sul piano applicativo poter fornire limitazioni superiori ed inferiori del coefficiente di sicurezza  $m$  mediante l'impiego dei due teoremi dell'analisi limite dimostrati nel § 68. Tale impostazione richiede di poter costruire distribuzioni *staticamente ammissibili* per le componenti di tensione e distribuzioni *cinematicamente ammissibili* per le velocità di deformazione, dalle quali ricavare rispettivamente i moltiplicatori  $m^0$  e  $m^*$ , tali che:

$$m^* \geq m \geq m^0. \quad [126. 1]$$

<sup>1</sup> V. V. SOKOLOVSKIJ, *Theorie der Plastizität*, Berlin (1955) (trad. della ediz. russa: *Teorija plastičnosti*, Moskva, 1950).

Come abbiamo più volte avvertito, questo punto di vista della verifica di sicurezza differisce sostanzialmente da quello in senso stretto, che impone invece di non raggiungere il limite di snervamento in alcun punto del solido. Nel caso piano il criterio tradizionale utilizza la riduzione dello stato di tensione ad uno stato monoassiale ugualmente pericoloso, in base al concetto di *tensioni ideali* le cui espressioni sono fornite rispettivamente dalla [123. 4] e dalla [123. 8] a seconda della condizione di plasticità adottata.

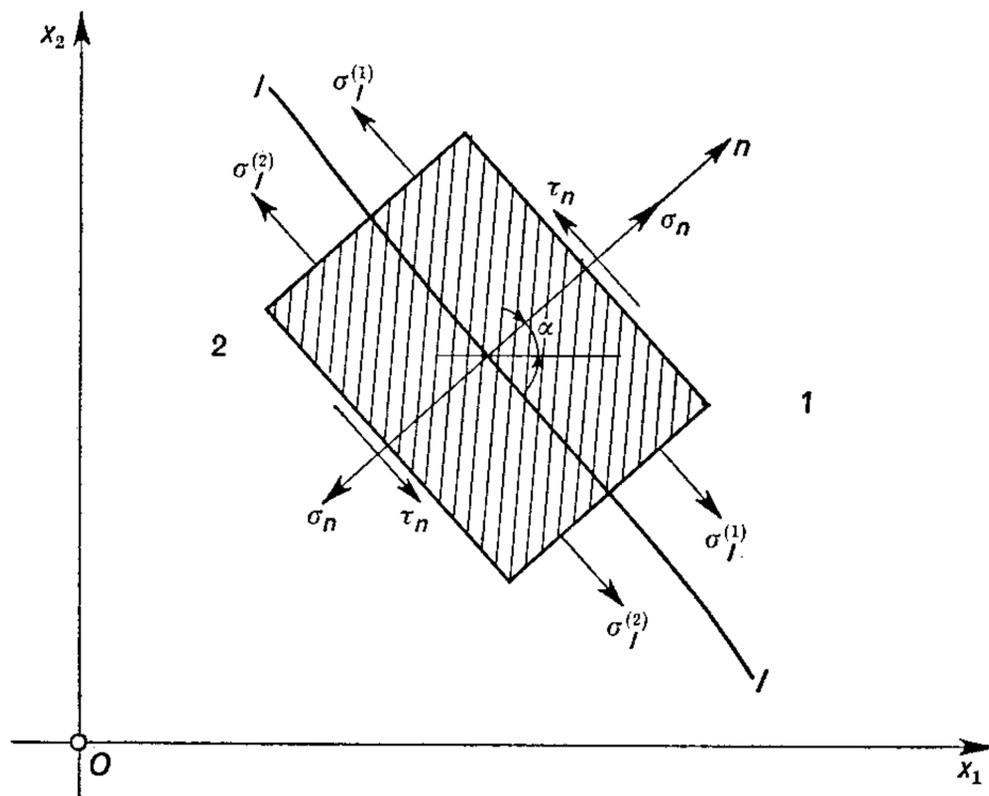


Fig. 146.

#### a) Linee di discontinuità.

Nella costruzione di stati ammissibili si ricorre spesso a distribuzioni discontinue<sup>1</sup> sia per le tensioni sia per le velocità di deformazione. Del resto abbiamo già incontrato esempi di discontinuità nelle tensioni, come per le sollecitazioni di flessione nel § 92 e di torsione nel § 103.

Con riferimento alla fig. 146 consideriamo lo stato di tensione in un elemento di superficie che attraversi una linea di discontinuità  $l$  e contrassegnamo con gli indici 1 e 2 le tensioni agenti sui due lati di  $l$ . L'equilibrio dell'elemento richiede che le tensioni normale e tangenziale dirette secondo la perpendicolare  $n$  alla linea  $l$  siano continue, mentre la tensione normale diretta secondo  $l$  può anche essere discontinua in quanto autoequilibrata su ogni lato di  $l$ . Indicando con  $\alpha$  l'angolo formato tra la normale  $n$  e l'asse  $x_1$ , con riguardo alla

<sup>1</sup> W. PRAGER, *Courant Anniversary Volume*, 289-99, New York (1948).

fig. 143 *b*) otteniamo le espressioni delle componenti di tensione  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  nella forma:

$$\sigma_n = \bar{\sigma} + k \sin 2 (\alpha_I - a), \quad \tau_n = k \cos 2 (\alpha_I - a), \quad [126. 2]$$

mentre la componente di tensione  $\sigma_l$ , agente sull'elemento superficiale normale a  $l$  risulta:

$$\sigma_l = \bar{\sigma} - k \sin 2 (\alpha_I - a). \quad [126. 3]$$

La condizione di continuità per le tensioni  $\sigma_n, \tau_n$  agenti sull'elemento superficiale parallelo alla linea  $l$  conduce alle:

$$\begin{aligned} 2s^{(1)} + \sin 2 (\alpha_I^{(1)} - a) &= 2s^{(2)} + \sin 2 (\alpha_I^{(2)} - a) \\ \cos 2 (\alpha_I^{(1)} - a) &= \cos 2 (\alpha_I^{(2)} - a), \end{aligned} \quad [126. 4]$$

avendo introdotto la grandezza adimensionale  $s = \bar{\sigma}/2k$ . Le radici delle equazioni [126. 4] sono:

$$s^{(2)} = s^{(1)} + \sin 2 (\alpha_I^{(1)} - a), \quad \alpha_I^{(2)} = 2a - \alpha_I^{(1)} \pm r\pi, \quad [126. 5]$$

con  $r$  intero: la seconda [126. 5] mostra che la linea di discontinuità  $l$  biseca in ogni punto l'angolo formato dalle linee di scorrimento della famiglia  $\alpha_1$  passanti per quel punto.

Le equazioni [126. 2] non determinano univocamente lo stato di tensione in  $P$ . Abbiamo infatti risolvendo rispetto a  $\alpha_I$  e  $s$ :

$$\alpha_I = a \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau_n}{k}, \quad s = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_n}{k} - \sin 2 (\alpha_I - a) \right], \quad [126. 6]$$

per cui a valori assegnati di  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  corrispondono due coppie di valori per  $\alpha_I$  e  $s$ . Lo stato di tensione risulta dai due cerchi di Mohr della fig. 147: ognuno dei due cerchi ha raggio  $k$ , centro sull'asse  $\sigma_n$  e passa per lo stesso polo  $M$  di coordinate  $(\sigma_n, \tau_n)$ .

L'esistenza di due possibili tensioni  $\alpha_l^{(1)}$  e  $\alpha_l^{(2)}$  è dovuta al carattere quadratico della condizione di snervamento. Riferita infatti la [125. 4] agli assi  $n, l$  invece che agli assi  $x_1, x_2$ , cioè per  $\sigma_{11} = \sigma_n, \sigma_{22} = \sigma_l, \tau_{12} = \tau_n$ , si ha:

$$(\sigma_n - \sigma_l)^2 + 4\tau_n^2 = 4k^2, \quad [126. 7]$$

da cui risolvendo rispetto a  $\sigma_l$  otteniamo i valori:

$$\sigma_l = \sigma_n \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}. \quad [126. 8]$$

Una linea di discontinuità per la tensione in una zona plasticizzata rappresenta il *ricordo* di uno stato elastico precedente. Nel problema della flessione l'andamento delle tensioni in campo perfettamente plastico corrisponde all'andamento discontinuo del diagramma di fig. 76: l'asse neutro separa in tal caso due distribuzioni uniformi di tensioni normali  $\sigma_S$ ,  $-\sigma_S$ , e rappresenta il limite a cui si riduce la zona elastica con il diffondersi della plasticizzazione.

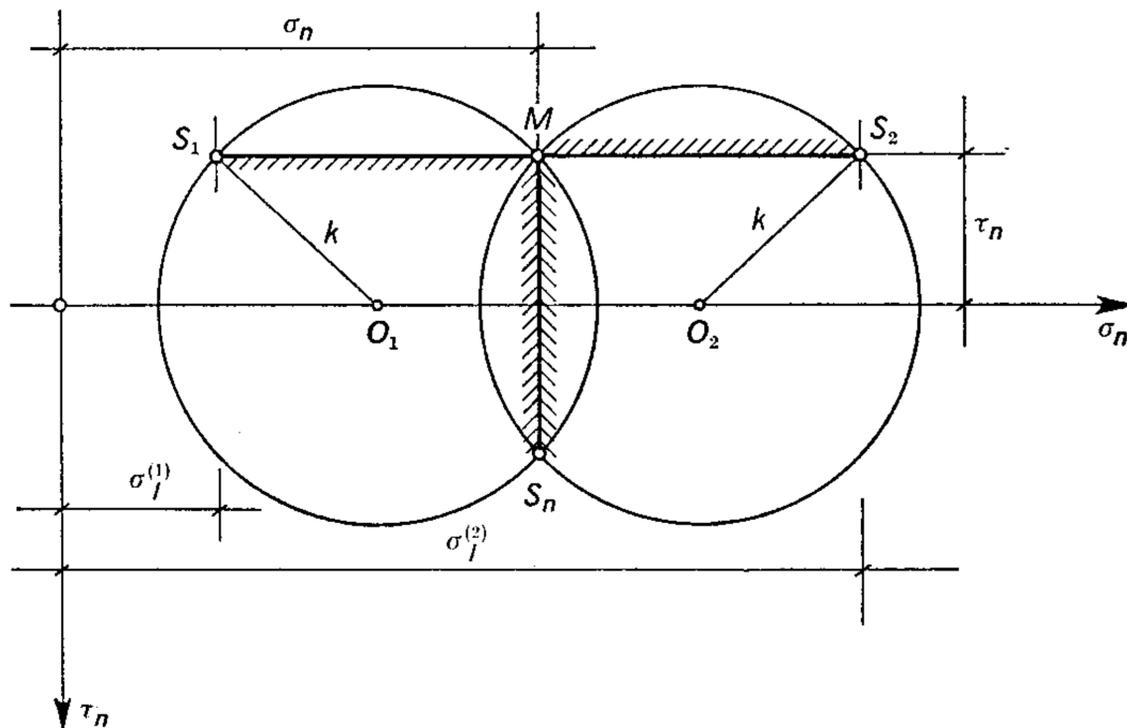


Fig. 147.

Anche le distribuzioni di velocità dello spostamento possono essere discontinue: la componente  $v_l$  tangente ad una linea di discontinuità  $l$  ha un brusco salto di valore passando da una parte all'altra della linea, mentre la componente  $v_n$  normale a  $l$  deve avere lo stesso valore sui due lati di  $l$ . Come una linea di discontinuità per la tensione rappresenta il limite della zona elastica che separa due zone a tensione uniforme così una linea di discontinuità per la velocità rappresenta il limite di una zona nella quale si ha una transizione continua da una distribuzione di velocità ad un'altra.

In questa zona di transizione la velocità di deformazione  $\dot{\epsilon}_n$  deve tendere a zero insieme con  $\dot{\epsilon}_l = -\dot{\epsilon}_n$ . Con il contrarsi della zona stessa ad una linea il rapporto  $\dot{\epsilon}_{ln}/\dot{\epsilon}_n$  tende perciò all'infinito. Nell'ipotesi  $\mu = \infty$  corrispondente ad un comportamento rigido-plastico, dalle relazioni di Prandtl-Reuss [123. 9] si ha che le componenti  $s_l$ ,  $s_n$  del deviatore di tensione si annullano e quindi la condizione di plasticità [125. 4] è soddisfatta per  $\tau_{nl} = k$ , cioè la direzione  $l$  è una linea di scorrimento o un involuppo di linee di scorrimento.

b) *Applicazione di distribuzioni discontinue nell'analisi limite.*

Mostriamo ora in quale modo le distribuzioni discontinue possono essere utilizzate nell'analisi limite di stati piani di deformazione.

Come primo esempio, con riferimento alla fig. 148, consideriamo un cuneo di apertura  $2\beta$ , simmetrico rispetto all'asse  $x_2$  e soggetto ad una pressione uniforme  $p$  lungo il lato  $\overline{OA_1}$ . Sia  $l = \overline{OB}$  una linea

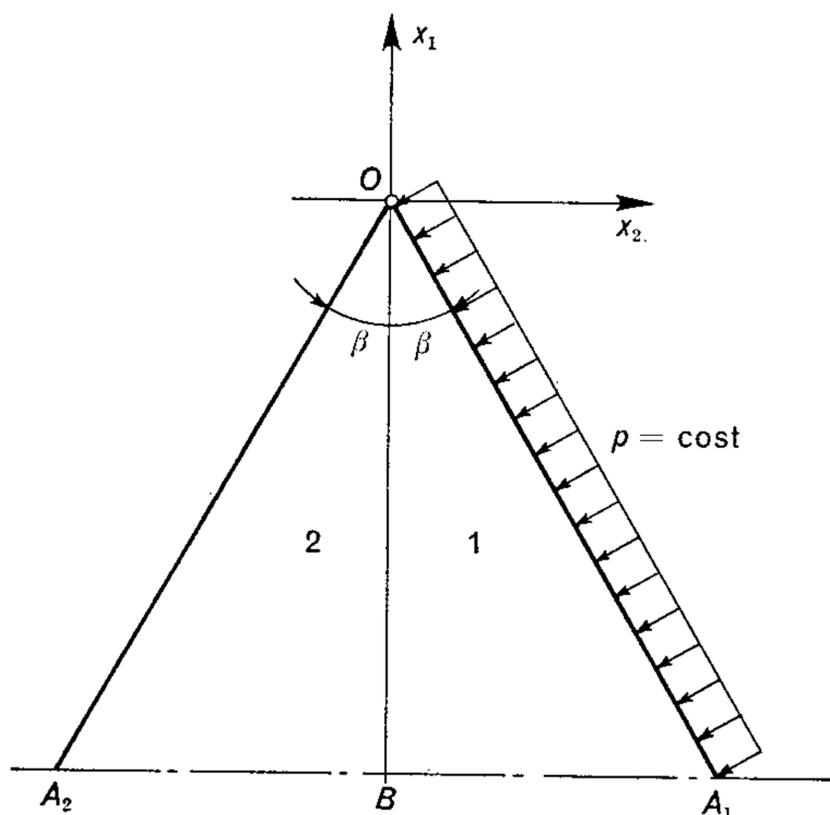


Fig. 148.

di discontinuità che separi due distribuzioni costanti di tensione. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta, \quad \sigma_n = -p, \quad \tau_n = 0 & \quad \text{su } \overline{OA_1}, \\ \alpha = \pi - \beta, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0 & \quad \text{su } \overline{OA_2}. \end{aligned} \quad [126. 9]$$

Le equazioni [126. 6] divengono nel caso attuale:

$$\begin{aligned} \alpha_I = \beta \pm \frac{\pi}{4}, \quad s = \frac{1}{2} \left( -\frac{p}{k} \mp 1 \right) & \quad \text{su } \overline{OA_1}, \\ \alpha_I = \pi - \beta \pm \frac{\pi}{4}, \quad s = \mp \frac{1}{2} & \quad \text{su } \overline{OA_2}, \end{aligned} \quad [126. 10]$$

dove i segni superiori ed inferiori sussistono indipendentemente per il lato  $\overline{OA_1}$ , e per il lato  $\overline{OA_2}$ .

Osservando che la pressione laterale  $p$  tende ad inflettere il cuneo in modo da produrre compressioni lungo  $\overline{OA_2}$ , la [126. 6] indica che su tale lato dovremo adottare i segni superiori.

In ciascuna delle due regioni  $OBA_1$  e  $OBA_2$  assumiamo una distribuzione costante di tensioni, per cui sui due lati di  $\overline{OB}$  avremo i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \alpha_I^{(1)} &= \beta \pm \frac{\pi}{4}, & s^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{p}{k} \mp 1 \right), \\ \alpha_I^{(2)} &= \frac{5\pi}{4} - \beta, & s^{(2)} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad [126.11]$$

Poichè sulla linea di discontinuità  $\alpha_I = 0$ , le espressioni di  $\alpha_I^{(1)}$ ,  $\alpha_I^{(2)}$  soddisfano alla seconda condizione [126.5] con  $r = 1$  scegliendo il segno inferiore nella prima [126.11]. Infine, sostituendo i valori  $s^{(1)}$ ,  $s^{(2)}$ ,  $\alpha_I^{(1)}$  nella prima condizione [126.5], otteniamo per  $a = 0$ :

$$p = 2k(1 - \cos 2\beta). \quad [126.12]$$

In altri termini, nel cuneo interamente plasticizzato la distribuzione di tensione adottata risulta *staticamente ammissibile* quando la pressione laterale raggiunge il valore [126.12]: naturalmente tale risultato non prova che essa sia la sola distribuzione di tensione possibile.

Come secondo esempio consideriamo un sistema piano di forma rettangolare con due intagli semicircolari simmetrici<sup>1</sup>, soggetto ad una trazione uniforme  $f_2$  ed indicato nella fig. 149.

Una semplice distribuzione di tensioni staticamente ammissibile dovrà verificare: le equazioni di equilibrio e la condizione di plasticità in ognuna delle regioni in cui il dominio piano  $A$  risulta suddiviso dalle linee di discontinuità, e le condizioni di equilibrio sul contorno. In termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  definita dalle [112.5] una tale distribuzione dovrà soddisfare all'unica equazione:

$$(\Psi_{,11} - \Psi_{,22})^2 + 4\Psi_{,12}^2 \leq 4k^2. \quad [126.13]$$

Scelta allora la  $\Psi(x_1, x_2)$  come un polinomio di secondo grado in  $x_1, x_2$  in ognuna delle cinque regioni della fig. 149 a), ed adottando il segno di uguale nella [126.13], otteniamo le distribuzioni uniformi di tensione, indicate a tratteggio e separate da linee di discontinuità rettilinee.

Nelle regioni terminali viene ammessa una trazione uniforme uguale a  $f_2$ , mentre nelle zone non tratteggiate la tensione è supposta nulla.

<sup>1</sup> W. PRAGER, *Proc. Intern. Congress Mathematicians*, Cambridge, U.S.A., 1950, **2**, 297, Providence (1952).

Può essere così determinato un limite inferiore per le forze applicate pari a  $f_2^0 = 1,26 k$ , per cui un moltiplicatore staticamente ammissibile è:

$$m^0 = \frac{1,26 k}{f_2} . \quad [126. 14]$$

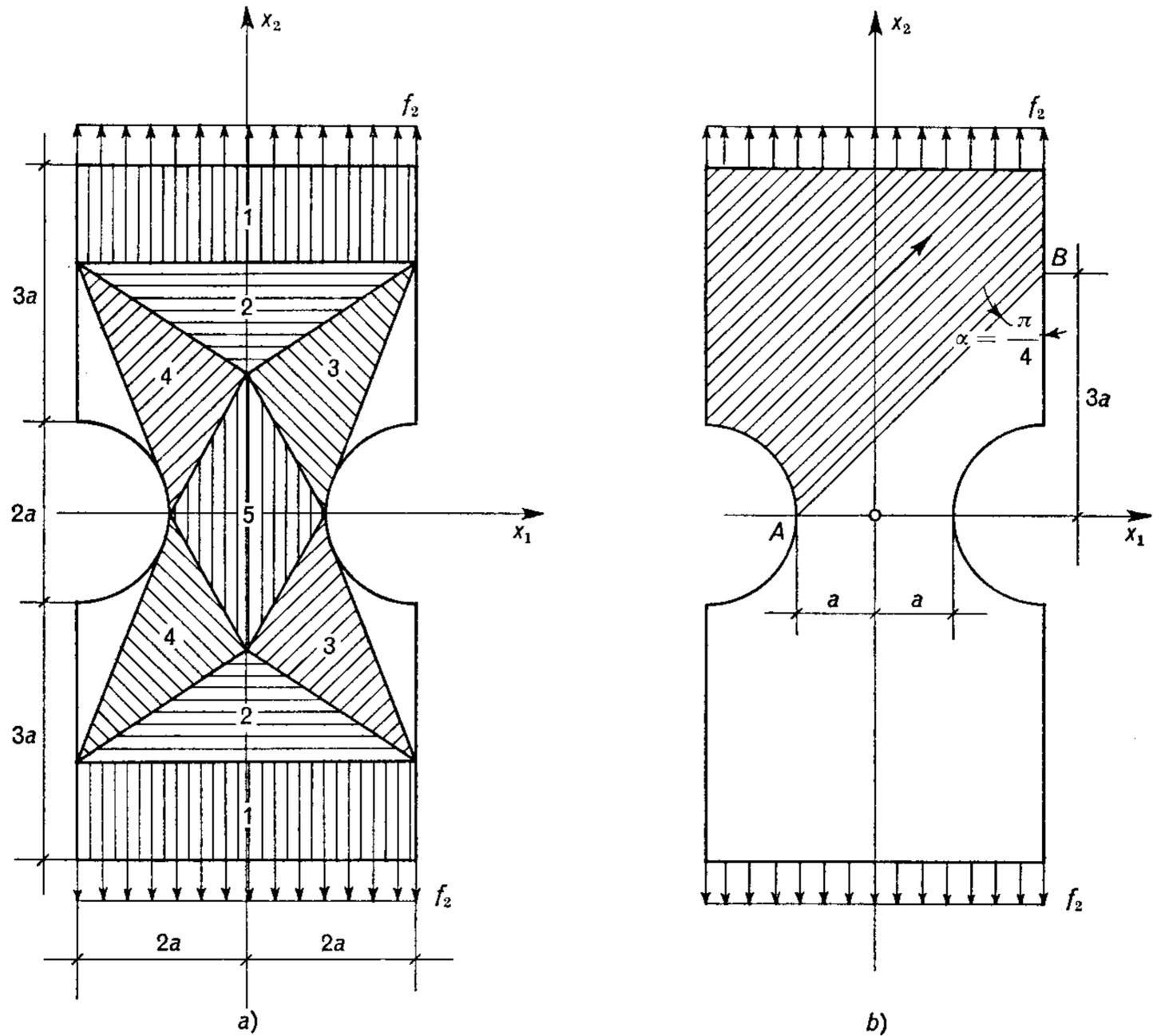


Fig. 149.

Una distribuzione cinematicamente ammissibile di velocità è indicata nella fig. 149 b) dove la retta  $\overline{AB}$  è una linea di discontinuità. La regione tratteggiata si muove rigidamente nella direzione della freccia, mentre la regione rimanente rimane ferma.

Si può calcolare un limite superiore pari a  $f_2^* = 1,50 k$ , in quanto un moltiplicatore cinematicamente ammissibile è:

$$m^* = \frac{3 a k \sqrt{2}}{2 a f_2 \sqrt{2}} = \frac{1,50 k}{f_2} . \quad [126. 15]$$

Abbiamo dunque dal teorema espresso sinteticamente dalla relazione [68. 5]:

$$\frac{1,26 k}{f_2} \leq m \leq \frac{1,50 k}{f_2}, \quad [126. 16]$$

una valutazione approssimata del coefficiente di sicurezza  $m$ .

## 127. Problemi relativi a solidi di rivoluzione.

Molti importanti problemi applicativi si riferiscono a solidi di rivoluzione intorno ad un asse  $z$ : tali problemi non sono evidentemente

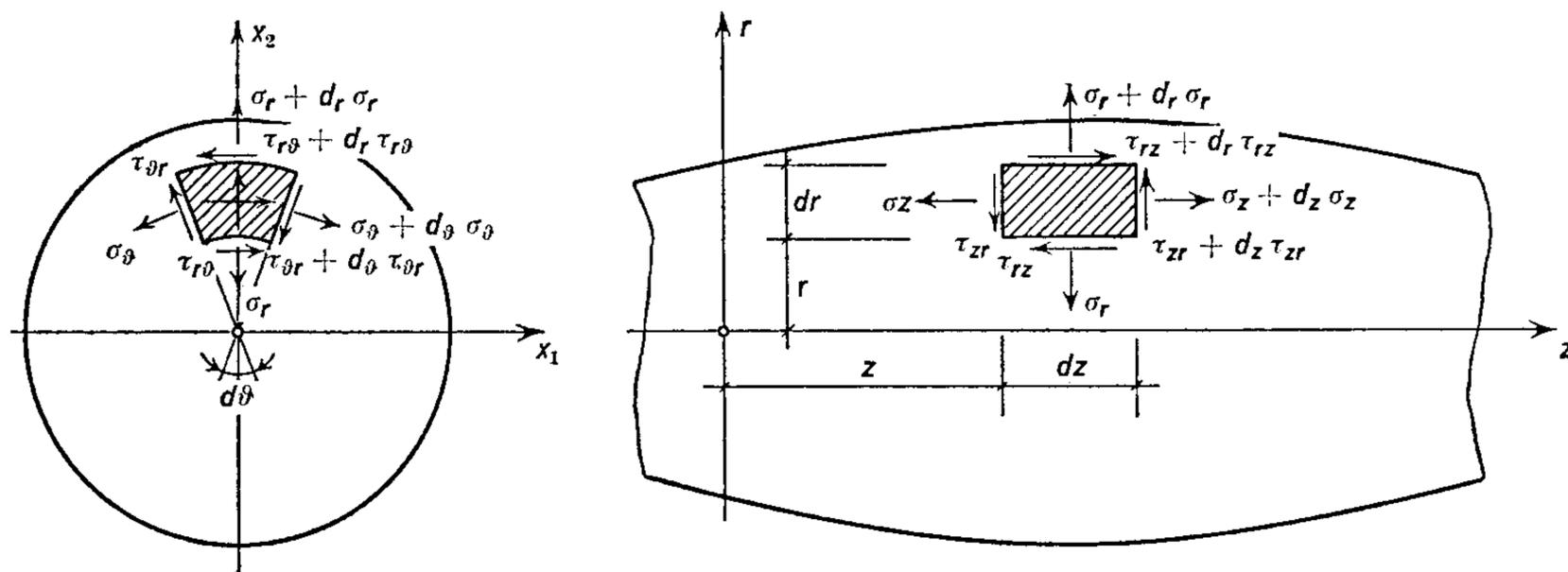


Fig. 150.

piani per l'esistenza di componenti di deformazione e di tensione dirette secondo l'asse di rivoluzione. Sono però strettamente collegati ai problemi piani e da questi derivabili con una immediata generalizzazione: tale motivo ne giustifica un cenno nel presente capitolo.

La posizione del punto generico nel piano  $(x_1 x_2)$  normale all'asse  $z$  sarà individuata da un sistema di coordinate polari  $r, \vartheta$  come nel § 115. Alle componenti di spostamento  $u_r, u_\vartheta$  nel piano  $(x_1 x_2)$  deve essere aggiunta la componente  $u_z$  nella direzione dell'asse  $z$ . Alle tre componenti di deformazione del problema piano, espresse dalle [115. 1], [115. 2], [115. 3], cioè:

$$\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r}(u_r + u_{\vartheta,\vartheta}), \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{r,\vartheta}}{r} - \frac{u_\vartheta}{r} + u_{\vartheta,r} \right), \quad [127. 1]$$

devono essere aggiunte le altre tre componenti di deformazione:

$$\varepsilon_z = u_{z,z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left( u_{\vartheta,z} + \frac{u_{z,\vartheta}}{r} \right). \quad [127. 2]$$

Per quanto riguarda le componenti di tensione, oltre alle tre  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\vartheta$ ,  $\tau_{r\vartheta}$  del problema piano in coordinate polari, dovremo considerare le tre componenti dirette secondo  $z$ , e precisamente la componente normale  $\sigma_z$  e le componenti tangenziali  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\vartheta z}$ . Con riferimento alla fig. 150, in assenza di forze di massa, possiamo scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  di un elemento di volume  $r d\vartheta dr dz$  con un procedimento analogo a quello seguito nel § 115 per la deduzione delle [115. 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \tau_{zr,z} + \frac{\tau_{\vartheta r,\vartheta}}{r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} &= 0, \\ \tau_{r\vartheta,r} + \tau_{z\vartheta,z} + \frac{\sigma_{r,\vartheta} + 2\tau_{r\vartheta}}{r} &= 0, \\ \tau_{rz,z} + \sigma_{z,z} + \frac{\tau_{\vartheta z,\vartheta} + \tau_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad [127. 3]$$

mentre, per l'equilibrio alla rotazione, devono essere soddisfatte le tre equazioni:  $\tau_{\vartheta r} = \tau_{r\vartheta}$ ,  $\tau_{zr} = \tau_{rz}$ ,  $\tau_{z\vartheta} = \tau_{\vartheta z}$ .

a) *Problema della torsione nei solidi di rivoluzione.*

A titolo di esempio consideriamo un solido di rivoluzione soggetto ad un momento torcente: è questo un problema di interesse applicativo per gli alberi ruotanti di sezione circolare variabile.

Ricordando i risultati ottenuti nel § 101 a) per un cilindro circolare, cioè per un solido di rivoluzione di sezione costante, supponiamo che l'unica componente di spostamento diversa da zero sia  $u_\vartheta$ . Poichè, in virtù della simmetria circolare  $u_\vartheta$  deve essere indipendente dall'anomalia  $\vartheta$ , le componenti di deformazione espresse dalle [127. 1] e [127. 2] assumono in tal caso la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 0, & \varepsilon_\vartheta &= 0, & \varepsilon_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left( u_{\vartheta,r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right), \\ \varepsilon_z &= 0, & \varepsilon_{rz} &= 0, & \varepsilon_{\vartheta z} &= \frac{1}{2} u_{\vartheta,z}. \end{aligned} \quad [127. 4]$$

Con riguardo alle relazioni di legame elastico isotropo lineare le corrispondenti componenti di tensione risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0, & \sigma_\vartheta &= 0, & \tau_{r\vartheta} &= \mu \left( u_{\vartheta,r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right), \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{rz} &= 0, & \tau_{\vartheta z} &= \mu u_{\vartheta,z}. \end{aligned} \quad [127. 5]$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni indefinite di equilibrio [127. 3], vediamo che la prima e la terza sono identicamente soddisfatte, mentre la seconda diviene:

$$\tau_{r\vartheta,r} + \tau_{\vartheta z,z} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} = 0. \quad [127. 6]$$

Questa equazione, scritta nella forma equivalente:

$$(r^2\tau_{r\vartheta})_{,r} + (r^2\tau_{\vartheta z})_{,z} = 0 \quad [127. 7]$$

esprime la condizione di esistenza per una *funzione di tensione*  $\Psi(r, z)$ , tale che:

$$r^2\tau_{r\vartheta} = -\Psi_{,z}, \quad r^2\tau_{\vartheta z} = \Psi_{,r}. \quad [127. 8]$$

Il rispetto della congruenza richiede inoltre che le due equazioni significative [127. 5] diano luogo a:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2}\Psi_{,z} &= \mu\left(u_{\vartheta,r} - \frac{u_{\vartheta}}{r}\right) = \mu r\left(\frac{u_{\vartheta}}{r}\right)_{,r}, \\ \frac{1}{r^2}\Psi_{,r} &= \mu u_{\vartheta,r} = \mu r\left(\frac{u_{\vartheta}}{r}\right)_{,z}. \end{aligned} \quad [127. 9]$$

Dividendo per  $r$  e derivando, la prima rispetto a  $z$ , la seconda rispetto a  $r$ , l'eguaglianza dei secondi membri impone alla  $\Psi(r, z)$  di verificare l'equazione:

$$\left(\frac{1}{r^3}\Psi_{,r}\right)_{,r} + \left(\frac{1}{r^3}\Psi_{,z}\right)_{,z} = 0, \quad [127. 10]$$

cioè di essere una *funzione quasi armonica piana*.

Dalle condizioni al contorno sulla superficie laterale del solido di rivoluzione, libera da forze applicate, deduciamo che in ogni punto del contorno  $C$  di una sezione assiale la tensione tangenziale risultante nel piano  $(rz)$  deve essere tangente a  $C$ , avendo componente normale nulla sulla normale a  $C$ , cioè:

$$\tau_{\vartheta r} \frac{dz}{ds} - \tau_{z\vartheta} \frac{dr}{ds} = 0, \quad [127. 11]$$

essendo  $ds$  un elemento del contorno  $C$ . In termini della funzione  $\Psi(r, z)$  otteniamo dalle [127. 8]:

$$\Psi_{,z} \frac{dz}{ds} + \Psi_{,r} \frac{dr}{ds} = 0, \quad [127. 12]$$

per cui  $\Psi(s)$  deve mantenersi costante sul contorno della sezione assiale, determinato da  $\vartheta = \text{cost.}$

Il valore del momento torcente nella sezione trasversale generica di raggio esterno  $a$  risulta allora:

$$M_t = \int_0^a 2\pi r \tau_{z\vartheta} r dr = 2\pi \int_0^a \Psi_{,r} dr = 2\pi [\Psi(a, z) - \Psi(0, z)]. \quad [127. 13]$$

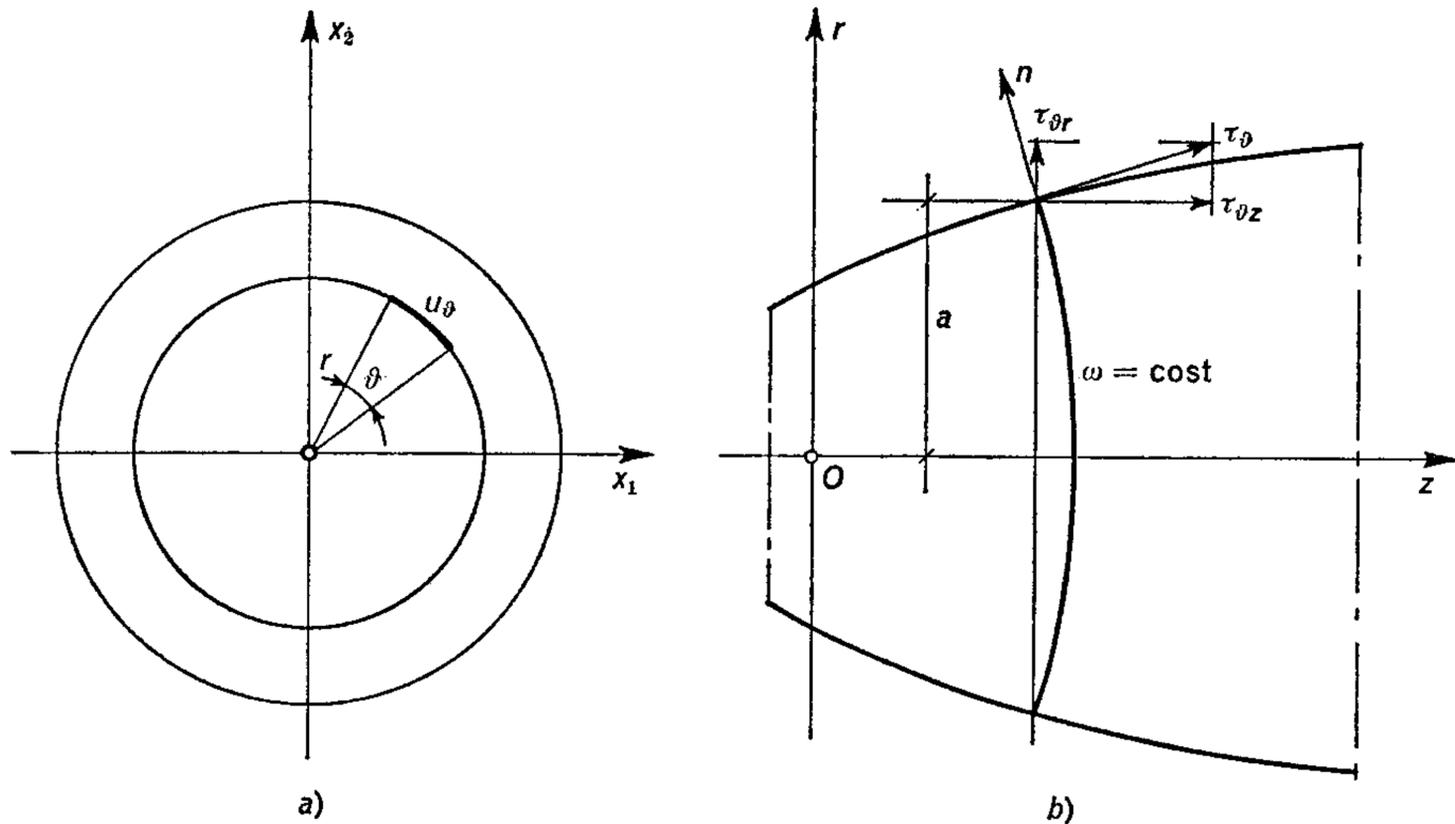


Fig. 151.

Il rapporto  $u_\vartheta/r$  che compare nella [127. 9] esprime la rotazione  $\omega$  di un anello elementare di raggio  $r$  nella sezione trasversale generica. In genere tale rotazione varia con  $r$  per cui l'elemento lineare  $r$  non rimane rettilineo, come nella torsione del cilindro circolare, ma si incurva. In termini di  $\omega$  le equazioni [127. 9] assumono la forma:

$$\mu r^3 \omega_{,r} = \Psi_{,z}, \quad \mu r^3 \omega_{,z} = \Psi_{,r}, \quad [127. 14]$$

dalle quali otteniamo che  $\omega(r, z)$  deve verificare la:

$$(r^3 \omega_{,r})_{,r} + (r^3 \omega_{,z})_{,z} = 0 \quad [127. 15]$$

e risultare quindi una funzione quasi-armonica piana.

Una soluzione della [127. 15] fornisce così la rotazione  $\omega$  in funzione di  $r$  e  $z$ . Ponendo tale soluzione:

$$\omega(r, z) = \text{cost.}, \quad [127. 16]$$

otteniamo l'equazione di una superficie, luogo dei punti che hanno lo stesso valore di  $\omega$ . L'intersezione di tale superficie con la sezione as-

siale del solido è indicata in fig. 151 b). Nel corso della deformazione dovuta al momento torcente le superficie [127. 16] ruotano rigidamente intorno all'asse  $z$  senza subire distorsioni, proprio come avviene per le sezioni del cilindro circolare.

In ogni punto del meridiano della  $\omega = \text{cost.}$  la deformazione è quindi una pura dilatazione angolare nel piano perpendicolare al meridiano e la tensione tangenziale corrispondente, nel piano della se-

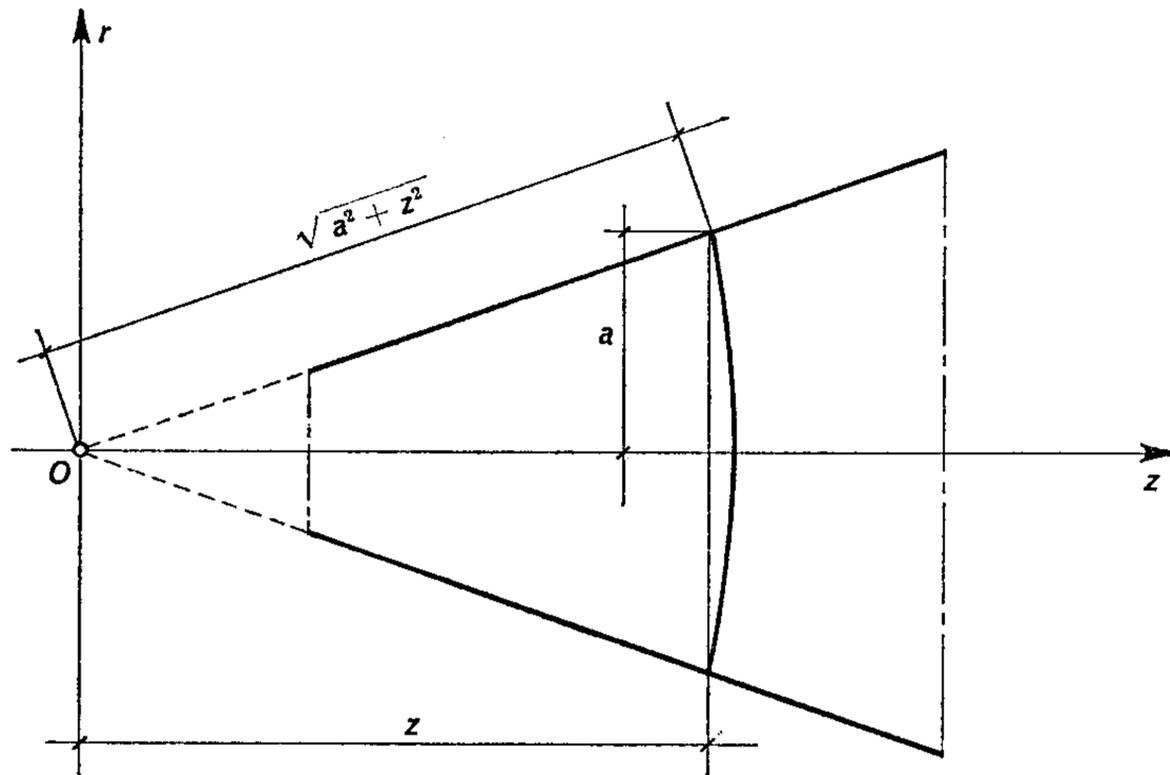


Fig. 152.

zione assiale, ha direzione normale al meridiano. Sul contorno questa tensione deve avere la direzione della tangente, per cui il meridiano risulta perpendicolare al contorno stesso.

La soluzione del problema espresso dalle equazioni [127. 10] e [127. 12] riesce immediata per un solido di forma conica circolare, come indicato in fig. 152.

Indicando con  $\alpha$  la semiapertura abbiamo che la grandezza:

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad [127. 17]$$

è costante sul contorno, cioè per  $r = a$ , dove assume il valore  $\cos \alpha$ . Una funzione arbitraria di  $\zeta$  verificherà certamente la condizione al contorno [127. 12]; assunta allora una funzione di tensione:

$$\Psi(\zeta) = c \left( \zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right), \quad [127. 18]$$

dove  $c$  è una costante arbitraria, vediamo che anche l'equazione differenziale [127. 10] è soddisfatta. Otteniamo inoltre dalle [127. 8]:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r^2} \Psi_{,z} = -cr (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r^2} \Psi_{,r} = -crz (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned} \quad [127. 19]$$

e dalla [127. 13] una relazione per determinare la costante  $c$ :

$$M_t = -2\pi c \left( \frac{2}{3} - \cos a + \frac{1}{3} \cos^3 a \right). \quad [127. 20]$$

Il massimo valore della tensione tangenziale risultante  $\tau_{\vartheta}$  si verifica sul contorno in corrispondenza della sezione trasversale di raggio minimo.

Sostituendo le espressioni [127. 19] nelle [127. 5]:

$$\begin{aligned} \mu \left( u_{\vartheta,r} - \frac{u_{\vartheta}}{r} \right) &= -cr (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ -\mu u_{\vartheta,z} &= -crz (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned} \quad [127. 21]$$

otteniamo con una semplice integrazione:

$$\omega = \frac{u_{\vartheta}}{r} = 3cr (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \omega_0, \quad [127. 22]$$

dove  $\omega_0$  rappresenta una rotazione rigida del cono rispetto al suo asse, e che può essere posta uguale a zero. In tal caso i luoghi dei punti  $\omega = \text{cost.}$  sono superficie sferiche aventi tutte lo stesso centro nell'origine  $O$  delle coordinate.

#### b) *Problemi assialmente simmetrici.*

Quando la distribuzione delle forze applicate ad un solido di rivoluzione è simmetrica rispetto all'asse  $z$ , anche lo stato di deformazione e lo stato di tensione risultano simmetrici rispetto a tale asse. Devono perciò annullarsi identicamente le due componenti di deformazione  $\varepsilon_{r\vartheta} = \varepsilon_{z\vartheta} = 0$  e le due componenti di tensione  $\tau_{r\vartheta} = \tau_{z\vartheta} = 0$ , e le rimanenti essere indipendenti dall'anomalia  $\vartheta$ .

Le sei equazioni di congruenza [127. 1] e [127. 2] si riducono alle quattro seguenti:

$$\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = u_{z,z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}), \quad [127. 23]$$

mentre le tre equazioni di equilibrio [127. 3] si semplificano nelle due:

$$\sigma_{r,r} + \tau_{zr,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\vartheta}}{r} = 0, \quad \tau_{rz,r} + \sigma_{z,z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad [127. 24]$$

essendo identicamente soddisfatta l'equazione di equilibrio secondo  $\vartheta$ .

Anche nel caso presente è possibile ricondursi, come fu fatto per il problema piano nel § 112, ad esprimere le componenti di tensione

mediante una singola funzione  $\Psi(r, z)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\nu \nabla \Psi - \Psi_{,rr})_{,z}, \\ \sigma_\vartheta &= (\nu \nabla \Psi - \frac{1}{r} \Psi_{,r})_z, \\ \sigma_z &= [(2 - \nu) \nabla \Psi - \Psi_{,zz}]_{,z}, \\ \tau_{rz} &= [(1 - \nu) \nabla \Psi - \Psi_{,rz}]_{,z},\end{aligned}\tag{127. 25}$$

dove la funzione di tensione  $\Psi(r, z)$  deve essere soluzione dell'equazione biarmonica in coordinate cilindriche:

$$\nabla \nabla \Psi = 0.\tag{127. 26}$$

I lineamenti del procedimento<sup>1</sup> che conduce alla costruzione della funzione  $\Psi(r, z)$  possono essere sintetizzati nel modo seguente.

Posto, in analogia con la terza [112. 5]:

$$\tau_{rz} = -\varphi_{,rz},\tag{127. 27}$$

essendo  $\varphi(r, z)$  una funzione arbitraria, dalla seconda equazione d'equilibrio abbiamo:

$$\sigma_{zz} = \varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r},\tag{127. 28}$$

a meno di una costante inessenziale. Poichè dalle prime due equazioni di congruenza risulta che  $\varepsilon_r = (r\varepsilon_\vartheta)_{,r}$ , per uno stato elastico isotropo lineare otteniamo in analogia con le [115. 18]:

$$(1 + \nu) (\sigma_r - \sigma_\vartheta) = r (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z)_{,r}.\tag{127. 29}$$

Se introduciamo allora una nuova funzione  $\chi(r, z)$  definita dalla:

$$\sigma_r = \varphi_{,zz} + \chi,\tag{127. 30}$$

la prima equazione di equilibrio [128. 2] diviene:

$$(1 + \nu) \chi_{,r} + (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z)_{,r} = 0,\tag{127. 31}$$

per cui possiamo introdurre la posizione:

$$\sigma_\vartheta = \nu \nabla \varphi - \chi.\tag{127. 32}$$

L'invariante lineare di tensione  $\Theta$  è ora espresso dalla relazione:

$$\Theta \equiv \sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_z = (1 + \nu) \nabla \varphi,\tag{127. 33}$$

e poichè in assenza di forze di massa  $\Theta$  risulta una funzione armonica dalla [41. 9], la funzione  $\varphi$  deve essere biarmonica, cioè  $\nabla \nabla \varphi = 0$ .

<sup>1</sup> A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4<sup>a</sup> ediz., 2<sup>a</sup> rist., pp. 274-276, Cambridge (1952).

Le due funzioni  $\varphi$  e  $\chi$  non sono indipendenti: infatti la seconda [127. 23] per le [40. 8] e [40. 10], può essere scritta come:

$$Eu_{zr} = r(\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z), \quad [127. 34]$$

o anche, tenendo presente la [128. 31]:

$$Eu_r = -(1 + \nu)r\chi, \quad [127. 35]$$

per cui la relazione di elasticità  $\tau_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$ , poichè  $E = 2\mu(1 + \nu)$ , assume la forma:

$$Eu_{z,r} = -2(1 + \nu)\varphi_{,rz} - (1 + \nu)r\chi_{,z}. \quad [127. 36]$$

La relazione di elasticità  $E\varepsilon_{zz} = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$  per la terza [127. 23] diviene:

$$Eu_{z,z} = (1 + \nu)\left(\varphi_{,rr} + \frac{1}{r}\varphi_{,r} - \nu\nabla\varphi\right), \quad [127. 37]$$

per cui le due equazioni [127. 36] e [127. 37] sono compatibili se, e solo se  $u_{z,rz} = u_{z,zr}$ , cioè:

$$(1 - \nu)\nabla\varphi_{,r} + \varphi_{,rzz} = r\chi_{,zz}. \quad [127. 38]$$

Introdotta una nuova funzione  $v(r, z)$  definita dalla:

$$r\chi = \varphi_{,r} + v_{,r}, \quad [127. 39]$$

otteniamo:

$$v_{,zz} = (1 - \nu)\nabla\varphi. \quad [127. 40]$$

Le equazioni [127. 36] e [127. 37] divengono in termini di  $v$ :

$$Eu_{z,r} = (1 + \nu)(v - \varphi)_{,rz}, \quad Eu_{z,z} = (1 + \nu)(v - \varphi)_{,zz}, \quad [127. 41]$$

e quindi possiamo esprimere  $u_r$ ,  $u_z$  in termini di  $\varphi$  e  $v$  mediante le:

$$Eu_r = -(1 + \nu)(v + \varphi)_{,r}, \quad Eu_z = (1 + \nu)(v - \varphi)_{,z}. \quad [127. 42]$$

Ora, poichè la dilatazione cubica deve risultare, da un lato:

$$\Delta = u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + u_{z,z} = \frac{1 + \nu}{E}(\nabla\varphi + \nabla v - 2v_{z,z}) = \frac{1 + \nu}{E}[(1 - 2\nu)\nabla\varphi - \nabla v], \quad [127. 43]$$

e dall'altro per la [40. 16] con riguardo alla tabella:

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E}\Theta = \frac{1 - 2\nu}{E}(1 + \nu)\nabla\varphi, \quad [127. 44]$$

ne consegue che la funzione  $v$  deve risultare armonica, cioè  $\nabla v = 0$ .

In luogo delle due funzioni  $\varphi$  e  $v$  possiamo esprimere le componenti di tensione in termini di una singola funzione  $\psi$  definita dalla:

$$\psi = \varphi + v. \quad [127. 45]$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \nu \nabla \psi - \psi_{,rr}, \\ \sigma_\vartheta &= \nu \nabla \psi - \frac{1}{r} \psi_{,r}, \\ \sigma_z &= (2 - \nu) \nabla \psi - \psi_{,zz}.\end{aligned}\quad [127.46]$$

Infine la prima equazione di equilibrio [127.24] ci permette di scrivere immediatamente  $\tau_{rz}$  in termini di una funzione  $\Psi$  tale che  $\psi = \Psi_{,z}$ , da cui otteniamo le prime tre [127.25]. La prima equazione di equilibrio dà allora il valore di  $\tau_{rz}$  espresso dalla quarta [127.25] mentre la seconda equazione di equilibrio [127.24] richiede la biarmonicità della funzione di tensione  $\Psi$ , espressa appunto dall'equazione [127.26].

Le espressioni per gli spostamenti sono ottenute, in termini della  $\Psi$ , dalle relazioni [127.42]:

$$u_r = -\frac{1+\nu}{E} \Psi_{,rz}, \quad u_z = \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu) \Psi \nabla + \Psi_{,rr} + \frac{1}{r} \Psi_{,r}]. \quad [127.47]$$

Introdotta la funzione di tensione il problema è dunque ricondotto alla risoluzione dell'unica equazione per la  $\Psi$ :

$$\nabla \nabla \Psi \equiv \left( \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_{zz}^2 \right) \left( \partial_{rr}^2 \Psi + \frac{1}{r} \partial_r \Psi + \partial_{zz}^2 \Psi \right) = 0, \quad [127.48]$$

con riguardo alle condizioni al contorno per certe forme differenziali nella stessa  $\Psi$  corrispondenti alle condizioni imposte sul contorno stesso alle componenti di tensione, in base alle [127.25], od alle componenti di spostamento, in base alle [127.47].

Molti problemi di interesse applicativo possono essere risolti sulla base dell'impostazione sopra delineata: poichè la loro trattazione va oltre il carattere istituzionale di questo libro, si rimanda il lettore ad una classica opera<sup>1</sup>, dove troverà un'esauriente informazione sull'argomento.

## 128. Soluzioni mediante procedimenti variazionali.

Abbiamo già discusso l'impiego dei metodi diretti di calcolo delle variazioni nello studio di problemi, come la torsione secondo Saint-Venant nel § 107, riducibili alla ricerca di una funzione armonica: vediamo ora come venga formulato il problema variazionale associato ad una funzione biarmonica.

Con riferimento ad uno stato piano nella deformazione le condizioni al contorno del problema biarmonico nella funzione di tensione

<sup>1</sup> S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, cap. XIII, pp. 343-398, New York (1951).

$\Psi(x_1, x_2)$  si riferiscono al secondo problema ai limiti, quando cioè siano assegnate sul contorno  $C$  del dominio piano  $A$  le forze superficiali  $f_1, f_2$ , secondo le [112. 8] o le equivalenti [112. 10] e [112. 13]. In sostanza, il problema piano di deformazione formulato in termini della funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  ha significato come problema di equilibrio: la congruenza della deformazione richiede, in assenza di forze di massa, la biarmonicità della funzione di tensione secondo la [112. 7].

Il problema variazionale corrispondente deve essere perciò istituito parimenti in termini di equilibrio, cioè in modo che la classe di funzioni nella quale ha significato il problema stesso sia quella delle *funzioni staticamente ammissibili*. Per tale motivo ci riferiremo al funzionale  $K[\sigma_{ij}, f_i]$ , definito dalla [36. 14] nel caso generale, dalla [36. 19] nel caso di spostamenti infinitesimi e dalla [39. 2] nel caso, che qui ci interessa, di un legame elastico lineare isotropo.

Tale funzionale comprende due termini: l'energia potenziale elastica complementare dell'intero solido ed il lavoro esterno compiuto dalle forze superficiali applicate sulla porzione del contorno  $C$  dove sono assegnati gli spostamenti. Questo secondo termine è nullo nel caso presente in quanto, come già negli esempi discussi in precedenza, ci riferiamo a sistemi piani *liberi*, per i quali vengono assegnate esclusivamente le forze. Il funzionale si riduce così al solo primo termine:

$$K[\sigma_{ij}, f_i] = - \int_A \Phi_c dA, \quad [128. 1]$$

dove possiamo limitarci a considerare l'area  $A$  della sezione trasversale del cilindro anzichè il suo volume  $V$  in virtù delle ipotesi fondamentali del problema piano nella deformazione.

La funzione integranda è ora:

$$\Phi_c = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\tau_{12} \varepsilon_{12}), \quad [128. 2]$$

o anche, con riguardo alle relazioni di legame lineare elastico isotropo [110. 13]:

$$\Phi_c = \frac{1}{4\mu} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\tau_{12}^2 - \nu(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22})]. \quad [128. 3]$$

Tenendo presenti le [112. 5] le componenti di tensione possono essere espresse in termini delle derivate seconde della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  ed il funzionale  $K$  diviene una funzione di  $\Psi$  della forma:

$$K[\Psi] = - \frac{1}{4\mu} \int_A [\Psi_{,11}^2 + \Psi_{,22}^2 + 2\Psi_{,12}^2 - \nu(\Psi_{,11} + \Psi_{,22})^2] dA \quad [128. 4]$$

e deve risultare massimo nella classe delle funzioni staticamente ammissibili in corrispondenza di una soluzione congruente, cioè della soluzione effettiva.

La condizione di stazionarietà del funzionale viene espressa passando dalla funzione  $\Psi$  ad una funzione variata  $\Psi + \delta\Psi$  ed imponendo che la variazione corrispondente  $\delta K$  sia nulla, cioè:

$$\begin{aligned} \delta K \equiv & -\frac{1}{2\mu} \int_A [\Psi_{,11} \delta\Psi_{,11} + \Psi_{,22} \delta\Psi_{,22} + 2\Psi_{,12} \delta\Psi_{,12} - \\ & - \nu(\Psi_{,11} \delta\Psi_{11} + \Psi_{,22} \delta\Psi_{,22} + \Psi_{,22} \delta\Psi_{,11} + \Psi_{,11} \delta\Psi_{,22})] dA = 0, \end{aligned} \quad [128. 5]$$

o anche, trasformando l'integrale doppio con la formula di Gauss:

$$\begin{aligned} \delta K \equiv & \frac{1}{2\mu} \int_C \{ (1 - \nu) [(\Psi_{,111} + \Psi_{,122}) n_1 + (\Psi_{,112} + \Psi_{,222}) n_2] \delta\Psi - \\ & - (\Psi_{,11} n_1 + \Psi_{,12} n_2) \delta\Psi_{,1} - (\Psi_{,12} n_1 + \Psi_{,22} n_2) \delta\Psi_{,2} + \\ & + \nu (\Psi_{,11} + \Psi_{,22}) (n_1 \delta\Psi_{,1} + n_2 \delta\Psi_{,2}) \} dC - \\ & - \frac{1}{2\mu} \int_A (1 - \nu) (\Psi_{,1111} + \Psi_{,2222} + 2\Psi_{,1122}) \delta\Psi dA = 0. \end{aligned} \quad [128. 6]$$

Introdotti l'operatore di derivata rispetto alla normale  $d/dn$  e l'operatore di Laplace  $\nabla$ , la precedente equazione variazionale assume la forma compatta:

$$\begin{aligned} \delta K \equiv & \frac{1}{2\mu} \int_C \left[ (1 - \nu) \frac{d\nabla\Psi}{dn} \delta\Psi - \frac{d\Psi_{,1}}{dn} \delta\Psi_{,1} - \right. \\ & \left. - \frac{d\Psi_{,2}}{dn} \delta\Psi_{,2} + \nu \nabla\Psi \frac{d\delta\Psi}{dn} \right] dC - \frac{1}{2\mu} \int_A (1 - \nu) \nabla\nabla\Psi \delta\Psi dA = 0. \end{aligned} \quad [128. 7]$$

Ora, sul contorno  $C$  sono assegnate le forze superficiali  $f_1, f_2$  o anche, nelle formulazioni equivalenti [112. 10] e [112. 13] le derivate parziali  $\Psi_{,1}, \Psi_{,2}$  e rispettivamente le  $\Psi, d\Psi/dn$ . Dovendo perciò risultare identicamente nulle le variazioni di tali grandezze l'equazione variazionale si riduce alla:

$$\delta K \equiv -\frac{1 - \nu}{2\mu} \int_A \nabla\nabla\Psi \delta\Psi dA = 0. \quad [128. 8]$$

L'equazione trovata deve sussistere per una variazione arbitraria  $\delta\Psi$  delle funzioni ammissibili  $\Psi(x_1, x_2)$ : richiede perciò, in quanto  $\nu > \frac{1}{2}$

e quindi  $1 - \nu$  è diverso da zero, come condizione di congruenza che la funzione di tensione sia biarmonica in  $A$ .

Come applicazione consideriamo un sistema piano di forma rettangolare sollecitato su due lati opposti da una distribuzione parabolica di forze superficiali  $f_1$  secondo quanto indicato in fig. 153, essendo  $f$  il valore massimo in corrispondenza dell'asse  $x_1$ .

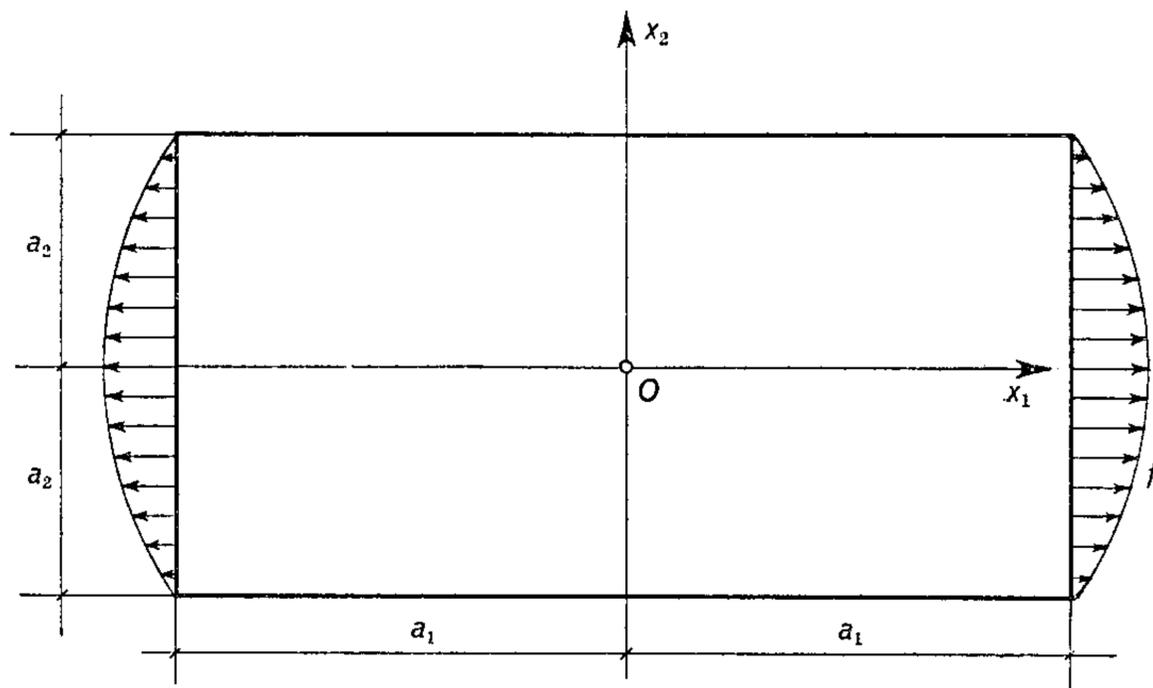


Fig. 153.

Le condizioni di equilibrio ai limiti lungo il contorno risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f \left( 1 - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right), & \tau_{12} &= 0 & \text{per } x_1 &= \pm a_1, \\ \sigma_{22} &= 0, & \tau_{12} &= 0 & \text{per } x_2 &= \pm a_2. \end{aligned} \quad [128. 9]$$

Poichè l'equazione del contorno è:

$$(x_1^2 - a_1^2)(x_2^2 - a_2^2) = 0, \quad [128. 10]$$

nella classe di soluzioni approssimate può essere rappresentata da una funzione di tensione di tipo polinomiale:

$$\Psi_n(x_1, x_2) = \frac{f x_2^2}{2} \left( 1 - \frac{x_2^2}{6 a_2^2} \right) + (x_1^2 - a_1^2)^2 (x_2^2 - a_2^2)^2 \sum_{k=0}^n (c_{1k} x_1^{2k} + c_{2k} x_2^{2k}), \quad [128. 11]$$

dove la somma è stata limitata alle sole potenze pari di  $x_1, x_2$  in quanto la distribuzione delle tensioni deve risultare simmetrica rispetto ad entrambi gli assi.

Le equazioni indefinite di equilibrio [112. 1] risultano verificate implicitamente dall'aver espresso le componenti di tensione in termini

delle derivate seconde alla  $\Psi(x_1, x_2)$  in base alle [112. 5], mentre le condizioni ai limiti [128. 9] risultano pure verificate come si può accertare direttamente.

Sostituiamo allora al problema variazionale [128. 8] per il funzionale  $K[\Psi]$  un problema approssimato per un nuovo funzionale  $K_n[\Psi_n]$  ottenuto sostituendo la  $\Psi(x_1, x_2)$  con la  $\Psi_k(x_1, x_2)$ . Tale funzionale verrà così a dipendere dalle  $2n$  costanti incognite  $c_{1k}, c_{2k}$ . Il problema variazionale si ridurrà in tal modo ad un problema di estremo ordinario, nel quale le costanti saranno determinate dalle  $2n$  equazioni lineari nelle  $2n$  incognite  $c_{1k}, c_{2k}$ :

$$\frac{\partial K_n}{\partial c_{1k}} = 0, \quad \frac{\partial K_n}{\partial c_{2k}} = 0. \quad [128. 12]$$

Poichè lo scopo è di mostrare la tecnica del procedimento, per semplicità di sviluppi formali ci limitiamo a considerare il solo primo termine della somma, cioè per  $k = 0$  la sola incognita  $c_0 = c_{10} + c_{20}$ , assumendo perciò la seguente funzione approssimata di tensione:

$$\Psi_0 = \frac{fx_2^2}{2} \left(1 - \frac{x_2^2}{6a_2^2}\right) + c_0 (x_1^2 - a_1^2)^2 (x_2^2 - a_2^2)^2. \quad [128. 13]$$

Ottenuta così dalla [128. 4] la funzione  $K_0[\Psi_0]$ , la condizione di minimo ordinario alla quale si riducono le [128. 12]:

$$\frac{\partial K_0}{\partial c_0} \equiv \frac{64}{7} c_0 \left(1 + \frac{4a_2^2}{7a_1^2} + \frac{a_2^4}{a_1^4}\right) - \frac{f}{a_1^4 a_2^4} = 0 \quad [128. 14]$$

fornisce il valore della costante incognita  $c_0$ .

Nel caso particolare di un sistema piano di forma quadrata, per  $a_1 = a_2 = a$  abbiamo:

$$c_0 = 0,04253 \frac{f}{a^6} \quad [128. 15]$$

e le componenti di tensione possono essere ottenute dalle [112. 5] come derivate seconde della funzione di tensione  $\Psi_0(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f \left[ \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) - 0,1702 \left(1 - \frac{3x_2^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^2 \right], \\ \sigma_{22} &= - 0,1702 f \left(1 - \frac{3x_1^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right)^2, \\ \tau_{12} &= - 0,6805 f \frac{x_1 x_2}{a^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad [128. 16]$$

Una migliore approssimazione<sup>1</sup> può essere ottenuta considerando i primi tre termini della serie: il problema consiste in tal caso nel determinare le tre costanti  $c_0$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{21}$ . La distribuzione delle tensioni non risulta però sensibilmente cambiata.

### 129. Soluzioni mediante procedimenti alle differenze.

Anche per i problemi trattati nel presente capitolo si può ricorrere utilmente all'impiego del metodo alle differenze finite, i cui fon-

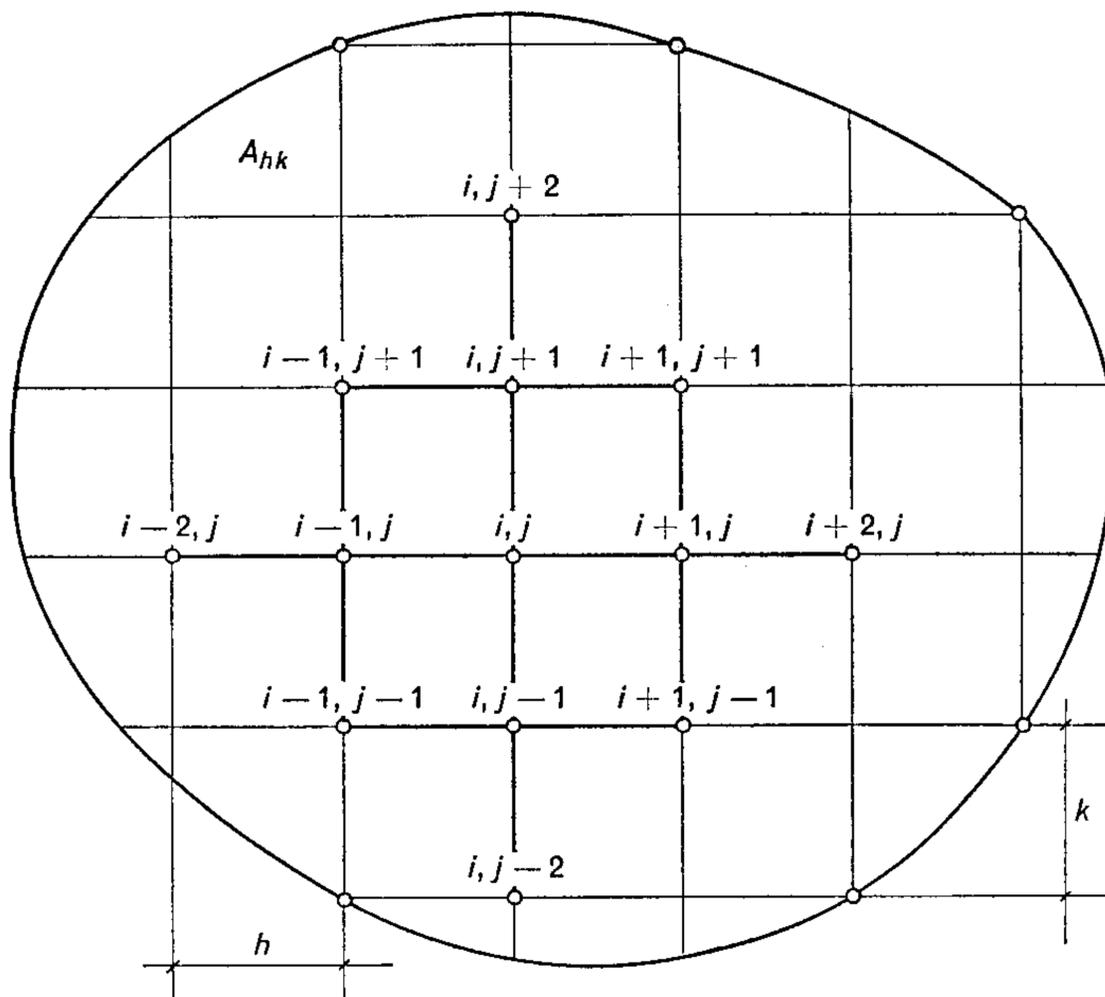


Fig. 154.

damenti furono esposti nel § 108. Con riferimento al campo reticolare  $A_{hk}$  indicato nella fig. 154, l'operatore biarmonico può essere espresso in termini alle differenze sostituendo in esso le derivate parziali del quarto ordine con le corrispondenti differenze quarte.

Ora le differenze seconde di una funzione  $f_{ij}$  risultano dalle definizioni [108. 4] nella forma:

$$D_{11}f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i-1,j} - 2f_{ij} + f_{i+1,j}), \quad D_{22}f_{ij} = \frac{1}{k^2} (f_{i,i-1} - 2f_{ij} + f_{i,j+1}), \quad [129. 1]$$

<sup>1</sup> La soluzione è dovuta a S. TIMOŠENKO, *Phil. Mag.*, 47, 1095 (1924); il calcolo svolto per un funzionale modificato si troverà in L. V. KANTOROVICĀ, V. I. KRYLOV, *Približennye metody vyššego an liza*, pp. 304-305, Moskva e Leningrad (1952).

per cui le differenze quarte si otterranno sostituendo ai valori della funzione  $f_{ij}$  le differenze seconde relative allo stesso punto, cioè:

$$\begin{aligned} D_{1111}f_{ij} &= \frac{1}{h^4} (D_{11}f_{i-1,j} - 2D_{11}f_{ij} + D_{11}f_{i+1,j}), \\ D_{2222}f_{ij} &= \frac{1}{k^4} (D_{22}f_{i,j-1} - 2D_{22}f_{ij} + D_{22}f_{i,j+1}), \\ D_{1122}f_{ij} &= \frac{1}{h^2k^2} (D_{11}f_{i,j-1} - 2D_{11}f_{ij} + D_{11}f_{i,j+1}), \\ D_{2211}f_{ij} &= \frac{1}{k^2h^2} (D_{22}f_{i-1,j} - 2D_{22}f_{ij} + D_{22}f_{i+1,j}). \end{aligned} \quad [129. 2]$$

Dalle definizioni [129. 1] per le differenze seconde e tenendo conto del punto rispetto al quale si intendono calcolate, abbiamo:

$$\begin{aligned} D_{1111}f_{ij} &= \frac{1}{h^4} (f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{ij} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}), \\ D_{2222}f_{ij} &= \frac{1}{k^4} (f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{ij} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}), \\ D_{1122}f_{ij} &= \frac{1}{h^2k^2} (f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i-1,j} - 2f_{i,j-1} + \\ &\quad + 4f_{ij} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} - 2f_{i,j+1}), \end{aligned} \quad [129. 3]$$

e quindi in definitiva l'espressione cercata per l'operatore biarmonico:

$$\nabla_{hk}\nabla_{hk} = D_{1111} + 2D_{1122} + D_{2222}. \quad [129. 4]$$

Se, in particolare, il reticolo è a maglia quadrata, per  $h = k$  si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_h\nabla_h &= \frac{1}{h^4} [20f_{ij} - 8(f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1}) - \\ &\quad - 2(f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1}) + \\ &\quad + f_{i-2,j} + f_{i,j+2} + f_{i+2,j} + f_{i,j-2}]. \end{aligned} \quad [129. 5]$$

A titolo di esempio applichiamo le considerazioni precedenti al problema piano nella deformazione per un campo di forma rettangolare<sup>1</sup> soggetto alla distribuzione equilibrata di forze al contorno, indicata nella fig. 155.

La determinazione dello stato di tensione nel sistema piano considerato si riconduce alla ricerca della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$

<sup>1</sup> K. BEYER, *Die Statik im Eisenbetonbau*, 2ª ediz., 2, pp. 733-737, Berlin (1934).

espressa dal problema al contorno nella forma [112. 13]. Come conseguenza della simmetria del sistema rispetto all'asse  $x_2$ , i valori della funzione  $\Psi$  nei punti contrassegnati dallo stesso numero risultano evidentemente gli stessi: possiamo quindi ridurre il numero delle incognite ai 20 valori indicati in fig. 155.

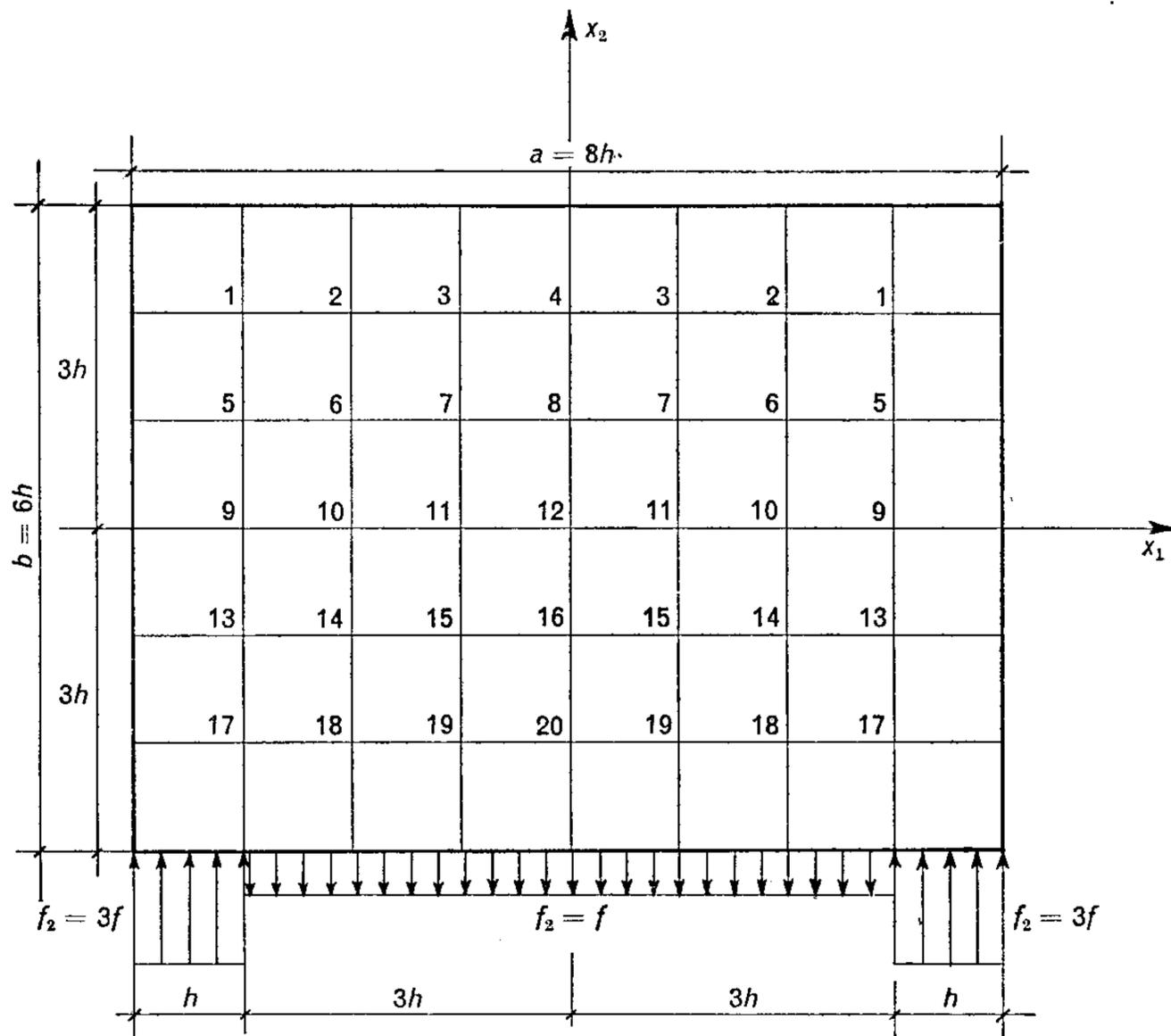


Fig. 155.

Con riguardo alle [112. 11] e [112. 12] sul contorno devono essere prescritti i valori della funzione  $\Psi$  e della sua derivata rispetto alla normale esterna, cioè:

$$\Psi(s) = \int_{S_0}^S (F_1 dx_2 - F_2 dx_1), \quad [129. 6]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \int_{S_0}^S (f_1 n_2 - f_2 n_1) ds. \quad [129. 7]$$

Nel caso presente, ricordando il significato [112. 20] di  $F_1$  e  $F_2$ , per  $f_1 = 0$  abbiamo sul tratto di contorno  $x_2 = -3h$  dove sono applicate le forze ripartite  $f_2$ :

$$\Psi(\bar{x}_1) = - \int_0^{\bar{x}_1} F_2 dx_1 = - \int_0^{\bar{x}_1} \left( dx_1 \int_0^x f_2 dx_1 \right), \quad [129. 8]$$

dove  $\bar{x}_1$  rappresenta la posizione  $x_1$  nella quale si vuole calcolare la  $\Psi$ . Mediante un'integrazione per parti otteniamo la funzione  $\Psi$  nella forma:

$$\Psi(\bar{x}_1) = \int_0^{\bar{x}_1} x_1 f_2 dx_1 - \left| x_1 \int_0^{x_1} f_2 dx_1 \right|_0^{\bar{x}_1} = - \int_0^{\bar{x}_1} (\bar{x}_1 - x_1) f_2 dx_1, \quad [129. 9]$$

		39	38	37	36									
	25	24	23	22	21	0	0	0	0	0				
40	26	1	2	3	4	347	301	168	59	0				
41	27	5	6	7	8	1148	1004	628	205	0				
42	28	9	10	11	12	463	1322	2039	2309	0				
43	29	13	14	15	16	817	2231	3333	3734	0				
44	30	17	18	19	20	1224	3249	4672	5166	0				
	31	32	33	34	35	6000	5500	4000	1500	0				
		45	46	47	48									

Fig. 156.

dalla quale possiamo così calcolare i valori al contorno:

$$\begin{aligned} \Psi_{32} &= -3fh \frac{h}{2} &= -1,5fh^2, \\ \Psi_{33} &= -3fh \frac{3h}{2} + fh \frac{h}{2} &= -4,0fh^2, \\ \Psi_{34} &= -3fh \frac{5h}{2} + f \cdot 2h \cdot h &= -5,5fh^2, \\ \Psi_{35} &= -3fh \frac{7h}{2} + f \cdot 3h \frac{3h}{2} &= -6,0fh^2. \end{aligned} \quad [129. 10]$$

Nello scrivere le equazioni alle differenze [129. 5] nei punti del reticolo adiacenti al contorno è necessario ricorrere ai valori della funzione all'esterno del campo. Completato allora questo come indicato nella prima metà della fig. 156, i valori nei punti esterni (come  $\Psi_{36}$ ,  $\Psi_{37}$ ,  $\Psi_{38}$ , ecc.) possono essere ottenuti mediante i valori corrispondenti

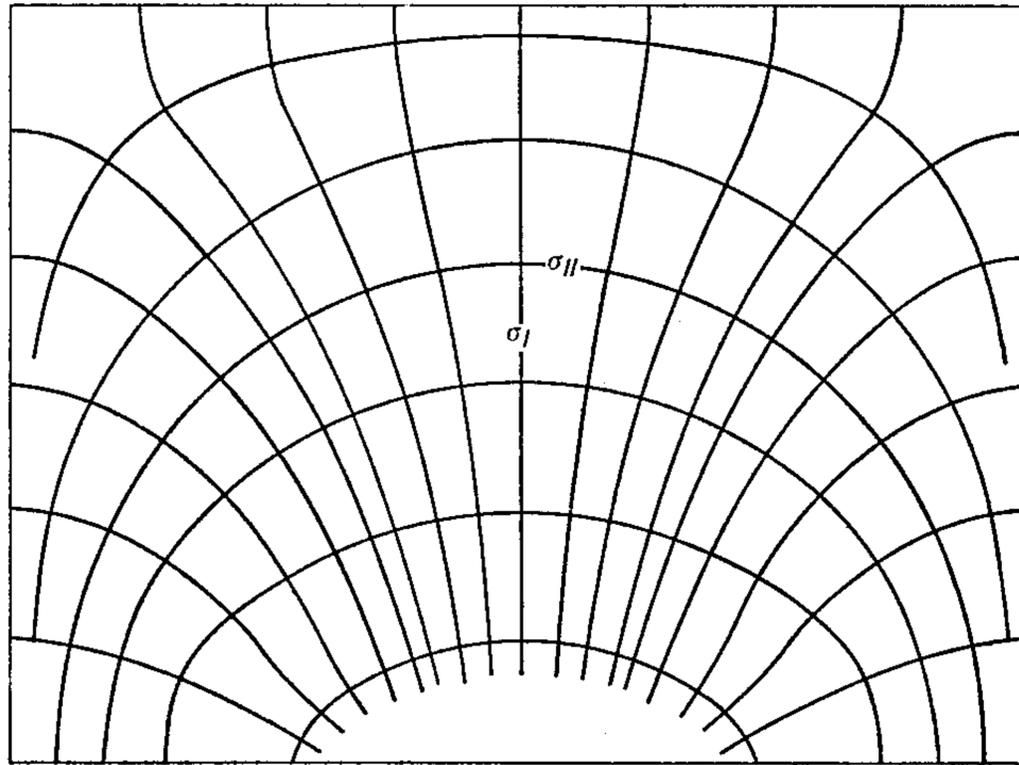


Fig. 157.

nei punti interni (come  $\Psi_4$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_2$ , ecc.) utilizzando la condizione al contorno [129. 7], cioè per  $n \equiv -x_2$ :

$$\frac{\Psi_{36} - \Psi_4}{2h} = 0, \dots, \quad \frac{\Psi_{42} - \Psi_9}{2h} = 0, \dots, \quad \frac{\Psi_{46} - \Psi_{18}}{2h} = 0, \dots, \quad [129. 11]$$

da cui:

$$\Psi_{36} = \Psi_4, \dots, \quad \Psi_{42} = \Psi_9, \dots, \quad \Psi_{46} = \Psi_{18}, \dots \quad [129. 12]$$

Dalla risoluzione del sistema di 20 equazioni nelle 20 incognite  $\Psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 20$ ), relative ai 20 punti interni considerati del reticolo, si ottengono i valori di tali incognite riportati nella seconda metà della fig. 156, dove sono stati moltiplicati per il coefficiente  $c = -1000/fh^2$ .

Le [112. 5], espresse in termini delle differenze seconde della  $\Psi$ , permettono di determinare le componenti di tensione nei punti del

reticolo:

$$\sigma_{11} = D_{22} \Psi = \frac{1}{h^2} (\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{ij} + \Psi_{i,j+1}),$$

$$\sigma_{22} = D_{11} \Psi = \frac{1}{h^2} (\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{ij} + \Psi_{i+1,j}), \quad [129. 13]$$

$$\tau_{12} = -D_{12} \Psi = -\frac{1}{4h^2} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}).$$

Da queste si possono infine ottenere i valori delle tensioni principali  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  applicando le [113. 2] e le direzioni principali  $\alpha_0 \pm \pi/2$  applicando la [113. 3].

Nella fig. 157 appaiono le traiettorie delle direzioni principali, cioè le linee isostatiche secondo le quali il materiale è semplicemente teso (linee  $\sigma_I$ ) o compresso (linee  $\sigma_{II}$ ).