

## CAPITOLO IX

### PROBLEMI PARTICOLARI DI SOLLECITAZIONE

#### 87. Considerazioni preliminari.

La discussione del problema di Saint-Venant svolta nel precedente cap. VIII ci ha permesso, nel caso di un solido elastico omogeneo isotropo di forma cilindrica, di pervenire ad alcuni notevoli risultati per quanto riguarda la distribuzione delle tensioni e delle deformazioni. Tali risultati sono stati ottenuti in generale, senza specificare cioè la forma della sezione trasversale retta dal cilindro: il necessario completamento dell'analisi impostata in tal senso esige l'esame particolare condotto separatamente per i vari casi di sollecitazione e per le forme più correnti della sezione che abbiano interesse nelle applicazioni.

Inoltre, sebbene il problema di Saint-Venant si riferisca ad un solido elastico omogeneo isotropo, i risultati ottenuti possono rappresentare un valido fondamento per ulteriori generalizzazioni, estese ad uno stato anelastico del materiale o addirittura ad uno stato limite di plasticità o rottura. Naturalmente tali estensioni esulano, a stretto rigore di termini, dal problema di Saint-Venant inteso nella sua impostazione originaria e rappresentano quindi estrapolazioni più o meno giustificate da un punto di vista teorico ma, almeno con buona approssimazione, sono confermate dall'esperienza.

Infine alcune considerazioni limitate al caso di spostamenti e rotazioni infinitesimi, ipotesi sistematicamente seguita nel corso della trattazione del problema, possono costituire la base per una generalizzazione a deformazioni finite, dalla quale possono trarsi risultati di un certo rilievo.

In conclusione, nel presente capitolo svolgeremo una indagine approfondita dei vari problemi particolari di sollecitazione, trattati in forma globale nel capitolo precedente, e nel contempo cercheremo di

estendere i risultati sia a legami costitutivi tensioni-deformazioni diversi da quello elastico, sia a circostanze fisiche nelle quali la geometria dello stato di deformazione non sia più esprimibile con semplici relazioni lineari tra le componenti di deformazione e le derivate di spostamento.

### 88. Sollecitazione di forza normale.

Quando l'unica caratteristica diversa da zero sia la forza normale  $N$  lo stato di tensione si riduce all'unica componente  $\sigma_{33}$ . Questa risulta

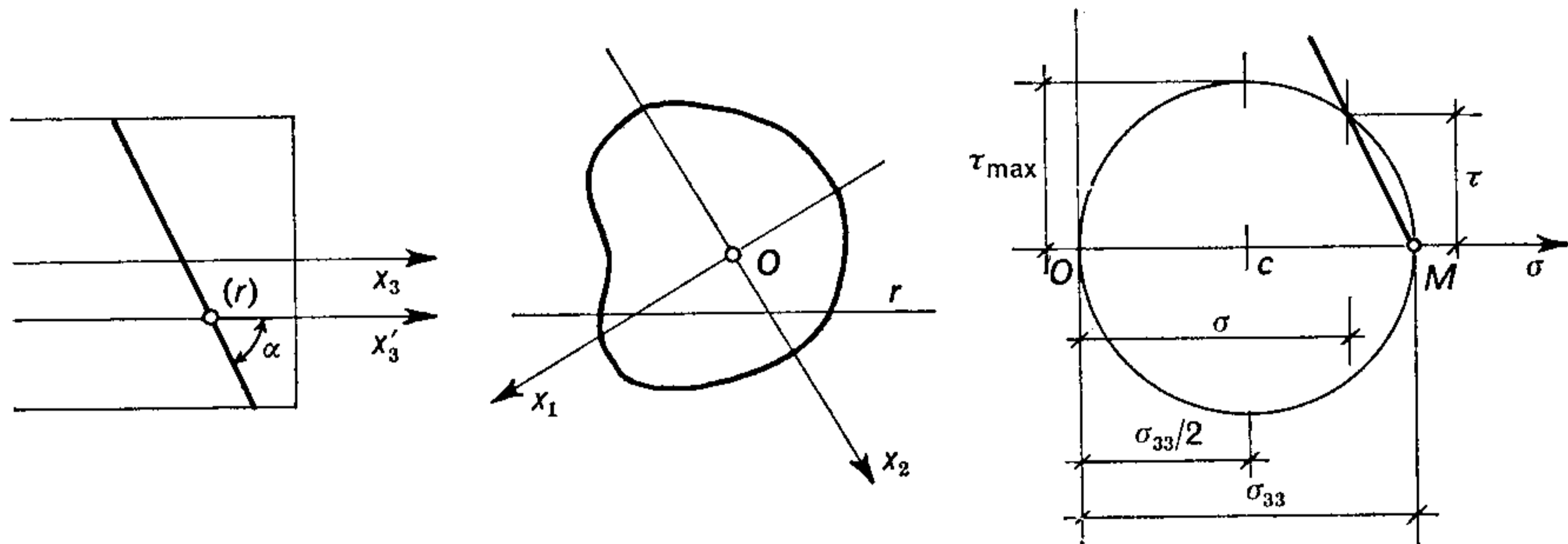


Fig. 69.

costante in tutti i punti della sezione trasversale retta del cilindro come mostra la relazione elementare:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A}, \quad [88. 1]$$

desunta dalla [81. 1] in assenza di momenti flettenti.

Poichè l'asse  $x$  è direzione principale ed ogni retta  $r$  nel piano della sezione trasversale può dunque essere riguardata come direzione principale, secondo quanto fu detto nel § 82, lo stato di tensione sugli elementi superficiali dei piani del fascio di sostegno  $r$  potrà essere determinato dalla rappresentazione piana di Mohr esposta nel § 26.

Per una forza normale  $N$  di trazione abbiamo così nel piano delle tensioni  $(\sigma\tau)$  il cerchio rappresentativo con centro  $C$  nel punto di ascissa  $\sigma = \frac{1}{2} \sigma_{33}$  e polo  $M$  nel punto  $\sigma = \sigma_{33}$ : conducendo da  $M$  la parallela all'elemento piano considerato otteniamo (fig. 69) le componenti, normale  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$ , della tensione agente sull'elemento stesso. Data l'arbitrarietà della direzione principale  $r$  nel piano della sezione, lo stato di tensione risulta identico su ogni elemento superficiale piano a parità di inclinazione  $\alpha$  rispetto all'asse  $x_3$ : in parti-

colare sugli elementi tangenti al cono di rotazione intorno all'asse  $x'_3$  parallelo a  $x_3$  e semiapertura  $\pi/4$ , la tensione normale vale  $\sigma = \frac{1}{2} \sigma_{33}$  mentre la tensione tangenziale vi raggiunge il valore massimo:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{33} .$$

Alla tensione normale  $\sigma_{33}$  corrispondono una dilatazione lineare per gli elementi paralleli a  $x_3$  ottenuta dalla [85. 1] in questo caso particolare:

$$\varepsilon_{33} = \frac{N}{EA} , \quad [88. 2]$$

e due dilatazioni lineari per gli elementi paralleli a  $x_1, x_2$  rispettivamente, ottenute dalla [85. 2]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = - \frac{\nu N}{EA} . \quad [88. 3]$$

Le fibre longitudinali del cilindro soggetto ad una forza normale di trazione si allungano tutte della stessa quantità  $\Delta l$  [85. 3], mentre l'area della sezione trasversale subisce una contrazione  $\Delta A$  [85. 5], ed il volume del cilindro una variazione positiva  $\Delta V$  [85. 7], cioè rispettivamente:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} , \quad \Delta A = - \frac{2\nu N}{E} , \quad \Delta V = \frac{1 - 2\nu}{E} Nl . \quad [88. 4]$$

Il lavoro di deformazione, già espresso dal primo termine della [85. 14], può essere calcolato da una immediata applicazione del teorema di Clapeyron [38. 6], e precisamente come metà del lavoro esterno compiuto dalla forza normale  $N$ , supposta agente con tutta la sua intensità finale, per lo spostamento  $\Delta l$  del suo punto di applicazione:

$$U_N = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} . \quad [88. 5]$$

A meno di un moto rigido d'insieme le componenti di spostamento sono ottenute per integrazione delle [84. 6] particolarizzate al caso in esame:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_{11} x_1 = - \frac{\nu N x_1}{EA} , \\ u_2 &= \varepsilon_{22} x_2 = - \frac{\nu N x_2}{EA} , \\ u_3 &= \varepsilon_{33} x_3 = \frac{N x_3}{EA} , \end{aligned} \quad [88. 6]$$



e come funzioni lineari delle coordinate definiscono una *trasformazione affine*. In particolare ogni sezione trasversale retta si conserva piana spostandosi parallelamente a sè stessa di una quantità proporzionale a  $x_3$  e trasformandosi nel proprio piano *omoteticamente*, perchè in ogni punto della sezione il modulo del vettore spostamento:

$$u \equiv \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{\nu N}{EA} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad [88.7]$$

risulta proporzionale alla distanza del punto stesso dal baricentro della sezione.

### 89. Forza normale in campo plastico.

Supponendo che le relazioni precedenti rimangano valide sino al limite di snervamento del materiale, potremo utilizzare i risultati ot-

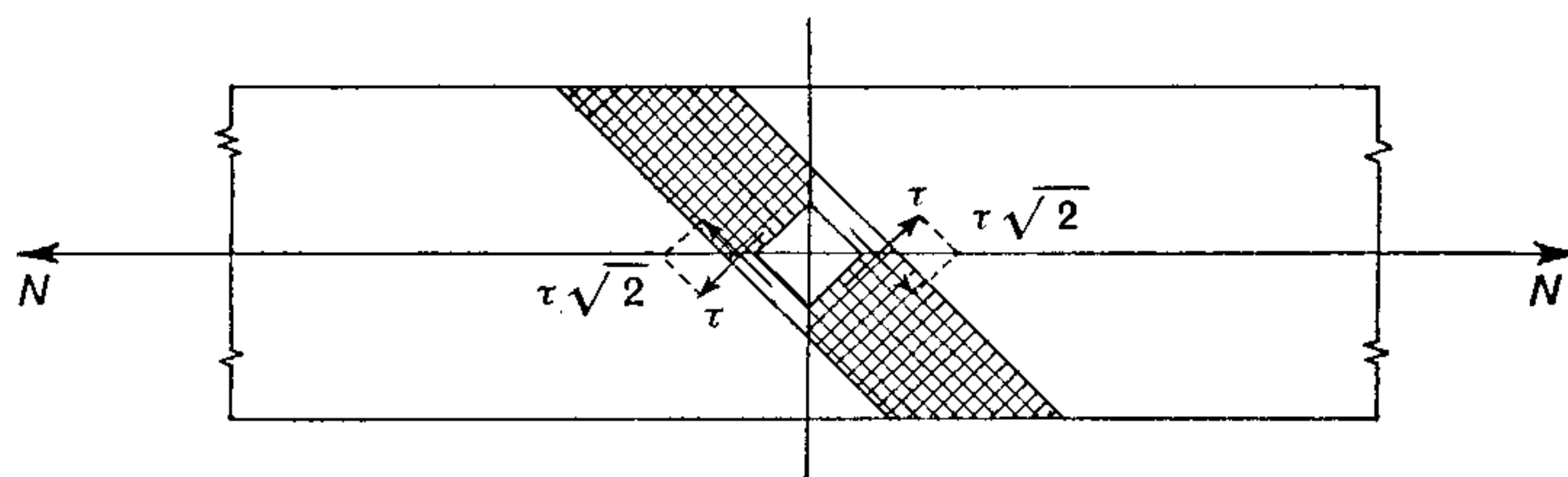


Fig. 70.

tenuti per analizzare il comportamento in campo plastico di un cilindro sollecitato da una forza normale, pur di limitarci naturalmente alla fase plastica iniziale in cui le deformazioni sono ancora sufficientemente piccole da poter essere riguardate come infinitesime.

Con riferimento alla esperienza descritta nel § 60 proprio per il semplice caso monoassiale di una forza normale, quando la tensione  $\sigma_{33}$  raggiunge il valore  $\sigma_S$  corrispondente allo snervamento del materiale, sulla superficie laterale del provino opportunamente levigata a specchio si osserva l'apparizione di striature con andamento di circa  $45^\circ$  rispetto alla direzione della forza applicata. Queste particolari linee di Lüders si spargono rapidamente sull'intera lunghezza del provino mantenendo approssimativamente l'orientamento delle direzioni secondo le quali si sviluppano le tensioni tangenziali massime (fig. 70).

Al diagramma di deformazione della fig. 32 di regola si sostituiscono i diagrammi convenzionali composti da una bilatera: con tratto inclinato per materiali dotati di incrudimento e con tratto orizzontale per materiali perfettamente plastici, nei quali, raggiunto lo snerva-



mento, la deformazione procede senza ulteriori incrementi di tensione. In entrambi i casi la deformazione plastica è indicata dalla quota  $\varepsilon_p$  della deformazione totale  $\varepsilon$  che ha carattere permanente dopo la rimozione della forza  $N$ , al contrario della quota elastica  $\varepsilon_e$  che viene integralmente recuperata, come indicato nella fig. 71 a) e b).

Per quanto riguarda la verifica di sicurezza i due punti di vista discussi nel § 76 coincidono nel caso presente. Infatti la tensione normale  $\sigma = \sigma_{33}$  è uniformemente distribuita sulla sezione trasversale e

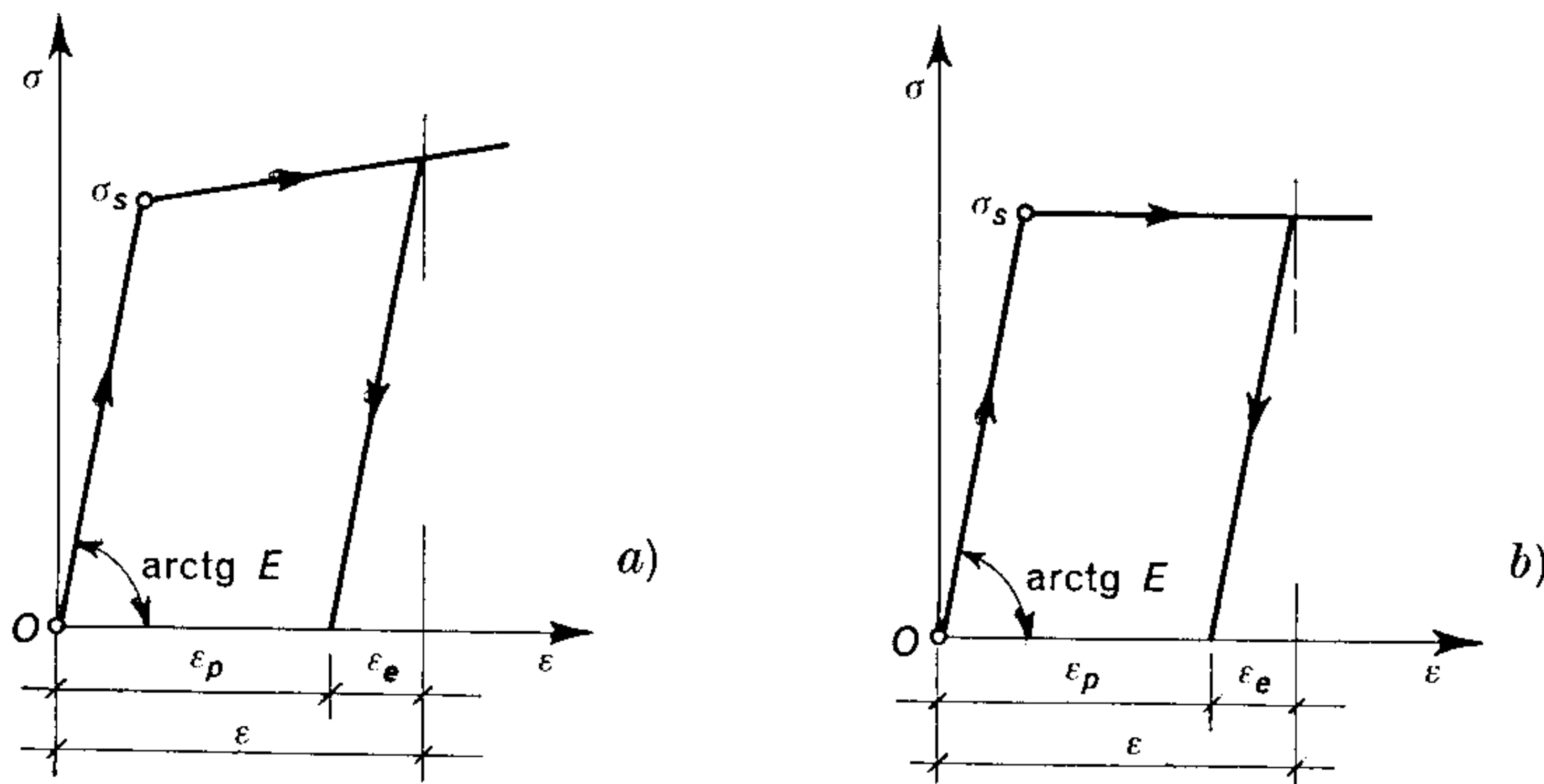


Fig. 71.

raggiunge dunque il suo valore limite di snervamento  $\sigma_s$  e di rottura  $\sigma_R$  contemporaneamente in tutti i punti della sezione stessa:

$$\sigma' \leq \sigma'_L, \quad \sigma'' \leq \sigma''_L. \quad [89.1]$$

Ciò naturalmente nell'ipotesi che la distribuzione della tensione normale si mantenga uniforme sino al collasso plastico o sino alla rottura.

La velocità di deformazione, corrispondente ad una certa legge incrementale di variazione della tensione corrispondente, è data in campo elasto-plastico dalla particolarizzazione al caso monoassiale in esame delle equazioni di Prandtl-Reuss [64. 2]. Queste, in termini dei deviatori, si riducono alla:

$$\dot{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{33} + \dot{\lambda} s_{33}, \quad [89.2]$$

dove la parte plastica  $\dot{\varepsilon}_{33}^p$  della velocità di deformazione risulta:

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \dot{\varepsilon}_{33}^p - \frac{1}{3} (\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{33}^p). \quad [89.3]$$

Ora, con riguardo alle [88. 2] e [88. 3] la condizione di incompressibilità ammessa in fase plastica, cioè l'annullarsi della velocità di dilatazione cubica:

$$\dot{\Delta}_p = \dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{33}^p = (1 - 2\nu) \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0, \quad [89. 4]$$

richiede che il rapporto di Poisson assuma il valore  $\nu = \frac{1}{2}$ . Essendo  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ , la componente  $s_{33}$  del deviatore di tensione risulta semplicemente:

$$s_{33} \equiv \sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{2}{3}\sigma_{33}, \quad [89. 5]$$

per cui la velocità di deformazione plastica nella direzione delle fibre longitudinali del cilindro è:

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p \equiv \dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{2}{3} \dot{\lambda} \sigma_{33}. \quad [89. 6]$$

Considerando anche la parte elastica del deviatore di deformazione:

$$e_{33}^e \equiv \varepsilon_{33}^e - \frac{1}{3}(1 - 2\nu) \varepsilon_{33}^e = \frac{2}{3}(1 + \nu) \varepsilon_{33}^e, \quad [89. 7]$$

ed esprimendo il modulo di elasticità tangenziale  $\mu$  in termini del modulo di elasticità normale  $E$  e del rapporto di Poisson  $\nu$ , cioè  $\mu = E/2(1 + \nu)$  come risulta dalla Tabella del § 40, possiamo anche scrivere:

$$e_{33}^e \equiv \frac{2}{3}(1 + \nu) \varepsilon_{33}^e = \frac{1}{2\mu} s_{33} \equiv \frac{2}{3} \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{33}. \quad [89. 8]$$

In definitiva la [89. 2] si semplifica nella:

$$\dot{\varepsilon}_{33} = \frac{\dot{\sigma}_{33}}{E} + \dot{\lambda} \sigma_{33}, \quad [89. 9]$$

che può essere integrata rispetto al tempo con un procedimento analogo a quello seguito nella deduzione delle [64. 7]:

$$\varepsilon_{33} = \left( \frac{1}{E} + c \right) \sigma_{33}. \quad [89. 10]$$

Quando la deformazione plastica non sia limitata ai valori raggiunti in prossimità dello snervamento, i risultati di una prova, anche di semplice trazione, possono apparire diversi a seconda delle definizioni adottate per la tensione  $\sigma = \sigma_{33}$  e per la dilatazione  $\varepsilon = \varepsilon_{33}$ .

Quest'ultima, infatti, può raggiungere valori sensibili e non sarà quindi indifferente assumere come riferimento: l'area  $A_0$  della sezione

trasversale indeformata o l'area  $A$  della sezione deformata, nella definizione della tensione  $\sigma$ , e la lunghezza iniziale  $l_0$  o quella attuale  $l$ , nella definizione della dilatazione  $\varepsilon$ . Tali considerazioni devono essere tenute presenti affinché i risultati ottenuti in prove diverse siano effettivamente confrontabili.

In genere il diagramma di deformazione viene espresso in termini di *tensioni vere*  $\sigma = N/A$ , riferite cioè all'area deformata corrente e di *dilatazioni logaritmiche*:

$$\varepsilon_L = \ln(1 + \varepsilon). \quad [89.11]$$

Mentre la definizione della *dilatazione convenzionale*:

$$\varepsilon = \frac{1}{l_0} \int_{l_0}^l dl = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad [89.12]$$

equivale ad introdurre gli incrementi  $d\varepsilon = dl/l_0$ , la definizione della *dilatazione logaritmica*:

$$\varepsilon_L = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon), \quad [89.13]$$

equivale ad introdurre gli incrementi  $d\varepsilon_L = dl/l$ .

Le due definizioni coincidono quando le deformazioni sono infinitesime, mentre in presenza di deformazioni finite, come avviene nello scorrimento plastico ed in quello viscoso, la  $\varepsilon_L$  rappresenta una misura della dilatazione più adatta della  $\varepsilon$ .

Infatti, se consideriamo un allungamento del cilindro raggiunto in due fasi successive, la lunghezza iniziale  $l_0$  sarà portata prima a  $l_1 = l_0 + \Delta l$  ed in un secondo tempo da  $l_1$  a  $l_2 = l_1 + \Delta l$ . In tale situazione la dilatazione convenzionale nella prima fase vale  $\varepsilon_1 = \Delta l/l_0$ , mentre nella seconda fase risulta  $\varepsilon'_2 = \Delta l/l_0$  oppure  $\varepsilon''_2 = \Delta l/l_1$ , in dipendenza del fatto che ci si riferisca alla lunghezza iniziale  $l_0$  del cilindro indeformato o alla lunghezza  $l_1$  corrispondente all'inizio della seconda fase. Quest'ultima scelta potrà avvenire, ad esempio, qualora la seconda operazione non segua immediatamente la prima. Si hanno perciò nei due casi valori diversi della dilatazione complessiva  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

Tale ambiguità scompare con l'impiego della dilatazione logaritmica [89.11]. Infatti le dilatazioni parziali sono rispettivamente:  $\varepsilon_{L1} = \ln(l_1/l_0)$  nella prima fase e  $\varepsilon_{L2} = \ln(l_2/l_1)$  nella seconda, mentre la dilatazione complessiva risulta in ogni caso:

$$\varepsilon_L \equiv \ln \frac{l_2}{l_0} = \ln \frac{l_1 l_2}{l_0 l_1} = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} = \varepsilon_{L1} + \varepsilon_{L2}. \quad [89.14]$$

Perciò il risultato sarà sempre lo stesso operando sia in più fasi successive, sia in una sola fase complessiva. Tale interessante proprietà può essere espressa dal-



l'affermazione che *le dilatazioni logaritmiche formano un gruppo*, a differenza delle dilatazioni convenzionali.

Anche per la dilatazione cubica  $\Delta_V$  si può introdurre una definizione logaritmica:

$$\Delta_L = \ln(1 + \Delta_V), \quad [89.15]$$

che conduce a risultati particolarmente semplici ed espressivi. Tale dilatazione è data in generale, per deformazioni finite, dalla [14.6], cioè:

$$\Delta_V = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1, \quad [89.16]$$

e tenendo presente la [89.15]:

$$\Delta_L = \ln(1 + \varepsilon_{11}) + \ln(1 + \varepsilon_{22}) + \ln(1 + \varepsilon_{33}). \quad [89.17]$$

Introdotte perciò le dilatazioni lineari logaritmiche [89.11], la dilatazione cubica logaritmica diviene:

$$\Delta_L = \varepsilon_{11}^L + \varepsilon_{22}^L + \varepsilon_{33}^L. \quad [89.18]$$

In termini delle componenti convenzionali di dilatazione, lineari e cubica, una relazione analoga alla precedente, cioè:

$$\Delta_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad [89.19]$$

sussiste invece a stretto rigore solo per deformazioni infinitesime.

## 90. Forza normale in campo anelastico.

Quando il comportamento fisico del materiale sia di tipo anelastico, come discusso nel cap. V, l'interazione tra la fase elastica e la fase anelastica altera la risposta puramente elastica della deformazione alla tensione applicata ed induce fenomeni che assumono la più chiara evidenza proprio nella semplice sollecitazione di forza normale.

Ad esempio, se il legame costitutivo è del tipo descritto nel § 50, e si riferisce quindi ad uno scorrimento viscoso secondo Maxwell, le relazioni [50.3] possono essere semplificate nel caso particolare in esame, osservando che le componenti  $e_{33}$  del deviatore di deformazione e  $s_{33}$  del deviatore di tensione sono ora:

$$e_{33} = \frac{2(1 + \nu)}{3} \varepsilon_{33}, \quad s_{33} = \frac{2}{3} \sigma_{33}. \quad [90.1]$$

Introdotta il modulo di elasticità normale  $E = 2\mu(1 + \nu)$  ed il tempo di rilassamento  $t_R = 3\eta_v/E$ , essendo  $\eta_v$  il coefficiente di viscosità, per  $\varepsilon_{33} = \varepsilon$ ,  $\sigma_{33} = \sigma$ , otteniamo la velocità di deformazione nella forma:

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + t_R^{-1}\sigma, \quad [90.2]$$

da cui, integrando, la tensione all'istante generico  $t$ :

$$\sigma(t) = \exp(-t/t_R) \left[ \sigma_0 + E \int_0^t \dot{\varepsilon}(t) \exp(t/t_R) dt \right], \quad [90.3]$$

essendo  $\sigma_0 = \sigma(0)$  il suo valore iniziale per  $t = 0$ .

Se la tensione è mantenuta costante,  $\sigma(t) = \sigma_0$ , un provino cilindrico sollecitato da una forza normale, ad esempio di trazione, subisce una dilatazione positiva che aumenta nel tempo con la legge:

$$\varepsilon(t) = \frac{t}{Et_R} \sigma_0 + \varepsilon_0. \quad [90.4]$$

Tale tipo di sollecitazione viene realizzato in una prova caratteristica sui materiali da costruzione, detta *prova di scorrimento*, la quale dovrebbe implicare una deformazione sotto tensione costante. In realtà le prove effettive di scorrimento vengono condotte sotto carico costante e, almeno nel campo delle piccole deformazioni corrispondente alla fase iniziale, tale differenza è irrilevante.

Quando però la deformazione raggiunge valori notevoli non è più lecito trascurare la variazione della sezione trasversale e riferire la forza normale all'area iniziale. L'errore commesso può essere analizzato supponendo per semplicità di sviluppi il materiale incompressibile. In tale ipotesi dalla  $\dot{\Delta}_V = 0$ , otteniamo:

$$\dot{\varepsilon} = -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}, \quad [90.5]$$

per cui la [90.2] diviene, indicando con  $N(t) = N_0$  il valore costante della forza normale:

$$-\frac{E}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{N_0}{A} \right) + \frac{1}{t_R} \frac{N_0}{A}. \quad [90.6]$$

Integrando tale equazione rispetto al tempo  $t$  ed introducendo la dilatazione lineare iniziale  $\varepsilon_0 = N_0/EA_0$ , abbiamo:

$$\frac{A}{A_0} - \varepsilon_0 \ln \frac{A}{A_0} = 1 - \varepsilon_0 \frac{t}{t_R}, \quad [90.7]$$

che può anche essere scritta in via approssimata:

$$A \simeq A_0 \left( 1 - \varepsilon_0 \frac{t}{t_R} \right). \quad [90.8]$$

Infine, dalla condizione  $Al = A_0 l_0$  corrispondente alla ammessa ipotesi di incompressibilità in fase anelastica:

$$l = \frac{l_0}{1 - \varepsilon_0 t/t_R}. \quad [90.9]$$

Riferendoci allora alla *dilatazione logaritmica*, definita dalla [89.11], risulta:

$$\varepsilon_L \equiv \ln \frac{l}{l_0} = -\ln(1 - \varepsilon_0 t/t_R), \quad [90.10]$$

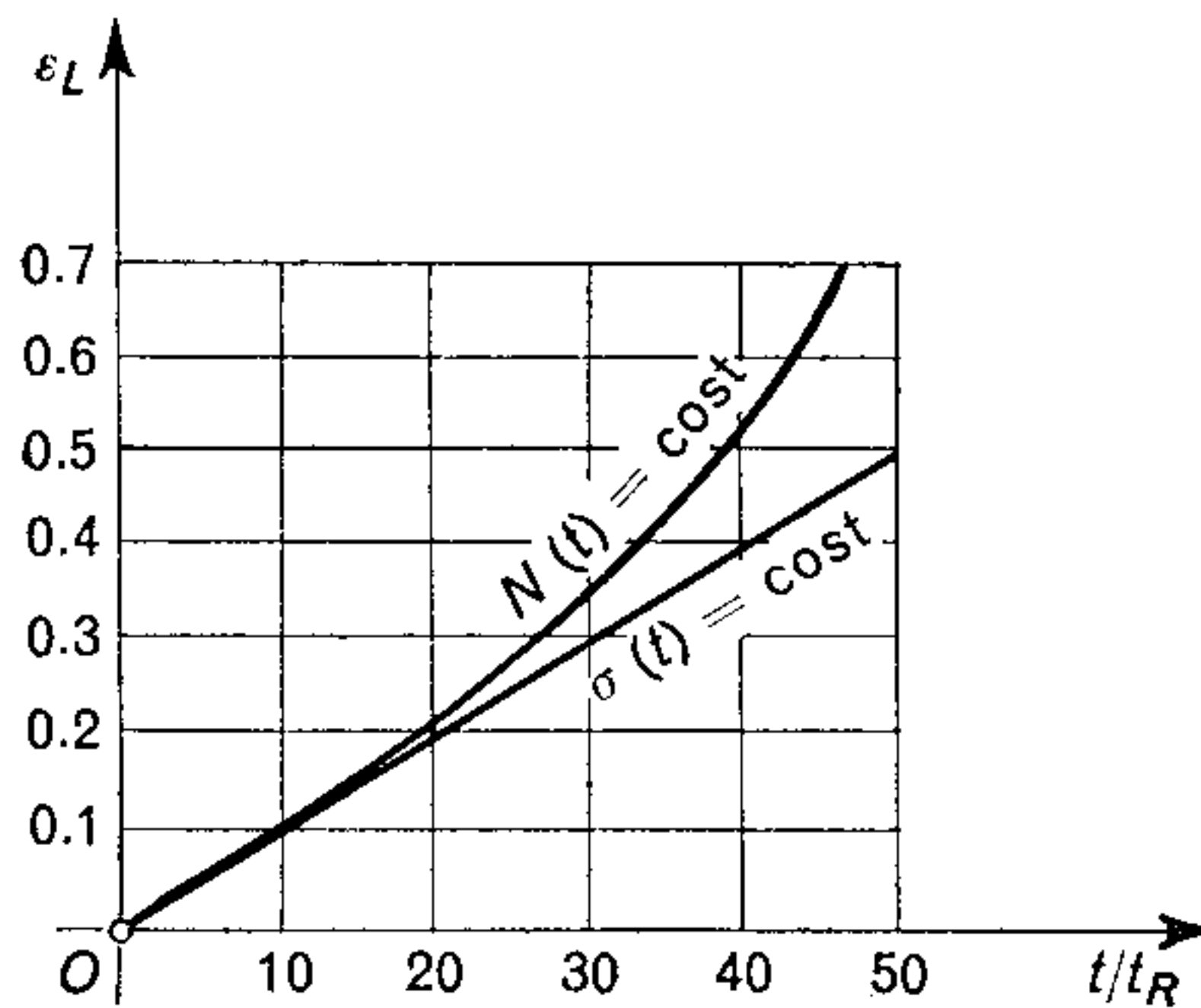


Fig. 72.

e la differenza tra i risultati ottenuti in una prova a tensione costante [90.5] ed in una prova a carico costante [90.10] risulta dal diagramma di fig. 72.

Un elemento importante per caratterizzare le proprietà meccaniche del materiale è rappresentato dalla misura del *rilassamento* della tensione a deformazione costante, bloccando cioè gli estremi del provino cilindrico, dopo averlo sollecitato a forza normale, in modo da impedire la variazione della deformazione stessa. Anche se esistono attrezzature sperimentali appositamente studiate per effettuare prove di rilassamento, si ricorre di regola a prove di scorrimento, perchè di più facile realizzazione e maggiore attendibilità di risultati, specialmente se interessa il comportamento del materiale a temperature elevate.

Appare dunque di notevole interesse applicativo il poter derivare dai diagrammi  $(\varepsilon, t)$  di una prova di scorrimento a tensione costante i diagrammi di rilassamento  $(\sigma, t)$  a deformazione costante. Ciò può essere ottenuto nel modo seguente, osservando che in condizione di rilassamento la lunghezza  $l$  del provino deve rimanere costante, e quindi al generico istante  $t$  la somma della dilatazione elastica  $\varepsilon_e$  e



della dilatazione viscosa  $\varepsilon_v$  deve uguagliare la dilatazione iniziale  $\varepsilon_0$  per  $t = 0$ , anche in termini di velocità:

$$\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = 0. \quad [90.11]$$

Introducendo la tensione elastica corrispondente otteniamo:

$$\dot{\varepsilon}_v = -\frac{\sigma}{E}, \quad [90.12]$$

dove la validità di tale equazione è subordinata alla invariabilità delle caratteristiche fisiche del materiale con la temperatura nel corso del processo di rilassamento. Si ha integrando:

$$t = \frac{1}{E} \int_{\sigma}^{\sigma_i} \frac{d\sigma}{\dot{\varepsilon}_v}, \quad [90.13]$$

essendo  $\sigma_i$  il valore della tensione all'istante iniziale  $t_i$  e  $\sigma$  il valore all'istante generico  $t$ .

In una prova a caldo il legame costitutivo messo in risalto con prova di scorrimento è del tipo non-lineare discusso nel § 58. Una legge abbastanza semplice, derivabile dalla [58.6], ed abbastanza attendibile è la:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad [90.14]$$

con  $n > 1$ , e dove  $\dot{\varepsilon}_0$ ,  $\sigma_0$  indicano rispettivamente i valori della velocità di deformazione e della tensione all'istante  $t = 0$ , assunto come iniziale nella prova.

Sostituendo la legge di scorrimento [90.14] nella condizione di rilassamento [90.13] otteniamo:

$$t = \frac{\sigma_0^n}{(n-1) \dot{\varepsilon}_0 E \sigma^{n-1}} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^n \right], \quad [90.15]$$

dalla quale può essere ottenuta una curva che indichi la dipendenza del rapporto  $\sigma/\sigma_i$  dal tempo  $t$  necessario perchè si produca un rilassamento della tensione dal valore  $\sigma_i$  al valore  $\sigma$ .

## 91. Sollecitazione di flessione.

Nel caso particolare in cui il momento flettente  $M \equiv (M_1, M_2)$  è contenuto in un piano la cui traccia sul piano della sezione trasversale coincide con un asse principale di inerzia, ad esempio,  $x_2$  e quindi

$M \equiv M_1$ , l'asse neutro  $\xi \equiv x_1$  risulta perpendicolare all'asse di sollecitazione  $\eta \equiv x_2$ . Come fu avvertito nel § 85 siamo allora in presenza di una *flessione retta* risultando nulla la deviazione del piano di flessione dal piano di sollecitazione.

In assenza di altre caratteristiche di sollecitazione, lo stato di tensione si riduce all'unica componente normale  $\sigma = \sigma_{33}$  variabile linearmente lungo l'asse  $x_2$ , come indicato nella fig. 73.

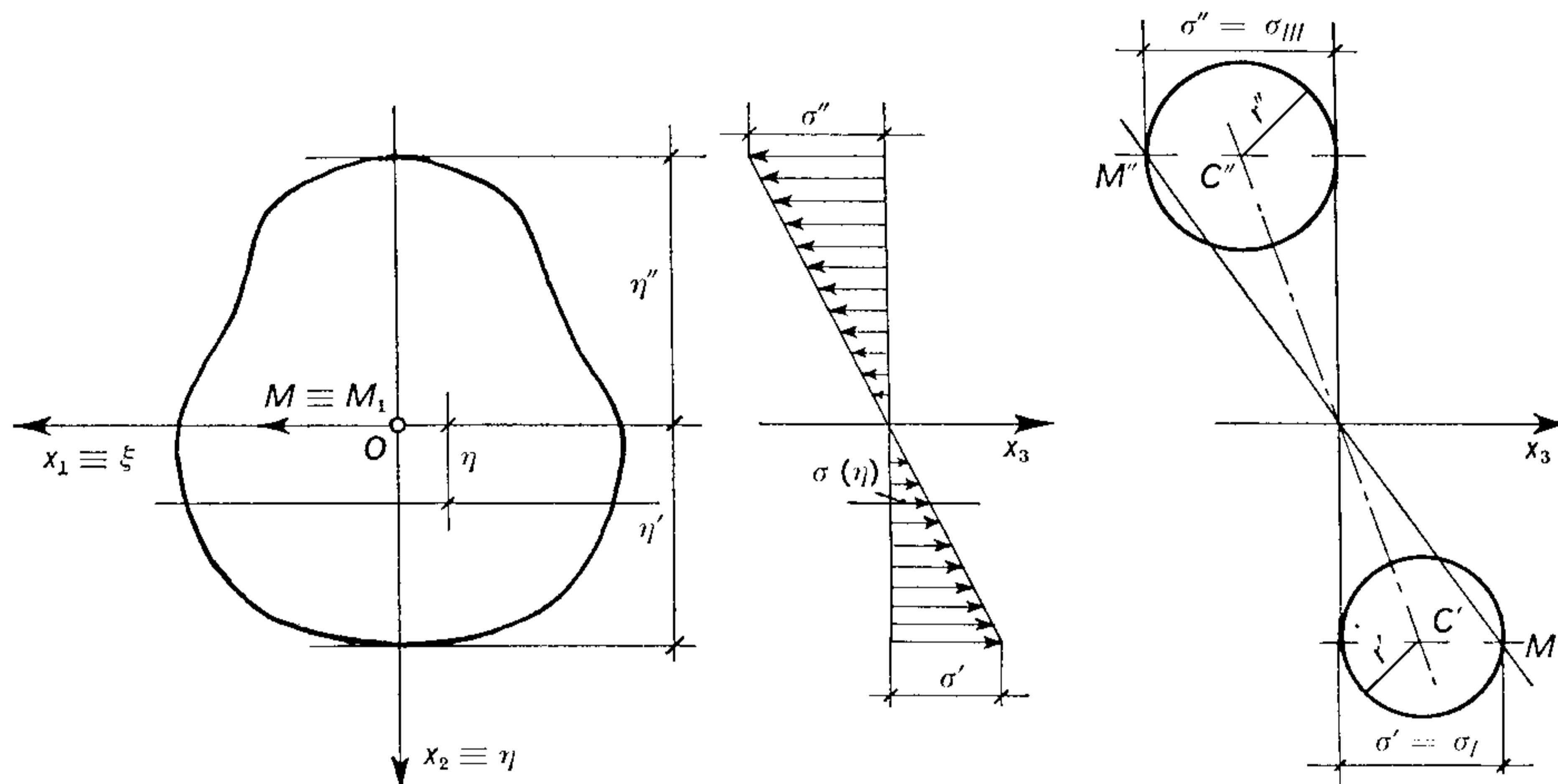


Fig. 73.

Per momento flettente  $M$  positivo le fibre inferiori (al disotto dell'asse neutro) risultano *tese* ( $\sigma > 0$ ) mentre le fibre superiori (al disopra dell'asse neutro) risultano *compresse* ( $\sigma < 0$ ), come mostra la particolare della [82. 1] al caso in esame:

$$\sigma = \frac{M\eta}{J}, \quad [91. 1]$$

avendo scritto per semplicità  $x_2 = \eta$ ,  $J_1 = J$ .

Analogamente a quanto si verifica nella sollecitazione di forza normale, poichè le tensioni tangenziali sono nulle, l'asse  $x_3$  è ancora direzione principale di tensione e precisamente  $\sigma = \sigma_I$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$  per tutte le fibre al disotto dell'asse neutro,  $\sigma = \sigma_{III}$ ,  $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$  per quelle al disopra.

La rappresentazione dello stato di tensione consiste in cerchi di Mohr di raggio  $r$  variabile linearmente con  $\eta$ : da  $r' = \sigma'/2$  in corrispondenza del lembo inferiore a  $r'' = \sigma''/2$  in corrispondenza del lembo superiore della sezione. Evidentemente nei punti dell'asse neutro  $\xi \equiv x_1$ , poichè  $\sigma = 0$ , il raggio del cerchio di Mohr è nullo.

Le tensioni massime si verificano dunque ai bordi della sezione; introdotte allora le due grandezze:

$$W' = \frac{J}{\eta'}, \quad W'' = \frac{J}{\eta''}, \quad [91.2]$$

dette *moduli di resistenza*, le tensioni max e min assumono la forma usata nelle applicazioni:

$$\sigma' = \frac{M}{W'}, \quad \sigma'' = \frac{M}{W''}. \quad [91.3]$$

La verifica di sicurezza, dal punto di vista tradizionale, richiede che in nessun punto della sezione sia superato il limite di snervamento o di rottura del materiale ed impone quindi al momento flettente di verificare le disuguaglianze:

$$M \leq \sigma'_L W', \quad M \leq \sigma''_L W'', \quad [91.4]$$

dove, al solito,  $\sigma'_L$  e  $\sigma''_L$  indicano le tensioni corrispondenti ad una situazione limite per semplice trazione e per semplice compressione rispettivamente.

Il più piccolo dei due valori di  $M$ , determinati dalle [91.4] quando si ponga in esse il segno di uguale, viene indicato con  $M_E$  e corrisponde alla plasticizzazione incipiente delle fibre esterne più sollecitate, quando, ad esempio, interessa la verifica allo snervamento. Il momento flettente che può essere applicato rispettando la *sicurezza in senso stretto* vale dunque:

$$M = \frac{M_E}{m}, \quad [91.5]$$

con  $m > 1$  coefficiente di sicurezza.

Alla tensione normale  $\sigma$  corrispondono, per la [84.1] una dilatazione lineare  $\varepsilon = \varepsilon_{33}$  per gli elementi paralleli all'asse  $x_3$  e, per la [84.2] due dilatazioni lineari per gli elementi paralleli agli assi  $x_1, x_2$ , espresse dalle:

$$\varepsilon = \frac{M \eta}{EJ} = \frac{\eta}{R}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\nu M \eta}{EJ} = -\frac{\nu \eta}{R}. \quad [91.6]$$

Sia la variazione di area della sezione sia la variazione di volume dell'intero cilindro risultano nulle in quanto dipendenti esclusivamente dalla forza normale, come mostrano le [85.5] e [85.7].



I piani delle sezioni terminali ruotano intorno all'asse  $\xi$  formando un angolo:

$$\Delta\omega = \frac{Ml}{EJ}, \quad [91.7]$$

in base alla particolarizzazione della [85.13].

Il lavoro di deformazione dovuto al momento  $M = M_1$ , già espresso dal secondo termine della [85.14], può essere calcolato immediatamente, utilizzando il teorema di Clapeyron [38.6], come metà del lavoro esterno compiuto da  $M$ , supposto agente con tutta la sua intensità finale, per la rotazione relativa  $\Delta\omega$ , cioè:

$$U_M = \frac{1}{2} M \Delta\omega = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{EJ}. \quad [91.8]$$

## 92. Flessione in campo plastico.

Nell'ipotesi che la sezione trasversale si conservi piana anche nel caso di un legame costitutivo diverso dalla semplice legge elastica

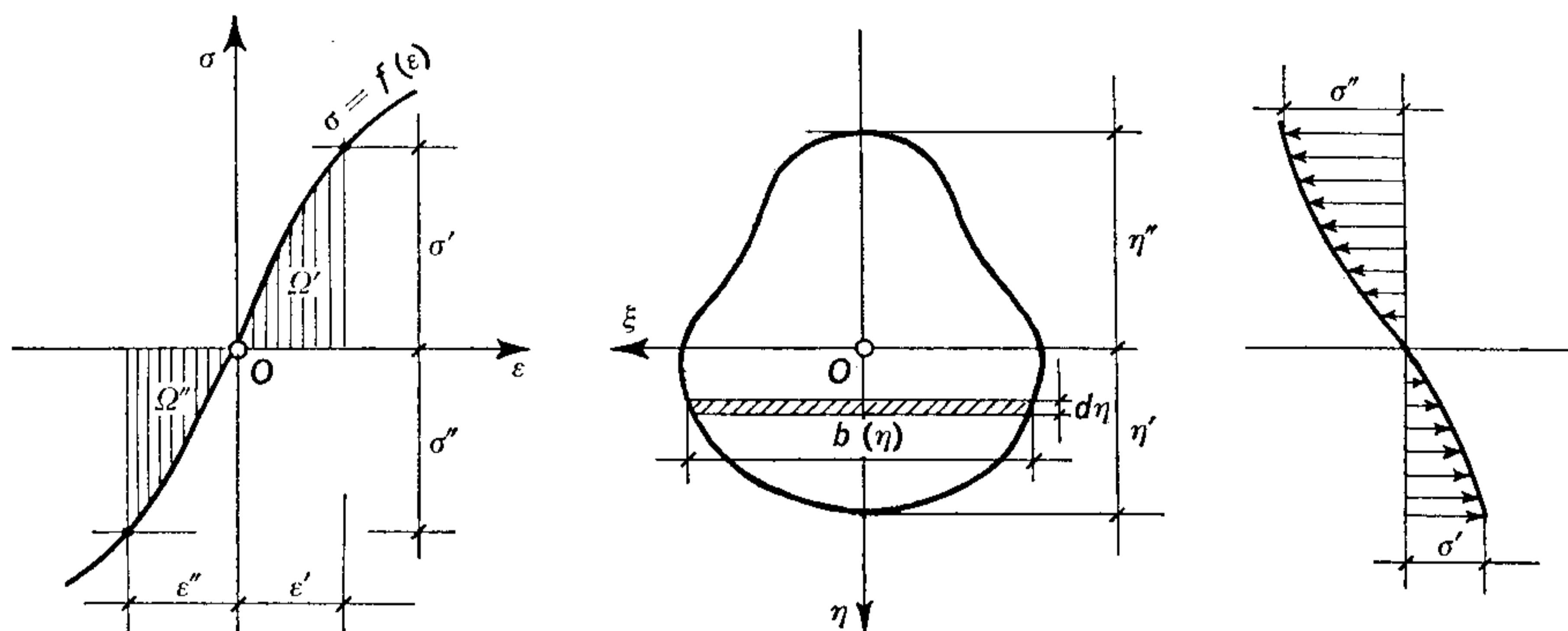


Fig. 74.

lineare, possiamo estendere i risultati ottenuti a relazioni  $\sigma = f(\epsilon)$  come indicato nella fig. 74.

Il momento flettente è dato in tal caso dalla:

$$M = \int_A f(\epsilon) \eta dA, \quad [92.1]$$

o anche, con riguardo alla prima delle [91.6] ed alla espressione  $dA = b(\eta) d\eta$  per l'area dell'elemento superficiale:

$$M = R^2 \int_{-\epsilon''}^{\epsilon'} f(\epsilon) b(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad [92.2]$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $x_3$ , in assenza di forza normale, deve essere:

$$\int_A f(\varepsilon) dA \equiv \int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'} f(\varepsilon) b(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad [92.3]$$

dalla quale è possibile, assegnate le funzioni  $f(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$ , determinare la legge  $\varepsilon' = \varepsilon(R)$  e quindi  $\varepsilon'' = \eta''/R$ , per cui  $M$  risulta determinato dalla [92.2].

Ad esempio, nel caso di sezione rettangolare, essendo  $b(\varepsilon) = b$  costante, l'equazione [92.3] si riduce alla:

$$\int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'} f(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad [92.4]$$

e corrisponde alla uguaglianza delle due aree  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  tratteggiate nella fig. 74. La relazione tra  $\varepsilon'$  ed  $\varepsilon''$  può essere allora determinata riportando in un diagramma  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  come funzioni di  $\varepsilon$ : le parallele all'asse  $\varepsilon$  individuano sulle curve  $\Omega'(\varepsilon)$ ,  $\Omega''(\varepsilon)$  i punti rappresentativi della relazione cercata.

#### a) Stati elasto-plastici convenzionali.

La valutazione dell'integrale [92.3] e [92.4] riesce semplificata quando il diagramma di deformazione possa essere schematizzato con una bilatera simmetrica, corrispondente ad un materiale con lo stesso comportamento a trazione ed a compressione, composta cioè da un tratto lineare in campo elastico ed in successivo tratto lineare in campo elasto-plastico.

A titolo di esempio consideriamo il caso della sezione rettangolare riportato in fig. 75. Allora, indicando la tangente dell'angolo che il diagramma di deformazione forma con l'asse  $\varepsilon$ , rispettivamente con  $E$  nella fase elastica e con  $H$  nella fase elasto-plastica, la [92.4] si riduce alla ovvia relazione:  $\varepsilon' = \varepsilon''$ .

Le fibre estreme raggiungeranno contemporaneamente lo snervamento  $\sigma_S$  per effetto di un momento  $M_E$  e la plasticizzazione si propagerà via via, con l'aumentare del momento flettente, alle fibre più interne. Con riferimento alla fig. 75 b), per un certo valore del momento, nella sezione si distingueranno due zone: la prima ancora elastica, relativa alle fibre più interne e la seconda elasto-plastica relativa alle fibre più esterne.

La funzione  $f(\varepsilon)$  vale per le due zone, rispettivamente:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= E\varepsilon && \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon_S \quad (\eta_S'' < \eta < \eta_S'), \\ f(\varepsilon) &= E\varepsilon_S + H(\varepsilon - \varepsilon_S) && \text{per } \varepsilon \geq \varepsilon_S \quad (\eta_S'' > \eta > \eta_S'), \end{aligned} \quad [92.5]$$

ed il momento flettente  $M$  dato dalla [92.2] diviene per  $b(\varepsilon) = b$ :

$$M = 2R^2b \left\{ \int_0^{\varepsilon_S} E\varepsilon^2 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_S}^{\varepsilon'} [E\varepsilon_S + H(\varepsilon - \varepsilon_S)] \varepsilon d\varepsilon \right\}, \quad [92.6]$$

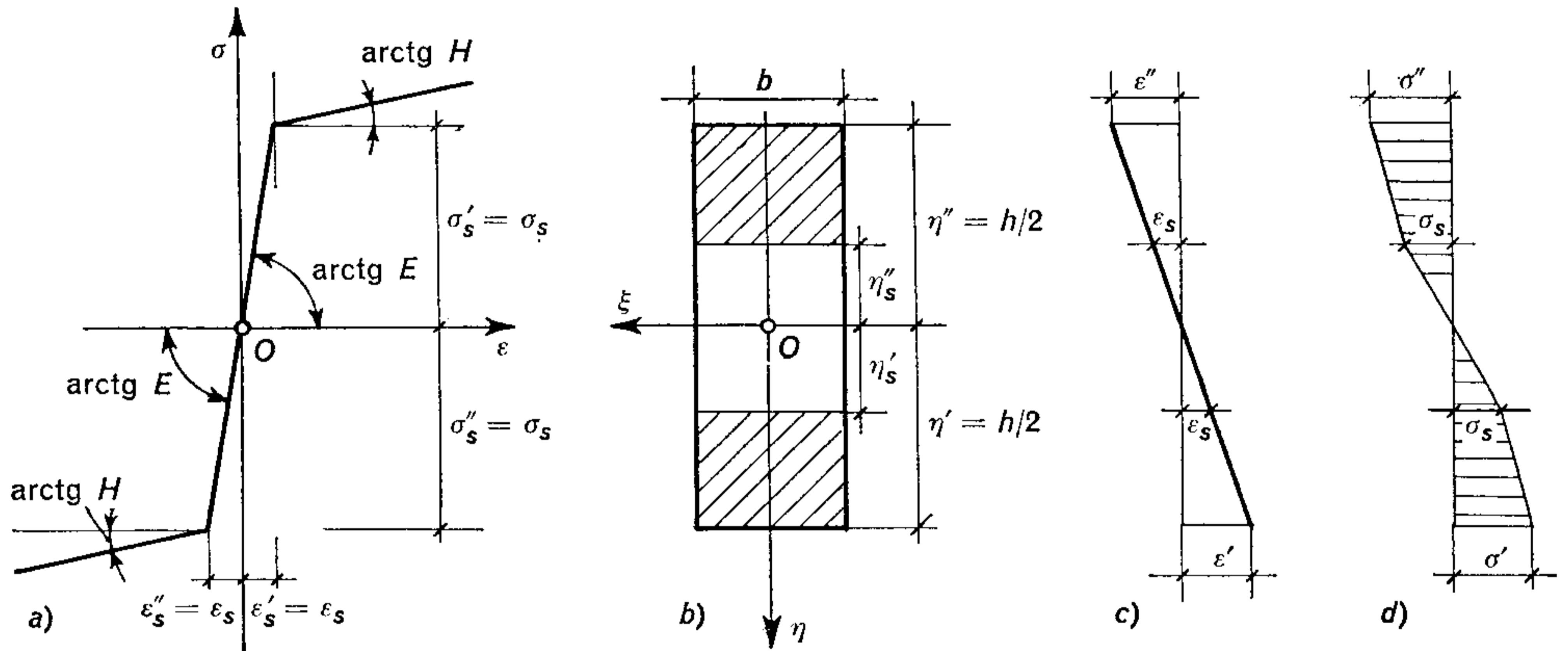


Fig. 75.

da cui effettuando l'integrazione indicata:

$$M = 2R^2b \left[ \frac{1}{3} H \varepsilon'^3 + \frac{1}{2} (E - H) \varepsilon_S \varepsilon'^2 - \frac{1}{6} (E - H) \varepsilon_S^3 \right], \quad [92.7]$$

dove, con riguardo alla prima delle [91.6]:  $\varepsilon_S = \eta_S/R$ ,  $\varepsilon' = \eta'/R = h/2R$ .

### b) Stati perfettamente plastici.

Per un materiale perfettamente plastico, il cui comportamento è descritto da un diagramma di deformazione del tipo indicato nella fig. 71 b), cioè con incrudimento nullo, la tensione non può superare il valore  $\sigma_S$  corrispondente allo snervamento. Questo, con l'aumentare del momento flettente  $M$ , viene raggiunto dapprima nelle fibre estreme più lontane dall'asse neutro. Ad esempio, nel caso della fig. 76 b), in quelle superiori compresse, quando il momento perviene al valore  $M_E$ , limite della fase elastica, e successivamente in quelle tese.

La plasticizzazione si propaga alle fibre interne in modo che zone sempre più estese raggiungono la tensione di snervamento procedendo verso l'asse neutro. Questo si sposta parallelamente a se stesso per



rispettare l'equilibrio alla traslazione secondo  $x_3$ , espresso dalla [92. 3] particolarizzata per il diagramma di deformazione di fig. 76 a).

La plasticizzazione si estende poi a tutta la sezione, esclusa naturalmente una zona prossima all'asse neutro: la distribuzione delle tensioni, indicata nel diagramma della fig. 76 d), corrisponde ad una situazione ideale evidentemente irrealizzabile. Infatti la plasticizzazione completa della sezione, estesa anche alle fibre dello strato neutro, comporterebbe dilatazioni  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  ai lembi e curvatura  $\kappa$  infinite. Il

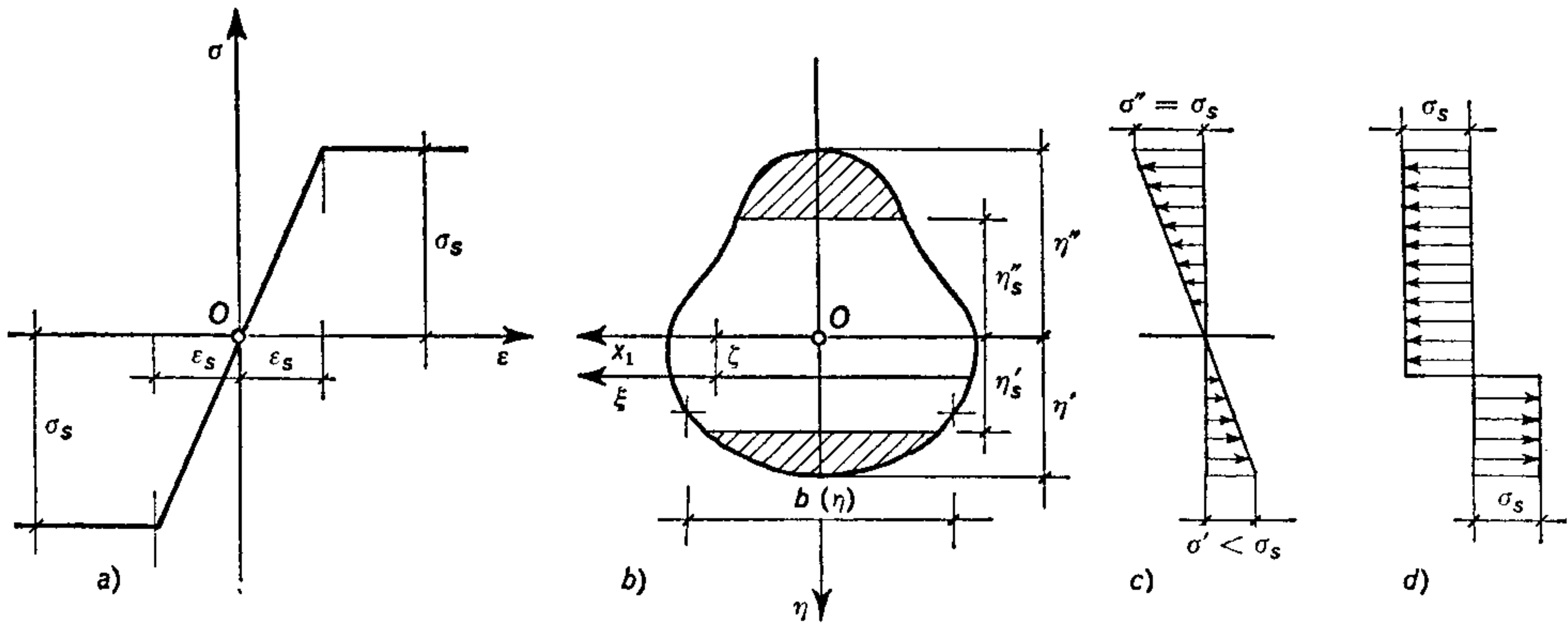


Fig. 76.

riferimento a tale situazione deve essere inteso in senso puramente convenzionale, anche se spesso ciò non viene esplicitamente rilevato. La giustificazione di questa ipotesi, veramente insolita, va ricercata nel fatto che il momento flettente al collasso ed il momento flettente convenzionale dedotto dal diagramma di fig. 76 d) hanno valori molto vicini, almeno per i tipi di sezione impiegati nelle applicazioni, dove si cerca di concentrare il materiale nelle zone più lontane dall'asse neutro.

In corrispondenza della plasticizzazione completa l'asse neutro raggiunge il massimo scostamento  $\zeta$  dalla posizione iniziale baricentrica, determinato dalla:

$$\sigma_S \left[ \int_{-\eta''}^{\zeta} b(\eta) d\eta - \int_{\zeta}^{\eta'} b(\eta) d\eta \right] = 0, \quad [92. 8]$$

cioè dall'uguaglianza delle aree  $A'$ ,  $A''$  delle zone uniformemente plasticizzate in trazione ed in compressione.

Il momento flettente in tale situazione limite viene indicato con  $M_S$  ed è espresso dalla:

$$M_S = \sigma_S \int_{-\eta''}^{\eta'} b(\eta) \eta d\eta = (S' + S'') \sigma_S, \quad [92. 9]$$

avendo introdotto i momenti statici  $S'$ ,  $S''$  delle aree  $A'$ ,  $A''$  rispetto all'asse neutro  $\xi$ . Possiamo anche porre tale relazione nella forma compatta.

$$M_S = W_S \sigma_S, \quad [92.10]$$

dove la grandezza  $W_S = S' + S''$  prende il posto dei moduli di resistenza  $W'$ ,  $W''$  della [91.3] valida in fase elastica.

La verifica di sicurezza riferita dunque a tale situazione di collasso plastico comporta un valore  $M_S$  del momento flettente limite superiore al valore  $M_E$ , corrispondente all'inizio della fase plastica.

Ad esempio, per una sezione rettangolare, data la simmetria rispetto a  $\xi$ , lo snervamento viene raggiunto contemporaneamente nelle fibre tese ed in quelle compresse equidistanti dall'asse neutro, beninteso nella ipotesi di un identico valore del limite di snervamento del materiale in trazione ed in compressione. L'asse neutro rimane baricentrico mentre il momento flettente risulta:

$$M_E \equiv W_E \sigma_S = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_S, \quad [92.11]$$

in corrispondenza del limite di elasticità, cioè dell'incipiente plasticizzazione delle fibre estreme, e:

$$M_S \equiv W_S \sigma_S = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_S, \quad [92.12]$$

in corrispondenza del collasso plastico, cioè della plasticizzazione completa della sezione.

Per ogni valore del momento  $M$  si può determinare l'ordinata  $\eta_S$  che caratterizza il contorno elasto-plastico, rappresentato dalla retta che separa, nel piano della sezione, la zona ancora elastica da quella plasticizzata. Otteniamo nel caso particolare in esame:

$$M = \frac{2}{3} \sigma_S b \eta_S + \sigma_S b \left( \frac{h^2}{4} - \eta_S^2 \right), \quad [92.13]$$

da cui sviluppando e tenendo presente la [92.11]:

$$M = \frac{3}{2} M_E \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\eta_S^2}{h^2} \right), \quad [92.14]$$

ed infine risolvendo rispetto a  $\eta_S$ :

$$\eta_S = \pm \frac{h}{2} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_E}}. \quad [92.15]$$

c) *Stati residui di tensione.*

Quando, dopo aver raggiunto la plasticizzazione parziale o totale della sezione, venga rimosso il momento applicato  $M$ , lo stato di tensione non si annulla in conseguenza, perchè la deformazione permanentemente delle fibre plasticizzate impedisce la reversibilità del processo. Rimane così presente uno stato di *tensioni residue* la cui distribuzione può essere ottenuta sottraendo dalle tensioni elasto-plastiche dovute a  $M$  nella fase di carico le tensioni elastiche dovute allo stesso mo-

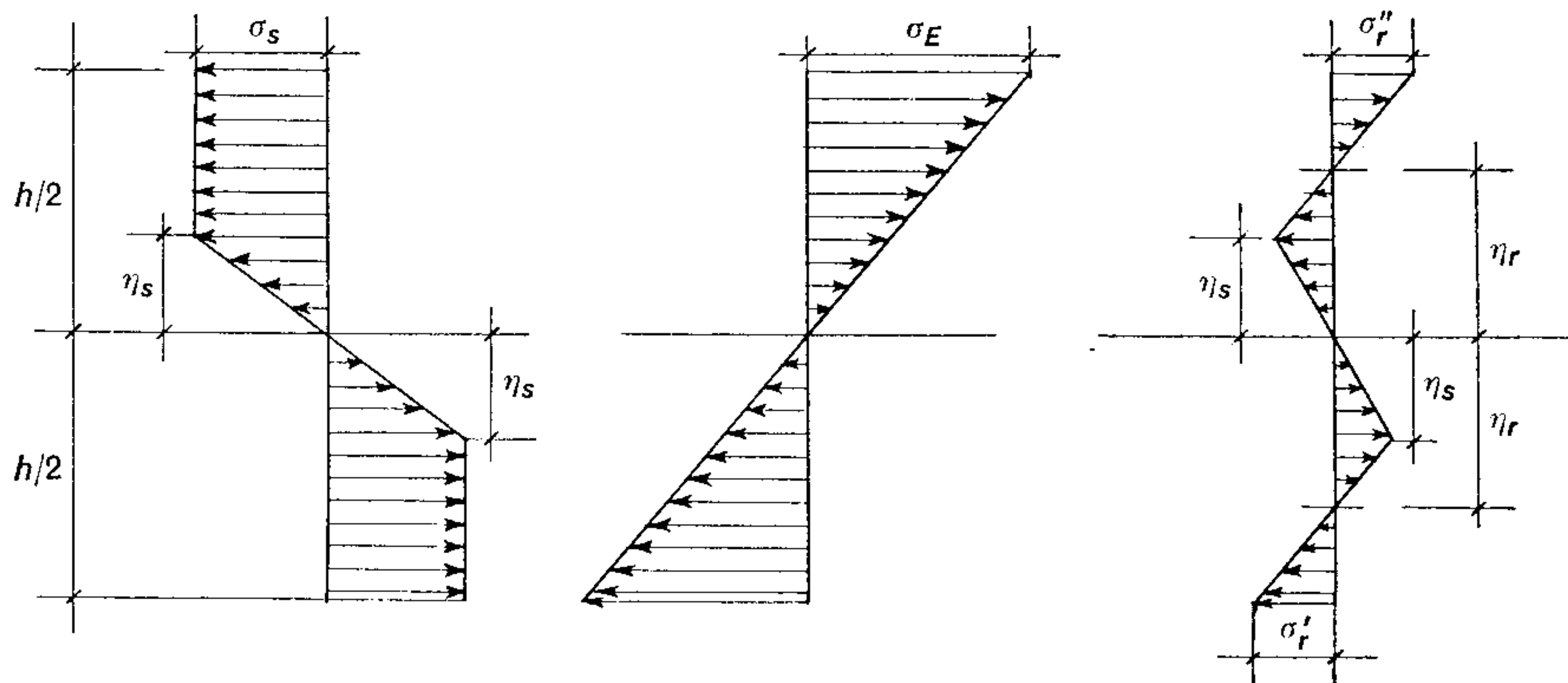


Fig. 77.

mento, cambiato di segno, nella fase di scarico. I punti di intersezione delle due distribuzioni di tensione individuano le fibre con tensioni residue e si trovano ad una distanza  $\eta_r$  dall'asse neutro, tale che:

$$\sigma_S = \frac{M \eta_r}{J}. \quad [92. 16]$$

Con riferimento ad una sezione rettangolare, poichè il momento flettente  $M$  corrispondente ad un certo contorno plastico  $\eta_S$  risulta dalla [92. 14], otteniamo:

$$\eta_r \equiv \frac{J \sigma_S}{M} = \frac{2}{3} \frac{J \sigma_S}{M_E \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\eta_S^2}{h^2}\right)}, \quad [92. 17]$$

dove  $J = bh^3/12$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro. Nella fig. 77 sono indicati i diagrammi delle distribuzioni: di tensioni elasto-plastiche dovute a  $M$ , di tensioni elastiche dovute a  $-M$ , e di tensioni residue ottenute per differenza.



Le considerazioni precedenti sulla flessione in fase elastoplastica sono state dedotte dall'ipotesi di poter ritenere ancora validi i risultati del problema di Saint-Venant. Tale ipotesi, tuttavia, si presta a fondate critiche che vogliamo ora discutere brevemente.

Ad un incremento infinitesimo  $d\kappa$  della curvatura  $\kappa$  dovuta al momento flettente deve corrispondere un incremento  $\nu d\kappa$  della curvatura trasversale degli elementi lineari inizialmente paralleli all'asse neutro  $\xi \equiv x_1$ . D'altra parte, nella zona plasticizzata della sezione trasversale, tale incremento della curvatura deve risultare  $\frac{1}{2}d\kappa$ , in quanto l'incompressibilità del materiale in campo plastico richiede un valore  $\nu = \frac{1}{2}$  del rapporto di Poisson. Non sarebbe perciò rispettata la congruenza tra elementi adiacenti situati da parti opposte lungo la superficie di separazione tra la zona elastica e la zona elasto-plastica. Devono necessariamente essere presenti anche componenti di tensione normali a tale superficie che non può essere assunta piana.

L'analisi rigorosa esige l'impostazione di un problema di elasto-plasticità estremamente complesso e non ancora risolto. Nel caso particolare in cui il rapporto di Poisson sia  $\nu = \frac{1}{2}$  anche nella zona elastica, tale difficoltà non sussiste; è assicurata la conservazione del piano neutro e gli incrementi delle componenti di deformazione, o le loro velocità, sono espresse correttamente, ad esempio, dalle relazioni [64. 2] di Prandtl-Reuss, particolarizzate al caso in esame:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{33} &= \eta \dot{\kappa} + \kappa \dot{\eta} = (\kappa \eta) \dot{\phantom{\kappa}}, \\ \dot{\varepsilon}_{11} &= \dot{\varepsilon}_{22} = -\frac{1}{2} \eta \dot{\kappa} - \frac{1}{2} \kappa \dot{\eta} = -\frac{1}{2} (\kappa \eta) \dot{\phantom{\kappa}}, \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = 0.\end{aligned}\tag{92. 18}$$

L'incremento di deformazione nelle fibre longitudinali del cilindro è dunque una semplice dilatazione associata ad una contrazione trasversale di valore metà.

### 93. Flessione in campo anelastico.

Per uno stato visco-elastico tipo Maxwell, discusso nel § 50, la velocità di deformazione  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{33}$  delle fibre longitudinali del cilindro è legata alla tensione normale corrispondente  $\sigma = \sigma_{33}$  ed alla sua velocità  $\dot{\sigma}$  dalla relazione [90. 3]:

$$E \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) + t_R^{-1} \sigma(t),\tag{93. 1}$$

che integrata rispetto al tempo  $t$  fornisce l'espressione [90. 4] analoga alla [50. 6].

Moltiplicando ambo i membri della [93. 1] per  $\eta = x_3$  ed integrando sull'area  $A$  della sezione trasversale del cilindro, otteniamo:

$$E \int_A \dot{\varepsilon} \eta dA = \int_A \dot{\sigma} \eta dA + t_R^{-1} \int_A \sigma \eta dA,\tag{93. 2}$$

ed anche, con riguardo alla relazione  $\varepsilon = \kappa \eta$  ed alla definizione di momento flettente  $M$ :

$$EJ \dot{\kappa} = \dot{M}(t) + t_R^{-1} M(t).\tag{93. 3}$$

Attraverso una integrazione rispetto al tempo  $t$  possiamo così ottenere il momento flettente  $M(t)$  all'istante generico  $t$ :

$$M(t) = \exp(-t/t_R) \left[ M_0 + EJ \int_0^t \dot{\kappa} \exp(t/t_R) dt \right], \quad [93.4]$$

avendo indicato con  $M_0 = M(0)$  il valore di  $M(t)$  all'istante iniziale  $t = 0$ .

Vediamo dalla relazione trovata che per una deformazione impressa, poichè in tal caso la curvatura  $\kappa(t)$  rimane costante, la sua

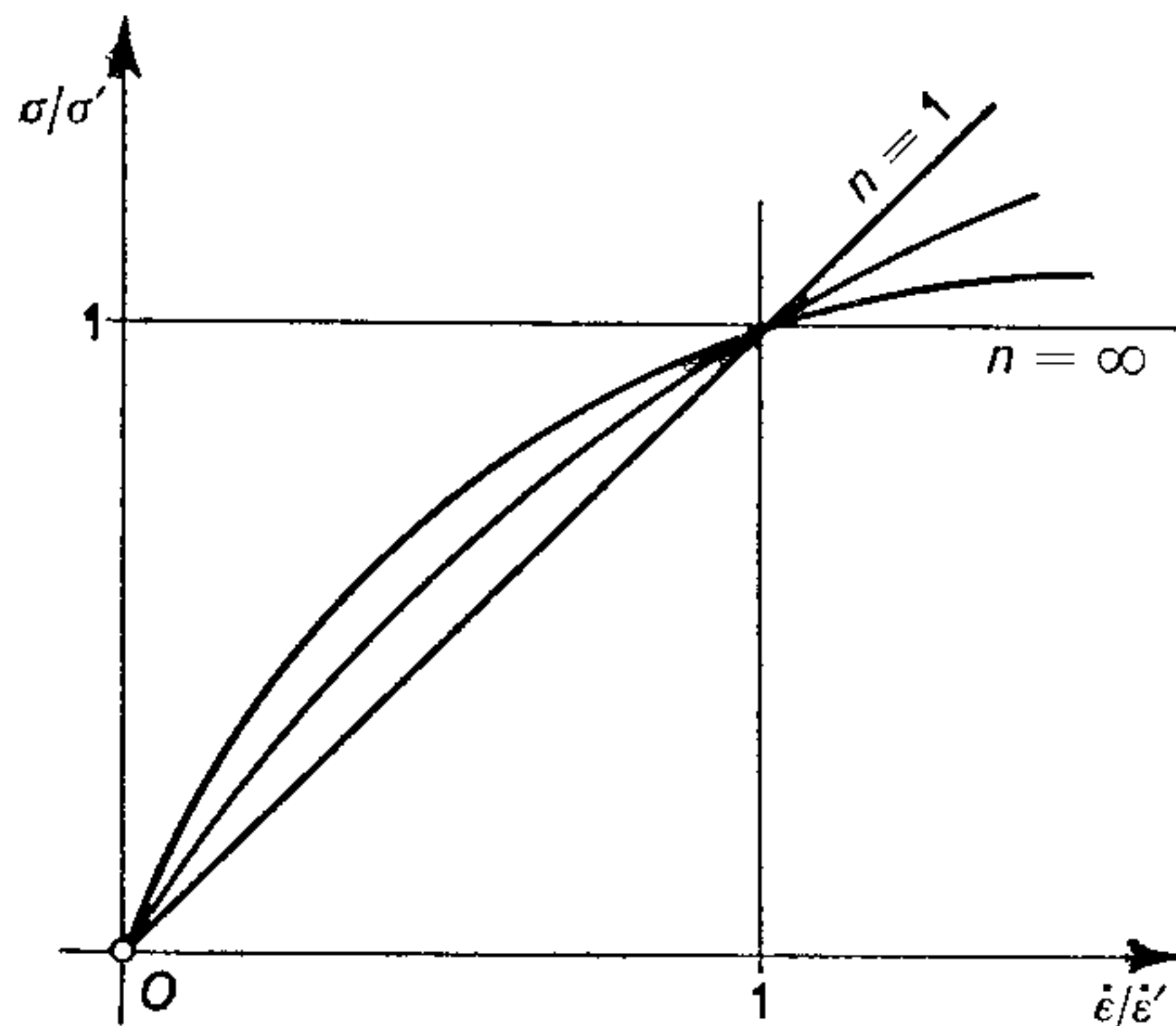


Fig. 78.

velocità risulta identicamente  $\dot{\kappa} = 0$  ed il momento iniziale  $M_0$  si avvicina asintoticamente allo zero secondo la legge esponenziale:

$$M(t) = M_0 \exp(-t/t_R). \quad [93.5]$$

Si annullano di conseguenza anche le tensioni  $\sigma(t)$  nella sezione trasversale e dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo il cilindro rimarrà nella configurazione deformata inflessa, la curvatura  $\kappa$  essendosi trasformata in permanente attraverso il fenomeno di rilassamento della tensione.

Per un materiale a legame costitutivo di tipo viscoso non-lineare [90.19], abbiamo nel caso in esame:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}' \left( \frac{\sigma}{\sigma'} \right)^n, \quad \sigma = \sigma' \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}'} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad [93.6]$$

con  $n > 1$ , ed avendo indicato con  $\epsilon'$  e  $\sigma'$  rispettivamente la deformazione e la tensione nella fibra più lontana dall'asse neutro.

Nella fig. 78 sono stati rappresentati alcuni andamenti della legge [93.6] per diversi valori di  $n$ : in particolare, per  $n = 1$  si ha un comportamento perfettamente elastico lineare, per  $n = \infty$  si ha un comportamento perfettamente plastico.

Il momento flettente risulta:

$$M = \int_{-\eta''}^{\eta'} \sigma \eta b(\eta) d\eta, \quad [93. 7]$$

avendo indicato al solito con  $\eta'$ ,  $\eta''$  le distanze delle fibre estreme dall'asse neutro e con  $b(\eta)$  la larghezza della sezione, come appare

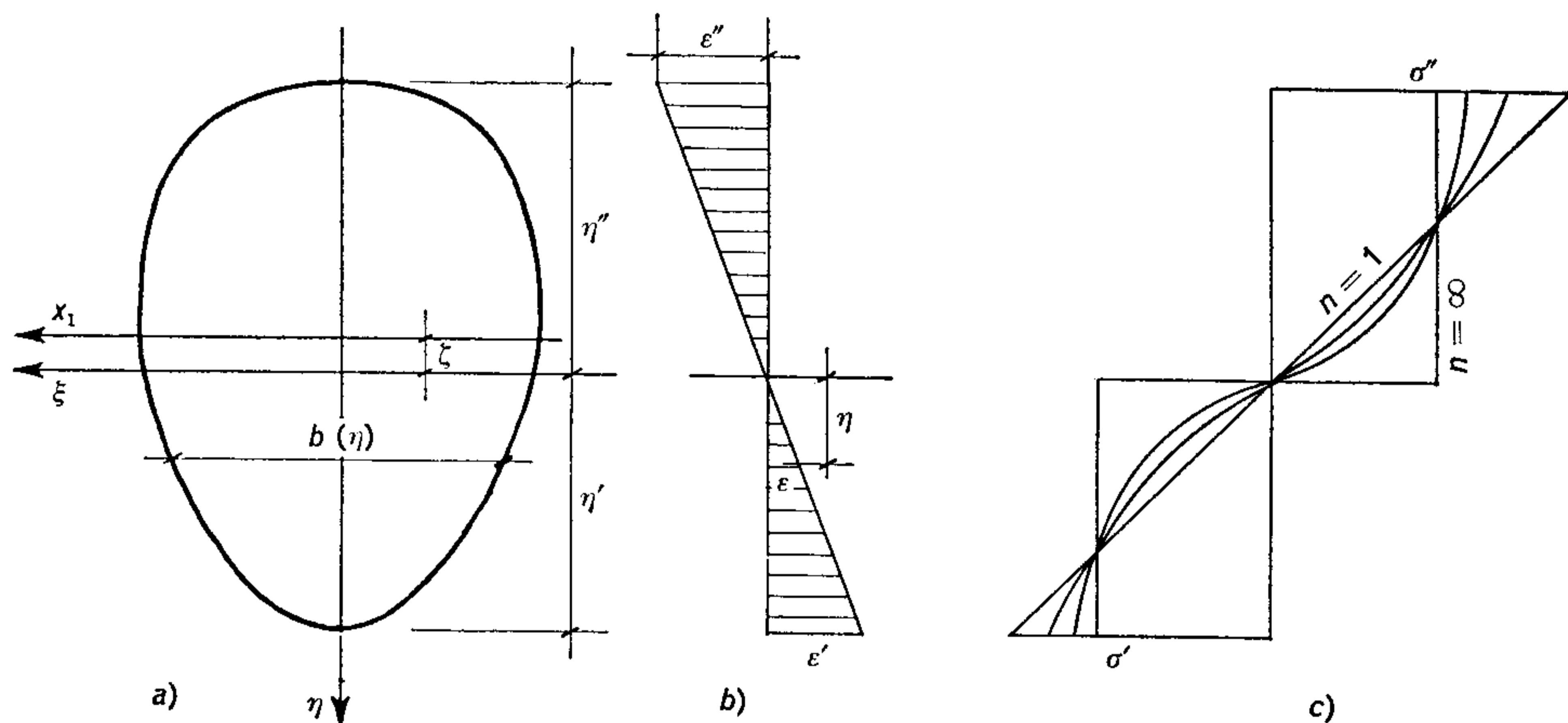


Fig. 79.

dalla fig. 79 a). Ammessa la validità dell'ipotesi della conservazione della sezione piana [fig. 79 b)], cioè:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}'} = \frac{\eta}{\eta'}, \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad [93. 8]$$

il momento flettente [93. 7] diviene:

$$M = \int_{-\eta''}^{\eta'} \sigma' \eta' \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{n+1}{n}} b(\eta) d\eta. \quad [93. 9]$$

Ad esempio, per una sezione rettangolare, essendo  $b(\eta) = b$ ,  $\eta' = h/2$ ,  $\eta'' = h/2$ , il momento flettente è:

$$M = 2 \sigma' b \left(\frac{h}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} \int_0^{h/2} \eta^{\frac{n+1}{n}} d\eta = \frac{n b h^2 \sigma'}{2(2n+1)}, \quad [93. 10]$$

e la tensione nelle fibre estreme più sollecitate risulta:

$$\sigma' = \frac{2(2n+1)}{n} \frac{M}{b h^2}. \quad [93. 11]$$

Così se il momento flettente  $M$  è mantenuto costante, la distribuzione della tensione rimane costante nella sezione.



Per  $n = 1$  la [93. 11] rappresenta la tensione nelle fibre estreme nel caso di comportamento elastico, e coincide con la [92. 11]:  $\sigma' = 6 M/bh^2$ , mentre per  $n = \infty$  la [93. 11] rappresenta la tensione nelle fibre estreme nel caso di sezione completamente plasticizzata, e coincide con la [92. 12]:  $\sigma' = 4M/bh^2$ . L'andamento del diagramma delle tensioni è lineare in questi casi limiti: per valori intermedi è curvilineo come indicato in fig. 79 c).

Eliminando la tensione  $\sigma'$  dalle [93. 6] e [93. 11] otteniamo una relazione tra la dilatazione  $\varepsilon'$  ed il tempo. Abbiamo infatti, indicando con  $c$  una costante:

$$\dot{\varepsilon}' = (c \sigma')^n = \left[ \frac{2c(1+2n)}{n} \frac{M}{bh^2} \right]^n \quad [93. 12]$$

ed integrando rispetto a  $t$ :

$$\varepsilon' = \left[ \frac{2c(1+2n)}{n} \frac{M}{bh^2} \right]^n t, \quad [93. 13]$$

che, per  $n = 1$ , si riduce correttamente alla dilatazione  $\varepsilon'_e$  corrispondente ad uno stato elastico lineare.

#### 94. Flessione in presenza di spostamenti finiti.

Quando il passaggio dalla configurazione iniziale alla configurazione deformata inflessa sia caratterizzato da spostamenti e rotazioni finiti, i risultati precedenti non possono essere applicati in quanto dedotti da relazioni lineari tra le componenti di deformazione e le derivate di spostamento e validi quindi, a stretto rigore, per deformazioni infinitesime.

Nell'ipotesi che la sezione trasversale si mantenga piana e perpendicolare all'asse  $x_3$  è possibile però svolgere un'analisi abbastanza semplice del problema della flessione anche in presenza di relazioni non-lineari che caratterizzano il caso generale di spostamenti finiti.

Scelte allora due terne, materiale  $(x_1, x_2, x_3)$  e spaziale  $(y_1, y_2, y_3)$  coincidenti nella configurazione indeformata, qualora la dilatazione superficiale della sezione sia trascurabile, la distanza  $x_2$  del punto generico  $Q_0$  dal baricentro  $P_0$  rimane invariata e la sua direzione rispetto alla giacitura primitiva resta individuata dallo stesso angolo  $\omega$  formato dall'asse  $x_3$  con l'asse  $y_3$ .

L'unica componente di deformazione diversa da zero è ottenuta da una immediata particolarizzazione delle relazioni generali [13.4] nella forma:

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2} (u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2). \quad [94.1]$$

Indicando con la soprilineatura gli spostamenti dei punti dell'asse  $x_3$  otteniamo, con riguardo alla fig. 80:

$$u_2 = \bar{u}_2 + x_2 (1 - \cos \omega), \quad u_3 = \bar{u}_3 + x_2 \sin \omega, \quad [94.2]$$

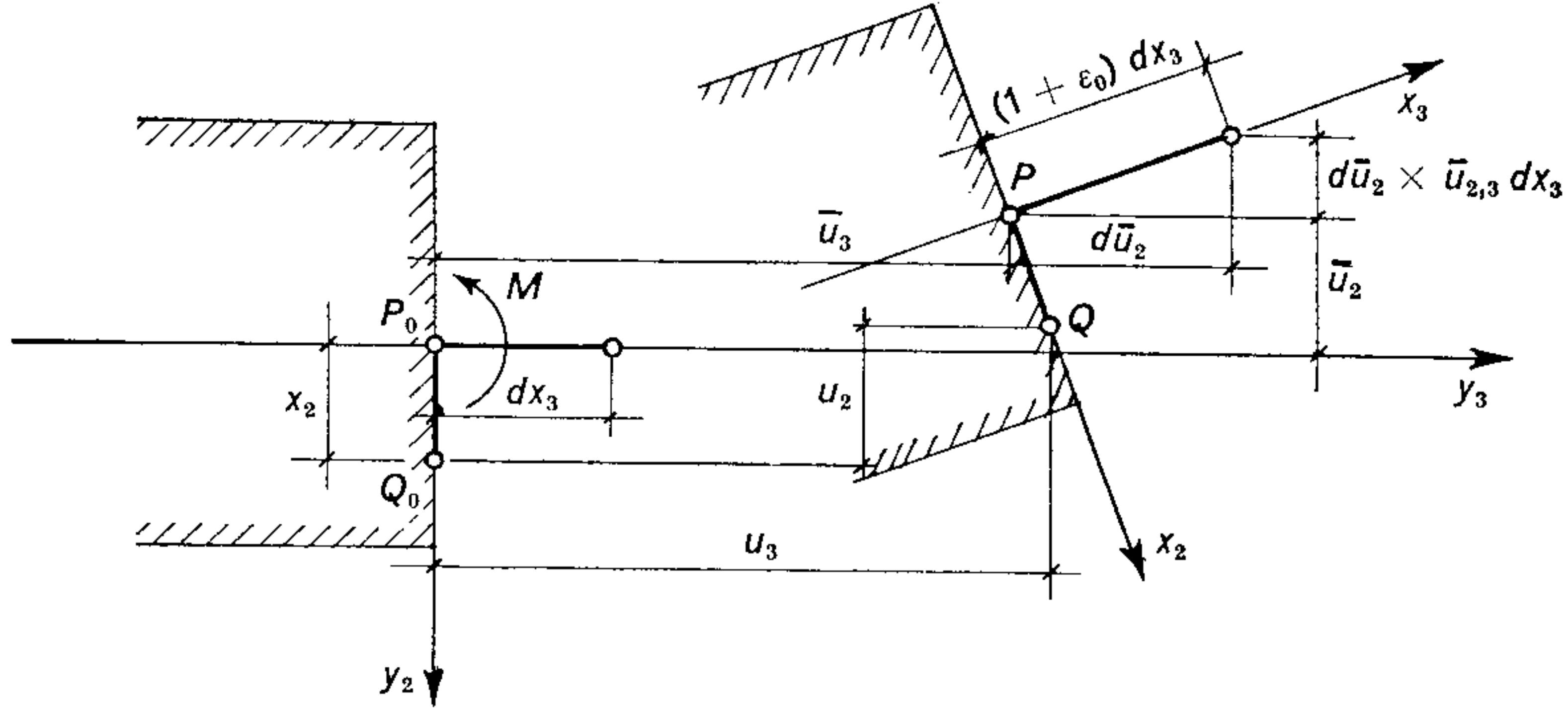


Fig. 80.

da cui derivando rispetto a  $x_3$  ed introducendo la curvatura  $\kappa = \omega_{,3}$  i gradienti dello spostamento risultano:

$$u_{2,3} = \bar{u}_{2,3} + x_2 \kappa \sin \omega, \quad u_{3,3} = \bar{u}_{3,3} + x_2 \kappa \cos \omega. \quad [94.3]$$

Sostituendo le espressioni trovate nella [94.1], la componente di deformazione  $\varepsilon_{33}$  diviene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = & \bar{u}_{3,3} + x_2 \kappa [(1 + \bar{u}_{3,3}) \cos \omega + \bar{u}_{2,3} \sin \omega] + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{u}_{2,3}^2 + \bar{u}_{3,3}^2 + x_2^2 \kappa^2). \end{aligned} \quad [94.4]$$

Si osservi ora che il termine fra parentesi quadra rappresenta, a meno del differenziale  $dx_3$ , la somma delle proiezioni sull'asse  $x_3$  dei cateti:

$$du_2 = \bar{u}_{2,3} dx_3, \quad du_3 = dx_3 + \bar{u}_{3,3} dx_3, \quad [94.5]$$

cioè, indicando con  $\varepsilon_0$  la dilatazione lineare dell'elemento  $dx_3$ , la lunghezza  $(1 + \varepsilon_0) dx_3$  di tale elemento nella configurazione deformata.

L'espressione [94.4] diviene così:

$$\varepsilon_{33} = \bar{u}_{3,3} + (1 + \varepsilon_0) x_2 \kappa + \frac{1}{2} (\bar{u}_{2,3}^2 + \bar{u}_{3,3}^2 + x_2^2 \kappa^2) \quad [94.6]$$

e può essere semplificata, con approssimazione sufficiente osservando che, per deformazioni ancora in campo elastico,  $\varepsilon_0 < 0,001$ ,  $x_2^2 \kappa^2 < x_2 \kappa$ . Potremo quindi scrivere la relazione:

$$\varepsilon_{33} \simeq \bar{u}_{3,3} + x_2 \kappa + \frac{1}{2} (\bar{u}_{2,3}^2 + \bar{u}_{3,3}^2), \quad [94. 7]$$

valida per spostamenti e rotazioni di grandezza arbitraria e per deformazioni piccole rispetto all'unità.

Sotto tali ipotesi è ancora accettabile, per gran parte dei materiali da costruzione, un legame costitutivo elastico lineare, per cui la tensione normale  $\sigma_{33}$  è data dalla:

$$\sigma_{33} = E [\bar{u}_{3,3} + x_2 \kappa + \frac{1}{2} (\bar{u}_{2,3}^2 + \bar{u}_{3,3}^2)] \quad [94. 8]$$

ed il momento flettente dalla:

$$M = \int_A \sigma_{33} x_2 dA = EJ \kappa, \quad [94. 9]$$

essendo nulli i momenti statici rispetto all'asse baricentrico  $x_1$ .

La relazione fondamentale tra il momento flettente  $M$  e la curvatura  $\kappa$  ha dunque l'aspetto consueto anche in presenza di spostamenti finiti. Tuttavia in questo caso è necessario distinguere, nella determinazione della curvatura, tra coordinate materiali  $x$  e coordinate spaziali  $y$ .

Con riferimento alla configurazione deformata corrente abbiamo infatti dalla fig. 80, per  $\varepsilon_0 = 0$ :

$$d\bar{u}_2 = dx_3 \sin \omega, \quad \omega = \arcsin \bar{u}_{2,3} \quad [94. 10]$$

e quindi la curvatura assume la forma *materiale*:

$$\kappa \equiv \omega_{,3} = \frac{\bar{u}_{2,33}}{(1 - \bar{u}_{2,3}^2)^{1/2}}. \quad [94. 11]$$

Con riferimento invece alle coordinate  $y$ , dovremo operare il cambiamento di variabile:

$$\kappa \equiv \omega_{,3} = \omega_{;3} y_{3,3}, \quad [94. 12]$$

dove, per evitare ambiguità, la derivazione rispetto alla  $y_3$  è stata indicata con l'indice preceduto dal *punto e virgola*. Dalla fig. 80 risulta:

$$d\bar{u}_2 = dy_3 \operatorname{tg} \omega, \quad \omega = \operatorname{arctg} \bar{u}_{2,3}, \quad [94. 13]$$

mentre, sempre per  $\varepsilon_0 = 0$ :

$$dx_3^2 = dy_3^2 + d\bar{u}_2^2, \quad dy_3 = dx_3 (1 + \bar{u}_{2,3}^2)^{-1/2}. \quad [94. 14]$$



Abbiamo così la forma *spaziale* della curvatura:

$$\kappa \equiv \frac{\bar{u}_{2;33}}{1 + \bar{u}_{2;3}^2} \frac{1}{(1 + \bar{u}_{2;3}^2)^{1/2}} = \frac{\bar{u}_{2;33}}{(1 + \bar{u}_{2;3}^2)^{3/2}}, \quad [94. 15]$$

in termini cioè delle coordinate fisse  $y$ .

### 95. Sollecitazione composta di forza normale e flessione.

L'azione simultanea delle due caratteristiche di sollecitazione  $N$  e  $M$  è stata discussa in generale nel § 82. Qualora il momento flettente si riduca alla sola componente  $M_1$ , agente secondo un asse principale d'inerzia  $x_2 \equiv \eta$ , la deformata dell'asse geometrico  $x_3$  del cilindro è contenuta nel piano di sollecitazione ( $x_3\eta$ ) e l'asse neutro  $\xi$  risulta perpendicolare a  $\eta$ . Per  $M_1 = M$ ,  $M_2 = 0$ , la componente di tensione  $\sigma = \sigma_{33}$  è data in tal caso dalla particolarizzazione della [82. 1], cioè:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M\eta}{J}, \quad [95. 1]$$

e la dilatazione lineare  $\varepsilon = \varepsilon_{33}$  dalla particolarizzazione della [85. 1], cioè:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} + \frac{M\eta}{J} \right). \quad [95. 2]$$

Al crescere dello stato di sollecitazione la tensione al lembo più cimentato raggiungerà il valore di snervamento  $\sigma_s$  e successivamente la plasticizzazione si estenderà e verrà raggiunto lo snervamento all'altro lembo, finchè tutta la sezione sarà plasticizzata.

In questa fase l'asse neutro può subire una traslazione dipendente dalla forma della sezione e dalle modalità di applicazione delle sollecitazioni  $N$  e  $M$ : la sua determinazione nella fase elasto-plastica esige perciò la conoscenza dell'effettivo programma di carico.

Supponendo che la sezione si mantenga piana anche quando le tensioni superino il limite di snervamento, le fasi successive prima descritte appaiono dalla fig. 81, nel caso di un materiale perfettamente plastico con identico limite di snervamento in semplice trazione ed in semplice compressione.

La verifica di sicurezza in senso ristretto deve escludere che venga superato lo snervamento ed impone quindi la disuguaglianza:

$$\frac{N}{A} + \frac{W}{M} \leq \frac{\sigma_S}{m}, \quad [95.3]$$

essendo  $m$  un opportuno coefficiente di sicurezza.

La verifica di sicurezza in senso generalizzato deve invece essere riferita alla situazione di collasso plastico. In tale condizione limite

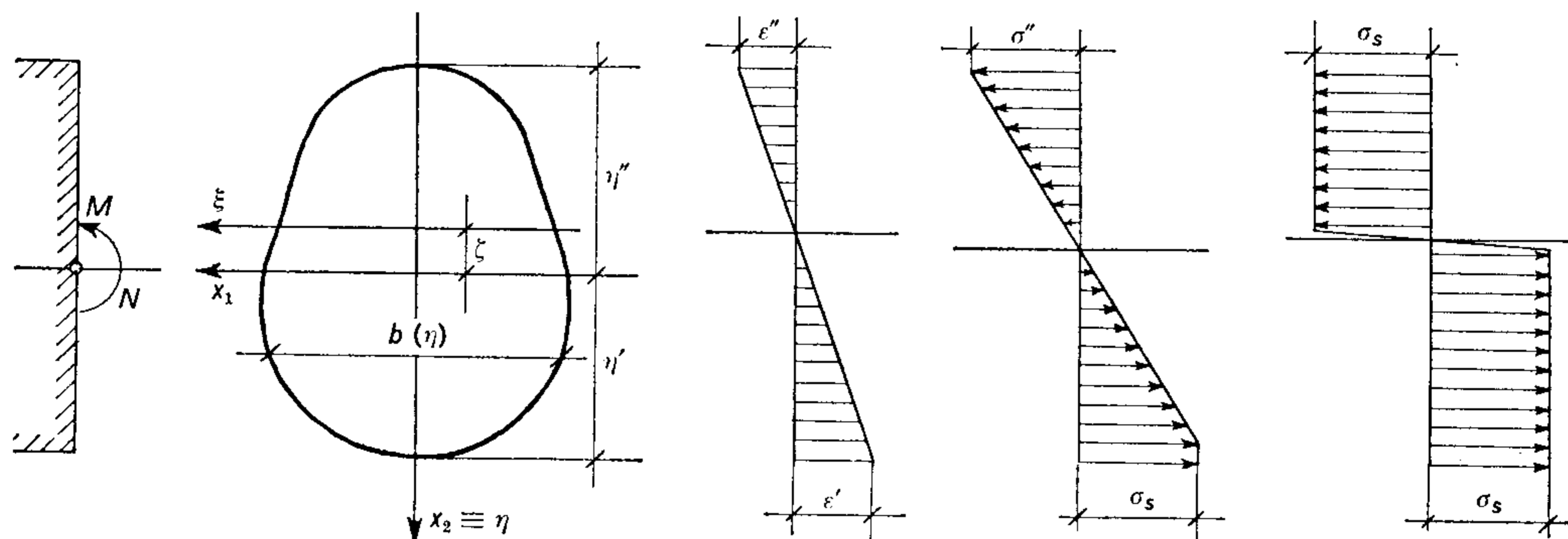


Fig. 81.

non ha dunque importanza lo spostamento dell'asse neutro nelle varie fasi di carico: interessa solo la sua posizione finale, corrispondente ai valori limiti di  $N$  e  $M$ , individuata dalla distanza  $\zeta$  tra  $x_1$  e  $\xi$ .

Per sezione completamente plasticizzata le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo  $x_3$  ed alla rotazione intorno a  $x_1$  si traducono, dalla terza e quarta [80.3], nelle:

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_A \sigma dA = \sigma_S \left[ \int_{-\zeta}^{\eta'} b(\eta) d\eta - \int_{\zeta}^{\eta''} b(\eta) d\eta \right], \\ M &\equiv \int_A \sigma \eta dA = \sigma_S \left[ \int_{-\zeta}^{\eta'} b(\eta) \eta d\eta + \int_{\zeta}^{\eta''} b(\eta) \eta d\eta \right], \end{aligned} \quad [95.4]$$

dove gli integrali possono essere valutati, nota la forma della sezione, in funzione di  $\eta'$  o di  $\eta''$ .

Ad esempio, nel caso di sezione rettangolare, per  $b(\eta) = b$  costante, otteniamo:

$$N = 2b \sigma_S \zeta, \quad M = \sigma_S b \left( \frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right). \quad [95.5]$$

In assenza di momento flettente, la forza normale corrispondente allo snervamento avrebbe il valore:

$$N_S = \sigma_S b h, \quad [95.6]$$

mentre in assenza di forza normale, il momento flettente corrispondente allo snervamento avrebbe il valore [92.13]:

$$M_S = \sigma_S \frac{bh^2}{4}. \quad [95.7]$$

Sostituendo i valori [95.6] e [95.7] nelle [95.5], queste assumono la forma:

$$N = 2N_S \frac{\zeta}{h}, \quad M = M_S \left(1 - \frac{4\zeta^2}{h^2}\right), \quad [95.8]$$

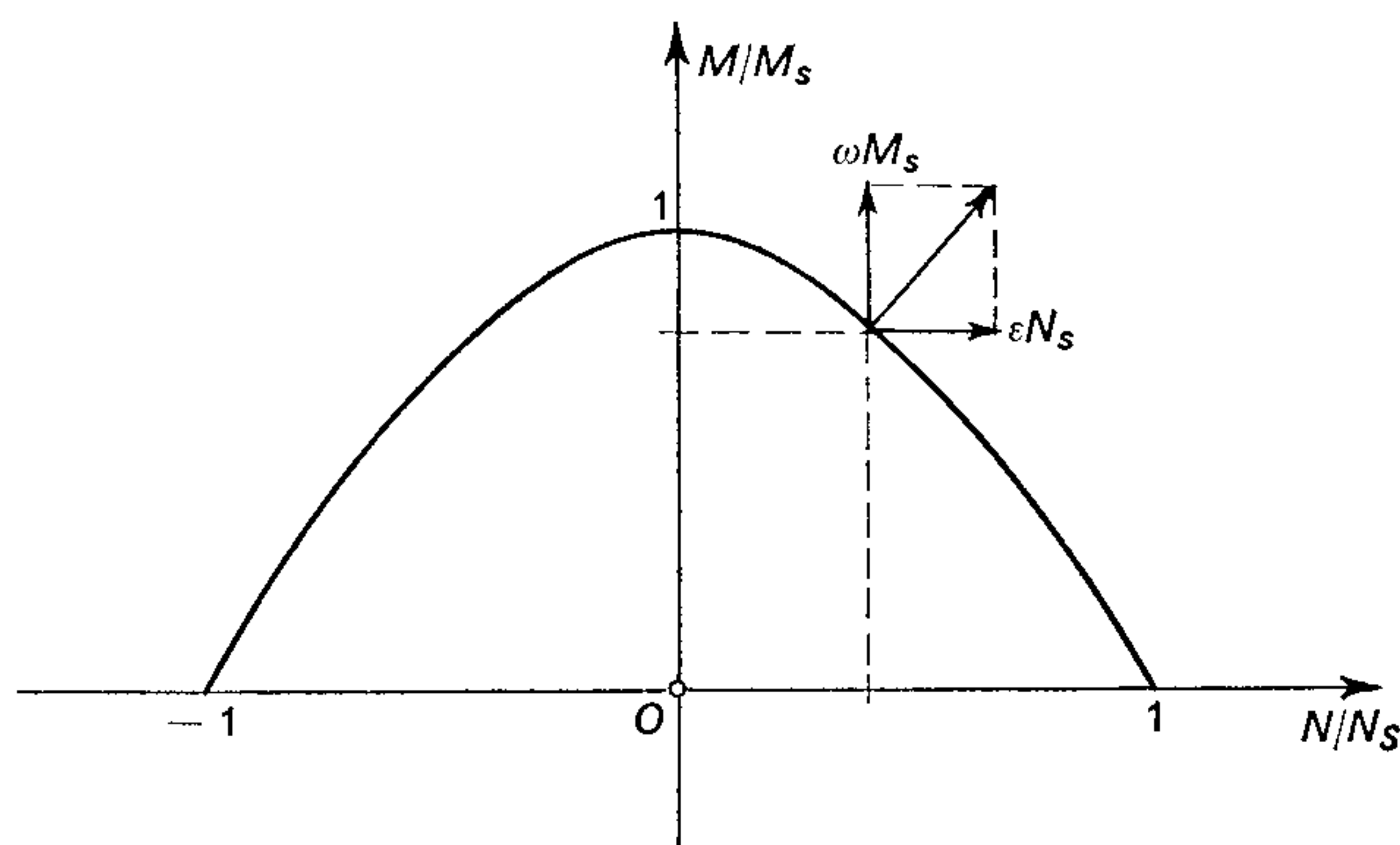


Fig. 82.

che nel piano di coordinate  $N/N_S$ ,  $M/M_S$  rappresentano la parabola di equazione:

$$\frac{M}{M_S} = 1 - \left(\frac{N}{N_S}\right)^2. \quad [95.9]$$

Nel caso di un momento  $M$  negativo, cioè da indurre trazione al lembo superiore e compressione al lembo inferiore, si ottiene in modo analogo una parabola immagine speculare della precedente rispetto all'asse  $N/N_S$ .

L'insieme di queste due parabole rappresenta la *curva limite di interazione* per una sollecitazione composta di forza normale e flessione.

Ogni punto della curva di interazione corrisponde alla plasticizzazione completa della sezione, mentre i punti racchiusi entro la curva corrispondono a plasticizzazioni parziali. I punti di intersezione della curva con gli assi indicano la situazione di plasticizzazione completa dovuta alla sola forza normale  $N_S$  o al solo momento flettente  $M_S$ .

Possiamo anche definire la curva di interazione come il *luogo di snervamento della sezione* in quanto è analoga, in termini di caratteri-



stiche della sollecitazione  $N$ ,  $M$ , alla curva di snervamento per uno stato biassiale di tensione  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  in un dato materiale.

Nel caso di una sezione generica è sempre possibile definire due curve in termini del parametro  $\zeta$ : esse però risultano speculari solo per sezioni simmetriche rispetto all'asse  $x_1$ .

Quando l'asse neutro non taglia la sezione, come invece abbiamo supposto nella discussione precedente, la distribuzione di tensioni limite corrisponderà sempre ad una plasticizzazione completa della sezione raggiunta in semplice trazione o in semplice compressione, a seconda del segno della forza normale  $N$ , cioè ai punti di intersezione con l'asse  $N/N_S$ .

Indicando con  $\varepsilon$  l'allungamento dell'elemento lineare coincidente con l'asse  $x_3$  e con  $\omega$  la rotazione della sezione, in corrispondenza di ogni combinazione limite della forza normale e del momento flettente diviene possibile un certo tipo di deformazione plastica caratterizzata da un valore del rapporto  $\zeta = \varepsilon/\omega$ . Si osservi che i valori di  $N$  e  $M$  determinano soltanto tale rapporto ma non i valori di  $\varepsilon$  e di  $\omega$ , perchè il materiale, nella situazione limite, può scorrere plasticamente sotto tensione costante. Ad esempio, per  $N = 0$ ,  $M = M_S$ , la deformazione plastica deve risultare pura flessione con  $\varepsilon = 0$ , ma l'angolo di rotazione  $\omega$  rimane indeterminato.

Introdotte le grandezze  $\omega M_S$ ,  $\varepsilon N_S$ , otteniamo il loro rapporto nella forma:

$$\frac{\omega M_S}{\varepsilon N_S} = \frac{M_S}{\zeta N_S}. \quad [95.10]$$

Se allora differenziamo le [95.5] rispetto al parametro  $\zeta$ , cioè:

$$dN = 2\sigma_S b d\zeta, \quad dM = -2\sigma_S b \zeta d\zeta, \quad [95.11]$$

possiamo scrivere la relazione:

$$\frac{dM}{M_S} \frac{N_S}{dN} = -\frac{\zeta N_S}{M_S}. \quad [95.12]$$

Poichè il prodotto delle equazioni [95.10] e [95.12] vale  $-1$ , concludiamo che il vettore della deformazione di componenti  $\omega M_S$ ,  $\varepsilon N_S$  risulta perpendicolare alla tangente alla curva di interazione nel punto corrispondente.

## 96. Sollecitazione di taglio.

Fu osservato nel § 83 che la distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  sulla sezione trasversale del cilindro di Saint-Venant è

dovuta alla forza di taglio  $T \equiv (T_1, T_2)$  ed al momento torcente  $M_t$ : nel caso di sezioni simmetriche gli effetti di tali caratteristiche della sollecitazione risultano indipendenti e la presenza di una forza tagliante lungo un asse di simmetria non dà origine ad alcuna rotazione rigida della sezione.

Se allora consideriamo una sezione simmetrica rispetto all'asse  $x_2$  sollecitata da una forza di taglio  $T = T_2$  secondo l'asse di simmetria, la determinazione delle tensioni tangenziali richiede la risoluzione di un problema particolare al contorno ottenuto dalla [83. 1] per  $b_1 = 0$ ,  $c = 0$ , e corrispondente quindi alla seconda [83. 2], cioè:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_2(x_1, x_2) &= 0 && \text{in } A, \\ \frac{d\varphi_2}{dn} &= (x_2^2 - \bar{\nu} x_1^2) n_2 && \text{su } C. \end{aligned} \quad [96. 1]$$

Nella risoluzione effettiva del problema per forme assegnate della sezione trasversale conviene ricondurci alla formulazione alternativa in termini della funzione  $\psi_2(x_1, x_2)$ , ottenuta dalla particolarizzazione della [83. 4] al caso  $b_1 = 0$ ,  $c = 0$ , e corrispondente quindi al problema di Dirichlet espresso dalla seconda [83. 5], cioè:

$$\begin{aligned} \nabla \psi_2(x_1, x_2) &= 0 && \text{in } A, \\ \psi_2(s) &= \int_S (x_2^2 - \bar{\nu} x_1^2) ds && \text{su } C, \end{aligned} \quad [96. 2]$$

in modo da avere la condizione al contorno espressa mediante la funzione anzichè la derivata normale.

Le tensioni tangenziali, tenute presenti le relazioni di omogeneità [79. 10], risultano allora dalle [83. 6], scritte per  $b_1 = 0$ ,  $c = 0$ ,  $b_2 = -T/J_1$ :

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= -\frac{T}{2J_1} \psi_{2,2}, \\ \tau_{32} &= \frac{T}{2J_1} (\psi_{2,1} + x_2^2 - \bar{\nu} x_1^2). \end{aligned} \quad [96. 3]$$

A titolo di esempio mostreremo come venga determinata la funzione  $\psi_2(x_1, x_2)$  per due sezioni di particolare interesse applicativo.

a) *Sezione circolare.*

In questo caso il contorno  $C$  della sezione è la circonferenza di equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2, \quad [96. 4]$$

essendo  $a$  il raggio, per cui il valore [82. 2] della funzione  $\psi_2$  su  $C$ , per  $x_2^2 = a^2 - x_1^2$ , risulta:

$$\psi_2(s) = \int_S [a^2 - (1 + \bar{\nu}) x_1^2] dx_1 = a^2 x_1 - \frac{1 + \bar{\nu}}{3} x_1^3. \quad [96. 5]$$

Una funzione che verifichi tale condizione al contorno è la seguente:

$$\psi_2(x_1, x_2) = c(a^2 - x_1^2 - x_2^2)x_1 + a^2 x_1 - \frac{1 + \bar{\nu}}{3} x_1^3, \quad [96. 6]$$

in quanto il primo termine del secondo membro si annulla identicamente su  $C$  mentre il secondo soddisfa alla [96. 5].

La funzione scelta verificherà anche l'equazione di Laplace, cioè la prima delle [96. 2]:

$$\nabla \psi_2 \equiv [-8c - 2(1 + \bar{\nu})] x_1 = 0, \quad [96. 7]$$

purchè, per tutti i valori di  $x_1$ ,  $c = -(1 + \bar{\nu})/4$ .

La soluzione del problema è espressa così dalla:

$$\psi_2(x_1, x_2) = -\frac{1 + \bar{\nu}}{12} (x_1^2 + 3x_2^2 - a^2) x_1, \quad [96. 8]$$

alla quale, con riguardo alla definizione [78. 5] di  $\bar{\nu} = \nu(1 + \nu)^{-1}$ , corrispondono i valori desunti dalle [96. 3], con  $J = J_1$ :

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= -\frac{1 + 2\nu}{4(1 + \nu)} \frac{T}{J} x_1 x_2, \\ \tau_{32} &= \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \frac{T}{J} \left( a^2 - x_2^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} x_1^2 \right). \end{aligned} \quad [96. 9]$$

La loro distribuzione sui due diametri principali risulta rispettivamente:

$$\begin{aligned} \tau_{31}(x_1, 0) &= 0, \\ \tau_{32}(x_1, 0) &= \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \frac{T}{J} \left( r^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} x_1^2 \right); \\ \tau_{31}(0, x_2) &= 0, \\ \tau_{32}(0, x_2) &= \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \frac{T}{J} (r^2 - x_2^2), \end{aligned} \quad [96. 10]$$

ed è indicata dai diagrammi della fig. 83.



Le traiettorie delle tensioni tangenziali sono date dall'equazione:

$$\tau_{31} dx_2 - \tau_{32} dx_1 = 0, \quad [96.11]$$

cioè, con riguardo ai valori [96.9] prima determinati:

$$2(1+2\nu)x_1x_2 dx_2 + (3+2\nu)\left(a^2 - x_2^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu}x_1^2\right) dx_1 = 0. \quad [96.12]$$

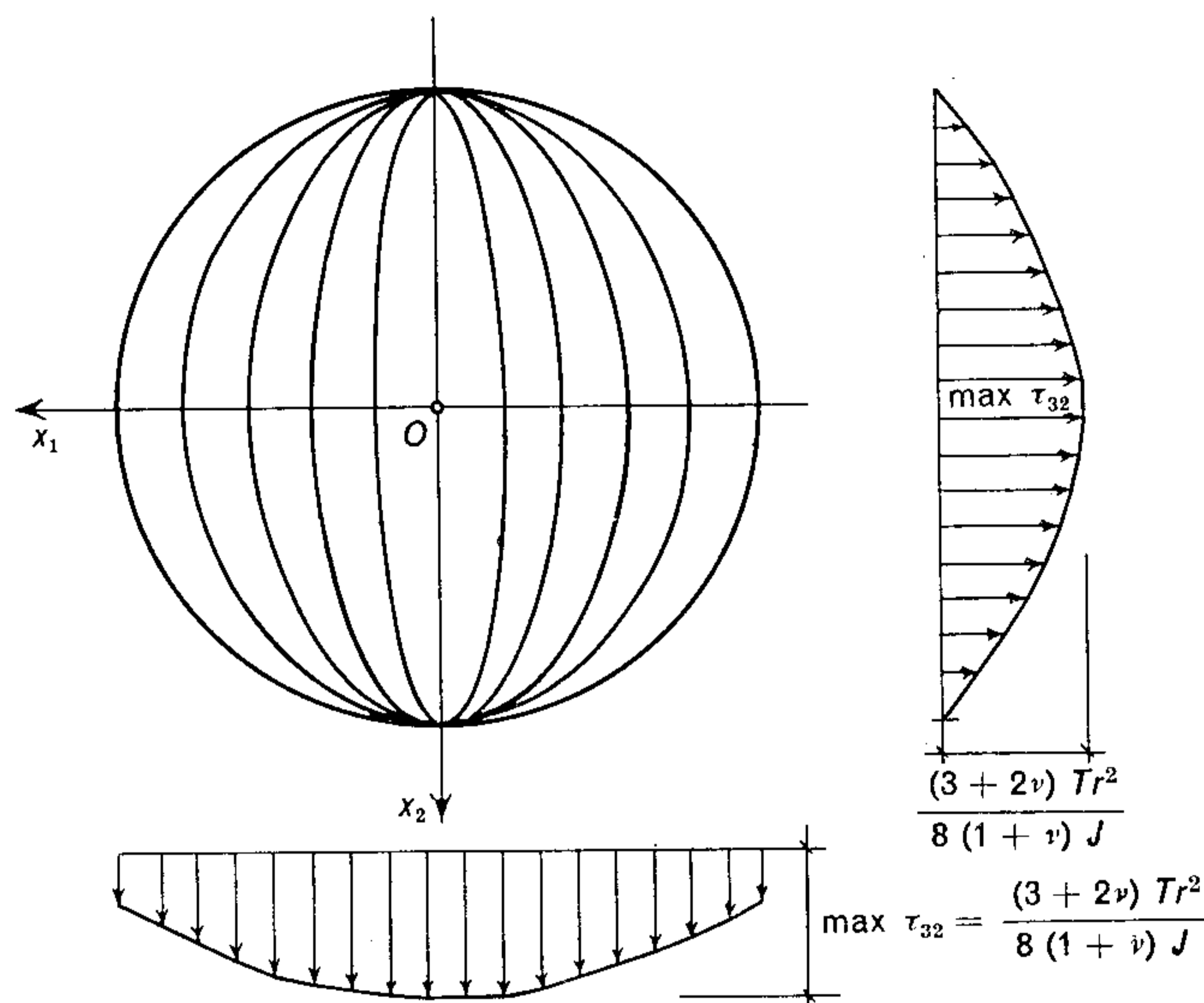


Fig. 83.

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 + ax_1^\beta, \quad [96.13]$$

essendo  $a$  una costante arbitraria e  $\beta = (3+2\nu)/(1+2\nu)$ .

Per un valore  $\nu = 0,3$  del rapporto di Poisson alcune di queste traiettorie sono state tracciate in fig. 83.

In modo analogo può essere studiata una sezione di forma ellittica sollecitata a taglio secondo uno degli assi.

#### b) Sezione rettangolare.

In questo caso, indicando con  $a_1, a_2$  i semilati del rettangolo e con  $T = T_2$  il taglio agente secondo l'asse  $x_2$ , l'equazione del contorno è:

$$(x_1^2 - a_1^2)(x_2^2 - a_2^2) = 0. \quad [96.14]$$

La condizione al contorno sotto forma differenziale, derivando la [96. 2] rispetto a  $s$ , risulta nella forma:

$$\frac{d\psi_2}{ds} = (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2) \frac{dx_1}{ds}, \quad [96. 15]$$

dove le derivate parziali della  $\psi_2$  sui lati del rettangolo rispettivamente paralleli a  $x_1$ ,  $x_2$  assumono i valori:

$$\psi_{2,1} = a_2^2 - \bar{\nu}x_1^2, \quad \text{per } x_2 = \pm a_2, s \equiv x_1; \quad [96. 16]$$

$$\psi_{2,2} = 0, \quad \text{per } x_1 = \pm a_1, s \equiv x_2. \quad [96. 17]$$

Consideriamo allora una soluzione del problema sotto forma della serie:

$$\psi_2(x_1, x_2) = kx_1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \alpha_m(x_1) \beta_m(x_2), \quad [96. 18]$$

dove  $\alpha_m(x_1)$ ,  $\beta_m(x_2)$  siano funzioni delle sole variabili  $x_1$ ,  $x_2$  rispettivamente ed ogni termine soddisfi all'equazione di Laplace. Indicando le derivate ordinarie con un apice si dovrà dunque avere:

$$\nabla(\alpha_m \beta_m) \equiv \alpha_m''(x_1) \beta_m(x_2) + \alpha_m(x_1) \beta_m''(x_2) = 0, \quad [96. 19]$$

o anche, separando le variabili:

$$\frac{\alpha_m''(x_1)}{\alpha_m(x_1)} = - \frac{\beta_m''(x_2)}{\beta_m(x_2)}. \quad [96. 20]$$

Poichè i due membri di questa equazione differenziale sono unicamente funzioni della sola  $x_1$  e della sola  $x_2$ , la [96. 20] può sussistere se, e solo se, il loro valore comune risulti uguale ad una costante, ad esempio  $-k_m^2$ , da cui le equazioni differenziali:

$$\alpha_m''(x_1) + k_m^2 \alpha_m(x_1) = 0, \quad \beta_m''(x_2) - k_m^2 \beta_m(x_2) = 0, \quad [96. 21]$$

che ammettono le soluzioni linearmente indipendenti:

$$\alpha_m(x_1) = \begin{cases} \cos k_m x_1 \\ \sin k_m x_1 \end{cases}, \quad \beta_m(x_2) = \begin{cases} \cosh k_m x_2 \\ \sinh k_m x_2 \end{cases}. \quad [96. 22]$$

Le condizioni al contorno [96. 16] e [96. 17] richiedono di prendere in considerazione solo termini del tipo  $\sin k_m x_1$ ,  $\cosh k_m x_2$ , con

$k_m = m\pi/a_1$ , e quindi:

$$\psi_2(x_1, x_2) = kx_1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \cosh \frac{m\pi x_2}{a_1}. \quad [96.23]$$

Ciascun termine della serie verifica così la condizione [96.17] per  $x_1 = \pm a_1$ . Per quanto riguarda la condizione [96.16] per  $x_2 = \pm a_2$  si osservi che sussiste il seguente sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo ( $-a_1 < x_1 < a_1$ ):

$$x_1^2 = \frac{a_1^2}{3} + \frac{4a_1^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos \frac{m\pi x_1}{a_1}. \quad [96.24]$$

Tenendo presenti le [96.23] e [96.24], la condizione al contorno [96.16] sui lati paralleli a  $x_1$  assume la forma:

$$\begin{aligned} k + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m\pi}{a_1} \cos \frac{m\pi x_1}{a_1} \cosh \frac{m\pi x_2}{a_1} = \\ = a_2^2 - \bar{\nu} \left[ \frac{a_1^2}{3} + \frac{4a_1^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos \frac{m\pi x_1}{a_1} \right], \end{aligned} \quad [96.25]$$

dalla quale, uguagliando i coefficienti, otteniamo le costanti:

$$k = a_2^2 - \frac{\bar{\nu} a_1^2}{3}, \quad c_m = - \frac{4a_1^3 \bar{\nu}}{\pi^3} \frac{(-1)^m}{m^3} \left( \cosh \frac{m\pi a_2}{a_1} \right)^{-1}, \quad [96.26]$$

ed infine la funzione  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} \psi_2(x_1, x_2) = \left( a_2^2 - \frac{\bar{\nu} a_1^2}{3} \right) x_1 - \\ - \frac{4a_1^3 \bar{\nu}}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \cosh \frac{m\pi x_2}{a_1}}{\cosh \frac{m\pi a_2}{a_1}}. \end{aligned} \quad [96.27]$$

Le tensioni tangenziali si ottengono dalle [96.3]: il calcolo effettivo è alquanto laborioso e per brevità rimandiamo ad altri testi<sup>1</sup> dove esso è svolto in tutti i particolari.

<sup>1</sup> Cfr. S. TIMOŠENKO, *Theory of Elasticity*, pp. 292-298, New York (1934).



### 97. Teoria approssimata del taglio.

Sempre nell'ipotesi di sezione simmetrica rispetto all'asse  $x_2$  e soggetta a una forza di taglio  $T = T_2$  agente secondo l'asse di simmetria, isoliamo una porzione  $\Omega$  della sezione di area  $A$  mediante una corda  $b$  parallela all'asse  $x_1$ . Il valor medio  $\bar{\tau}_{32}$  della tensione tangenziale  $\tau_{32}$  lungo la corda risulta da un'immediata particolarizzazione della [83. 22] al caso in esame, dove  $T_1 = 0$ ,  $\tilde{n}_1 = 0$ ,  $\tilde{n}_2 = -1$ , nella forma:

$$\bar{\tau}_{32} = \frac{TS_{\Omega}}{Jb}, \quad [97. 1]$$

essendo  $S_{\Omega}$  il momento statico dell'area  $\Omega$  rispetto all'asse  $x_1$ .

Abbiamo visto nel precedente § 96 le difficoltà incontrate nella ricerca delle tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  dovute ad una forza di taglio, anche in casi di sezioni particolarmente semplici. D'altra parte la sollecitazione di puro taglio è un'astrazione, dovendo essere accompagnata da momento flettente, come si desume da immediate considerazioni di equilibrio del cilindro. Le tensioni tangenziali sono perciò sempre associate alla tensione normale  $\sigma_{33}$  dovuta al momento flettente: un eventuale errore commesso nella loro valutazione avrà influenza spesso trascurabile sullo stato di tensione complessivo.

Per tali motivi, nelle applicazioni si rinuncia alla determinazione rigorosa delle tensioni tangenziali attraverso la risoluzione del problema al contorno espresso dalle [96. 1] o dalle [96. 2] e si prendono in considerazione i loro valori medi. Tale punto di vista, fondato sull'ipotesi  $\tau_{32} = \bar{\tau}_{32}$ , conduce alla cosiddetta *teoria approssimata del taglio*. In questo modo la  $\tau_{32}$ , supposta costante sulla corda  $b$ , può essere valutata in modo elementare dalla [97. 1]. Essa sarà evidentemente nulla negli estremi della sezione situati sull'asse  $x_2$ , dove è nullo il rapporto  $S_{\Omega}/b$ , poichè il momento statico risulta infinitesimo di ordine superiore a  $b$ , e massima in corrispondenza della corda dove il rapporto  $S_{\Omega}/b$  presenta un massimo.

Determinata la  $\tau_{32}$  come valor medio lungo la corda  $b$ , e quindi indipendente da  $x_1$ , l'altra componente di tensione  $\tau_{31}$  risulta immediatamente da semplici considerazioni d'equilibrio deducibili dalla terza delle [77. 21], cioè dalla:

$$\tau_{31,1} + \tau_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0. \quad [97. 2]$$

Infatti in questa equazione risultano indipendenti da  $x_1$  sia la derivata  $\tau_{32,2}$ , quando si assuma per  $\tau_{32}$  il suo valor medio  $\bar{\tau}_{32}$ , sia la

derivata  $\sigma_{33,3}$  dovuta eventualmente alla presenza di una forza normale o di un momento flettente. Perciò anche la derivata  $\tau_{31,1}$  deve risultare indipendente da  $x_1$  e quindi la  $\tau_{31}$  deve essere una funzione lineare di tale variabile ed omogenea in  $x_1$  per evidenti ragioni di simmetria.

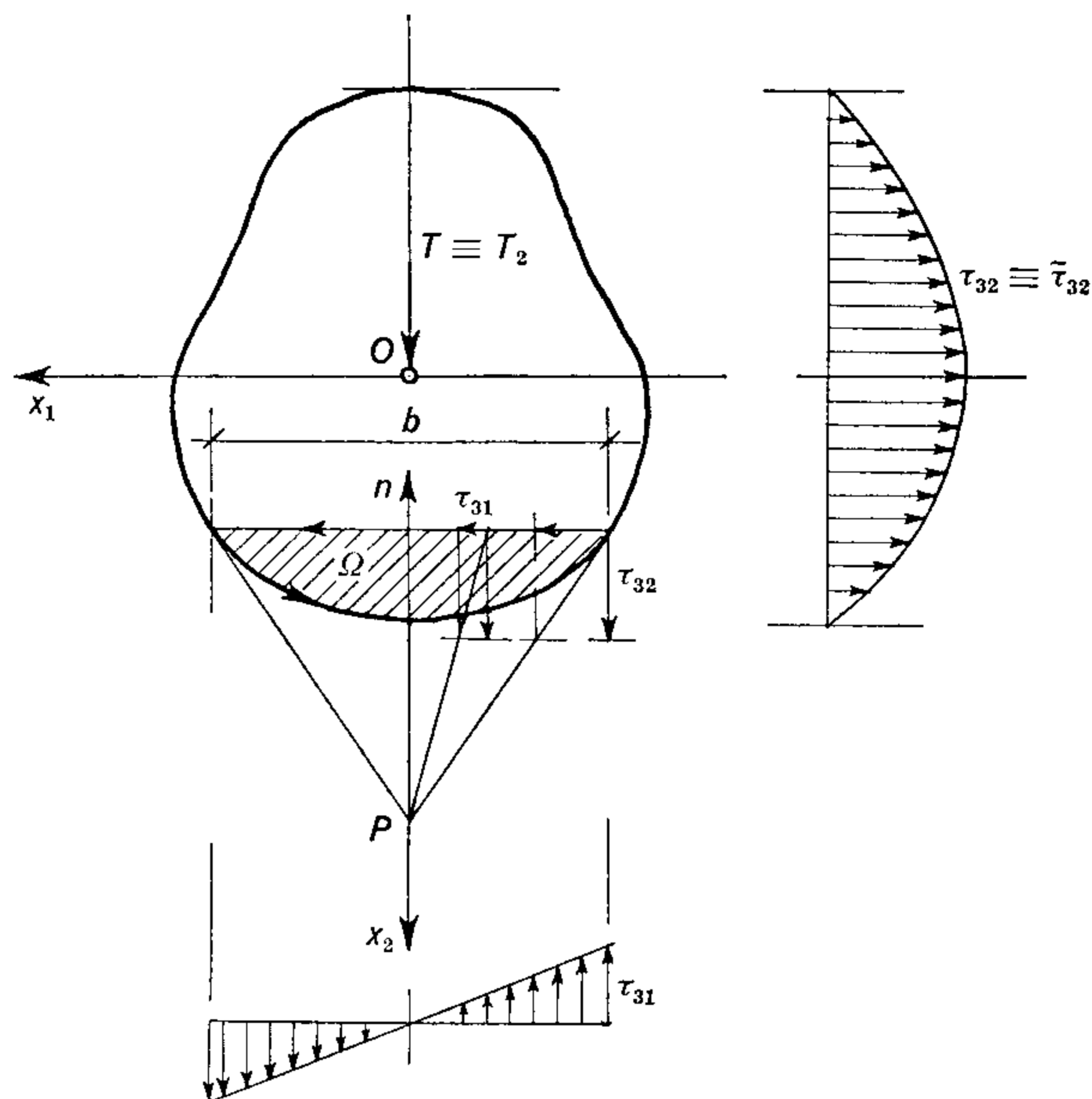


Fig. 84.

Con riguardo alla fig. 84, tracciate allora le tangenti al contorno nei punti di intersezione con la corda  $b$  ed individuato il punto  $P$ , la tensione cercata risulta:

$$\tau_{31} = \tau_{32} \operatorname{tg} \alpha. \quad [97. 3]$$

Infatti nei punti del contorno la tensione tangenziale risultante  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$  deve essere tangente al contorno per la condizione ai limiti [77. 4], mentre la  $\tau_{32} = \tilde{\tau}_{32}$  deve mantenersi costante lungo la corda: da ciò segue la costruzione indicata per  $\tau_{31} = kx_1$ .

La determinazione della tensione tangenziale  $\tau_{32}$  come valor medio  $\tilde{\tau}_{32}$  espresso dalla [97. 1] è immediata.

A titolo di esempio, per la sezione rettangolare della fig. 85 a), indicando per semplicità con  $\eta \equiv x_2$  l'asse di sollecitazione, il momento statico della porzione tratteggiata  $\Omega$  è dato dalla:

$$S_{\Omega} = b \left( \frac{h}{2} - \eta \right) \left[ \eta + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - \eta \right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right). \quad [97. 4]$$

La tensione tangenziale, per  $J = Ah^2/12$ , diviene:

$$\tau_{32} = \frac{Tb}{2bJ} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right) = \frac{6T}{A} \left( \frac{1}{4} - \frac{\eta^2}{h^2} \right) \quad [97.5]$$

e raggiunge per  $\eta = 0$  il valore massimo  $\tau_{\max} = 1,5 T/A$ , pari cioè a 1,5 volte il valore corrispondente alla ipotesi di uniforme distribuzione  $T/A$  su tutta la sezione.

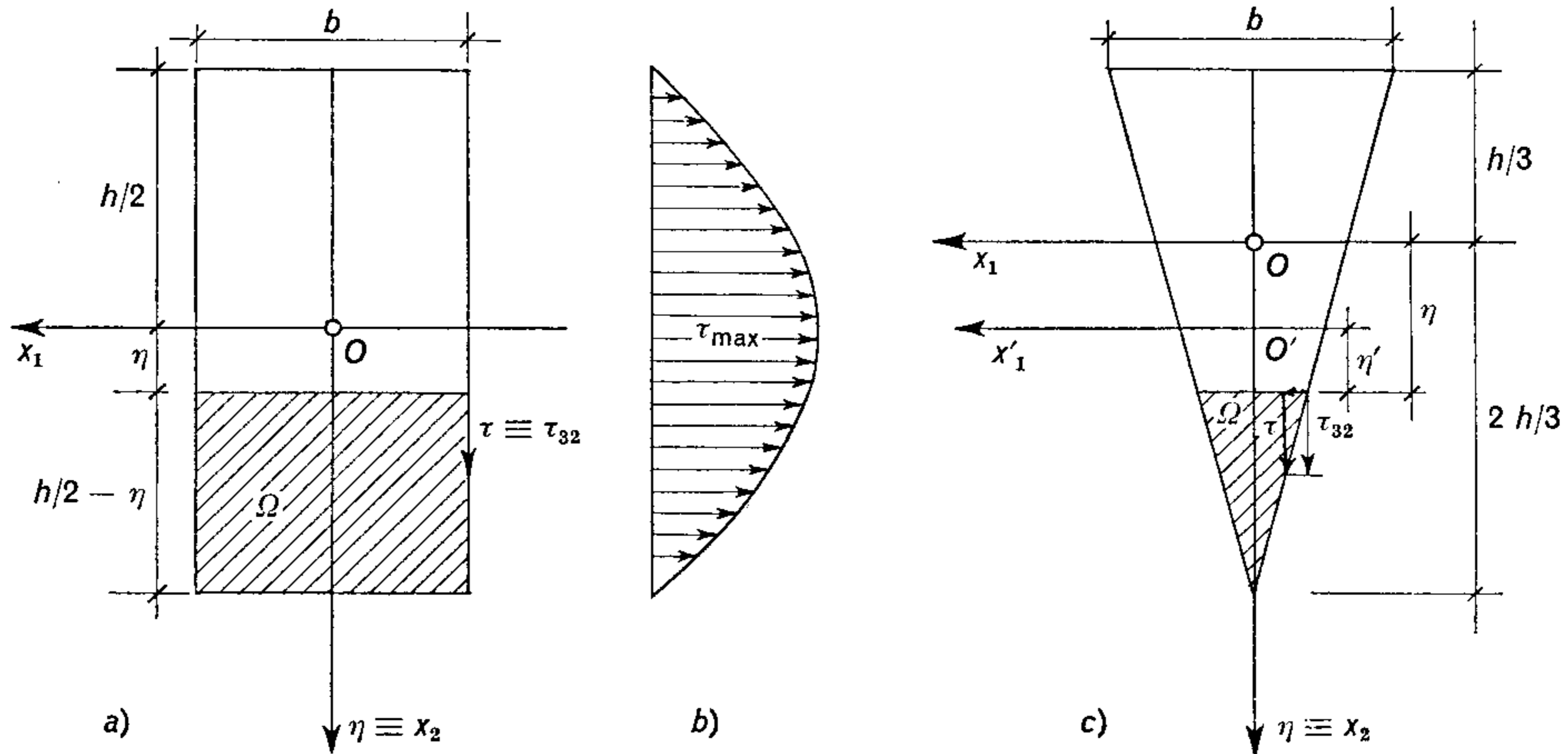


Fig. 85.

La stessa espressione vale per la sezione triangolare isoscele della fig. 85 c). Infatti:

$$S_{\Omega} = \frac{b}{2} \left( \frac{2h}{3} - \eta \right) \left[ \eta + \frac{1}{3} \left( \frac{2h}{3} - \eta \right) \right] = \frac{b}{3} \left( \frac{2h}{3} - \eta \right) \left( \frac{h}{3} + \eta \right), \quad [97.6]$$

e spostando l'origine di  $h/6$ , cioè posto  $\eta = \eta' + h/6$ :

$$S_{\Omega} = \frac{b}{3} \left( \frac{2h}{3} - \eta' - \frac{h}{6} \right) \left( \frac{h}{3} + \eta' + \frac{h}{6} \right) = \frac{b}{3} \left( \frac{h^2}{4} - \eta'^2 \right). \quad [97.7]$$

La tensione tangenziale risulta quindi, per  $J = Ah^2/18$ :

$$\tau_{32} = \frac{Tb}{3Jb} \left( \frac{h^2}{4} - \eta'^2 \right) = \frac{6T}{A} \left( \frac{1}{4} - \frac{\eta'^2}{h^2} \right) \quad [97.8]$$

ed è quindi rappresentata dallo stesso diagramma parabolico della fig. 85 b), con un massimo sulla corda  $\eta' = 0$  uguale al precedente.



Quando la sezione presenta variazioni brusche di lunghezza si hanno discontinuità nel diagramma della tensione tangenziale. Ad esempio, per la sezione di fig. 86 la  $\tau_{32}$  ha andamento parabolico per i due rettangoli di cui è composta la sezione, come si desume immediatamente dall'applicazione della [97.4] alle due parti tratteggiate  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e presenta una variazione brusca nel passaggio dalla

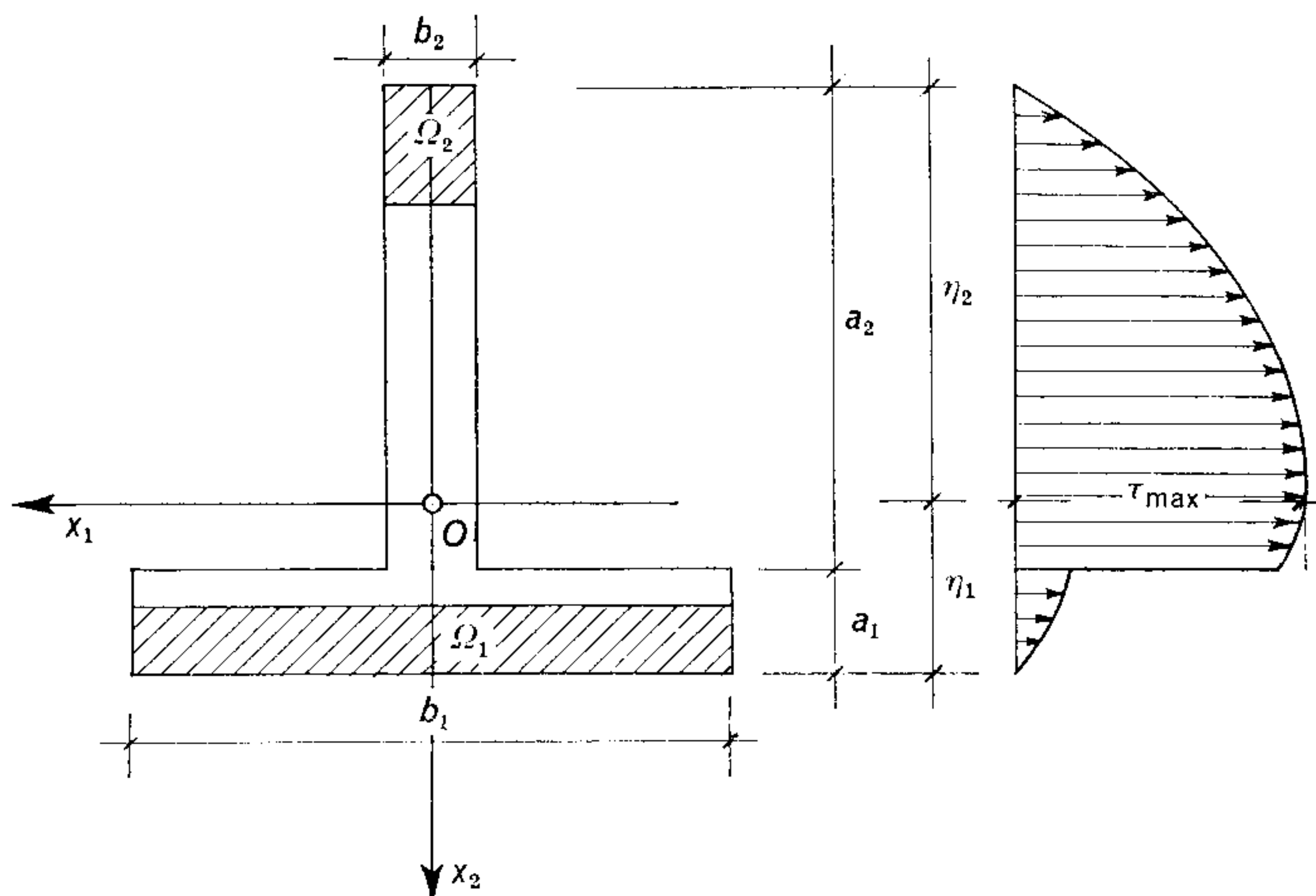


Fig. 86.

corda  $b_1$  alla corda  $b_2$ . Il massimo valore della  $\tau_{32}$  si verifica in corrispondenza della corda baricentrica, dove il momento statico  $S_\Omega$  raggiunge il suo valore massimo mentre la lunghezza della corda si mantiene al suo valore più basso  $b_2$ .

Nell'ambito della teoria approssimata il lavoro di deformazione:

$$U_T = \frac{1}{2\mu} \int_V (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) dV, \quad [97.9]$$

assume una forma di facile determinazione. Sostituendo alle componenti di tensione  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  i loro valori [97.3] e [97.1] ed integrando rispetto a  $x_3$ , otteniamo:

$$U_T = \frac{T^2 l}{2\mu J^2} \int_A (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{S_\Omega^2}{b^2} dA. \quad [97.10]$$

La rigidezza a taglio  $\mu K$  assume in tal caso una forma approssimata in base al valore:

$$K^{-1} = \frac{1}{J^2} \int_A (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{S_\Omega^2}{b^2} dA, \quad [97.11]$$

come mostra il confronto della [97. 10] con il secondo termine della [86. 21]. L'integrale che compare nella [97. 11] può essere facilmente calcolato determinando così un valore approssimato di  $K$  o del fattore di taglio  $\chi = A/K$  della [86. 22]: per sezioni di forma complessa si potrà sempre ricorrere a procedimenti numerici o grafici.

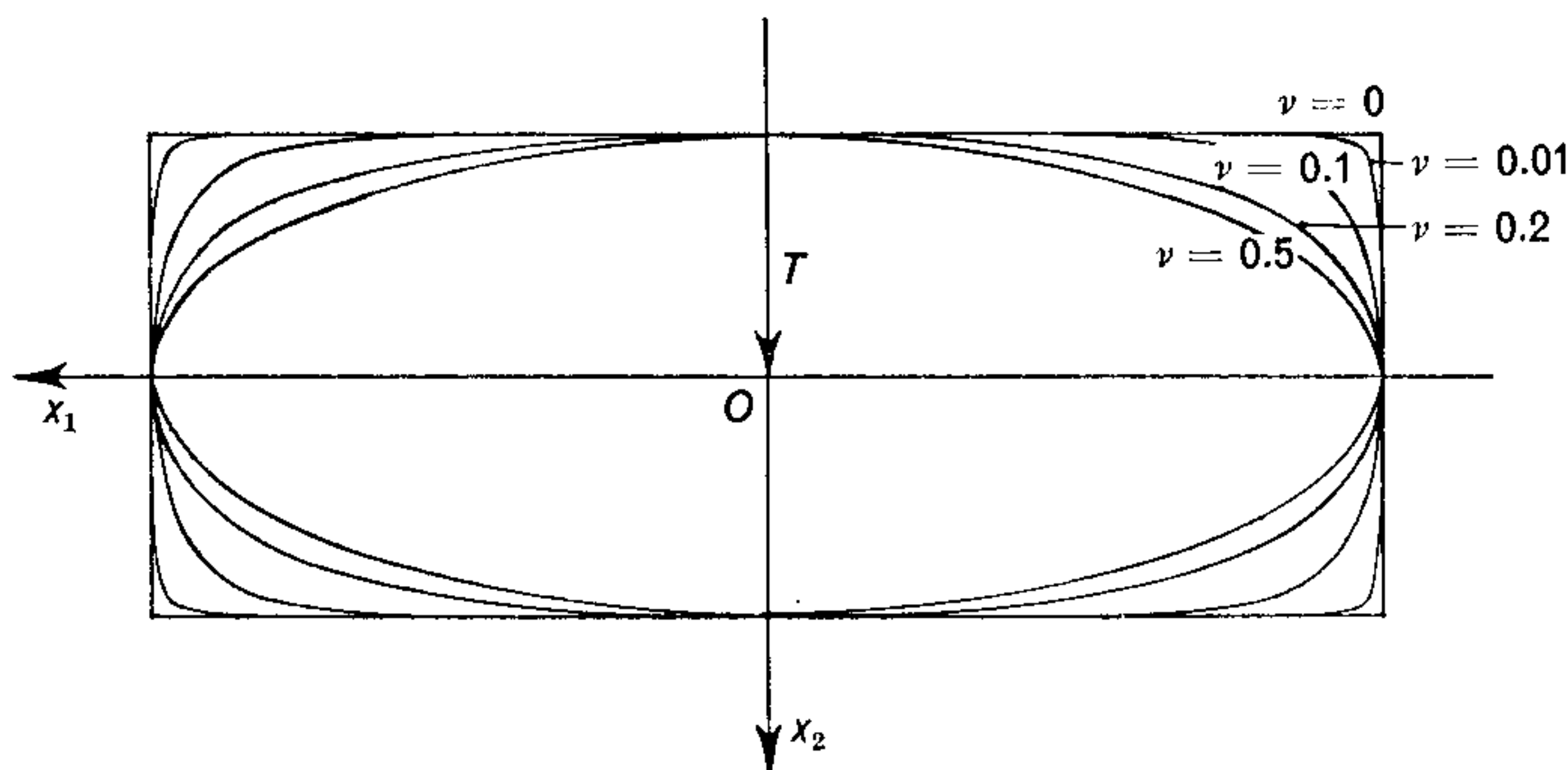


Fig. 87.

Ad esempio, nel caso di sezione rettangolare, con riguardo alla espressione [97. 4] di  $S_{\Omega}$  e tenendo presente che  $\operatorname{tg} a = 0$ ,  $b = \operatorname{cost}$ ,  $dA = b d\eta$ , abbiamo:

$$K^{-1} = \left( \frac{12}{bh^3} \right)^2 \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right) \frac{b d\eta}{b^2} = \frac{6}{5bh} \right] \quad [97. 12]$$

ed il fattore di taglio risulta così uguale a  $6/5$ .

È importante comprendere il significato della teoria approssimata ed avere un'idea sull'ordine dell'errore commesso nel sostituire alla tensione tangenziale  $\tau_{32}$  il suo valore medio  $\tilde{\tau}_{32}$ .

Abbiamo visto che tale valore medio verifica le equazioni di equilibrio purchè l'altra tensione tangenziale  $\tau_{31}$  sia una funzione lineare di  $x_1$ . I valori approssimati rispettano dunque l'equilibrio sia nei punti interni della sezione, perchè soddisfano alla [97. 2], sia nei punti del contorno, perchè soddisfano alla condizione [97. 3] per la tensione tangenziale risultante  $\tau$  di essere tangente al contorno.

Il carattere approssimato della teoria è quindi da ricercarsi nella mancata verifica delle equazioni di congruenza [77. 3] da parte delle  $\tilde{\tau}_{31}$ ,  $\tilde{\tau}_{32}$ : queste non sono dunque soluzioni congruenti del problema di Saint-Venant ma soltanto equilibrate.

Su tali considerazioni è possibile porre il problema di determinare, se esistono, certe forme particolari della sezione per le quali la teoria approssimata coincide con quella rigorosa. Una interessante ricerca in

proposito, sulla base di un'osservazione di LOVE<sup>1</sup>, è stata condotta da TORRIGIANI<sup>2</sup>: alcuni risultati ottenuti appaiono nella fig. 87. Per diversi valori del rapporto di contrazione trasversale  $\nu$  sono state tracciate le forme delle sezioni simmetriche rispetto ad entrambi gli assi alle quali può essere applicata in modo rigoroso la teoria approssimata: è interessante osservare che per  $\nu = 0$  si ottiene la sezione rettangolare, per  $\nu = 0,5$  la sezione ellittica.

### 98. Sollecitazione composta di flessione e taglio.

Abbiamo già osservato che la forza di taglio è sempre associata, nel cilindro di Saint-Venant, ad un momento flettente variabile linear-

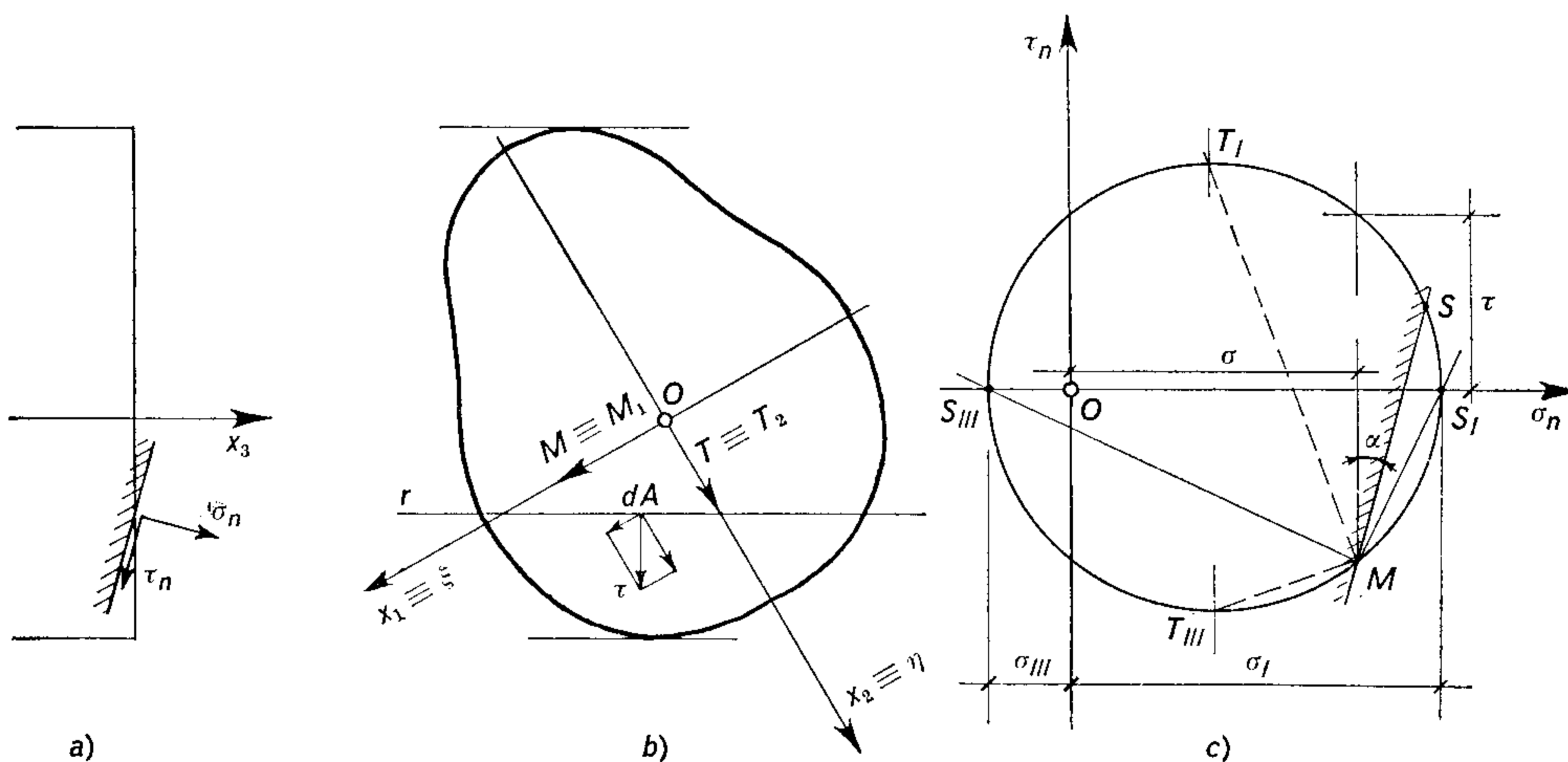


Fig. 88

mente lungo l'asse. Perciò lo stato di tensione è caratterizzato dalla componente normale  $\sigma = \sigma_{33}$  e dalla tensione tangenziale  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$ , determinate separatamente con i procedimenti esposti nei paragrafi precedenti.

Il piano normale alla sezione e contenente il vettore  $\tau$  è piano principale perchè sopporta tensione tangenziale nulla. La retta  $r$  perpendicolare a  $\tau$  è dunque direzione principale e può essere assunta come asse del fascio di piani le cui tracce sono indicate nella fig. 88 a).

Lo stato di tensione sull'elemento superficiale piano generico di tale fascio può essere allora ottenuto dalla rappresentazione piana di

<sup>1</sup> A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4<sup>a</sup> ediz., § 235, pp. 346-348, Cambridge (1952).

<sup>2</sup> M. TORRIGIANI, *Atti Ist. Sc. Costr. Univ. Genova*, **2**, 1-9 (1968).



Mohr discussa nel § 26, fig. 17, conducendo dal polo  $M$ , di coordinate  $(\sigma, -\tau)$ , la parallela alla traccia dell'elemento considerato, secondo la costruzione della fig. 88 c). Il punto  $S$  individua le componenti di tensione, normale  $\sigma_n$  e tangenziale  $\tau_n$ , agenti su tale elemento. In particolare gli elementi di traccia  $MS_I, MS_{III}$  rispettivamente sopportano solo tensioni normali e sono perciò le tracce dei due piani

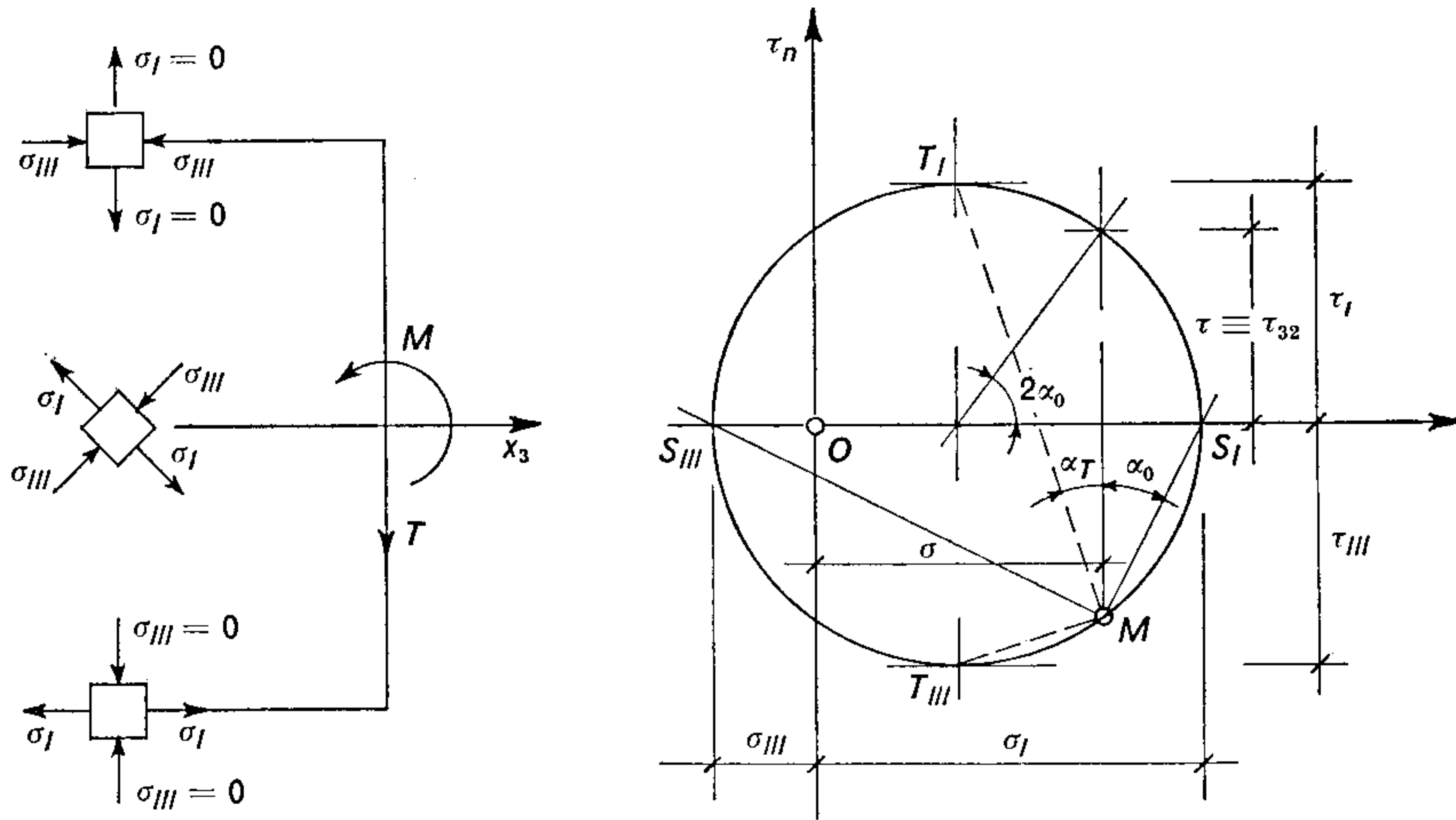


Fig. 89.

principali. I valori delle tensioni principali risultano immediatamente dalla costruzione, dove  $\tau^2 = \tau_{31}^2 + \tau_{32}^2$ :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{III} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad [98.1]$$

mentre gli elementi  $MT_I, MT_{III}$ , a  $45^\circ$  con gli elementi principali, sopportano le massime tensioni tangenziali, associate entrambe ad una tensione normale  $\sigma/2$ :

$$\left. \begin{matrix} \tau_I \\ \tau_{III} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad [98.2]$$

Quando si faccia ricorso alla teoria approssimata del taglio discussa nel § 97, di solito viene trascurata la componente  $\tau_{31}$  della tensione tangenziale: ciò appare lecito, e comunque l'errore commesso non è rilevante, per molti tipi di sezioni di particolare interesse applicativo. In tal caso l'asse principale  $r$  risulta parallelo a  $x_1$  e la tensione tangenziale  $\tau \equiv \tau_{32}$  parallela all'asse di sollecitazione  $x_2 \equiv \eta$ . La costruzione piana di Mohr è quindi riferita alle tracce degli elementi superficiali nel piano coordinato  $(x_2 x_3)$  come mostra la fig. 89.

Le direzioni delle tensioni principali e delle tensioni tangenziali estreme sono contenute nel piano  $(\eta x_3)$  e può essere di un certo interesse esaminare l'andamento delle loro traiettorie in tale piano.

Per quanto riguarda le prime, individuate dall'angolo  $\alpha_0$ , abbiamo dalla fig. 89:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 \equiv \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \frac{2\eta'}{1 - \eta'^2}, \quad [98.3]$$

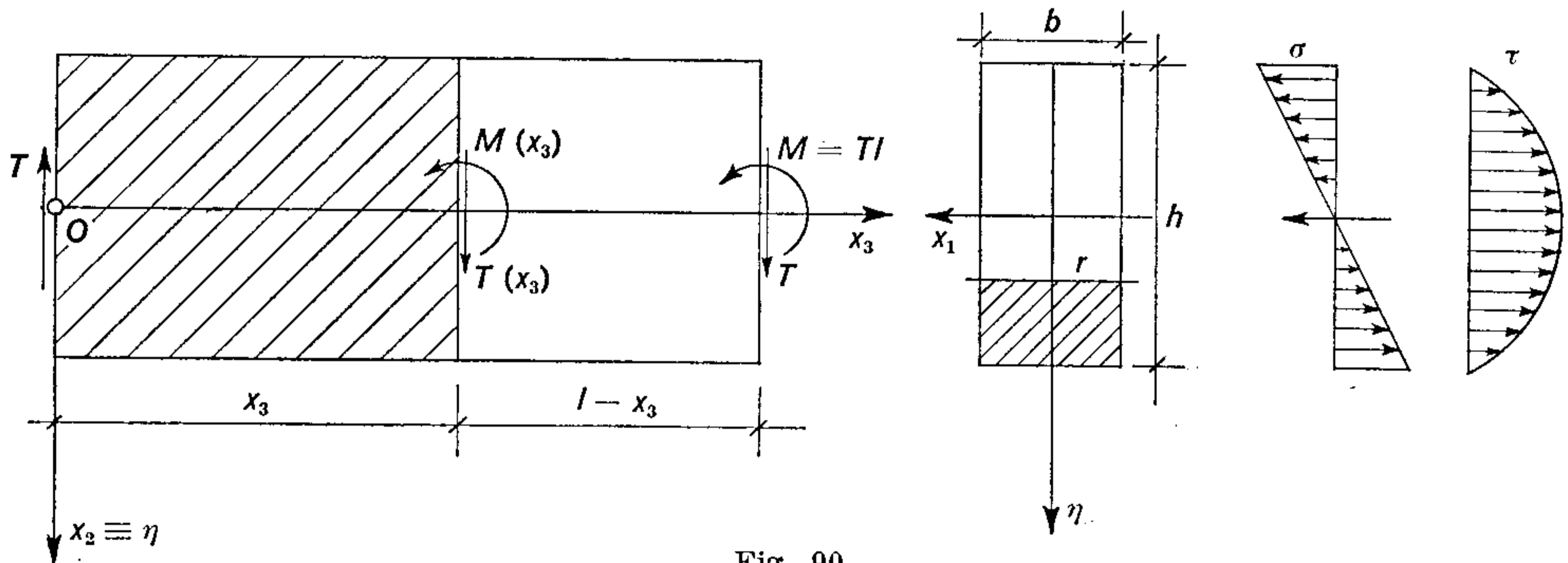


Fig. 90.

avendo indicato con  $\eta' = \operatorname{tg} \alpha_0$  la derivata di  $\eta$  rispetto a  $x_3$ . Si deduce così l'equazione differenziale per le direzioni principali delle tensioni normali estreme  $\sigma_I, \sigma_{III}$ :

$$\eta'^2 + \frac{\sigma}{\tau} \eta' - 1 = 0, \quad [98.4]$$

che, essendo di secondo grado in  $\eta'$ , individua in ogni punto del piano  $(\eta x_3)$  due curve. Tali curve, denominate *linee isostatiche*, come furono definite nel § 23, devono risultare perpendicolari tra loro, dato il valore  $-1$  del termine noto.

Analogamente le direzioni delle tensioni tangenziali estreme vengono individuate dall'angolo  $\alpha_T$  della fig. 89:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_T = -\frac{\sigma}{2\tau}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha_T \equiv \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_T}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_T} = \frac{2\eta'_T}{1 - \eta_T'^2}, \quad [98.5]$$

essendo ora  $\eta'_T = \operatorname{tg} \alpha_T$  la derivata di  $\eta_T$  rispetto a  $x_3$ . L'equazione differenziale per le direzioni delle tensioni tangenziali estreme  $\tau_I, \tau_{III}$  è dunque:

$$\eta_T'^2 - \frac{4\tau}{\sigma} \eta_T' - 1 = 0, \quad [98.6]$$

ed individua in ogni punto del piano due curve tra loro ortogonali.

A titolo di esempio, per un cilindro con sezione rettangolare, soggetto a taglio  $T = T_2$  e momento flettente  $M = M_1$ , di cui alla fig. 90, le caratteristiche della sollecitazione nella sezione generica risultano  $T(x_3) = T$ ,  $M(x_3) = T x_3$ , mentre le tensioni, normale  $\sigma$  e tangenziale

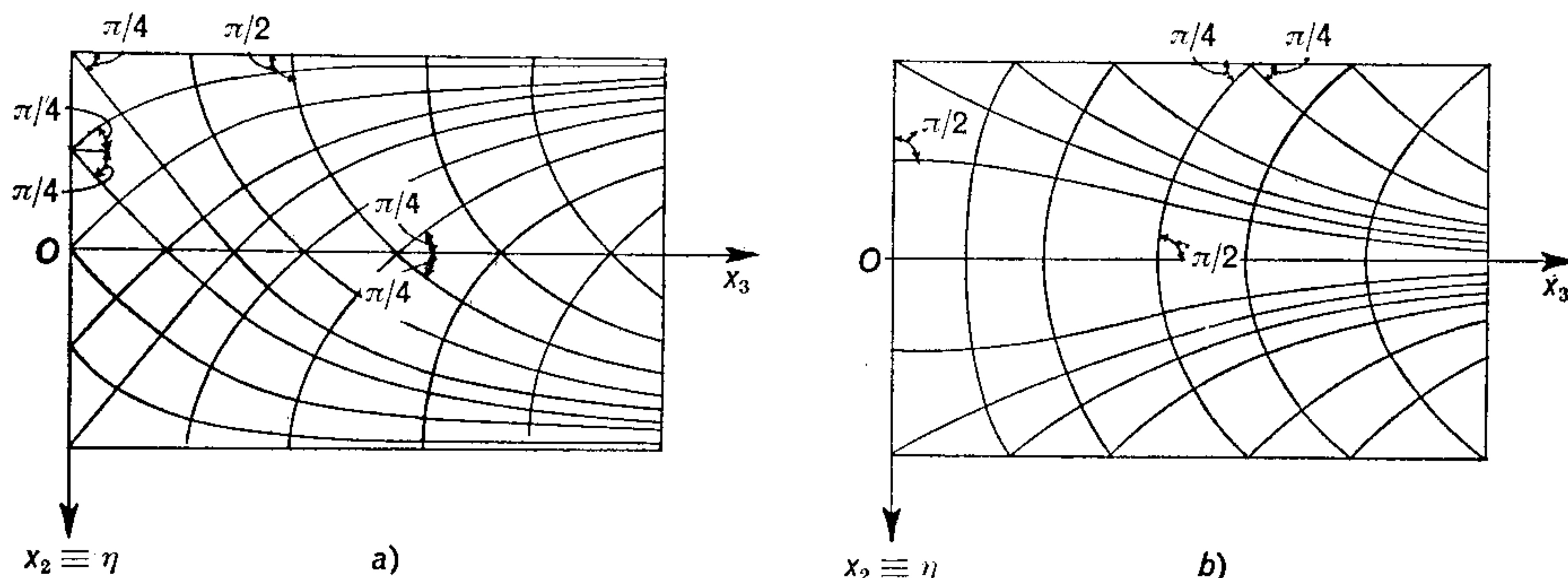


Fig. 91.

$\tau = \tau_{32}$ , hanno rispettivamente l'andamento lineare e parabolico indicato nei diagrammi corrispondenti, cioè:

$$\sigma = \frac{M(x_3) \eta}{J} = \frac{12 T \eta x_3}{b h^3}, \quad [98. 7]$$

$$\tau = \frac{T S_{\Omega}}{J b} = \frac{3}{2} \frac{T}{b h} \left(1 - \frac{4 \eta^2}{h^2}\right).$$

Le direzioni delle tensioni principali sono fornite dalla particolarezzazione della [98. 4] nell'equazione differenziale:

$$\eta'^2 + \frac{2 \eta x_3}{h^2/4 - \eta^2} - 1 = 0, \quad [98. 8]$$

di cui non è noto l'integrale generale. Con procedimenti grafici o numerici si può ottenere una soluzione approssimata per punti, indicata nella fig. 91 a). Si osserva così che sulla base di sinistra, dove  $M = 0$ , le linee isostatiche sono inclinate di  $\pi/4$  rispetto all'asse  $x_3$ ; le isostatiche di trazione e le isostatiche di compressione tendono a disporsi parallelamente al lembo inferiore ed al lembo superiore rispettivamente.

In modo analogo, sostituendo le [98. 7] nella [98. 6] otteniamo l'equazione differenziale delle direzioni delle tensioni tangenziali principali:

$$\eta_T'^2 - \frac{2 (h^2/4 - \eta_T^2)}{\eta x_3} - 1 = 0, \quad [98. 9]$$



che, con la posizione  $x_3 = x$ ,  $\eta^2 = y$ , può essere ricondotta alla forma di Lagrange ed integrata. I risultati sono rappresentati in fig. 91 b).

### 99. Flessione e taglio in campo elasto-plastico.

Quando un'opportuna combinazione della tensione normale  $\sigma = \sigma_{33}$ , dovuta al momento flettente  $M$ , e della tensione tangenziale  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$ , dovuta al taglio  $T$ , raggiunge un valore limite  $k$ , avrà inizio la plasticizzazione degli elementi più sollecitati nel piano della sezione trasversale.

Con riferimento al criterio di plasticità di Tresca [62. 1], per  $k = \sigma_S/2$ , ed all'espressione [98. 2] delle tensioni tangenziali massime, otteniamo la seguente condizione limite per l'incipiente deformazione plastica:

$$\sigma^2 + 4 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) \leq \sigma_S^2. \quad [99. 1]$$

Con riferimento, invece, al criterio di plasticità di Mises [62. 11], per  $k = \sigma_S \sqrt{3}$ , siamo condotti alla:

$$\sigma^2 + 3 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) \leq \sigma_S^2. \quad [99. 2]$$

I due criteri possono essere conglobati nell'unica limitazione:

$$S(\sigma_{ij}) \equiv \sigma^2 + \alpha^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) \leq \sigma_S^2, \quad [99. 3]$$

assumendo il parametro:  $\alpha = 2$ , nel caso si voglia adottare il criterio di Tresca, oppure  $\alpha = \sqrt{3}$ , nel caso si preferisca il criterio di Mises.

La verifica di sicurezza nel senso ristretto discusso nel § 76 richiede che la tensione ideale dedotta dall'uno o dall'altro criterio non superi *in ogni punto* un'opportuna frazione  $m$  della tensione limite monoassiale di snervamento  $\sigma_S$ , cioè:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2)} \leq \frac{\sigma_S}{m}, \quad [99. 4]$$

essendo  $m$  il coefficiente di sicurezza.

Tale verifica esige così la determinazione delle tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  in ogni punto della sezione, in quanto non è possibile individuare a priori, almeno in generale, dove si presenti la combinazione più sfavorevole delle tensioni suddette, cioè il valore max della  $\sigma_{id}$ .

Qualora invece si operi dal punto di vista del collasso plastico, assumendo come *stato limite* non già quello caratterizzato da una deformazione plastica incipiente, bensì la situazione finale di collasso per deformazione plastica non più contenuta, dovremo riferirci ad un

luogo di snervamento che, nel caso presente di stato biassiale per la tensione, si riduce ad una curva  $S(\sigma, \tau) = 0$ .

Volendo operare in termini di caratteristiche  $M$  e  $T$ , e cioè secondo un procedimento analogo a quello seguito nel § 93 per la sollecitazione composta di forza normale e flessione, potremo anche limitarci ad una soluzione che tenga conto solo degli aspetti globali del problema. Nell'ambito della teoria approssimata del taglio, trascurando il contributo della componente  $\tau_{31}$  ed assumendo per la  $\tau_{32}$  il suo valore medio  $\bar{\tau}_{32} = \tau$ , la curva di interazione per le caratteristiche di sollecitazione  $T_2 = T$ ,  $M_1 = M$ :

$$T = \int_A \tau dA, \quad M = \int_A \sigma \eta dA, \quad [99.5]$$

sarà ottenuta mediante l'applicazione dei due teoremi dell'analisi limite dimostrati nel § 68.

In primo luogo consideriamo una distribuzione *cinematicamente ammissibile* della velocità di deformazione, e precisamente le velocità della dilatazione lineare  $\dot{\varepsilon} = \dot{\kappa} \eta$  e della dilatazione angolare  $\dot{\gamma} = 2 \dot{\varepsilon}_{32}$ , legate alle tensioni corrispondenti attraverso le particolari relazioni [63.7] valide per stati perfettamente plastici:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 2 \dot{\lambda} \sigma, \quad \dot{\gamma} = \dot{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \tau} = 2 \alpha^2 \dot{\lambda} \tau, \quad [99.6]$$

per cui le tensioni, normale e tangenziale, risultano:

$$\sigma = \frac{\dot{\kappa} \eta}{2 \dot{\lambda}}, \quad \tau = \frac{\dot{\gamma}}{2 \alpha^2 \dot{\lambda}}. \quad [99.7]$$

Sostituendo allora nella [99.5] si ottengono i valori della forza di taglio  $T$  e del momento flettente  $M$ , che caratterizzano un punto rappresentativo dello stato di tensione appartenente o esterno alla curva di interazione, per ogni scelta di  $\dot{\kappa}/\dot{\lambda}$  e  $\dot{\gamma}/\dot{\lambda}$ . Un valore del parametro  $\dot{\lambda}$  che verifichi la condizione di plasticità [99.3], cioè:

$$\left( \frac{\dot{\kappa} \eta}{2 \dot{\lambda}} \right)^2 + \alpha^2 \left( \frac{\dot{\gamma}}{2 \alpha^2 \dot{\lambda}} \right)^2 = \sigma_S^2, \quad [99.8]$$

risulta della forma:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\gamma}}{2 \alpha \sigma_S} \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha \dot{\kappa}}{\dot{\gamma}} \right)^2 \eta^2}. \quad [99.9]$$

In corrispondenza di tale valore di  $\dot{\lambda}$  le caratteristiche di sollecitazione [99. 5] divengono:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma_S}{\alpha} \int_A \frac{dA}{\sqrt{1 + (\alpha \dot{\kappa} / \dot{\gamma})^2 \eta^2}}, \\ M &= \frac{\sigma_S \alpha \dot{\kappa}}{\dot{\gamma}} \int_A \frac{\eta^2 dA}{\sqrt{1 + (\alpha \dot{\kappa} / \dot{\gamma})^2 \eta^2}}, \end{aligned} \quad [99. 10]$$

e descrivono una curva di interazione in funzione del parametro  $\dot{\kappa} / \dot{\gamma}$ .

In secondo luogo consideriamo una distribuzione *staticamente ammissibile* di tensioni che verifichi la condizione di plasticità. Poichè la presente trattazione è in termini di caratteristiche  $T$ ,  $M$  non prenderemo in esame l'equazione indefinita di equilibrio [97. 2]: avremo naturalmente una soluzione approssimata.

Consideriamo allora quelle particolari distribuzioni di tensione  $\sigma(\eta)$ ,  $\tau(\eta)$  che verificano la condizione di plasticità [99. 3] e sono equivalenti nel loro complesso, in base alle [99. 5], ad una forza di taglio  $T$  e ad un momento flettente  $M$  equilibrati. Sostituendo l'espressione della  $\tau$  ricavata dalla [99. 3] nella prima delle [99. 5] otteniamo:

$$T = \frac{1}{\alpha} \int_A \sqrt{\sigma_S^2 - \sigma^2} dA \quad [99. 11]$$

e determiniamo la funzione  $\sigma(\eta)$  che rende massimo il taglio  $T$  per un valore prescritto del momento  $M$  fornito dalla seconda [99. 5].

Il relativo problema variazionale condizionato per il funzionale  $T[\sigma]$ , mediante un opportuno moltiplicatore di Lagrange  $\Lambda$ , può essere ricondotto ad un problema variazionale libero per il funzionale:

$$F[\sigma, \Lambda] = \frac{1}{\alpha} \int_A \sqrt{\sigma_S^2 - \sigma^2} dA + \Lambda \left( \int_A \sigma \eta dA - M \right), \quad [99. 12]$$

inteso come una funzione della funzione  $\sigma(\eta)$  e del parametro  $\Lambda$ .

Nella classe delle funzioni staticamente ammissibili  $\sigma(\eta)$  il massimo di  $F[\sigma, \Lambda]$  coinciderà con il massimo di  $T[\sigma]$  e risulterà dall'equazione variazionale ottenuta uguagliando a zero la variazione prima  $\delta_\sigma F$  rispetto a certe variazioni arbitrarie  $\delta\sigma$ , cioè:

$$\delta_\sigma F = - \int_A \left( \frac{\sigma}{\alpha \sqrt{\sigma_S^2 - \sigma^2}} - \Lambda \eta \right) \delta\sigma dA = 0, \quad [99. 13]$$

per  $M = \text{cost.}$ , mentre la variazione prima  $\delta_\Lambda F$  rispetto al parametro  $\Lambda$  fornisce evidentemente la condizione ausiliaria del problema espressa dalla seconda [99. 5].



L'arbitrarietà delle variazioni  $\delta\sigma$  richiede che in tutti i punti di  $A$  sussista l'equazione:

$$\frac{\sigma}{\alpha \sqrt{\sigma_S^2 - \sigma^2}} - \Lambda\eta = 0, \quad [99.14]$$

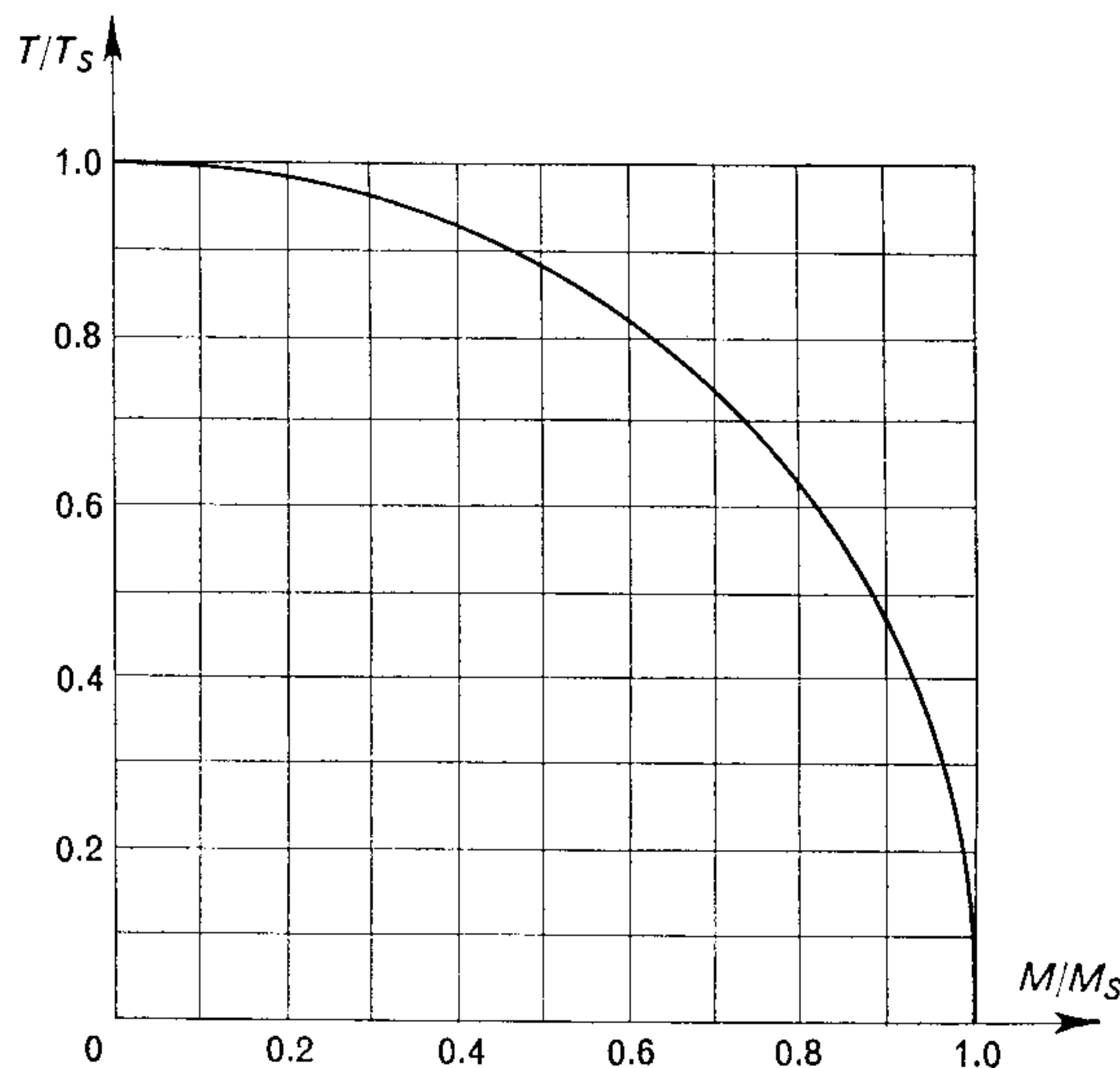


Fig. 92.

dalla quale si ricava il cercato valore di  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{\alpha \Lambda \sigma_S \eta}{\sqrt{1 + \alpha^2 \Lambda^2 \eta^2}}, \quad [99.15]$$

e quindi i valori limiti di  $T$  e  $M$ :

$$T = \frac{\sigma_S}{\alpha} \int_A \frac{dA}{\sqrt{1 + \alpha^2 \Lambda^2 \eta^2}}, \quad M = \alpha \sigma_S \Lambda \int_A \frac{\eta^2 dA}{\sqrt{1 + \alpha^2 \Lambda^2 \eta^2}}. \quad [99.16]$$

Al variare del parametro  $\Lambda$  le [99.16] forniscono nel piano  $(TM)$  una curva di interazione: il confronto con le [99.10] mostra che la curva descritta è la stessa, in funzione di un parametro  $\Lambda = \dot{\kappa}/\dot{\gamma}$ . Cioè, nei limiti dell'approssimazione introdotta trascurando per le  $\sigma$ ,  $\tau$  la condizione locale di equilibrio, la curva trovata rappresenta contemporaneamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di tutte le possibili curve di interazione. Essa rappresenta perciò l'effettiva curva di interazione tra  $T$  e  $M$  nel caso di sollecitazione composta di flessione e taglio.

Assegnata la forma della sezione, possono essere calcolati gli integrali [99. 16] e tracciata effettivamente la curva stessa. Ad esempio, per una sezione rettangolare di base  $b$  ed altezza  $h$ , otteniamo:

$$T = \frac{2b\sigma_s}{aAh} \sinh^{-1} \frac{a^2 N}{2}, \quad M = \frac{b\sigma_s}{2a^2 N^2} \left( aAh \sqrt{1 + (aAh/2)^2} - 2 \sinh^{-1} \frac{aAh}{2} \right),$$

avendo indicato con  $\sinh^{-1}$  la funzione inversa di  $\sinh$ . In fig. 92 è stata riportata in coordinate  $T/T_s, M/M_s$  la curva di interazione ottenuta dalle [99. 17] eliminando il parametro  $N$  e dove  $T_s, M_s$  rappresentano i valori del taglio e del momento flettente che comporterebbero il collasso della sezione quando agissero isolatamente.

### 100. Sollecitazione di torsione.

Quando l'unica caratteristica di sollecitazione diversa da zero è il momento torcente  $M_t$ , la determinazione dello stato di tensione-deformazione richiede la conoscenza della funzione  $\phi_t(x_1, x_2)$  attraverso la risoluzione del problema al contorno espresso dalla terza [82. 2], cioè di una funzione tale che:

$$\Delta \phi_t(x_1, x_2) = 0 \quad \text{in } A,$$

$\frac{d\phi_t}{dn} = x_2 n_1 - x_1 n_2$  su  $C$ .  
 In tal caso le tensioni tangenziali [82. 3], per  $b_1 = b_2 = 0$ , assumono la forma:

$$\tau_{31} = n \kappa_t (\phi_{t,1} - x_2), \quad \tau_{32} = n \kappa_t (\phi_{t,2} + x_1),$$

avendo espresso la costante  $c$  mediante la [86. 3].

Lo stato di tensione sull'elemento superficiale generico è fornito dalla rappresentazione piana di Mohr, analoga a quella indicata nella fig. 88 del § 98, con la sola differenza che nel caso presente è nulla la tensione normale. Poiché la direzione  $r$ , perpendicolare al vettore  $\tau$  di componenti  $\tau_{31}, \tau_{32}$ , è direzione principale, gli elementi superficiali di piani del fascio di sostegno  $r$  sopportano tensioni individuate dal punto  $S \equiv (\sigma_n, \tau_n)$ , intersezione della parallela alla traccia dell'elemento considerato con il cerchio di Mohr. In particolare gli elementi le cui

tracce formano un angolo di  $45^\circ$  con l'asse  $x_3$ , sopportano solo tensioni normali  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{III}$  e rappresentano i piani principali, come nella fig. 93.

La determinazione delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente può essere anche ricondotta, in alternativa, alla ricerca della funzione  $\psi_t(x_1, x_2)$ , coniugata armonica della  $\varphi_t(x_1, x_2)$ , e consiste al-

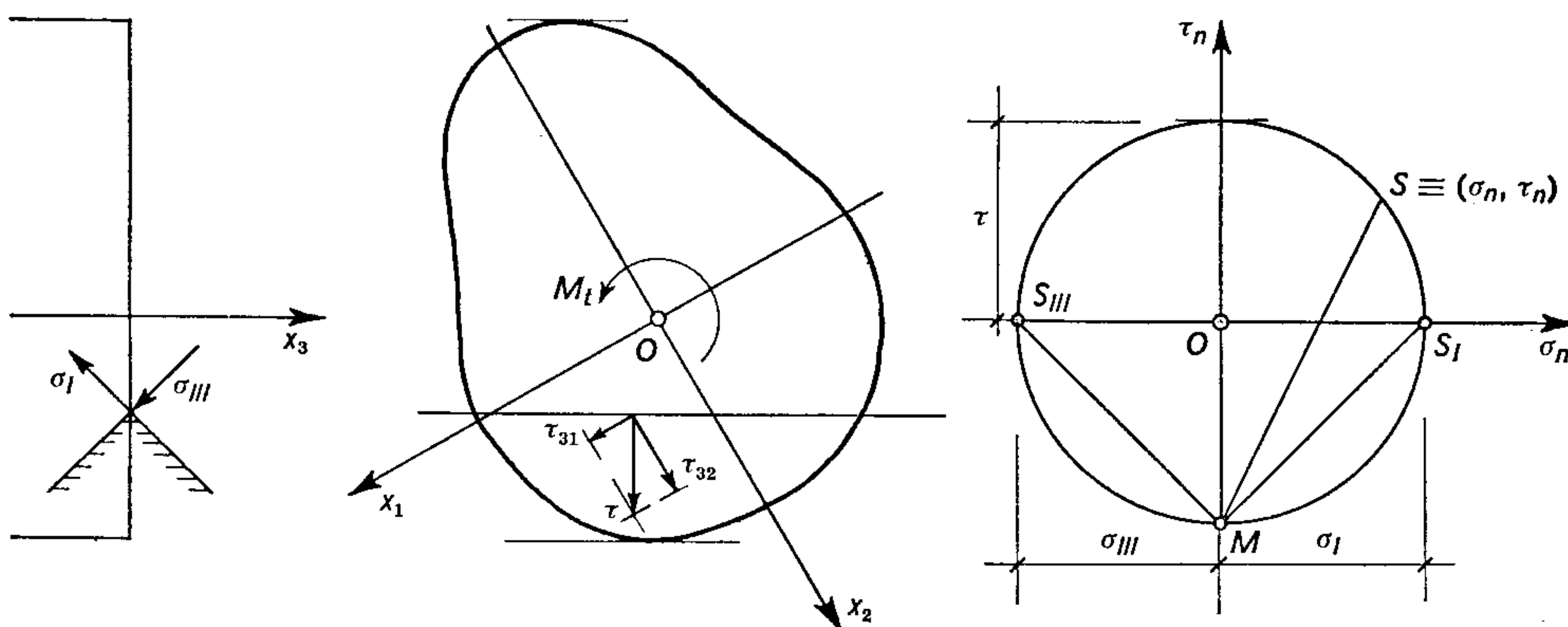


Fig. 93.

lora nel risolvere il problema al contorno espresso dalla terza [83. 5], cioè:

$$\begin{aligned} \nabla \psi_t(x_1, x_2) &= 0 && \text{in } A, \\ \psi_t(s) &= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) && \text{su } C. \end{aligned} \quad [100. 3]$$

Il particolare aspetto di questa condizione al contorno suggerisce di introdurre una funzione  $\Psi(x_1, x_2)$  definita dalla:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad [100. 4]$$

in modo da ottenere un nuovo problema, omogeneo nella condizione al contorno:

$$\nabla \Psi(x_1, x_2) + 2 = 0 \quad \text{in } A, \quad [100. 5]$$

$$\Psi(s) = 0 \quad \text{su } C. \quad [100. 6]$$

Le componenti di tensione [100. 2], con riguardo alle relazioni di monogeneità [79. 10], vengono allora espresse in forma monomia nelle derivate parziali della  $\Psi(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= \mu \kappa_t (\psi_{t,2} - x_2) = \mu \kappa_t \Psi_{,2}, \\ \tau_{32} &= \mu \kappa_t (\psi_{t,1} + x_1) = -\mu \kappa_t \Psi_{,1}. \end{aligned} \quad [100. 7]$$



A tale circostanza è dovuta la denominazione di *funzione di tensione* per la  $\Psi(x_1, x_2)$ , introdotta nel problema della torsione da PRANDTL<sup>1</sup>.

In termini di tale funzione anche il momento torcente e la rigidità torsionale assumono una forma monomia particolarmente espressiva. Infatti dalla sesta [79. 3] abbiamo:

$$M_t = \int_A (\tau_{32} x_1 - \tau_{31} x_2) dA = -\mu \kappa_t \int_A (x_1 \Psi_{,1} + x_2 \Psi_{,2}) dA, \quad [100. 8]$$

o anche, raccogliendo in modo opportuno e trasformando con la formula di Gauss, poichè  $\Psi = 0$  sul contorno:

$$M_t = -\mu \kappa_t \int_A [(x_1 \Psi)_{,1} + (x_2 \Psi)_{,2} - 2\Psi] dA = 2\mu \kappa_t \int_A \Psi dA. \quad [100. 9]$$

Analogamente la rigidità torsionale, definita dalla [85. 11] e dalla terza [86. 7] diviene:

$$\mu K_t \equiv \mu (J_0 - D[\varphi_t]) = 2\mu \int_A \Psi dA \quad [100. 10]$$

e  $K_t$  assume il significato geometrico di rappresentare il doppio del volume racchiuso tra la superficie piana di area  $A$  e la superficie  $z = \Psi(x_1, x_2)$ .

Considerando l'intersezione della superficie  $z = \Psi(x_1, x_2)$  con un piano  $z = \text{cost.}$  parallelo al piano  $(x_1 x_2)$  otteniamo la curva piana  $\Psi(x_1, x_2) = \text{cost.}$ , ed il contorno  $C$  della sezione coinciderà quindi con la curva  $\Psi = 0$ . Se allora proiettiamo la tensione tangenziale risultante  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$ , agente nel punto generico  $P$ , sulla normale  $n$  e sulla tangente  $\nu$  alla curva  $\Psi = \text{cost.}$  (fig. 94), otteniamo rispettivamente:

$$\tau_n = \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 = \mu \kappa_t \left( \Psi_{,2} \frac{dx_2}{ds} + \Psi_{,1} \frac{dx_1}{ds} \right) \equiv \mu \kappa_t \frac{d\Psi}{ds} = 0 \quad [100. 11]$$

$$\tau_\nu = \tau_{31} \nu_1 + \tau_{32} \nu_2 = -\mu \kappa_t \left( \Psi_{,2} \frac{dx_2}{dn} + \Psi_{,1} \frac{dx_1}{dn} \right) \equiv \mu \kappa_t \frac{d\Psi}{dn}.$$

Vediamo dunque che il vettore  $\tau$  ha in ogni punto  $P$  la direzione della tangente ad una curva  $\Psi = \text{cost.}$  ed il suo modulo è proporzionale alla derivata della funzione di tensione rispetto alla normale  $n$ .

<sup>1</sup> L. PRANDTL, *Phys. Zeits.*, 4, 758 (1903); *Jahresber. deutsch. Math.-Ver.*, 13 (1904).

D'altra parte le relazioni (100. 7] esprimono l'interessante proprietà per le componenti  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  della tensione tangenziale di essere proporzionali alle *pendenze* della superficie  $z = \Psi(x_1, x_2)$  nei due piani  $(zx_1)$  e  $(zx_2)$  rispettivamente.

Infine non è difficile dimostrare che la tensione tangenziale risultante assume un valore massimo nei punti del contorno  $C$  della se-

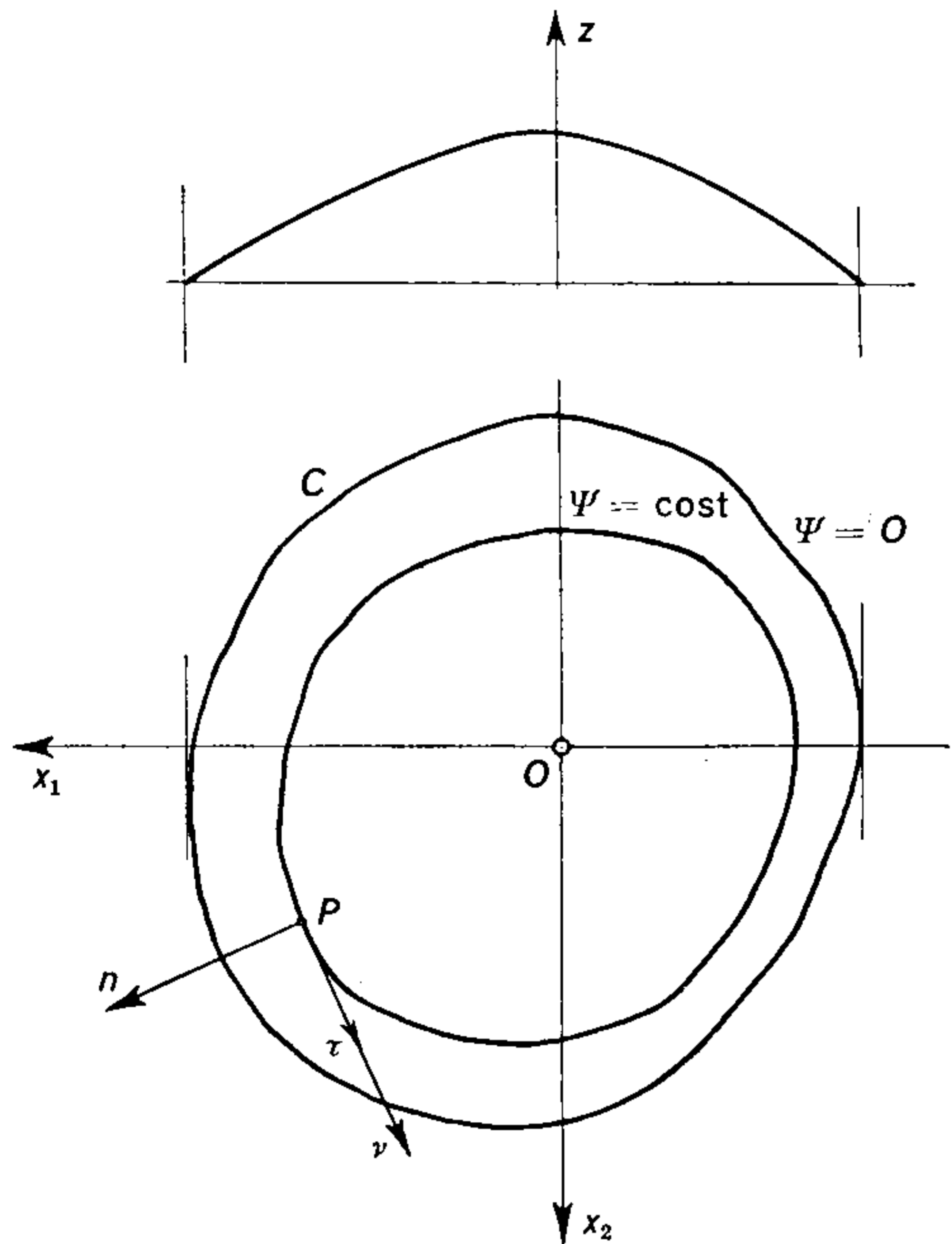


Fig. 94.

zione. Infatti se la  $\tau$  avesse un massimo in un punto interno di  $A$ , ivi le sue derivate parziali seconde dovrebbero risultare negative, per cui anche:

$$\nabla(\tau^2) \equiv \nabla(\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) < 0. \quad [100. 12]$$

Ma, con riguardo alle [100. 7] è:

$$\begin{aligned} \nabla(\tau^2) &\equiv \mu^2 \kappa_i^2 \nabla(\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2) = \\ &= \mu^2 \kappa_i^2 (\Psi_{,1} \nabla \Psi_{,1} + \Psi_{,2} \nabla \Psi_{,2} + \Psi_{,11}^2 + 2 \Psi_{,12}^2 + \Psi_{,22}^2), \end{aligned}$$

dove, poichè  $\nabla \Psi = -2$ , cioè costante in  $A$ , devono annullarsi identicamente i laplaciani  $\nabla \Psi_{,1}$  e  $\nabla \Psi_{,2}$ . In definitiva:

$$\nabla(\tau^2) \equiv \mu^2 \kappa_i^2 (\Psi_{,11}^2 + 2 \Psi_{,12}^2 + \Psi_{,22}^2) \quad [100. 13]$$

deve essere una quantità non negativa in contraddizione con l'ipotesi [100. 12] necessaria per assicurare il massimo di  $\tau$ , o di  $\tau^2$ , in un punto interno di  $A$ : il massimo della  $\tau$  deve essere raggiunto sul contorno  $C$ .

Lo stato di deformazione è caratterizzato dalle due sole componenti diverse da zero [86. 5]:

$$\varepsilon_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,1} - x_2), \quad \varepsilon_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,2} + x_1), \quad [100. 14]$$

mentre la rotazione dell'elemento generico in sè, in base alle [86. 2] e [86. 7], viene espressa dalle tre componenti:

$$\omega_{21} = \kappa_t x_3, \quad \omega_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,1} + x_2), \quad \omega_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,2} - x_1). \quad [100. 15]$$

Le derivate di spostamento, con riguardo alla particolarizzazione delle [84. 1], [84. 5] ed alle [86. 8], sono ora:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, & u_{2,1} &= \kappa_t x_3, & u_{3,1} &= \kappa_t \varphi_{t,1}, \\ u_{1,2} &= -\kappa_t x_3, & u_{2,2} &= 0, & u_{3,2} &= \kappa_t \varphi_{t,2}, \\ u_{1,3} &= -\kappa_t x_2, & u_{2,3} &= \kappa_t x_1, & u_{3,3} &= 0, \end{aligned} \quad [100. 16]$$

da cui integrando otteniamo, a meno di tre traslazioni rigide di insieme:

$$u_1 = -\kappa_t x_2 x_3, \quad u_2 = \kappa_t x_1 x_3, \quad u_3 = \kappa_t \varphi_t(x_1, x_2). \quad [100. 17]$$

Vediamo così come la funzione  $\varphi_t(x_1, x_2)$  sia proporzionale all'ingobbamento della sezione fuori del proprio piano. In termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  tale ingobbamento risulta meno espressivo; infatti le derivate  $u_{3,1}$ ,  $u_{3,2}$  dello spostamento risultano con riguardo alle [100. 7]:

$$u_{3,1} = \kappa_t (\Psi_{,2} + x_2), \quad u_{3,2} = -\kappa_t (\Psi_{,1} + x_1), \quad [100. 18]$$

e quindi lo spostamento  $u_3$  diviene, integrando:

$$u_3 = \kappa_t \int_{P_0}^P [(\Psi_{,2} + x_2) dx_1 - (\Psi_{,1} - x_1) dx_2]. \quad [100. 19]$$

La formulazione del problema della torsione mediante la funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  permette di interpretare il problema stesso in termini di *analogie*, cioè di problemi fisici la cui rappresentazione analitica è espressa proprio da equazioni del tipo [98. 5] e [98. 6]. Tali



analogie sono numerose, data l'importanza che queste equazioni assumono nella Fisica-Matematica, e possono servire alla risoluzione per via sperimentale, mediante esperienze relative al problema nel quale si presentano di più semplice esecuzione.

Tra le analogie più interessanti e più utili ricordiamo quella della membrana, quella idrodinamica e quella elettrolitica.

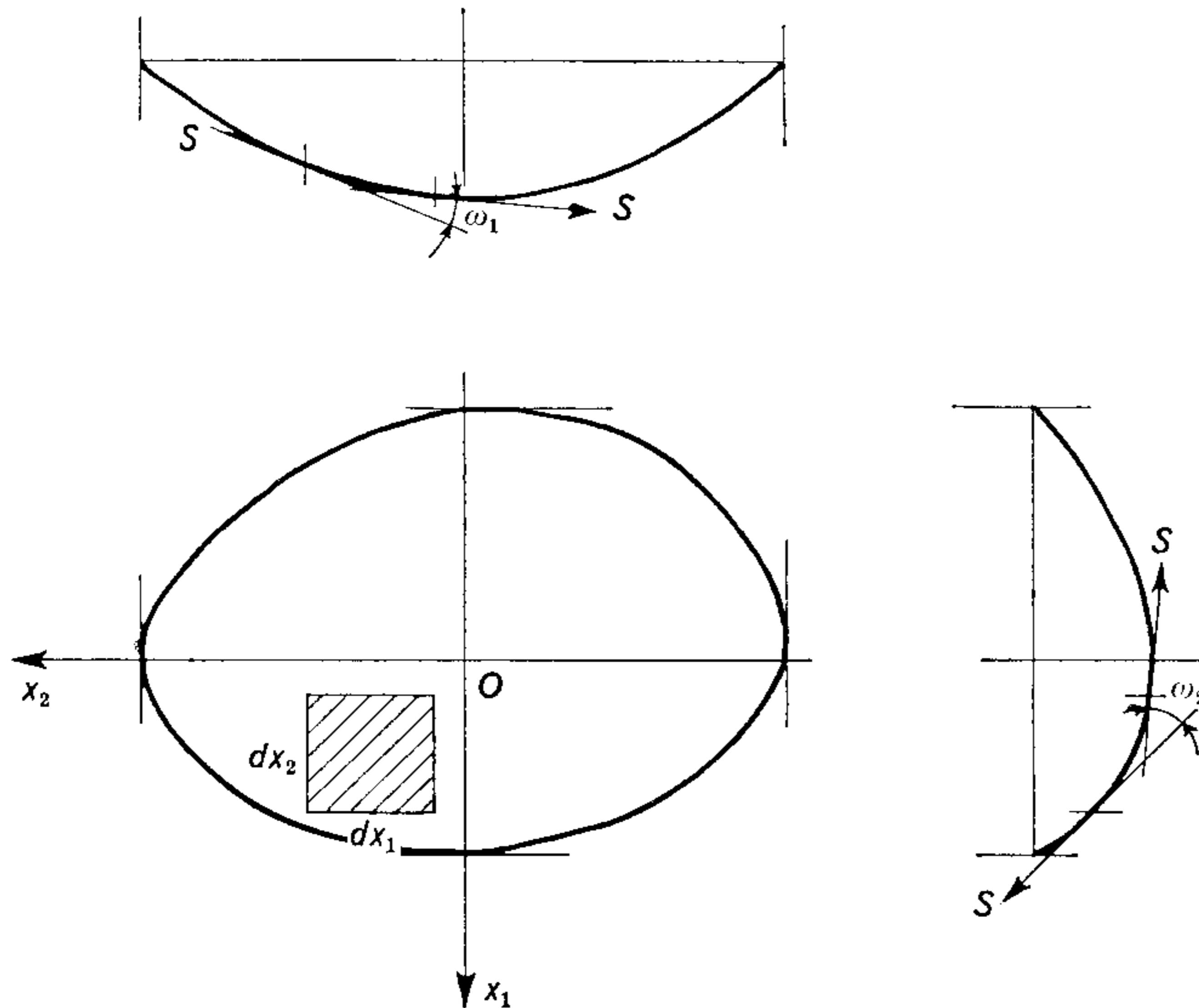


Fig. 95.

L'analogia della membrana<sup>1</sup> consiste nell'identità formale della [100. 5] con l'equazione di una membrana sottile soggetta ad una tensione uniforme  $S$  lungo il suo contorno  $C$  e ad una pressione trasversale uniforme  $p$ .

L'equilibrio alla traslazione nella direzione della normale all'elemento di membrana, di proiezione  $dx_1 dx_2$  sul piano tangente con riguardo alla fig. 95 dà:

$$S dx_1 d\omega_2 + S dx_2 d\omega_1 = p dx_1 dx_2, \quad [100. 20]$$

o anche, essendo per deformazioni infinitesime,  $d\omega_1 = z_{,1}$ ,  $d\omega_2 = z_{,2}$ :

$$\nabla z \equiv z_{,11} + z_{,22} = -\frac{p}{S}, \quad [100. 21]$$

dove l'inflessione  $z(x_1, x_2)$  della membrana è nulla sul contorno.

Il dispositivo sperimentale<sup>2</sup> consiste nello stendere membrane molto sottili ottenute con emulsioni su due fori ritagliati in una lastra piana ed aventi rispettivamente la forma della sezione in esame e la forma circolare. Sottoponendo le due membrane alla stessa pressione in modo da avere in entrambe la stessa tensione superficiale otteniamo per confronto la costante  $p/S$  dell'equazione [100. 21]. Dalla

<sup>1</sup> L. PRANDTL, *Phys. Zeits.*, **4**, 758 (1903).

<sup>2</sup> A. A. GRIFFITH, G. I. TAYLOR, *Techn. Rep. Adv. Comm. Aeron.*, **3**, 910, 938 (1917-18).

misura delle inclinazioni nelle due membrane possiamo così riportare le tensioni tangenziali della sezione incognita a quelle note della sezione circolare.

Diverse analogie idrodinamiche sono state proposte a partire da KELVIN<sup>1</sup>, il quale osservò che la funzione  $\psi_t$  coincide con la funzione di corrente di un moto irrotazionale contenuto in un recipiente avente la stessa sezione trasversale del cilindro soggetto a torsione. Fu successivamente mostrato da GREENHILL<sup>2</sup> che la funzione di tensione  $\Psi$  è identica alla funzione di corrente del moto di un fluido

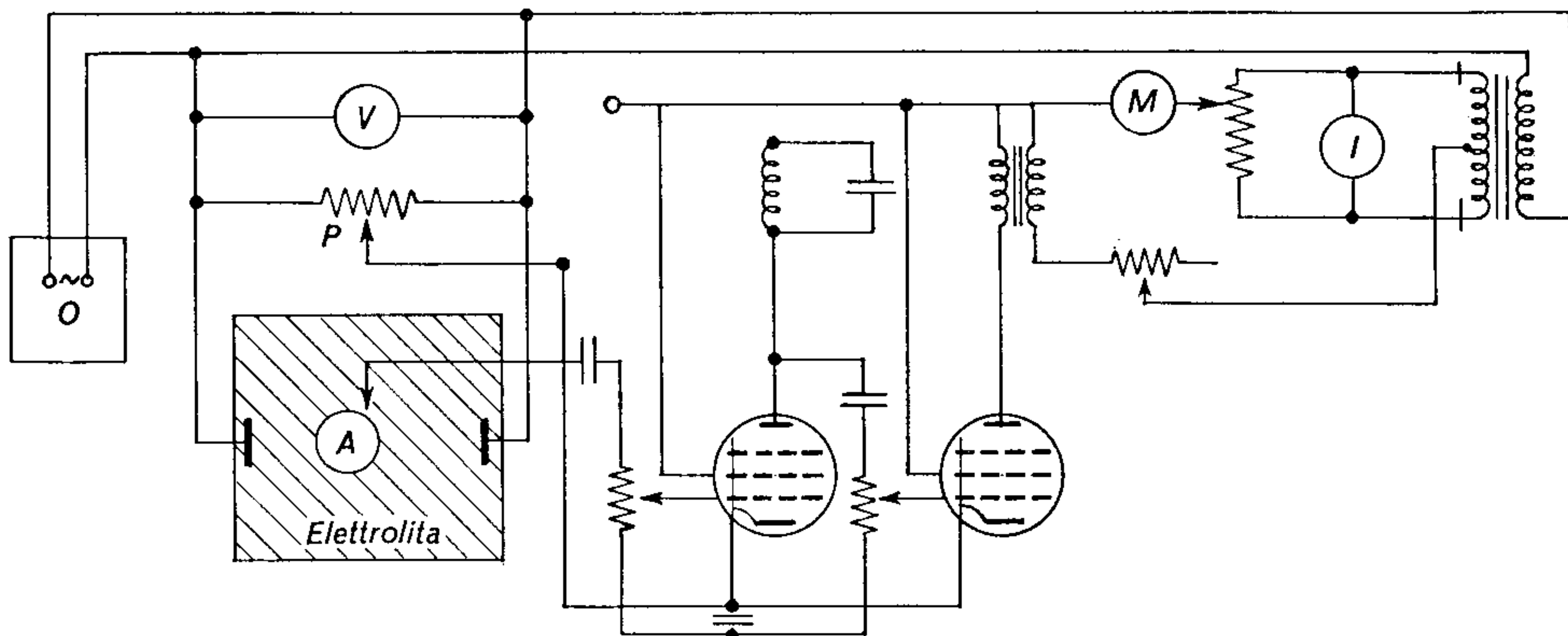


Fig. 96.

ideale in rotazione con vorticità uniforme in un tubo avente la stessa forma trasversale della sezione soggetta a torsione. Infatti se  $v_1, v_2$  indicano le componenti della velocità in un punto generico del fluido, dalle condizioni di incompressibilità e di uniforme vorticità abbiamo rispettivamente:

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \quad v_{1,2} - v_{2,1} = \text{cost}, \quad [100.22]$$

da cui, introdotta una funzione di velocità tale che  $v_1 = \Psi_{,2}, v_2 = -\Psi_{,1}$ , otteniamo per questa l'equazione [100.5].

Sul contorno la velocità del fluido in rotazione ha la direzione della tangente e la condizione al contorno nel problema idrodinamico è la stessa del problema della torsione. La distribuzione delle velocità  $v_1, v_2$  nel fluido in rotazione coincide così con la distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau_{31}, \tau_{32}$  dovute al momento torcente.

L'analogia idrodinamica riesce utile nella valutazione qualitativa di effetti locali, come, ad esempio, le concentrazioni di tensione in angoli rientranti.

Un terzo tipo di analogia è basato sulla circostanza che la distribuzione del potenziale elettrostatico in una lastra sottile di spessore costante è determinata dall'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V \equiv V_{,11} + V_{,22} = 0, \quad [100.23]$$

dove il piano coordinato  $(x_1, x_2)$  coincide con il piano della lastra. L'impiego più efficace dell'analogia tra l'equazione [100.23] e l'equazione [100.2] della torsione consiste nell'uso di una vasca elettrolitica di profondità costante<sup>3</sup>. Il fondo e la parete di contorno devono essere isolati con uno strato di paraffina.

<sup>1</sup> W. THOMSON, P. G. TAIT, *A Treatise on Natural Philosophy*, 2, 242.

<sup>2</sup> A. G. GREENHILL, *Hydromechanics*, in « Encyclopaedia Britannica ».

<sup>3</sup> A. THUM, W. BAUTZ, *Ver. deutsch. Ing.*, 78, 17 (1934).

Nella fig. 96 è riportato lo schema di una moderna vasca elettrolitica Philips per la soluzione dell'equazione di Laplace [100. 3]. L'alimentazione è in corrente alternata, fornita da un oscillatore  $O$  a 400 Hz, per evitare la decomposizione dell'elettrolita. La tensione viene misurata con un ago  $A$  connesso al contatto strisciante di un potenziometro  $P$ . L'ago ed il contatto sono su due rami opposti di un ponte di Wheatstone, di cui viene opportunamente amplificato lo sbilanciamento, letto su un misuratore di uscita  $M$ . Un indicatore di fase  $I$  permette di ridurre l'errore di misura dovuto allo sfasamento tra la tensione nell'ago e nel potenziometro.

### 101. Soluzioni particolari nel problema della torsione.

Per alcune forme della sezione trasversale è immediata la costruzione della funzione delle tensioni  $\Psi(x_1, x_2)$  assumendo per questa l'equazione del contorno a meno di una costante moltiplicativa. In tal modo la condizione al contorno,  $\Psi(s) = 0$ , è identicamente soddisfatta, mentre l'equazione differenziale  $\nabla^2 \Psi + 2 = 0$  è verificata da un particolare valore della costante. Con tale metodo elementare è possibile determinare la  $\Psi(x_1, x_2)$  per le sezioni circolare, ellittica e triangolare equilatera. Per altre forme conviene ricorrere a coordinate polari, come nel caso della sezione circolare con intagli, o a sviluppi in serie di Fourier, come nella sezione rettangolare.

#### a) Sezione circolare.

Per un cerchio di raggio  $a$  assumiamo come funzione delle tensioni la:

$$\Psi(x_1, x_2) = c(x_1^2 + x_2^2 - a^2), \quad [101. 1]$$

in modo che sulla circonferenza  $C$  la  $\Psi(s)$  sia identicamente nulla come richiede la condizione al contorno [100. 6].

Il laplaciano della  $\Psi$  è:

$$\nabla^2 \Psi(x_1, x_2) = 4c, \quad [101. 2]$$

da cui il valore della costante  $c = -\frac{1}{2}$  affinché sia soddisfatta anche l'equazione differenziale [100. 5]:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(a^2 - x_1^2 - x_2^2). \quad [101. 3]$$

Il valore di  $K_t$  risulta allora dalla [100. 10]:

$$K_t = \int_A (a^2 - x_1^2 - x_2^2) dA = \frac{\pi a^4}{2} = J_0 \quad [101. 4]$$

come avevamo già trovato nel § 85.



Il fattore di torsione definito nella [86. 13] assume in tal caso il valore  $q = 1$ , per cui la torsione  $\kappa_t$  viene espressa dalla formula elementare:

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\mu J_0}. \quad [101. 5]$$

Le componenti [100. 7] della tensione tangenziale divengono:

$$\tau_{31} = -\mu\kappa_t x_2, \quad \tau_{32} = \mu\kappa_t x_1, \quad [101. 6]$$

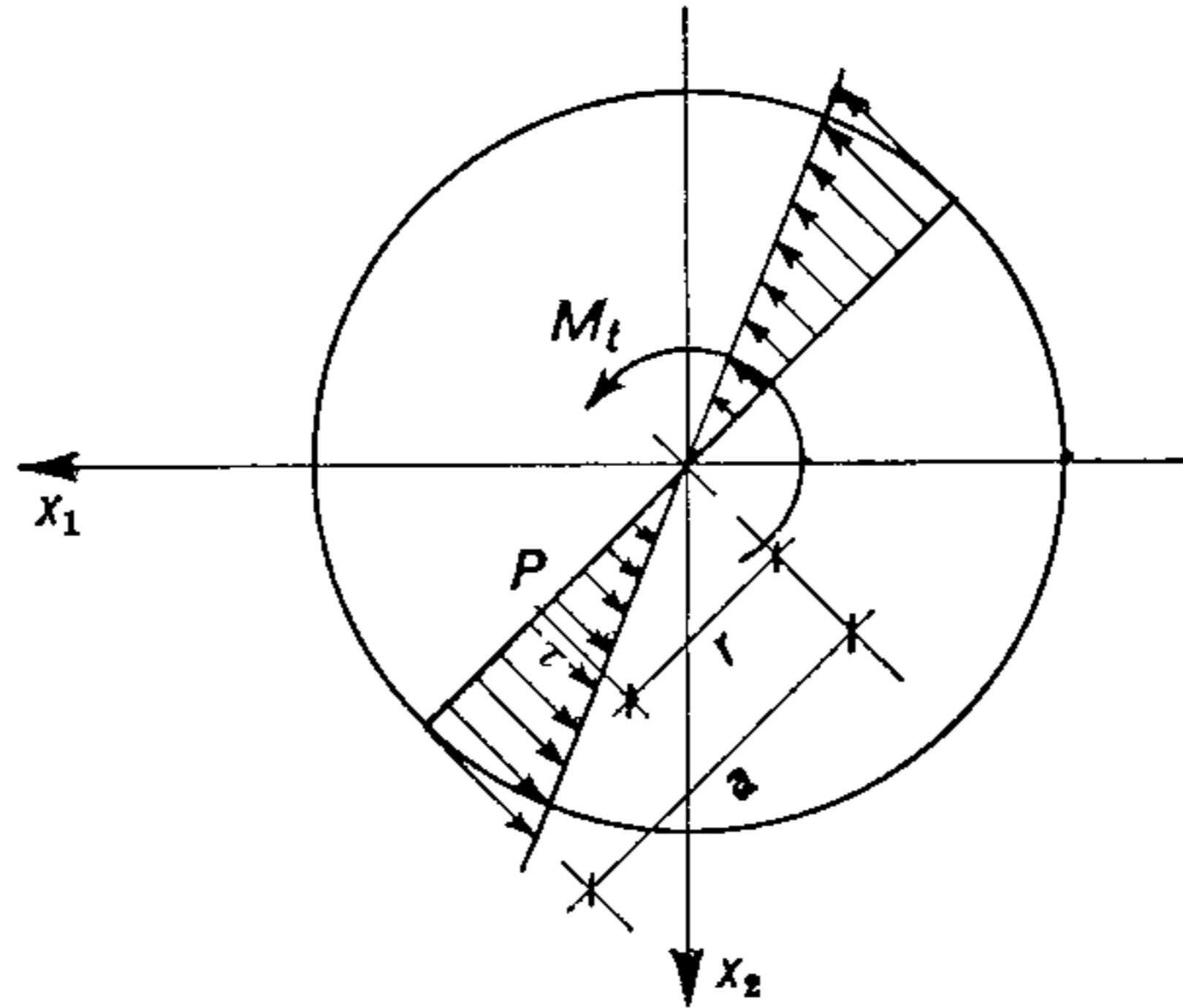


Fig. 97.

e variano quindi con legge lineare lungo un diametro (fig. 97). Hanno come risultante:

$$\tau = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2} = \mu\kappa_t r, \quad [101. 7]$$

essendo  $r$  la distanza del punto generico  $P$  dal centro  $O$ .

Poichè il rapporto tra le componenti di tensioni vale:  $\tau_{31}/\tau_{32} = -x_2/x_1$ , ne consegue che la direzione del vettore  $\tau$  è perpendicolare al raggio  $r$  e quindi tangente alla circonferenza per  $P$ , concentrica al contorno, che rappresenta perciò una *curva di tensione*  $\Psi(x_1, x_2) = \text{cost.}$

Come già dimostrammo nel § 86 con la [86. 10] la sezione circolare è l'unica sezione che non subisce ingobbamenti fuori dal suo piano in seguito alla deformazione. È interessante ricordare che lo studio della torsione del cilindro circolare fu svolto da Coulomb proprio sulla base di tale ipotesi, erroneamente estesa da Navier al caso generale della torsione per sezioni di forma qualsiasi.

#### b) Sezione ellittica.

Per una sezione limitata da una ellisse di semiassi  $a_1, a_2$ , assumiamo la funzione delle tensioni nella forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = c \left( \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right), \quad [101. 8]$$

che evidentemente soddisfa alla condizione al contorno [100. 6]. Anche l'equazione differenziale [100. 5] sarà verificata, purchè:

$$\nabla \Psi = 2c \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 a_2^2} = -2 \quad [101. 9]$$

e quindi:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right). \quad [101. 10]$$

La costante  $K_t$  necessaria alla determinazione della rigidezza torsionale è:

$$K_t = \frac{2 a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \int_A \left( 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) dA = \frac{\pi a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2}, \quad [101. 11]$$

mentre il fattore di torsione diviene:

$$q = \frac{J_0}{K_t} = \frac{\pi a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}{4} \frac{a_1^2 + a_2^2}{\pi a_1^3 a_2^3} = \frac{1}{4} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right)^2, \quad [101. 12]$$

che per  $a_1/a_2 = 1$  assume il valore  $q = 1$  della sezione circolare.

Le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{31} = -2 \mu \kappa_t \frac{a_1^2 x_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \tau_{32} = 2 \mu \kappa_t \frac{a_2^2 x_1}{a_1^2 + a_2^2}, \quad [101. 13]$$

e variano quindi con legge lineare lungo un diametro. Il loro rapporto ha il valore:

$$\frac{\tau_{31}}{\tau_{32}} = -\frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{x_2}{x_1}, \quad [101. 14]$$

che deve risultare costante lungo un diametro in quanto vi è costante  $x_2/x_1$ . La direzione del vettore tensione  $\tau$  rimane dunque invariata lungo un diametro  $d$  dell'ellisse, ma poichè nei punti estremi deve essere tangente al contorno, ne consegue che nel punto generico  $P$  assume la direzione del diametro  $\bar{d}$  coniugato a  $d$ .

Il valore della tensione tangenziale risultante è:

$$\tau = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2} = \frac{2 \mu \kappa_t}{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{a_2^4 x_1^2 + a_1^4 x_2^2}, \quad [101. 15]$$

e sul contorno, cioè per  $x_1^2 = a_1^2 (1 - x_2^2/a_2^2)$ , assume il valore:

$$\tau = \frac{2\mu\kappa_t a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{a_2^2 - x_2^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)}. \quad [101.16]$$

Se  $a_1$  indica il semidiametro maggiore, la  $\tau$  diviene max sul contorno quando  $x_2 = \pm a_2$ , cioè in corrispondenza degli estremi del

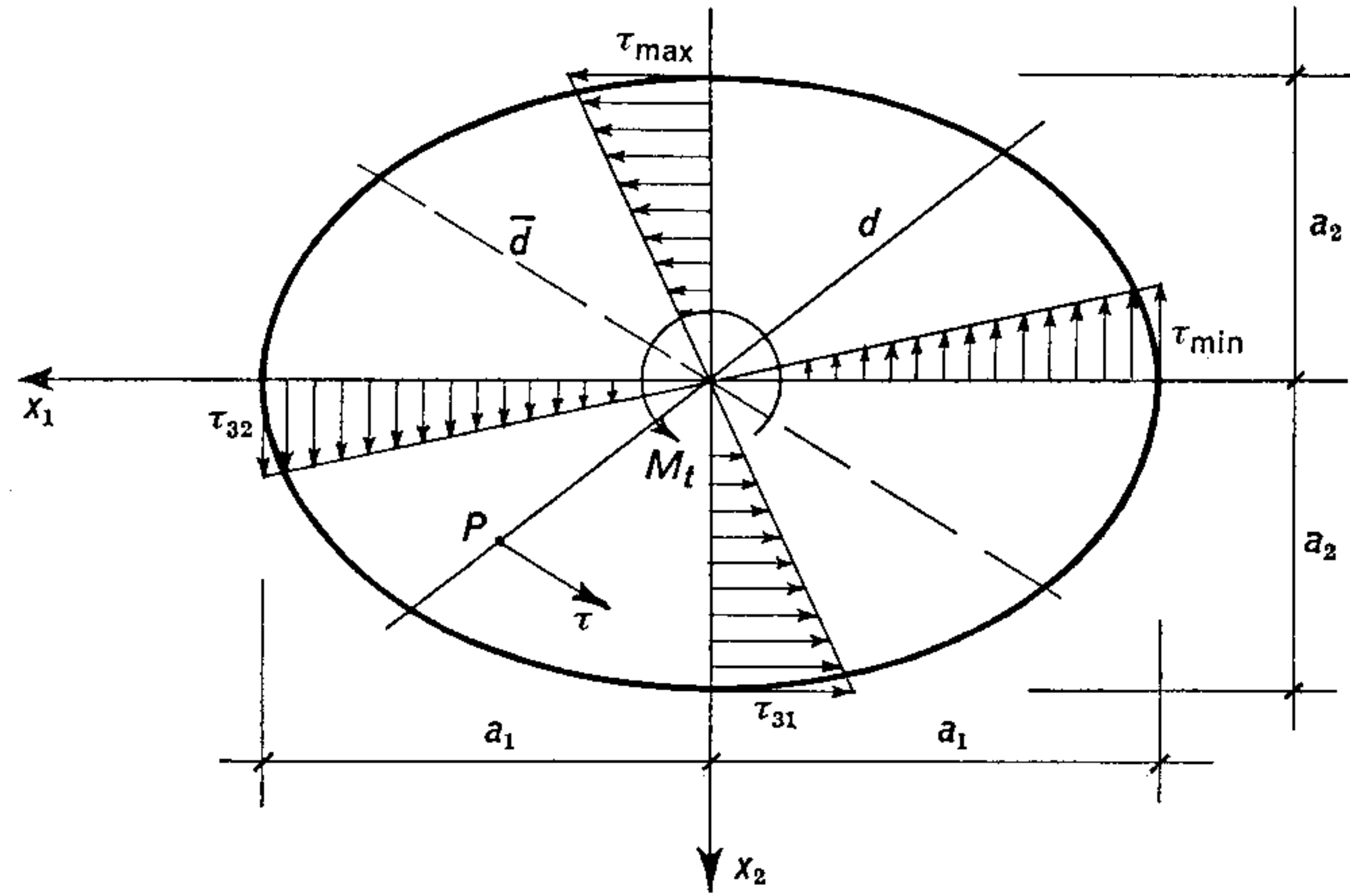


Fig. 98.

diametro minore, e minima per  $x_2 = 0$ , cioè negli estremi del diametro maggiore:

$$\tau_{\max} = \frac{2\mu\kappa_t a_1^2 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \tau_{\min} = \frac{2\mu\kappa_t a_1 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad [101.17]$$

coincidendo con le componenti  $\tau_{32}$  e  $\tau_{31}$  rispettivamente (fig. 98).

Le traiettorie delle tensioni tangenziali sono ottenute come curve  $\Psi = \text{cost.}$  e consistono in una famiglia di ellissi concentriche al contorno.

Le derivate parziali della  $\varphi_t(x_1, x_2)$  sono diverse da zero e quindi la sezione non rimane piana. L'ingobbamento può essere determinato con riguardo alle [100.18] che, nel caso presente assumono la forma:

$$u_{3,1} = -\kappa_t (\Psi_{,2} + x_2) = -\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \kappa_t x_2, \quad [101.18]$$

$$u_{3,2} = -\kappa_t (\Psi_{,1} + x_1) = -\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \kappa_t x_1.$$



Integrando otteniamo lo spostamento  $u_3$  a meno di un moto rigido:

$$u_3 = - \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \kappa_t x_1 x_2, \quad [101. 19]$$

che indica l'ingobbamento della sezione come indicato nella fig. 99.

Le linee  $u_3 = \text{cost.}$  sono iperbole equilatera e rappresentano le curve di livello della superficie deformata: sono state indicate con tratto continuo quelle relative alle porzioni di sezione che diventano

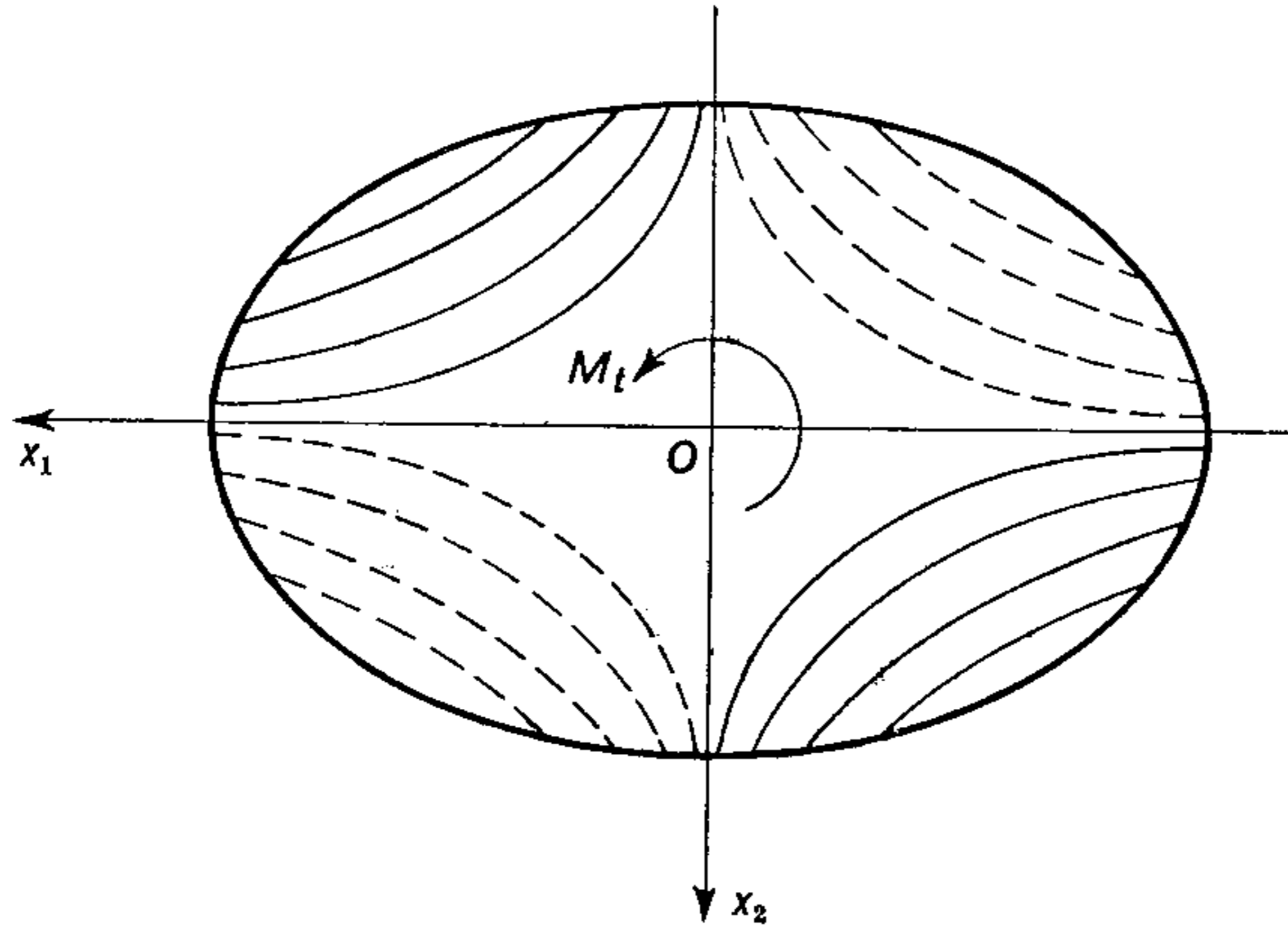


Fig. 99.

convesse, con tratto punteggiato quelle relative alle porzioni concave, quando il momento torcente ha il verso assunto come positivo.

c) *Sezione triangolare equilatera.*

Riferito il triangolo come nella fig. 100, e indicata con  $3a$  l'altezza, assumiamo al solito per la funzione delle tensioni l'equazione del contorno moltiplicata per una costante arbitraria, in modo da soddisfare alla [100. 6]:

$$\Psi(x_1, x_2) = c(x_2 - a)(x_1\sqrt{3} + x_2 + 2a)(x_1\sqrt{3} - x_2 - 2a), \quad [101. 20]$$

da cui sviluppando e semplificando, l'equazione differenziale [100. 5] risulterà verificata purchè:

$$\nabla \Psi(x_1, x_2) = -12ac = -2, \quad [101. 21]$$

cioè per il valore  $c = 1/6a$ :

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{6a} (3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 3ax_1^2 - 3ax_1^2 + 4a^3). \quad [101. 22]$$

La costante  $K_t$  risulta nel caso in esame:

$$K_t = 2 \int_A \Psi(x_1, x_2) dA = \frac{3J_0}{5} \quad [101.23]$$

ed il fattore di torsione:  $q = 5/3$ .

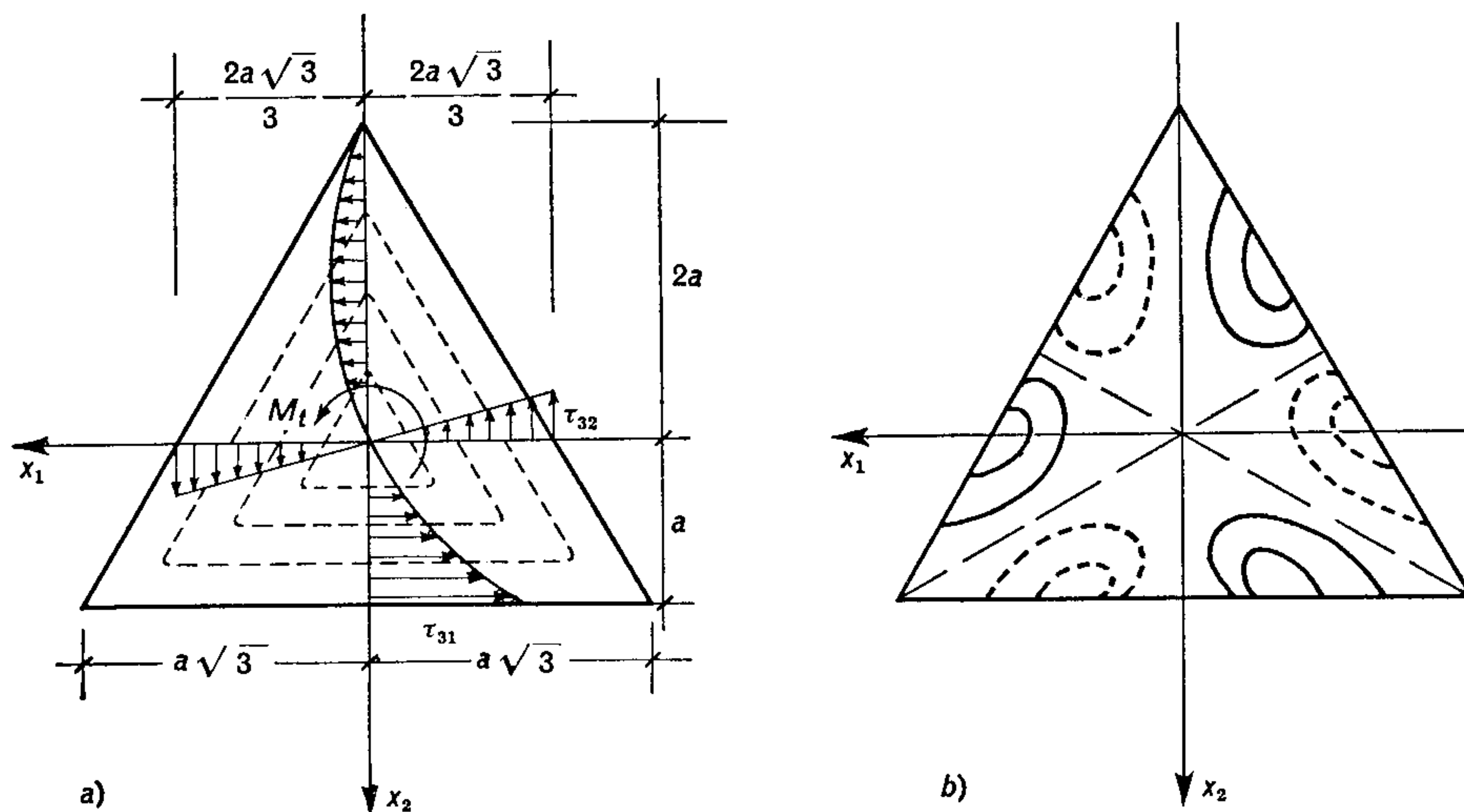


Fig. 100.

La torsione  $\kappa_t$  è legata al momento torcente dalla:

$$\kappa_t = \frac{5}{3} \frac{M_t}{\mu J_0}, \quad [101.24]$$

essendo  $J_0 = 3a^4 \sqrt{3}$  il momento d'inerzia polare.

Le componenti di tensione si ottengono dalle [100.7] e valgono:

$$\tau_{31} = \frac{\mu \kappa_t}{2a} (x_1^2 - x_2^2 - 2ax_2), \quad [101.25]$$

$$\tau_{32} = \frac{\mu \kappa_t}{a} (a - x_2) x_1.$$

Vediamo dunque che la distribuzione della  $\tau_{31}$  lungo l'asse  $x_2$ , cioè per  $x_1 = 0$ , è parabolica, ha un valore nullo nell'origine e un massimo nel punto di mezzo del lato, cioè per  $x_2 = a$ , pari a  $\tau_{\max} = 1,5 \mu \kappa_t a$ . La  $\tau_{32}$  invece è nulla lungo l'asse  $x_2$  e varia con legge lineare lungo l'asse  $x_1$ .

Le traiettorie delle tensioni tangenziali date dalle tangenti alle curve  $\Psi(x_1, x_2) = \text{cost.}$  sono indicate a tratteggio nella fig. 100 a), mentre le linee di livello della superficie ingobbata sono rappresentate nella fig. 100 b).

d) *Sezione circolare con intaglio.*

La presenza di intagli può alterare sensibilmente la distribuzione delle tensioni che competerebbe alla sezione integra e d'altra parte presenta interesse applicativo, anche se di analisi non semplice. Esaminiamo tale effetto sulla base di un esempio elementare, rappresentato da una sezione circolare di raggio  $a$  con un intaglio pure circolare di raggio  $b$ , come indicato nella fig. 101.

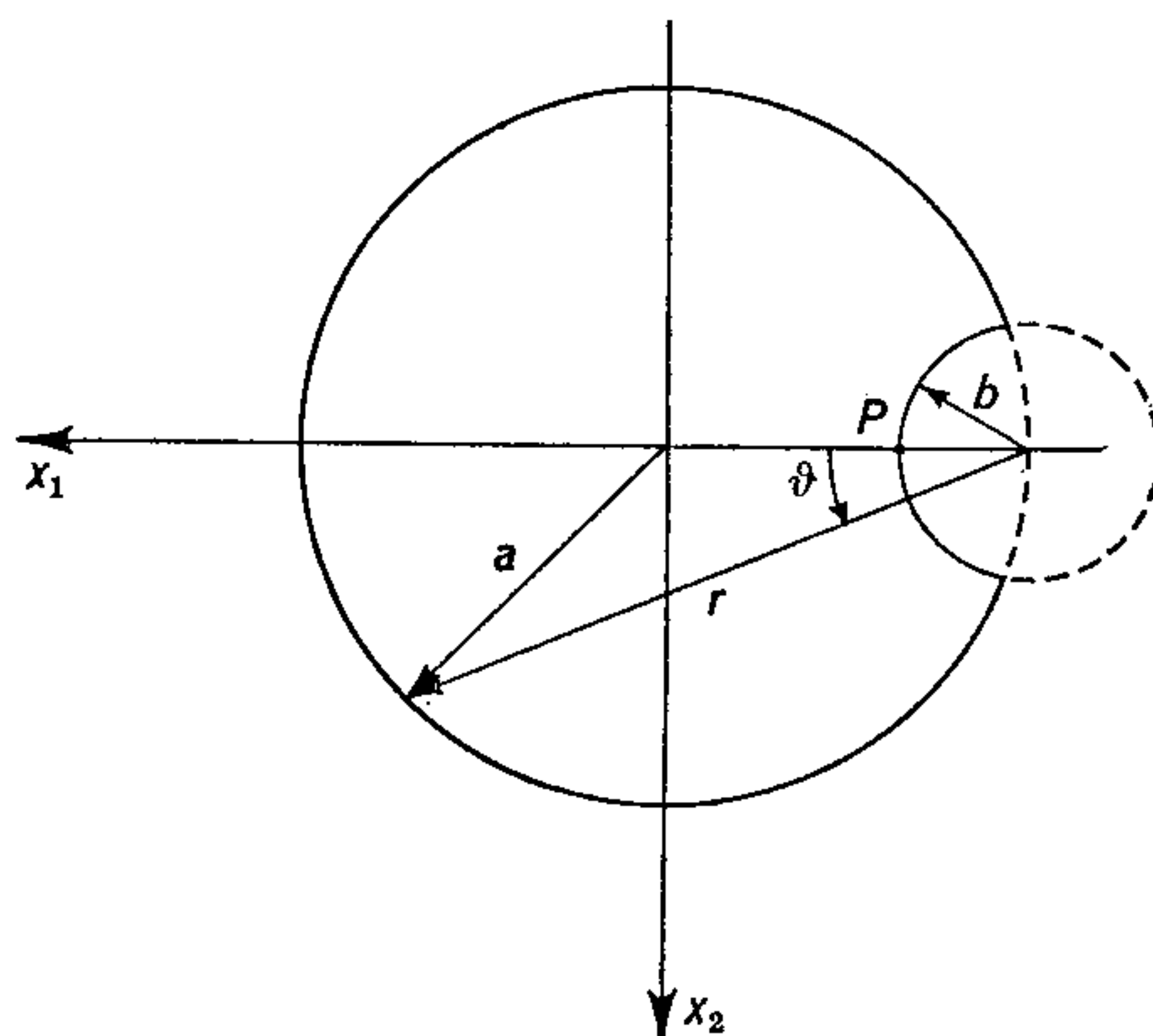


Fig. 101.

Consideriamo le due funzioni armoniche:

$$x_1, \quad x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{-1} \quad [101. 26]$$

ed assumiamo la funzione delle tensioni in modo che sia soddisfatta l'equazione differenziale [100. 5]:

$$\Psi(x_1, x_2) = a \left( x_1 - \frac{b^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2). \quad [101. 27]$$

Introdotta un sistema di coordinate polari  $(r, \vartheta)$ , definito dalle relazioni:  $x_1 = r \cos \vartheta$ ,  $x_2 = r \sin \vartheta$ , possiamo scrivere la  $\Psi$  nella forma:

$$\Psi(r, \vartheta) = a \left( r \cos \vartheta - \frac{b^2 r \cos \vartheta}{r^2} \right) + \frac{b^2 - r^2}{2}. \quad [101. 28]$$

Perchè sia rispettata la condizione al contorno [100. 6], cioè  $\Psi = 0$ , l'equazione del contorno deve risultare:

$$(r^2 - b^2) \left( 1 - \frac{2a \cos \vartheta}{r} \right) = 0, \quad [101. 29]$$

ed il contorno stesso deve essere costituito da due circonferenze:  $r = b$ ,  $r = 2a \cos \vartheta$ , come avevamo indicato nella fig. 101.



Le tensioni possono ora essere calcolate: il massimo valore,  $\tau_{\max} = 2\mu\kappa_1 a$ , viene raggiunto nel punto  $P$  e risulta quindi il doppio della tensione tangenziale sul contorno di una sezione circolare di raggio  $a$ , senza intaglio.

e) *Sezione rettangolare.*

Per una sezione rettangolare di semilati  $a_1, a_2$  la forma del contorno suggerisce di assumere per la funzione delle tensioni uno sviluppo in serie, seguendo un procedimento analogo a quello discusso nel § 96, b) nel caso di sollecitazione tagliante.

Con riferimento all'equazione differenziale [100.5] osserviamo che il termine noto può essere espresso sotto forma di una serie di Fourier nell'intervallo  $(-a_1, +a_1)$ :

$$2 = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos k_m x_1, \quad [101.30]$$

dove  $k_m = (2m+1)/2a_1$ .

Assunta allora la  $\Psi(x_1, x_2)$  nella forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_2) \cos k_m x_1, \quad [101.31]$$

che soddisfa alla condizione al contorno  $\Psi(s) = 0$  sui lati  $x_1 = \pm a_1$ , anche l'equazione differenziale [100.5] sarà verificata purchè sussista per i coefficienti  $\varphi_m(x_2)$  l'equazione:

$$\varphi_m''(x_2) - k_m^2 \varphi_m(x_2) = -\frac{8}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1}, \quad [101.32]$$

da cui integrando:

$$\varphi_m(x_2) = \alpha_m \cosh k_m x_2 + \beta_m \sinh k_m x_2 + \frac{8}{\pi k_m^2} \frac{(-1)^m}{2m+1}. \quad [101.33]$$

Rimane soltanto da verificare la condizione al contorno sui lati  $x_2 = \pm a_2$ . Imponendo allora alla [101.33] che sia  $\varphi_m(\pm a_2) = 0$ , otteniamo:

$$\alpha_m = -\frac{8}{\pi k_m^2} \frac{(-1)^m}{2m+1} \operatorname{sech} k_m a_2, \quad \beta_m = 0, \quad [101.34]$$

per cui in definitiva la funzione di tensione per una sezione rettangolare è:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{32 a_1^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \left(1 - \frac{\cosh k_m x_2}{\cosh k_m a_2}\right) \cos k_m x_1. \quad [101.35]$$

Integrando due volte la [101. 30] nell'intervallo  $(-a_1, +a_1)$  risulta:

$$a_1^2 - x_1^2 = \frac{32 a_1^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \cos k_m x_1, \quad [101. 36]$$

e quindi possiamo dare alla [101. 35] anche la forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = a_1^2 - x_1^2 - \frac{32 a_1}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \frac{\cosh k_m x_2}{\cosh k_m a_2} \cos k_m x_1. \quad [101. 37]$$

Le tensioni tangenziali sono allora:

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= -\frac{16 a_1 \mu \kappa_t}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cosh k_m x_2}{(2m+1)^3 \cosh k_m a_2} \cos k_m x_1, \\ \tau_{32} &= 2 \mu \kappa_t \left[ x_1 - \frac{8 a_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cosh k_m x_2}{(2m+1) \cosh k_m a_2} \sin k_m x_1 \right]. \end{aligned} \quad [101. 38]$$

Il valore massimo della tensione viene raggiunto per  $x_1 = \pm a_1$ ,  $x_2 = 0$ , cioè nei punti di mezzo dei lati maggiori del rettangolo. Poichè la serie delle espressioni precedenti converge molto rapidamente, in pratica è lecito considerarne solo il primo termine, con un errore non superiore all'1%; il suddetto valore massimo è in tal caso:

$$\tau_{\max} \simeq 2 \mu \kappa_t a_1 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \operatorname{sech} \frac{\pi a_2}{2 a_1} \right). \quad [101. 39]$$

La rigidezza torsionale può essere determinata nel modo solito calcolando la costante  $K_t$  dalla [100. 10]:

$$K_t = \frac{16 a_1^3 a_2}{3} \left( 1 - \frac{192 a_1}{\pi^5 a_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} k_m a_2}{(2m+1)^5} \right), \quad [101. 40]$$

ed anche ora possiamo ritenere solo il primo termine della serie con un errore inferiore allo 0,5%, tenendo presente la limitazione:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} k_m a_2}{(2m+1)^5} < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^5} = 0,0046. \quad [101. 41]$$

L'ingobbamento della sezione viene ottenuto calcolando lo spostamento  $u_3$ , essendo ormai note le sue derivate  $u_{3,1} = \kappa_t (\Psi_{,2} + x_2)$ ,  $u_{3,2} = -\kappa_t (\Psi_{,1} + x_1)$ . Effettuati gli sviluppi risulta:

$$u_3 = \kappa_t \left[ x_1 x_2 - \frac{32 a_1^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sinh k_m x^2}{(2m+1)^3 \cosh k_m a_2} \sinh k_m x_1 \right] \quad [101.42]$$

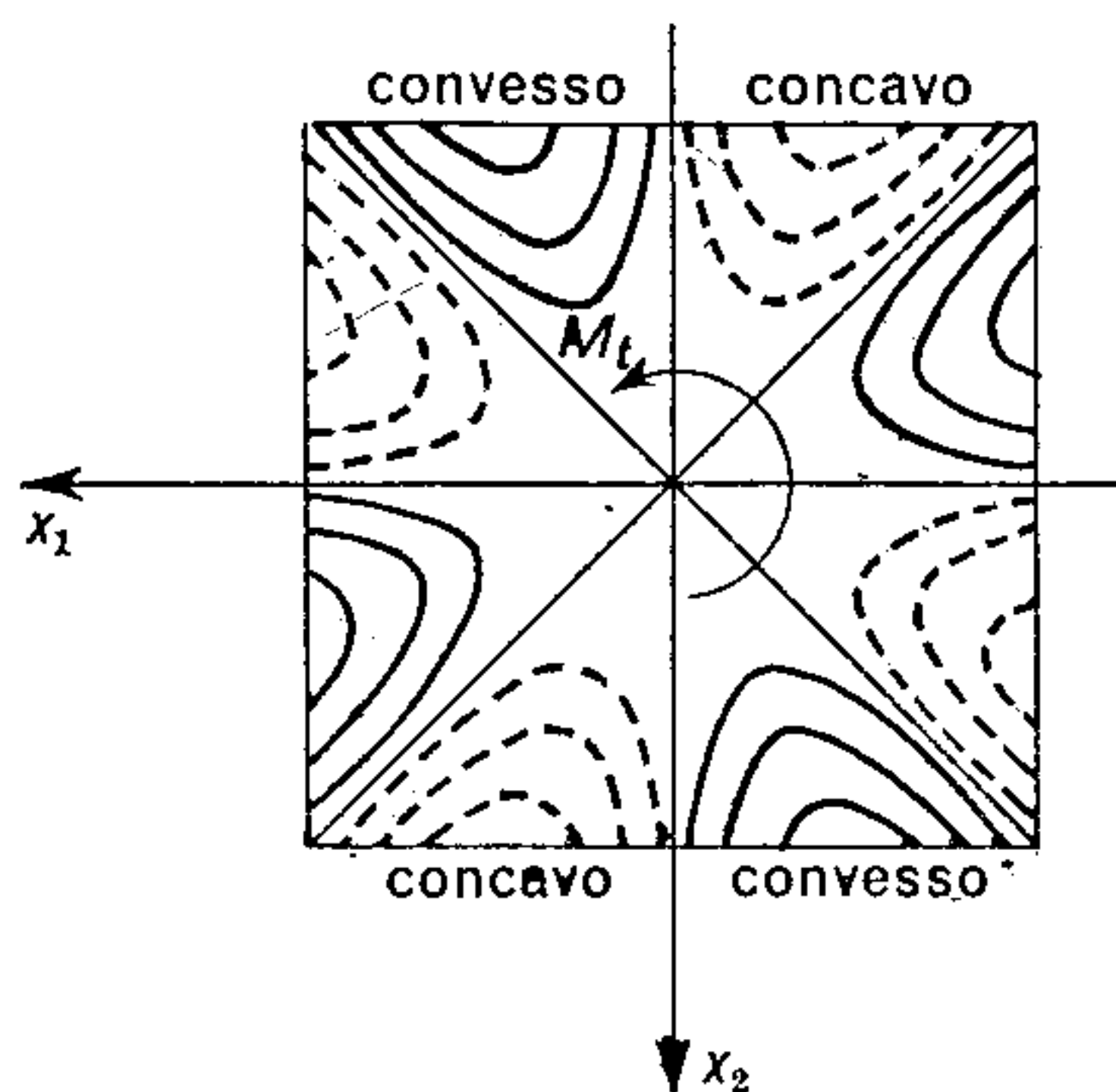


Fig. 102.

e, nel caso di sezione quadrata, le linee di livello sono indicate nella fig. 102, con tratto continuo e con tratto punteggiato rispettivamente per le zone convesse e per quelle concave.

Nel caso di sezioni rettangolari molto allungate, per  $a_2 \gg a_1$ , possono essere impiegate delle formule approssimate dedotte dalle precedenti qualora si trascuri il termine contenente la serie, precisamente:

$$\tau_{31} \simeq 0, \quad \tau_{32} \simeq \mu \kappa_t x_1, \quad K_t = \frac{16 a_1^3 a_2}{3}, \quad [101.43]$$

cioè vi sono soltanto tensioni tangenziali parallele ai lati maggiori e variabili linearmente lungo il lato minore.

## 102. Torsione di sezioni a connessione multipla.

In tutta la trattazione precedente abbiamo ammesso che il dominio piano costituito dalla sezione trasversale fosse *semplicemente connesso*. Data l'importanza applicativa di sezioni cave o tubolari è opportuno esaminare il problema della torsione anche quando detto dominio sia a *connessione multipla*. Supponiamo in tal caso che il cilindro sia limitato internamente da alcune superficie cilindriche con generatrici parallele all'asse  $x_3$ , in modo che la sezione trasversale



presenti diverse cavità, come indicato in fig. 103, dove il senso di percorso per i vari contorni  $C_1, C_2, \dots, C_m$  è da assumersi positivo se contrario a quello assunto per il contorno esterno  $C_0$  della sezione.

Poichè i contorni interni sono, come quello esterno, liberi da forze applicate, con un ragionamento analogo a quello seguito nella deduzione della [78. 17] troviamo che su ogni contorno  $C_i$  deve sussistere la condizione:

$$\frac{d\varphi_t}{dn} = x_2x_1 - x_1n_2 \tag{102. 1}$$

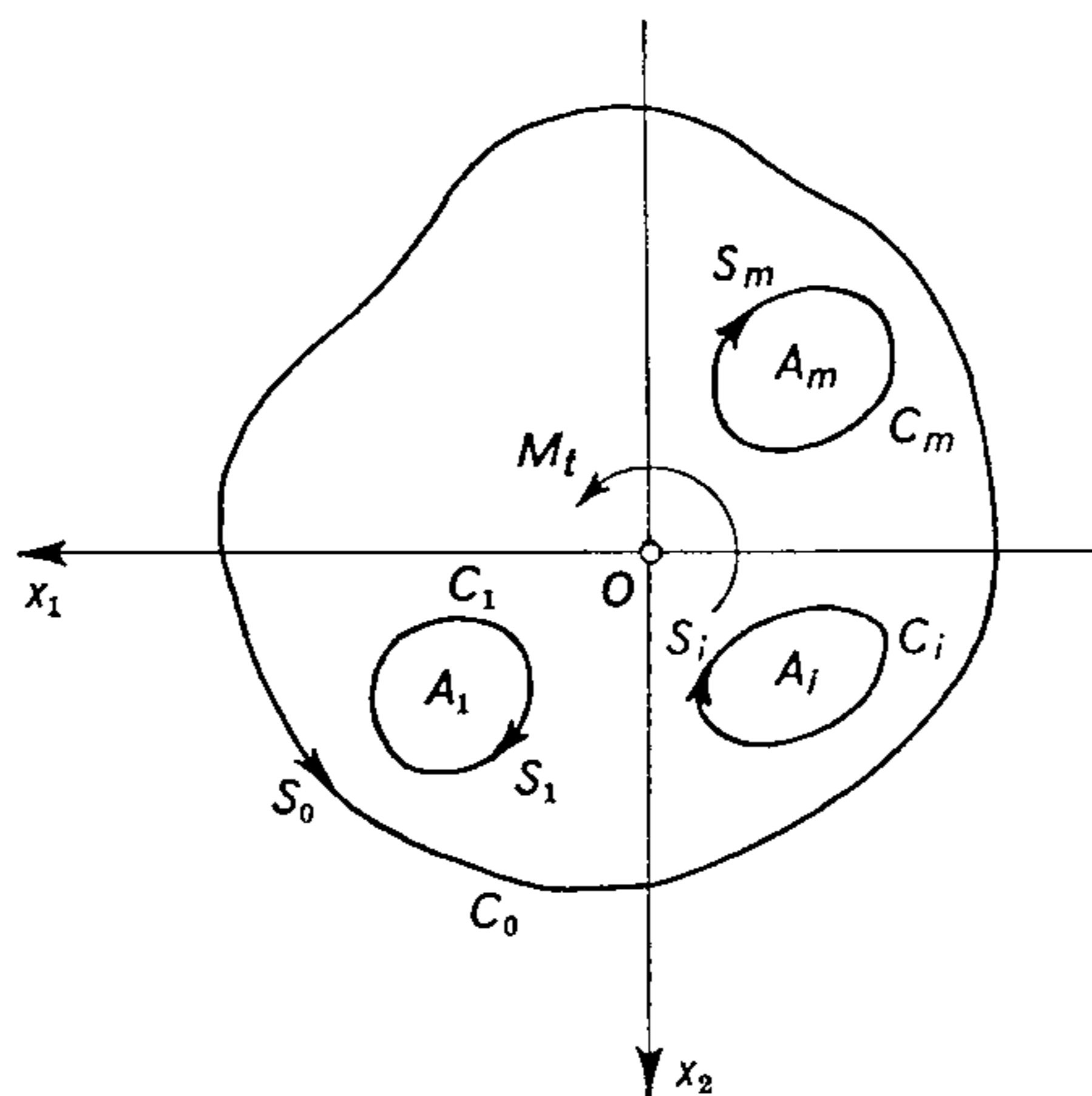


Fig. 103.

o in alternativa, per la funzione coniugata  $\psi_t(x_1, x_2)$ :

$$\psi_t(s) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) + c_i \tag{102. 2}$$

Una sola costante di integrazione, ad esempio la  $c_0$ , può essere fissata ad arbitrio mentre le altre devono essere determinate in modo che la funzione  $\varphi_t(x_1, x_2)$  sia definita monodroma nel dominio  $A$ :

$$\varphi_t(x_1, x_2) = \int_{P_0}^P (\varphi_{t,1} dx_1 + \varphi_{t,2} dx_2), \tag{102. 3}$$

essendo  $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$  un punto fissato e  $P \equiv (x_1, x_2)$  un punto generico, o anche, tenendo presenti le condizioni di monogeneità [79. 10]:

$$\varphi_t(x_1, x_2) = \int_{P_0}^P (\psi_{t,2} dx_1 - \psi_{t,1} dx_2). \tag{102. 4}$$

Se la regione  $A$  è semplicemente connessa, l'esistenza di una funzione monodroma  $\varphi_t(x_1, x_2)$  espressa dall'integrale della [102. 4] è as-

sicurata purchè sia verificata la condizione:  $\psi_{t,22} = -\psi_{t,11}$ , cioè che la funzione  $\psi_t(x_1, x_2)$  sia armonica in  $A$ . Ma se la regione  $A$  è a connessione multipla, a tale condizione deve essere aggiunta la:

$$\int_{C_i} (\psi_{t,2} dx_1 - \psi_{t,1} dx_2) = 0 \quad [102. 5]$$

su ogni contorno interno  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), e quindi dalle  $m$  equazioni [102. 5] è possibile determinare le  $m$  costanti  $c_i$ .

In termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  il problema viene formulato nel senso che devono essere soddisfatte le equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(x_1, x_2) + 2 &= 0 && \text{in } A, \\ \Psi(s) &= c_i && \text{su } C_i. \end{aligned} \quad [102. 6]$$

Le costanti  $c_i$  restano così determinate dalle condizioni:

$$\int_{C_i} [(\Psi_{,2} + x_2) dx_1 + (\Psi_{,1} + x_1) dx_2] = 0, \quad [102. 7]$$

o anche, introducendo i coseni direttori delle normali  $n_i$  ai contorni  $C_i$ , assunte positive se dirette verso l'interno:

$$\int_{C_i} (\Psi_{,1} n_1 + \Psi_{,2} n_2) ds + \int_{C_i} (x_1 n_1 + x_2 n_2) ds = 0. \quad [102. 8]$$

Trasformando il secondo integrale con la formula di Gauss otteniamo infine le  $m$  condizioni:

$$\int_{C_i} \frac{d\Psi}{dn} ds = -2A_i, \quad [102. 9]$$

essendo  $A_i$  l'area racchiusa dal contorno generico  $C_i$ .

Il momento torcente  $M_t$  risulta espresso ancora dalla [100. 9]:

$$M_t = \mu \kappa_t \int_A [(x_1 \Psi)_{,1} + (x_2 \Psi)_{,2} - 2\Psi] dA, \quad [102. 10]$$

con riguardo al fatto che nel caso attuale  $\Psi$  non è nulla sui contorni interni  $C_i$  ma vi assume il valore  $c_i$  e che nella trasformazione di Gauss il senso di percorrenza positivo di  $C_i$  è contrario a quello assunto positivo per  $C_0$ . Otteniamo dunque:

$$M_t = 2\mu \kappa_t \int_A \Psi dA + \mu \kappa_t \sum_{i=1}^m c_i \int_{C_i} (x_2 dx_1 - x_1 dx_2), \quad [102. 11]$$

e ricordando la trasformazione del secondo integrale dalla [100. 8] alla [100. 9], anche:

$$M_t = 2\mu\kappa_t \left( \int_A \Psi dA + \sum_{i=1}^m c_i A_i \right). \quad [102. 12]$$

Come esempio consideriamo il semplice caso di una sezione a forma di corona circolare di raggio esterno  $a_0$  ed interno  $a_1$ . Assunta ancora come funzione delle tensioni la [101. 3], cioè:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (a_0^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad [102. 13]$$

vediamo che essa soddisfa alla condizione [100. 6] sul contorno esterno, per  $r = a_0$ , qualora scegliamo  $c_0 = 0$ , mentre sul contorno interno, per  $r = a_1$ , dove  $\Psi = c_1$ , abbiamo  $c_1 = \frac{1}{2} (a_0^2 - a_1^2)$ .

Il momento torcente risulta allora dalla [102. 12] osservando che ora  $A_1 = \pi a_1^2$ :

$$M_t = 2\mu\kappa_t \left[ \int_A (a_0^2 - x_1^2 - x_2^2) dA + c_1 A_1 \right] = \mu\kappa_t J_0. \quad [102. 14]$$

Alcune importanti formule approssimate per sezioni tubolari di spessore sottile seguono facilmente. Sia  $h$  lo spessore,  $C_0$  il contorno esterno e  $C_1$  il contorno interno. Dato che il tubo è sottile, si potrà ammettere che la  $\Psi$  vari linearmente lungo lo spessore. Allora, assunte  $\Psi = 0$  su  $C_0$ ,  $\Psi = c_1$  su  $C_1$ ,  $A = A_0 - A_1$ , otteniamo:

$$\int_A \Psi(x_1, x_2) dA = \frac{1}{2} c_1 A. \quad [102. 15]$$

La tensione tangenziale  $\tau = \tau_v$  in ogni punto della sezione trasversale è:

$$\tau_v = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2} = \mu\kappa_t \sqrt{\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2} = \mu\kappa_t \frac{d\Psi}{dn}, \quad [102. 16]$$

avendo tenuto presente la seconda delle [98. 11]. In base all'ipotesi di una variazione lineare:

$$\left| \frac{d\Psi}{dn} \right| = \left| \frac{\Psi_0 - \Psi_1}{h} \right| = \frac{c_1}{h} \quad [102. 17]$$

e quindi, approssimativamente  $\tau_v = \mu\kappa_t c_1 / h$ .

Per determinare  $c_1$  utilizziamo la [102. 9], cioè:

$$c_1 \int_{C_1} \frac{ds}{h} = 2A_1, \quad [102. 18]$$



da cui  $c_1 = 2A_1 h/l_1$ , essendo  $l_1$  la lunghezza di  $C_1$ . Il momento torcente è dato dalla [102. 12]:

$$M_t = \frac{4\mu\kappa_t h}{l_1} A_1 \left(\frac{1}{2} A + A_1\right), \quad [102. 19]$$

o anche, poichè nel tubo sottile  $\frac{1}{2} A \ll A_1$ , anche:

$$M_t = \frac{4\mu\kappa_t h A_1^2}{l_1}, \quad \tau_v = \frac{2\mu\kappa_t A_1}{l_1}. \quad [102. 20]$$

Perveniamo dunque, combinando le due [102. 20], all'espressione:

$$M_t = 2Ah\tau_v, \quad [102. 21]$$

ottenuta con un procedimento diverso da BREDT<sup>1</sup>.

Ad esempio, nel caso della corona circolare già risolto rigorosamente, la formula approssimata [102. 20], per  $h = a_0 - a_1$ ,  $A_1 = \pi a_1^2$ , fornisce un valore del momento torcente:

$$M_t = \frac{4\mu\kappa_t (a_0 - a_1) \pi^2 a_1^4}{2\pi a_1} = 2\mu\kappa_t \pi a_1^3 (a_0 - a_1), \quad [102. 22]$$

in confronto del valore [102. 14]:

$$M_t = \frac{\mu\kappa_t \pi}{2} (a_0^4 - a_1^4), \quad [102. 23]$$

ottenuto ponendo, in luogo del momento polare di inerzia, la sua espressione.

### 103. Torsione in fase plastica.

Quando la tensione tangenziale  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$  raggiunge un valore limite  $\tau_S$ , si produce snervamento nei punti del contorno della sezione dove la  $\tau$  ha in ogni caso il suo valore massimo.

Con l'aumentare del momento torcente applicato le zone plastiche si espandono dalla periferia verso il centro. Ammesso che anche nella fase plastica le uniche componenti di tensione siano le  $\tau_{31}$  e  $\tau_{32}$ , la tensione tangenziale  $\tau$  si manterrà uguale a  $\tau_S$ , in assenza di incrudimento.

In base ai criteri di plasticità [62. 1] e [62. 13] nella regione plastica la funzione delle tensioni deve soddisfare all'equazione:

$$\tau^2 \equiv \tau_{31}^2 + \tau_{32}^2 = \mu^2 \kappa_t^3 (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2) = k^2 \quad [103. 1]$$

<sup>1</sup> R. BREDT, *Zeits. Ver. deutsch. Ing.*, **40**, 815 (1896).

dove il parametro  $k$  vale rispettivamente  $\sigma_S/\sqrt{3}$  per il criterio di Tresca e  $\sigma_S/\sqrt{3}$  per il criterio di Mises, essendo  $\sigma_S$  il limite di snervamento in semplice trazione.

Nella regione elastica la tensione tangenziale  $\tau$  deve essere inferiore a  $k$  e continua nell'attraversare il contorno elasto-plastico. Ne consegue che la pendenza della superficie  $z = \Psi(x_1, x_2)$  risulta uguale a  $k/\mu\kappa_t$  nella regione plastica, inferiore a tale valore nella regione el-

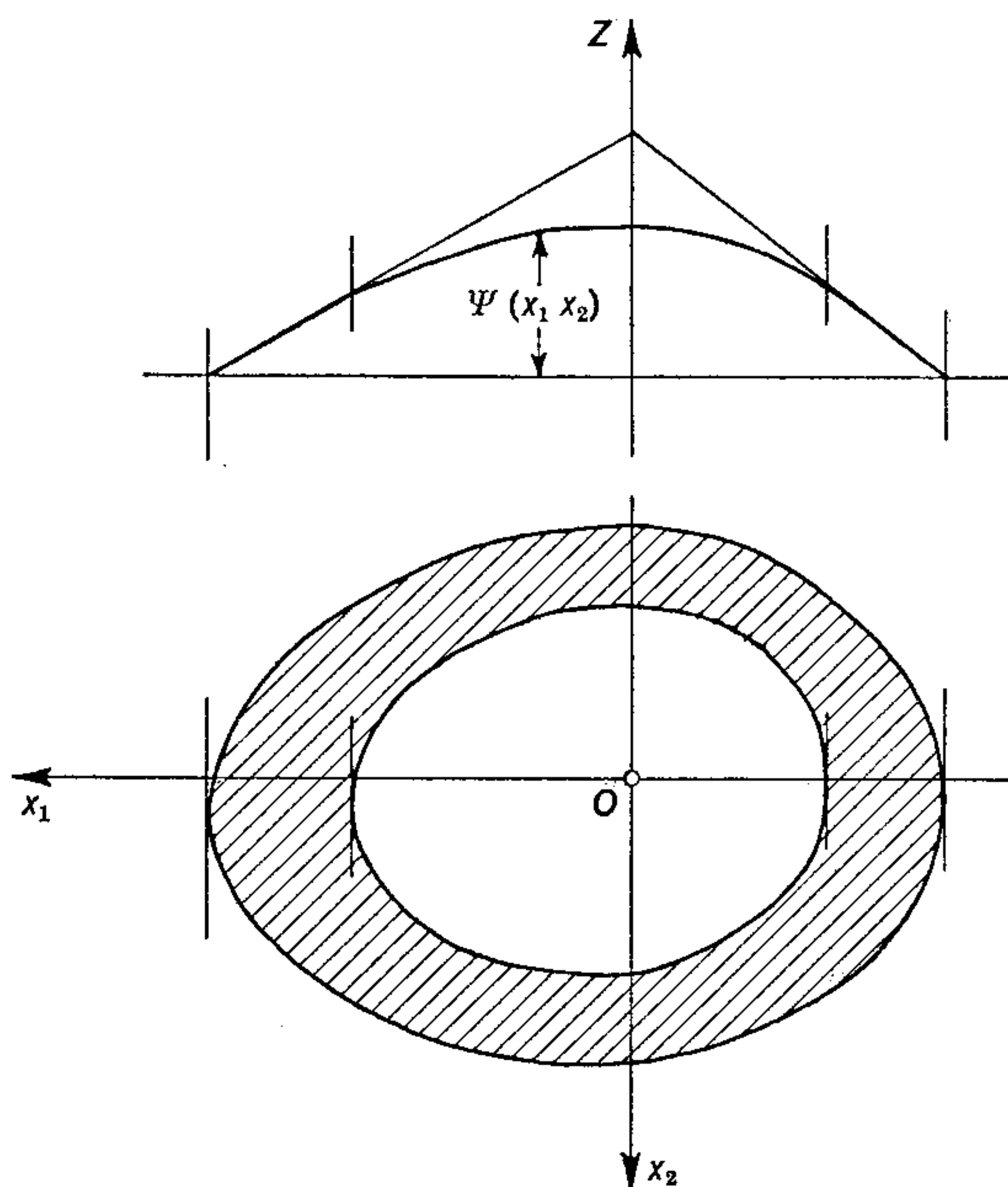


Fig. 104.

stica, continua attraverso la linea di separazione tra le due regioni. Tali proprietà suggeriscono un'estensione dell'analogia della membrana<sup>1</sup>, e precisamente nel pensare la parte di membrana corrispondente alla zona plasticizzata come premea contro una specie di *tetto rigido* di pendenza costante costruito sul contorno della sezione come indicato nella fig. 104. La distribuzione delle tensioni dipende quindi esclusivamente, per un momento torcente  $M_t$  assegnato, dalla forma del contorno.

Le equazioni di Prandtl-Reuss si riducono nel caso presente alle:

$$2\mu\dot{\epsilon}_{31} = \dot{\tau}_{31} + 2\mu\dot{\lambda}\tau_{31}, \quad 2\mu\dot{\epsilon}_{32} = \dot{\tau}_{32} + 2\mu\dot{\lambda}\tau_{32}, \quad [103.2]$$

<sup>1</sup> A. NADAI, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **3**, 442 (1923).

dove il parametro  $\dot{\lambda}$  è funzione delle coordinate e del tempo. Se consideriamo un punto  $P$  della sezione trasversale, finchè esso si trova nella regione elastica, le relazioni [100. 2] e [100. 14] mostrano che:

$$\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{32}} = \frac{\tau_{31}}{\tau_{32}} . \quad [103. 3]$$

Quando la frontiera elasto-plastica raggiunge  $P$ , nell'ipotesi che l'ordine di grandezza della deformazione sia lo stesso della fase ela-

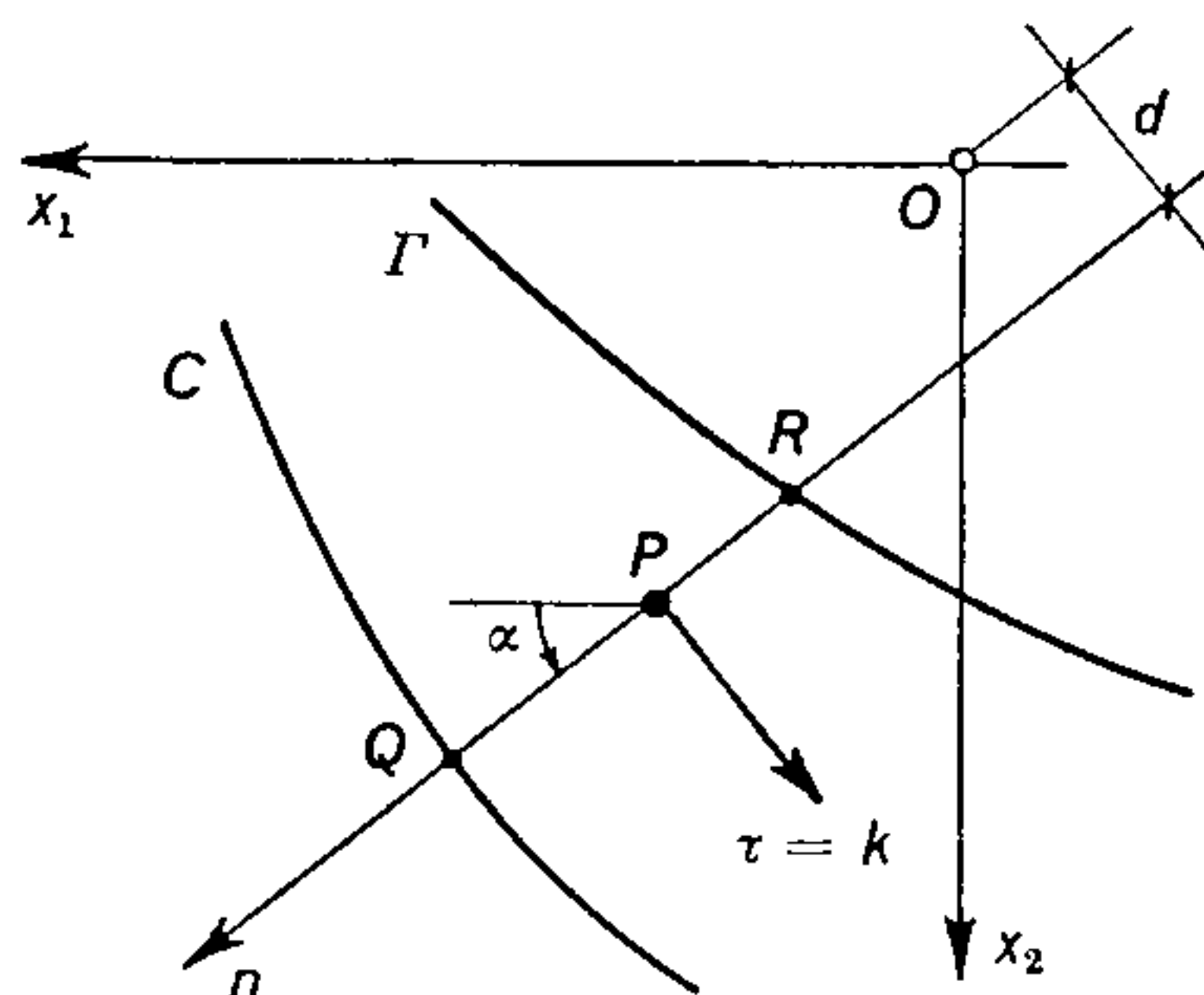


Fig. 105.

stica, il vettore tensione  $\tau$  agente sull'elemento in  $P$  rimane costante in grandezza, cioè uguale a  $k$ , e in direzione, cioè tangente alla curva condotta per  $P$  parallelamente al contorno.

Di conseguenza devono essere nulli gli incrementi di tensione o le velocità  $\dot{\tau}_{31}$ ,  $\dot{\tau}_{32}$ , per cui, eliminando  $\dot{\lambda}$  dalle [103. 2] otteniamo:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{31}}{\dot{\varepsilon}_{32}} = \frac{\dot{\tau}_{31}}{\dot{\tau}_{32}} . \quad [103. 4]$$

A partire dall'istante in cui vale in  $P$  tale relazione le componenti di tensione si mantengono costanti, per cui integrando si ottiene ancora la [103. 3].

Dalle [100. 18] otteniamo le derivate dello spostamento assiale nella forma:

$$u_{3,1} = \kappa_t x_2 + \frac{\tau_{31}}{\mu} , \quad u_{3,2} = -\kappa_t x_1 + \frac{\tau_{32}}{\mu} , \quad [103. 5]$$

e quindi la [103. 3] può anche essere scritta come:

$$\frac{u_{3,1} - \kappa_t x_2}{u_{3,2} + \kappa_t x_1} = \frac{\tau_{31}}{\tau_{32}} . \quad [103. 6]$$



Con riferimento alla fig. 105, essendo:

$$\tau_{31} = -k \sin \alpha, \quad \tau_{32} = k \cos \alpha, \quad [103. 7]$$

la derivata dello spostamento  $u_3$  rispetto alla normale al contorno diviene, per  $n_1 = \cos \alpha$ ,  $n_2 = \sin \alpha$ :

$$\frac{du_3}{dn} \equiv u_{3,1} \cos \alpha + u_{3,2} \sin \alpha = k^{-1} (\tau_{32} u_{3,1} - \tau_{31} u_{3,2}). \quad [103. 8]$$

Tenendo presente la [103. 6], abbiamo infine:

$$\frac{du_3}{dn} \equiv \kappa_t (-x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) = \pm \kappa_t d, \quad [103. 9]$$

dove  $d$  indica la distanza della normale dall'origine delle coordinate.

L'ingobbamento della sezione varia dunque con legge lineare lungo la normale  $n$ . Poichè sulla frontiera elasto-plastica  $u_3$  è noto dalla soluzione del problema elastico, esso può essere determinato in tutta la regione plastica.

a) *Sezione circolare.*

A titolo di esempio consideriamo una sezione circolare di raggio  $a$ : la sezione rimane piana e le traiettorie delle tensioni tangenziali sono circonferenze concentriche al contorno. Se  $\varrho$  è il raggio della circonferenza che rappresenta la frontiera elasto-plastica per un momento torcente assegnato, corrispondente ad una torsione  $\kappa_t = k/\mu\varrho$ , la distribuzione delle tensioni tangenziali è:

$$\tau = \frac{k r}{\varrho} \quad \text{per } 0 \leq r \leq \varrho, \quad \tau = k \quad \text{per } \varrho \leq r \leq a. \quad [103. 10]$$

Il momento torcente vale:

$$M_t = 2\pi \int_0^a r^2 \tau dr = \frac{2}{3} \pi k (a^3 - \frac{1}{4} \varrho^3), \quad [103. 11]$$

mentre  $M_E = \pi k a^3/2$  è il momento torcente che corrisponde all'inizio dello snervamento ( $\varrho = a$ ). Il valore necessario per raggiungere la plasticizzazione completa ( $\varrho = 0$ ) è teoricamente  $M_S = 2\pi k^3/3$ , cioè  $4 M_E/3$ : tale situazione è evidentemente irrealizzabile perchè vi sarà sempre un nucleo di materiale ancora elastico in prossimità dell'origine per quanto grande sia  $M_t$ .

Un valore del momento torcente  $M_t$  compreso tra  $M_E$  e  $M_S$  produce una plasticizzazione parziale della sezione: quando tale momento venga rimosso, la deformazione non si annulla in quanto la zona plasticizzata ne impedisce il ritorno completo alle condizioni iniziali. La tensione residua in un punto generico si ottiene sovrapponendo alla distribuzione elasto-plastica dovuta a  $M_t$  la distribuzione elastica dovuta a  $-M_t$ , in quanto il ritorno da uno stato plastico avviene con legge puramente elastica.

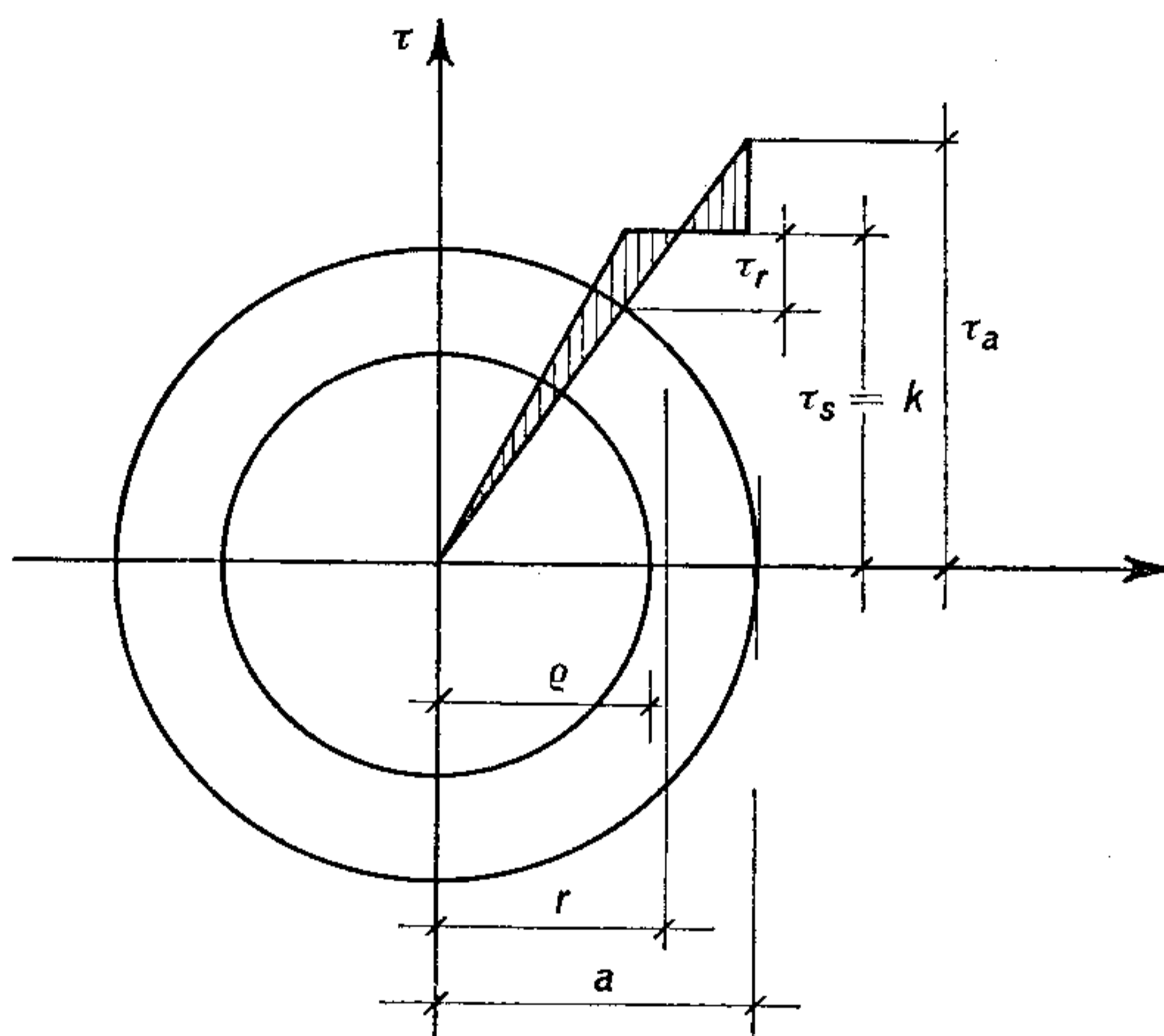


Fig. 106.

Ciò è stato indicato in fig. 106, dove l'incipiente deformazione plastica si verifica nei punti della frontiera elasto-plastica  $r = \rho$ . Il diagramma di deformazione  $(\tau, \gamma)$  corrispondente al supposto comportamento perfettamente plastico del materiale permette di individuare la tensione limite di snervamento  $\tau_s$  sulla frontiera stessa. La tensione tangenziale  $\tau_a$  sul contorno per un comportamento elastico del materiale ha il valore:  $\tau_a = M_t a / J_0$ , con  $M_t$  uguale al momento torcente corrispondente alla plasticizzazione della zona compresa tra  $\rho$  e  $a$ . Le tensioni residue risultano allora dal diagramma intrecciato.

#### b) Sezione ovale.

Nell'esempio precedente la forma della frontiera elasto-plastica era nota a priori. Tale circostanza rese immediata la soluzione del problema, ma essa rappresenta l'eccezione in quanto si verifica solo per il cerchio e la corona circolare.

In altri casi si può ricorrere ad un metodo inverso proposto da SOKOLOVSKIJ<sup>1</sup>, assumendo una frontiera elasto-plastica  $\Gamma$  assegnata e determinando la forma appropriata del contorno.

Sia  $\Psi$  una soluzione dell'equazione differenziale [100. 5] per un particolare valore della torsione  $\kappa_t$  e si costruisca la curva  $\Gamma$  lungo la quale deve essere verificata anche la [103. 1]. In un punto generico  $P$  di  $\Gamma$  il vettore tensione  $\tau$  può essere determinato attraverso le [103. 1], e la sua traiettoria per  $P$  è tangente a  $\tau$ . Poichè nella regione plastica le traiettorie delle tensioni sono curve parallele, esse dovranno risultare ortogonali alla normale  $n$  in  $P$  alla traiettoria considerata. Nella regione elastica le traiettorie sono le curve  $\Psi = \text{cost.}$

Se invece di assegnare una particolare  $\Psi$ , facciamo dipendere tale funzione da un certo numero di parametri  $a_i$ , oltre dalla torsione  $\kappa_t$ , possiamo ottenere una frontiera elasto-plastica  $\Gamma$  ed una famiglia  $\Psi(a_i)$  di linee di contorno della funzione delle tensioni entro  $\Gamma$  e la sua continuazione plastica fuori di  $\Gamma$ . Ognuna di tali curve  $\Psi = \text{cost.}$  può essere assunta come contorno  $C$  della sezione. Se, eccezionalmente, lo stesso contorno  $C$  appartiene a diverse famiglie di curve, il metodo fornisce una serie di distribuzioni esatte delle tensioni elasto-plastiche per il contorno  $C$ ; in caso contrario si potranno ottenere soltanto delle soluzioni approssimate.

Come esempio consideriamo la funzione delle tensioni:

$$\Psi(x_1, x_2) = - \frac{k}{2\mu\kappa_t} \left( \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} \right), \quad [103. 12]$$

dove  $k$  è il valore limite di snervamento e  $a_1, a_2$  sono due parametri. L'equazione differenziale [100. 5] sarà verificata purchè tali parametri siano legati alla torsione  $\kappa_t$  mediante la:

$$\kappa_t = \frac{k}{2\mu} \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}. \quad [103. 13]$$

Alla funzione  $\Psi$  così prescelta corrispondono le tensioni tangenziali:

$$\tau_{31} = \mu\kappa_t \Psi_{,2} = - \frac{kx_2}{a_2}, \quad \tau_{32} = - \mu\kappa_t \Psi_{,1} = \frac{kx_1}{a_1}, \quad [103. 14]$$

e la frontiera elasto-plastica  $\Gamma$ , dove  $\tau^2 = k^2$ , è perciò l'ellisse:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad [103. 15]$$

<sup>1</sup> V. V. SOKOLOVSKIJ, *Prikl. Mat. Meh.*, **6**, 241 (1942).



che in forma parametrica diviene:

$$x_1 = a_1 \cos \alpha, \quad x_2 = a_2 \sin \alpha. \quad [103. 16]$$

Il vettore tensione  $\tau$  in un punto generico  $\alpha$  dell'ellisse è dato dalle componenti:

$$\tau_{31} = -k \sin \alpha, \quad \tau_{32} = k \cos \alpha, \quad [103. 17]$$

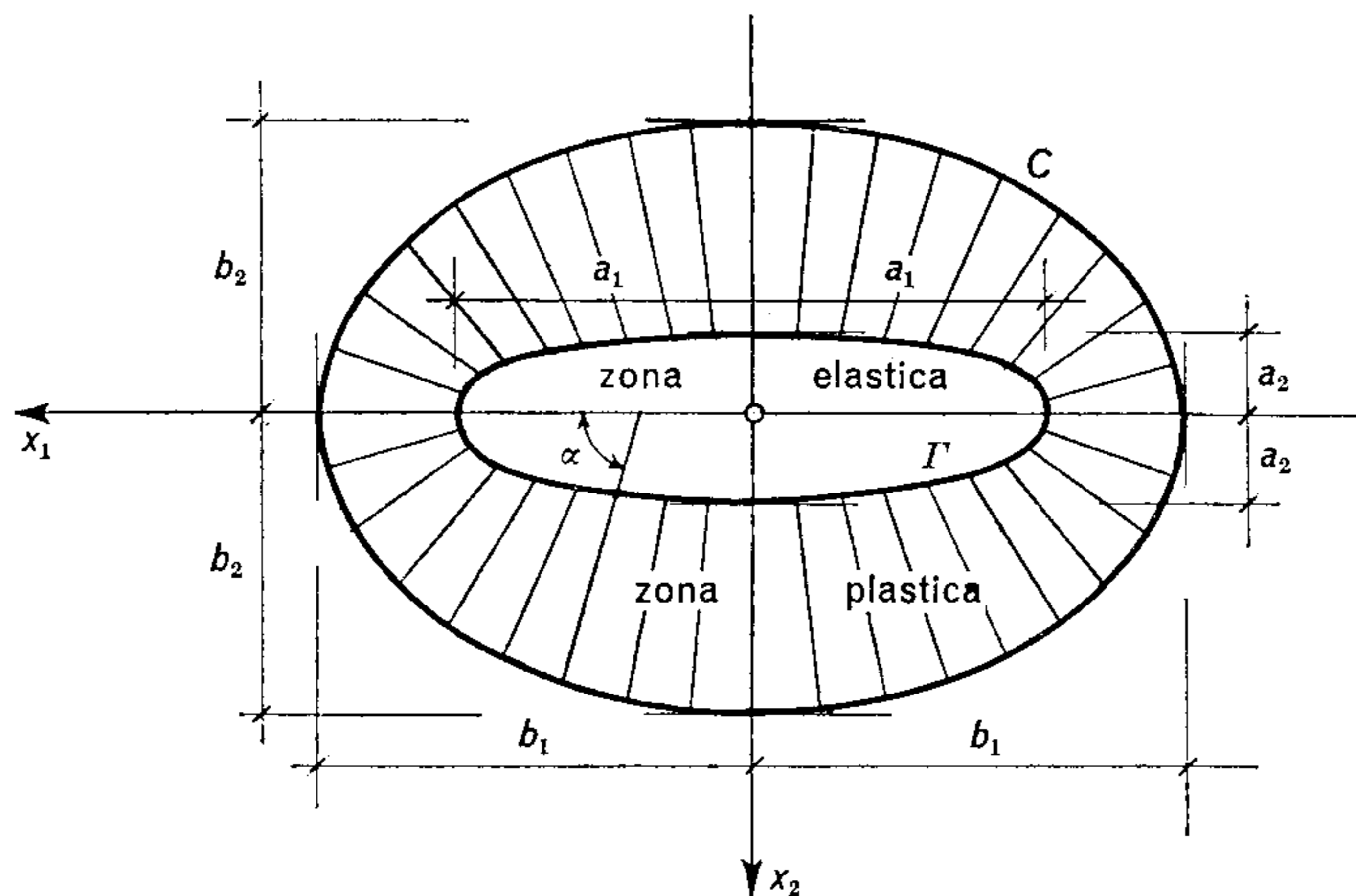


Fig. 107.

per cui le normali in tale punto al vettore  $\tau$  hanno l'equazione:

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg} \alpha - (a_1 - a_2) \sin \alpha. \quad [103. 18]$$

Costruito allora un insieme di rette [103. 18] in ogni punto  $\alpha$  dell'ellisse come indicato in fig. 107, i contorni  $C$ , corrispondenti a frontiere elasto-plastiche  $\Gamma$  del tipo [103. 15] ed aventi  $\tau$  per tangente, possono essere ottenuti come traiettorie ortogonali di queste rette, cioè in forma parametrica:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha [b_1 + (b_1 - b_2) \sin^2 \alpha], \\ x_2 &= \sin \alpha [b_2 - (b_1 - b_2) \cos^2 \alpha], \end{aligned} \quad [103. 19]$$

dove  $b_1, b_2$  sono due opportune costanti tali che:

$$b_1 - b_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2). \quad [103. 20]$$

Per  $2b \geq b_1$  il contorno definito dalle [103. 19] è una curva ovale chiusa di semiassi  $b_1$  e  $b_2$  e di poco diversa dall'ellisse. Specificato allora il contorno della sezione nella forma [103. 19] da valori assegnati

di  $b_1$  e  $b_2$ , quando la torsione  $\kappa_t$  ha il valore [103.13], si ottengono dalle:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{2\mu\kappa_t}{k}, \quad a_1 - a_2 = 2(b_1 - b_2), \quad [103.21]$$

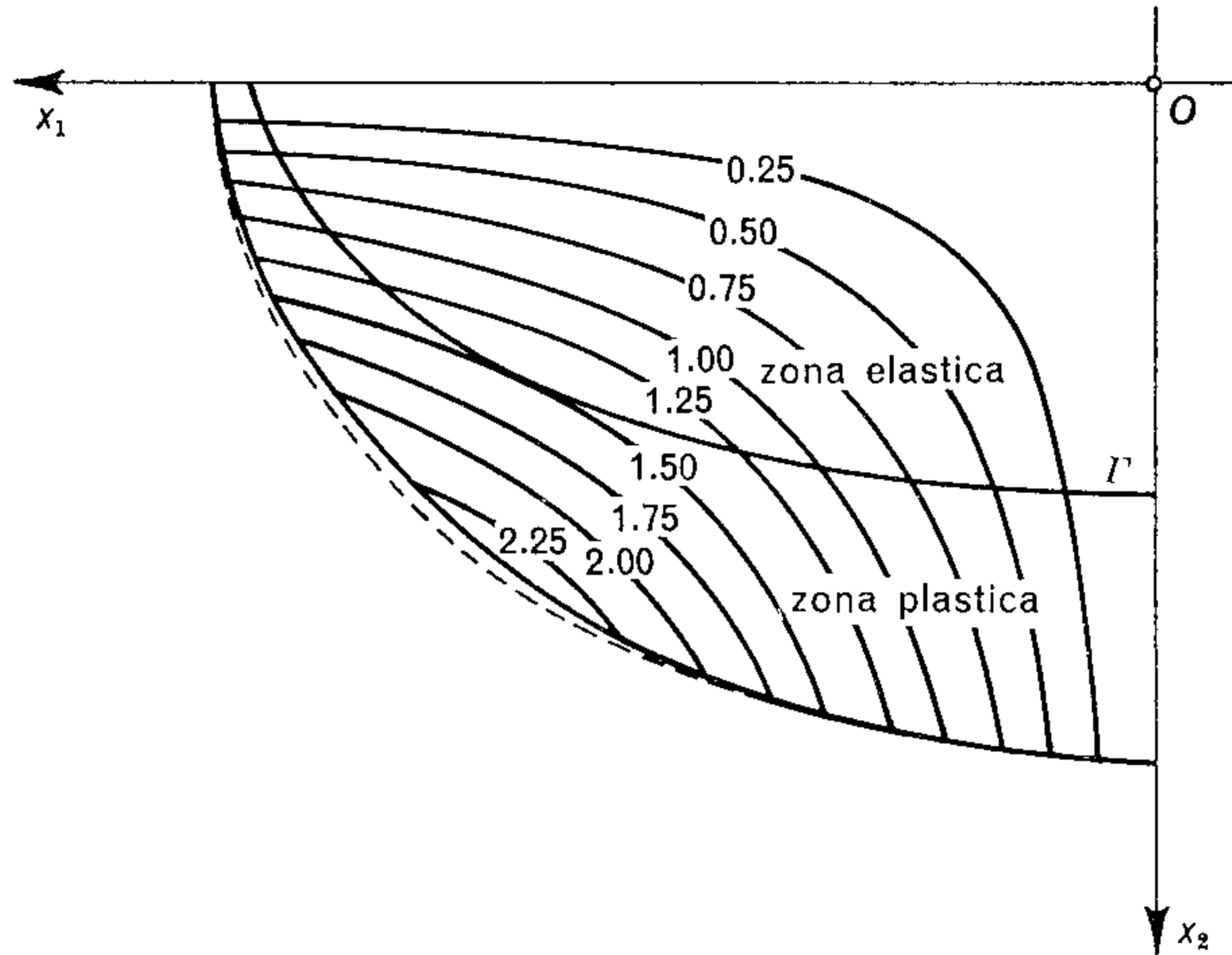


Fig. 108.

i semiassi dell'ellisse [103.15] che rappresenta la frontiera elasto-plastica per detto contorno:

$$a_1 = \frac{k}{2\mu\kappa_t} + b_1 - b_2 + \sqrt{\left(\frac{k}{2\mu\kappa_t}\right)^2 + (b_1 - b_2)^2}, \quad [103.22]$$

$$a_2 = \frac{k}{2\mu\kappa_t} + b_2 - b_1 + \sqrt{\left(\frac{k}{2\mu\kappa_t}\right)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Naturalmente la soluzione è valida se l'ellisse  $\Gamma$  giace interamente entro l'ovale  $C$ . Dalla condizione  $a_1 \leq b_1$ , con riguardo alla prima [103.22], si ottiene allora la seguente limitazione per la torsione:

$$\kappa_t \geq \frac{k}{\mu} \frac{b_2}{b_1(2b_2 - a_1)}, \quad [103.23]$$

perchè siano applicabili i precedenti risultati.

L'ingobbamento della sezione risulta sostituendo il valore [103.13] della torsione  $\kappa_t$  ed i valori [103.14] delle tensioni  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  nelle espressioni [103.5]:

$$u_{3,1} = -\frac{kx_2}{2\mu} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}, \quad u_{3,2} = -\frac{kx_1}{2\mu} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}, \quad [103.24]$$

da cui integrando:

$$u_3 = - \frac{k x_1 x_2}{2 \mu} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} . \quad [103. 25]$$

La determinazione dello spostamento  $u_3$  per un dato valore della torsione  $\kappa_t$  avviene attraverso i parametri  $a_1$  e  $a_2$  che collegano la [103. 25] alle [103. 22]. L'ingobbamento della sezione è mostrato nella fig. 108 per un quarto di sezione, data la simmetria: si hanno concavità nel primo e nel terzo quadrante, convessità nel secondo e nel quarto.

Un metodo abbastanza spedito per tracciare le linee di livello della funzione  $u_3(x_1, x_2)$  può essere derivato dalla [103. 19] osservando che, una volta individuata l'ellisse corrispondente ad un certo valore della torsione  $\kappa_t$ , il punto  $R$  della fig. 105 rimane fissato per ogni punto  $a$  dell'ellisse.

#### 104. Torsione in presenza di spostamenti finiti.

Quando le componenti dello spostamento e della rotazione non possano più essere considerate infinitesime, l'analisi dello stato di tensione-deformazione in un cilindro sollecitato da un momento torcente richiede di assumere due sistemi di riferimento, e precisamente una terna di coordinate spaziali fissate allo spazio ed una terna di coordinate materiali fissate alla particella materiale e supposte, ad esempio, coincidenti con le prime nella configurazione iniziale indeformata.

Nelle ipotesi che la forma della sezione rimanga invariata nella sua proiezione sul proprio piano e che la rotazione avvenga intorno ad un punto  $O$  dell'asse  $x_3$ , da una evidente generalizzazione delle [100. 17] al caso di spostamenti finiti abbiamo, con riguardo alla fig. 109:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos \omega - x_2 \sin \omega , \\ y_2 &= x_1 \sin \omega + x_2 \cos \omega , \\ y_3 &= \kappa_t \varphi_t(x_1, x_2) + (1 + \varepsilon_0) x_3 . \end{aligned} \quad [104. 1]$$

La torsione  $\kappa_t = d\omega/dx_3$  sarà considerata costante lungo l'asse  $x_3$ , mentre la dilatazione lineare  $\varepsilon_0$  dell'asse del cilindro tiene conto dell'accorciamento dovuto alla trasformazione delle generatrici in archi di elica cilindrica. Tutte le sezioni si ingobbano perciò nello stesso modo per effetto dello spostamento:

$$\kappa_t \varphi_t(x_1, x_2) \equiv u_3 - \varepsilon_0 x_3 = y_3 - (1 + \varepsilon_0) x_3 . \quad [104. 2]$$



Le derivate delle coordinate spaziali  $y_1, y_2, y_3$  rispetto alle coordinate materiali  $x_1, x_2, x_3$ , assunte come variabili indipendenti, sono:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \cos \omega, & y_{2,1} &= \sin \omega, & y_{3,1} &= \kappa_t \varphi_{t,1}, \\ y_{1,2} &= -\sin \omega, & y_{2,2} &= \cos \omega, & y_{3,2} &= \kappa_t \varphi_{t,2}, \\ y_{1,3} &= -\kappa_t y_2, & y_{2,3} &= \kappa_t y_1, & y_{3,3} &= 1 + \varepsilon_0, \end{aligned} \quad [104. 3]$$

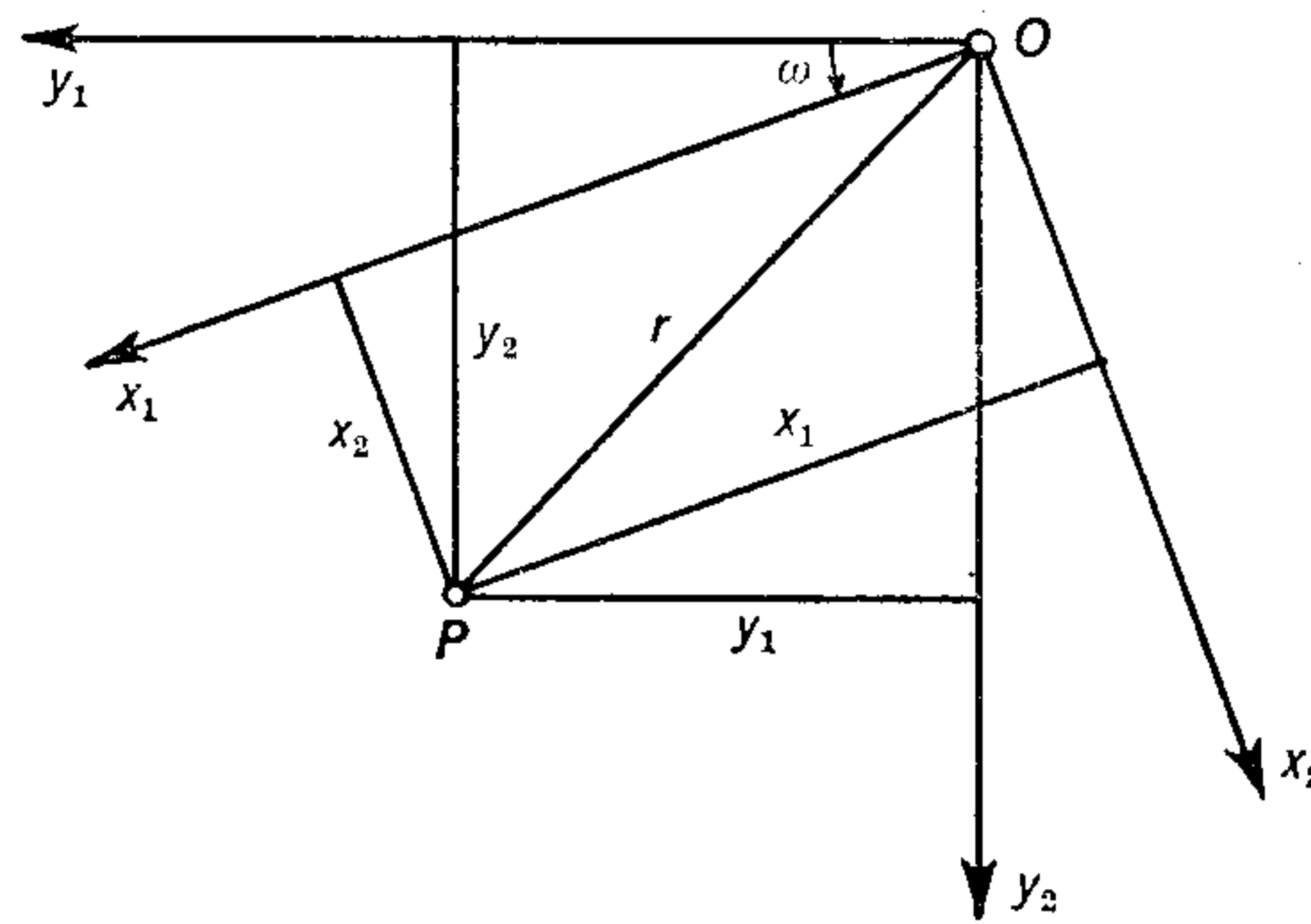


Fig. 109.

e poichè le derivate rispetto a  $x_3$  risultano indipendenti da tale variabile, è verificata l'ipotesi di una distribuzione uniforme lungo l'asse del cilindro dello stato di tensione-deformazione.

Le componenti di deformazione si ottengono dalla particolarezzazione al caso presente delle relazioni generali [3. 1] valide per spostamenti qualsiasi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega + \kappa_t^2 \varphi_{t,1}^2 - 1), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega + \kappa_t^2 \varphi_{t,2}^2 - 1), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (-\sin \omega \cos \omega + \sin \omega \cos \omega + \kappa_t^2 \varphi_{t,1} \varphi_{t,2}), \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} [-\kappa_t y_2 \cos \omega + \kappa_t y_1 \sin \omega + (1 + \varepsilon_0) \kappa_t \varphi_{t,1}], \\ \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} [\kappa_t y_2 \sin \omega + \kappa_t y_1 \cos \omega + (1 + \varepsilon_0) \kappa_t \varphi_{t,2}], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} [\kappa_t^2 y_2^2 + \kappa_t^2 y_1^2 + (1 + \varepsilon_0)^2 - 1]. \end{aligned} \quad [104. 4]$$

Indicando allora con  $r$  la distanza del punto generico  $P$  dall'origine  $O$ , per cui  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ , e tenendo presenti le relazioni ottenute dalla risoluzione rispetto a  $x_1, x_2$  delle prime due [104. 1], cioè:

$$x_1 = y_1 \cos \omega + y_2 \sin \omega, \quad x_2 = -y_1 \sin \omega + y_2 \cos \omega, \quad [104. 5]$$

le precedenti espressioni [104. 4] si semplificano nelle:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \kappa_t^2 \varphi_{t,1}^2, & \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \kappa_t [(1 + \varepsilon_0) \varphi_{t,1} - x_2], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \kappa_t^2 \varphi_{t,2}^2, & \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \kappa_t [(1 + \varepsilon_0) \varphi_{t,2} + x_1], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \kappa_t^2 \varphi_{t,1} \varphi_{t,2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} [2\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 + \kappa_t^2 r^2]. \end{aligned} \quad [104. 6]$$

Se ci limitiamo a deformazioni molto piccole, pur essendo permessi spostamenti e rotazioni qualsiasi, sarà lecito trascurare  $\varepsilon_0$  rispetto all'unità nelle espressioni per  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{32}$  ed  $\varepsilon_0^2$  rispetto a  $2\varepsilon_0$  nell'espressione per  $\varepsilon_{33}$ . Le componenti della deformazione corrispondenti assumono la forma semplificata:

$$\varepsilon_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,1} - x_2), \quad \varepsilon_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,2} + x_1), \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_0 + \frac{\kappa_t^2 r^2}{2}, \quad [104. 7]$$

dalle quali risulta come le espressioni di  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{32}$  coincidano con le [100. 14] ottenute nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi.

Le altre quattro componenti di deformazione,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{33}$ , possono essere riguardate come grandezze del secondo ordine rispetto a  $\varepsilon_{31}$  e  $\varepsilon_{32}$ , ed analoga osservazione vale per le componenti di tensione corrispondenti. Naturalmente dovremmo riferirci alle tensioni  $t_{ij}$  definite dalle [33. 4] ed alle corrispondenti equazioni di equilibrio indefinite [33. 12] ed ai limiti [33. 13]. Rinviando all'analisi rigorosa svolta in tal senso da VILLAGGIO<sup>1</sup>, qui ci limiteremo a considerare le tensioni ordinarie  $\sigma_{ij}$ , trascurando perciò l'influenza dello stato di deformazione sullo stato di tensione, secondo una chiara trattazione dovuta a KAPPUS<sup>2</sup>.

Le conclusioni cui perverremo sono da riguardarsi soltanto come approssimate: esse tuttavia permettono di porre in rilievo alcuni elementi fondamentali che non risaltano dalla trattazione ordinaria del problema della torsione secondo Saint-Venant.

A meno di termini non essenziali del secondo ordine le equazioni di equilibrio si riducono alla:

$$\tau_{31,1} + \tau_{32,2} = 0, \quad [104. 8]$$

o anche, introducendo la funzione  $\varphi_t(x_1, x_2)$ :

$$\nabla \varphi_t(x_1, x_2) \equiv \varphi_{t,11} + \varphi_{t,22} = 0. \quad [104. 9]$$

<sup>1</sup> P. VILLAGGIO, *Atti Accad. Ligure*, **18** (1961).

<sup>2</sup> R. KAPPUS, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **19**, 271, 344 (1939).

All'equazione di Laplace [104. 9] viene associata la condizione ai limiti che sul contorno della sezione la tensione tangenziale deve risultare tangente al contorno stesso, cioè:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}} = \frac{\varphi_{t,2} + x_1}{\varphi_{t,1} - x_2}. \quad [104. 10]$$

In sostanza la determinazione della funzione armonica  $\varphi_t(x_1, x_2)$  è ancora ricondotta al problema di Neumann, già ampiamente discusso. Le relazioni ivi ottenute nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi valgono dunque anche per spostamenti qualsiasi, purchè le deformazioni siano piccole, e le variabili indipendenti  $x_1, x_2, x_3$  vengano intese come coordinate fisse al corpo.

Consideriamo ora il caso che l'asse di rotazione passi per un altro punto  $O'$  della sezione trasversale di coordinate  $x_1^0, x_2^0$  rispetto a  $O$ , in modo che un sistema di assi  $x'_1, x'_2$  con l'origine in  $O'$  sia definito dalle:

$$x'_1 = x_1 - x_1^0, \quad x'_2 = x_2 - x_2^0. \quad [104. 11]$$

Otteniamo così nel nuovo riferimento, in luogo delle [104. 1], le:

$$\begin{aligned} y'_1 &= x'_1 \cos \omega - x'_2 \sin \omega, \\ y'_2 &= x'_1 \sin \omega + x'_2 \cos \omega, \\ y'_3 &= \kappa_t \varphi'_t(x'_1, x'_2) + (1 + \varepsilon'_0) x_3, \end{aligned} \quad [104. 12]$$

ed in luogo delle [104. 7], le:

$$\varepsilon'_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi'_{t,1} - x'_2), \quad \varepsilon'_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi'_{t,2} + x'_1), \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon'_0 + \frac{\kappa_t^2 r'^2}{2}. \quad [104. 13]$$

Anche in questo caso la funzione  $\varphi'_t$  deve risultare armonica e verificare una condizione al contorno formalmente identica alla [104. 10]:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi'_{t,2} + x'_1}{\varphi'_{t,1} - x'_2}. \quad [104. 14]$$

Allo scopo di esaminare l'influenza del centro di rotazione sullo stato di tensione e di deformazione, osserviamo che la differenza  $\varphi'_t - \varphi_t$  tra le funzioni nel riferimento  $O'$  ( $x'_1, x'_2$ ) e nel riferimento  $O$  ( $x_1, x_2$ ) deve verificare l'equazione di Laplace [104. 9] e la seguente condizione al contorno:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi_{t,2} + (\varphi'_{t,2} - \varphi_{t,2}) + x_1 - x_1^0}{\varphi_{t,1} + (\varphi'_{t,1} - \varphi_{t,1}) - x_2 + x_2^0}, \quad [104. 15]$$

ottenuta dalla [104. 14] con riguardo alle [104. 11].



Tenendo presente la [104. 10] si deduce l'equazione differenziale:

$$(\varphi'_t - \varphi_t)_{,2} dx_1 - (\varphi'_t - \varphi_t)_{,1} dx_2 = x_1^0 dx_1 + x_2^0 dx_2, \quad [104. 16]$$

da cui, dovendo risultare costanti le derivate rispetto a  $x_1$  e  $x_2$  della differenza  $\varphi'_t - \varphi_t$ , abbiamo integrando:

$$\varphi'_t = \varphi_t - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2 + c. \quad [104. 17]$$

Cioè per una diversa posizione del centro di rotazione gli spostamenti secondo  $x_3$  differiscono per un'espressione lineare in  $x_1$  e  $x_2$ . Sostituendo nelle [104. 13] otteniamo le identità per i termini lineari:

$$\varepsilon'_{31} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon'_{32} = \varepsilon_{32}, \quad [104. 18]$$

mentre per i termini quadratici in  $\kappa_t$  non sussiste un'analogia coincidenza. Qualora questi ultimi vengano trascurati, un cambiamento del centro di rotazione non ha alcuna influenza sulla distribuzione delle deformazioni e delle tensioni: qualsiasi fibra longitudinale parallela a  $x_3$  può essere asse di rotazione e la sua posizione resta determinata assegnando gli spostamenti secondo  $x_3$  di tre punti qualsiasi, non allineati, della sezione trasversale.

I termini quadratici in  $\kappa_t$  possono avere significato quando la sezione abbia la forma di un rettangolo molto allungato. In tal caso infatti dalla [101. 43] abbiamo che il valore massimo della dilatazione angolare risulta  $\max \gamma_{32} \simeq \kappa_t a_1$ , essendo  $a_1$  il semilato minore. La dilatazione lineare  $\kappa_t^2 r'^2 = (r'/a_1)^2 (\kappa_t a_1)^2$  può avere lo stesso ordine di grandezza della dilatazione angolare massima e quindi non essere più trascurabili le tensioni secondo la direzione  $x_3$ :

$$\sigma'_{33} = E \varepsilon'_{33} = E (\varepsilon'_0 + \frac{1}{2} \kappa_t^2 r'^2). \quad [104. 19]$$

Naturalmente deve essere nulla la forza longitudinale risultante delle  $\sigma'_{33}$ ; perciò dalla condizione:

$$\int_A \sigma'_{33} dA \equiv E \int_A (\varepsilon'_0 + \frac{1}{2} \kappa_t^2 r'^2) dA = 0, \quad [104. 20]$$

riesce possibile la determinazione della costante  $\varepsilon'_0$ :

$$\varepsilon'_0 = -\frac{1}{2} \kappa_t^2 \frac{J_0}{A} = -\frac{1}{2} \kappa_t^2 \varrho_0'^2, \quad [104. 21]$$

avendo introdotto il raggio polare di inerzia  $\varrho_0'$  rispetto al centro di rotazione  $O'$ .

La forma assunta dalla componente di tensione [104. 19] è dunque:

$$\sigma'_{33} = \frac{1}{2} E \kappa_t^2 (r'^2 - \varrho_0'^2) \quad [104. 22]$$

e mostra che vi è compressione per le fibre longitudinali vicine all'asse di rotazione ( $r' < \varrho_0'$ ) e trazione per quelle lontane ( $r' > \varrho_0'$ ).

Le forze elementari longitudinali  $\sigma'_{33} dA$ , agenti sulle singole fibre e sghembe tra loro, ammettono nella sezione una componente  $\sigma'_{33} dA \kappa_t r'$ , normale al raggio  $r'$ . Esse sono equivalenti nel loro complesso ad una coppia tale che il momento torcente sarà espresso dalla:

$$M_t = \int_A (\tau_{32} x_1 - \tau_{31} x_2) dA + \int_A (\sigma'_{33} \kappa_t r') r' dA, \quad [104. 23]$$

o anche:

$$M_t = \mu K_t \kappa_t + \frac{1}{2} E K_\sigma \kappa_t^3, \quad [104. 24]$$

avendo introdotto la ordinaria rigidezza torsionale  $\mu K_t$  e la rigidezza  $E K_\sigma$  definita dalla:

$$K_\sigma = \int_A (r'^2 - \varrho_0'^2) r'^2 dA. \quad [104. 25]$$

L'asse di torsione risulta determinato dalla conoscenza di  $\sigma'_{33}$  e di  $K_\sigma$ . Infatti, imponendo che le forze elementari longitudinali  $\sigma'_{33} dA$  non diano origine ad alcun momento flettente, si ha per una sezione simmetrica rispetto all'asse  $x_2$ :

$$\int_A \sigma'_{33} x_2' dA = \int_A \sigma'_{33} (x_2 - x_2^0) dA = \int_A \sigma'_{33} x_2 dA, \quad [104. 26]$$

poichè il centro di rotazione  $O'$  giace sull'asse di simmetria. Abbiamo dunque, con riguardo alla [104. 22]:

$$\int_A (r'^2 - \varrho_0'^2) x_2 dA = \int_A r'^2 x_2 dA, \quad [104. 27]$$

per l'annullarsi del momento statico rispetto all'asse baricentrico  $x_1$ . Posto allora, per  $x_1' = x_1$ :

$$r'^2 \equiv x_1'^2 + x_2'^2 = x_1^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = r^2 - 2x_2 x_2^0 + x_2^{02}, \quad [104. 28]$$

possiamo calcolare dalla [104. 27] l'ordinata  $x_2^0$  del centro di rotazione  $O'$ :

$$x_2^0 = \frac{1}{2J_1} \int_A r^2 x_2 dA. \quad [104. 29]$$

Le considerazioni precedenti discendono dall'aver tenuto conto di un accorciamento longitudinale del cilindro conseguente ad una dilatazione longitudinale negativa. Tale ipotesi è però in contrasto con i risultati ottenuti da POYNTING<sup>1</sup> nel corso di esperienze su fili di acciaio e di rame sollecitati a torsione senza superare il limite di elasticità: in queste ricerche, condotte con estrema accuratezza, fu riscontrato sempre un allungamento dei fili approssimativamente proporzionale al quadrato della torsione.

Questo risultato è intimamente connesso con un fenomeno analogo, previsto da KELVIN<sup>2</sup>, secondo cui « *it is possible that a shearing stress may produce in a truly isotropic solid condensation or dilatation in proportion to the square of its value* ». Tale effetto condusse a definire la variazione di volume dovuta a tensioni tangenziali con il termine *dilatanza* per distinguerla dall'ordinaria *dilatazione*.

Una spiegazione può essere data ricorrendo alla generalizzazione delle relazioni elastiche isotrope nella forma [35. 9] proposta da REINER. È possibile così introdurre, oltre alle due costanti elastiche  $\lambda$  e  $\mu$ , una terza costante  $\mu_t$ , definita *modulo di elasticità trasversale*, ed ottenere la legge<sup>3</sup>:

$$\sigma_{ij} = k_0 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 4\mu_t \varepsilon_{hi} \varepsilon_{hj}, \quad [104. 30]$$

dove  $k_0$  è funzione dei tre invarianti della deformazione  $E_1, E_2, E_3$ . La [104. 30], per  $k_0 = \lambda E_1$  e  $\mu_t = 0$  si riduce alla forma classica di Cauchy-Lamè [40. 5].

Nel caso di un cilindro a sezione circolare di raggio  $a$  soggetto ad un momento torcente si ottiene la condizione:

$$\mu_t = 2\mu \left( 1 - \frac{4\varepsilon_0}{a^2 \kappa_t^2} \right) \quad [104. 31]$$

e potrà verificarsi perciò:

- a) una semplice torsione senza dilatazione longitudinale, per  $\mu_t = 2\mu$ ;
- b) una torsione accompagnata da un allungamento del cilindro, per  $\mu_t < 2\mu$ ;
- c) una torsione accompagnata da un accorciamento del cilindro, per  $\mu_t > 2\mu$ .

L'inversione di tendenza nei riguardi della dilatazione longitudinale dipende perciò dal materiale attraverso il modulo  $\mu_t$ . D'altra parte non esiste alcuna possibilità di prevedere le tre situazioni utilizzando solo le due costanti elastiche  $\lambda$  e  $\mu$ : poichè queste sono essenzialmente positive, anche una loro dipendenza dagli invarianti della deformazione non riuscirebbe a fornire alternativa. In conclusione, anche nell'ambito di deformazioni infinitesime le relazioni classiche [40. 5] non appaiono sufficientemente generali per chiarire certi aspetti particolari riscontrati in determinate esperienze.

## 105. Sollecitazione composta di forza normale e torsione.

Quando le caratteristiche della sollecitazione risultano una forza normale  $N$  ed un momento torcente  $M_t$ , lo stato di tensione rimane

<sup>1</sup> J. H. POYNTING, *Proc. Roy. Soc. London (A)*, **82**, 546 (1909); **86**, 534 (1912).

<sup>2</sup> W. THOMSON (KELVIN), P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, **1**, 679, 2ª ediz., Cambridge (1883).

<sup>3</sup> M. REINER, *Rheology*, in « *Handbuch der Physik* », **6**, 507-512 (1958).



caratterizzato da una tensione normale  $\sigma = \sigma_{33}$  e da due tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  espresse rispettivamente dalle [88. 1] e [100. 7], cioè:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau_{31} = \mu \kappa_t \Psi_{,2}, \quad \tau_{32} = -\mu \kappa_t \Psi_{,1}. \quad [105. 1]$$

La rappresentazione piana di Mohr non differisce da quella indicata nella fig. 88 del § 98, pur di considerare le componenti di tensione espresse dalle [105. 1]. Valgono perciò espressioni analoghe alle [98. 1] per le tensioni principali ed alle [98. 2] per le tensioni tangenziali estreme.

La condizione di plasticità è ancora della forma [99. 3]:

$$\sigma^2 + \alpha^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) \leq \sigma_S^2, \quad [105. 2]$$

dove  $\alpha = 2$  qualora si adotti il criterio di Tresca e  $\alpha = \sqrt{3}$  nel caso del criterio di Mises. La verifica di sicurezza in senso ristretto richiede al solito:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2)} \leq \sigma_S \quad [105. 3]$$

in ogni punto della sezione.

Ad esempio, per una sezione circolare di raggio  $a$ , poichè la tensione tangenziale risultante  $\tau \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$  nel punto generico a distanza  $r$  dal centro  $O$  è data semplicemente dalla:  $\tau = M_t r / J_0$ , come risulta dalle [101. 5] e [101. 7], la situazione più sfavorevole si verifica sul contorno, dove la tensione ideale, per  $r = a$ , diviene:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\pi a^2} \sqrt{N^2 + \frac{2 \alpha^2 M_t^2}{a^2}}. \quad [105. 4]$$

La sollecitazione composta di forza normale e torsione dipende da due parametri,  $\sigma$  e  $\tau$  in termini di tensione,  $N$  e  $M$  in termini di caratteristiche di sollecitazione, ed appare il tipo più semplice di sollecitazione nel quale è possibile indagare l'influenza della storia della deformazione sul comportamento elasto-plastico del materiale in funzione del rapporto tra detti parametri. È di un certo interesse ricordare che le prime ricerche sperimentali in proposito furono suggerite da REUSS<sup>1</sup> allo scopo di verificare la validità delle relazioni elasto-plastiche [64. 2] associate al suo nome. In tali esperienze si doveva sollecitare a torsione un cilindro circolare cavo sino a raggiungere lo snervamento e quindi applicare una forza normale di trazione crescente mantenendo

<sup>1</sup> A. REUSS, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **10**, 266, § 4, pp. 270-271 (1930).

in questa seconda fase il momento torcente costante. La parete del cilindro doveva essere di spessore sufficientemente piccolo, in modo da poter ammettere una distribuzione uniforme della tensione, mentre il materiale doveva presentare una tensione di snervamento nettamente individuabile, con incrudimento trascurabile rispetto ai moduli elastici.

Nel caso particolare in esame le uniche componenti del deviatore di tensione risultano:

$$s_{33} = \sigma_{33} - \bar{\sigma} = \frac{2}{3} \sigma, \quad s_{31} = \tau_{31}, \quad s_{32} = \tau_{32}. \quad [105. 5]$$

Indicando allora con  $\varepsilon$  la dilatazione lineare longitudinale e con  $\gamma$  la dilatazione angolare, le equazioni [62. 4] di Prandtl-Reuss riferite alla tensione tangenziale risultante  $\tau$  divengono:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\lambda} s_{33} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{2}{3} \dot{\lambda} \sigma, \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{\mu} + 2\dot{\lambda} \tau = 0, \quad [105. 6]$$

in quanto non si ha incremento della dilatazione angolare dovendo rimanere costante il momento torcente.

L'eliminazione del parametro  $\dot{\lambda}$  tra le [105. 6] conduce all'equazione differenziale:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\sigma \dot{\tau}}{3\tau} + \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad [105. 7]$$

dove la componente di tensione  $\tau$  è ottenuta dalla condizione di plasticità [105. 2] e la sua velocità  $\dot{\tau}$  per derivazione dello stesso criterio, cioè:

$$\alpha^2 \tau^2 = \sigma_S^2 - \sigma^2, \quad \alpha \tau \dot{\tau} = -\sigma \dot{\sigma}. \quad [105. 8]$$

Sostituendo tali espressioni nella [105. 7] abbiamo:

$$\dot{\varepsilon} = \left( \frac{1}{3\mu} \frac{\sigma^2}{\sigma_S^2 - \sigma^2} + \frac{1}{E} \right) \dot{\sigma}, \quad [105. 9]$$

ed introdotto il rapporto di contrazione trasversale  $\nu$  dalla nota relazione:  $E = 2\mu(1 + \nu)$ , anche:

$$6\mu \dot{\varepsilon} = \left( \frac{2\sigma_S^2}{\sigma_S^2 - \sigma^2} + \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \right) \dot{\sigma}. \quad [105. 10]$$

L'integrazione rispetto a  $t$  fornisce la dilatazione lineare nella forma:

$$6\mu\varepsilon = \sigma_S \ln \frac{\sigma_S + \sigma}{\sigma_S - \sigma} + \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \sigma \quad [105. 11]$$

e mostra come al crescere di  $\varepsilon$  la tensione normale  $\sigma$  aumenti dal valore iniziale zero avvicinandosi asintoticamente a  $\sigma_S$  con tale rapidità da superare il 99% di  $\sigma_S$  mentre  $\varepsilon$  è soltanto tre volte il valore  $\varepsilon_S = \sigma_S/E$ . Contemporaneamente la tensione tangenziale  $\tau$  diminuisce dal valore iniziale  $\tau_0 = \sigma_S/\alpha$ , quando  $\sigma = 0$ , al valore zero, quando  $\sigma = \sigma_S$ . A causa di questo aumento così rapido della tensione  $\sigma$ , lo stato di tensione si riduce ad una semplice trazione: la deformazione torsionale è in tal modo resa permanente.

Le esperienze relative furono effettivamente condotte su acciaio dolce pre-deformato da HOHENEMSER<sup>1</sup> con risultati in buon accordo con le previsioni della teoria sopra esposta, qualora si tenga nel debito conto l'influenza di vari elementi secondari non considerati dalla teoria, quali i cicli di isteresi e lo snervamento meno marcato di quello supposto.

Conclusioni completamente diverse si traggono sottoponendo un tubo cilindrico in parete sottile a trazione sino a raggiungere lo snervamento e successivamente a torsione. Dovendo rimanere costante la forza normale, non si ha in questo caso alcun incremento di dilatazione lineare durante l'applicazione del momento torcente, per cui le equazioni di Prandtl-Reuss sono ora:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{2}{3} \dot{\lambda} \sigma = 0, \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{\mu} + 2\dot{\lambda} \tau = 0, \quad [105. 12]$$

dalle quali eliminando al solito il parametro  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{\mu} - \frac{3\mu \dot{\sigma}}{E\sigma}. \quad [105. 13]$$

Tenendo presenti le [105. 8] possiamo eliminare  $\sigma$  e  $\dot{\sigma}$  nella [105. 13] in modo da ottenere:

$$\dot{\gamma} = \left[ \frac{3\alpha^2 \tau^2}{E(\sigma_S^2 - \alpha^2 \tau^2)} + \frac{1}{\mu} \right] \dot{\tau}, \quad [105. 14]$$

<sup>1</sup> K. HOHENEMSER, *Proc. 3rd. Int. Congress Appl. Mech.*, **2** (1930); *Zeits. angew. Math. Mech.*, **11**, 15 (1931).



o anche, introdotto il rapporto  $\nu$ :

$$\frac{E\dot{\gamma}}{3} = \left( \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 - \alpha^2 \tau^2} - \frac{1 - 2\nu}{3} \right) \tau \quad [105.15]$$

otteniamo per integrazione rispetto a  $t$  la dilatazione angolare nella forma:

$$\dot{\gamma} = \frac{3\sigma_S}{2\alpha\mu(1+\nu)} \ln \frac{\sigma_S + \alpha\tau}{\sigma_S - \alpha\tau} - \frac{1 - 2\nu}{2\mu(1+\nu)} \tau. \quad [105.16]$$

Il risultato ottenuto appare confermato sperimentalmente in prove su tubi di acciaio e di alluminio<sup>1</sup>. In particolare, nel tubo sollecitato a torsione dopo essere stato sottoposto ad una forza normale di trazione capace di provocare una dilatazione longitudinale permanente, la rigidezza torsionale risultò esattamente uguale a  $\mu$ , come appare dalla [105.14] per  $\tau = 0$ , cioè nella fase iniziale di applicazione del momento torcente al tubo plasticizzato per trazione.

### 106. Sollecitazione composta di flessione e torsione.

Quando le caratteristiche di sollecitazione sono un momento flettente  $M_f$  ed un momento torcente  $M_t$ , lo stato di tensione è caratterizzato da una tensione normale  $\sigma = \sigma_{33}$  e da due componenti tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$ , espresse rispettivamente dalle [91.1] e [100.7], cioè:

$$\sigma = \frac{M_f \eta}{J}, \quad \tau_{31} = \mu \kappa_t \Psi_{,2}, \quad \tau_{32} = -\mu \kappa_t \Psi_{,1}. \quad [106.1]$$

La rappresentazione piana di Mohr non differisce da quella indicata nella fig. 88 del § 98, pur di attribuire naturalmente alle componenti di tensione i valori [106.1]. Valgono perciò espressioni analoghe alla [98.1] per le tensioni principali ed alla [98.2] per le tensioni tangenziali estreme.

Il criterio di plasticità è ancora della forma [99.3]:

$$S(\sigma_{ij}) \equiv \sigma^2 + \alpha^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) \leq \sigma_S^2, \quad [106.2]$$

dove il parametro vale  $\alpha = 2$  nel caso di Tresca e  $\alpha = \sqrt{3}$  in quello di Mises. La verifica di sicurezza in senso stretto richiede, al solito, che sia verificata la [99.4], cioè  $\sigma_{id} \leq \sigma_S/m$ , in tutti i punti della sezione trasversale generica.

<sup>1</sup> J. L. M. MORRISON, W. M. SHEPHERD, *Proc. Inst. Mech. Eng.* (1950).

Nel caso particolarmente interessante di un cilindro con sezione circolare di raggio  $a$  la tensione normale dovuta al momento flettente raggiunge il max in corrispondenza delle fibre estreme, per  $\eta = a$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f a}{J} = \frac{4 M_f}{\pi a^3}, \quad [106. 3]$$

mentre la tensione tangenziale dovuta al momento torcente raggiunge pure un max sul contorno, per  $r = a$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t a}{J_0} = \frac{2 M_t}{\pi a^3}. \quad [106. 4]$$

La sicurezza in senso stretto sarà dunque garantita purchè:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\left(\frac{4 M_f}{\pi a^3}\right)^2 + a^2 \left(\frac{2 M_t}{\pi a^3}\right)^2} = \frac{4}{\pi a^3} \sqrt{M_f^2 + \frac{a^2}{4} M_t^2} \leq \frac{\sigma_S}{m}, \quad [106. 5]$$

da cui si deduce che adottando il criterio di Tresca,  $\alpha = 2$ , il momento torcente  $M_t$  ha la stessa influenza del momento flettente  $M_f$  nel raggiungimento della situazione limite.

In alcune applicazioni tecniche, come, ad esempio, nel proporzionamento degli alberi rotanti delle macchine, è fatto ancora uso del vecchio criterio della dilatazione max-min, accennato nel § 62 c) e di cui alle [62. 16]. Con riguardo alle relazioni [40. 8] scritte per i valori principali estremi  $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_{III}$  delle dilatazioni e  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{III}$  delle tensioni, abbiamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \left[ \sigma_I - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{III} \right] \\ \varepsilon_{III} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \left[ \sigma_{III} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_I \right] \end{aligned} \quad [106. 6]$$

o anche, introducendo il modulo di elasticità normale  $E$ , definito dalla [40. 10], e il rapporto di Poisson  $\nu$ , definito dalla [40. 13]:

$$E \varepsilon_I = \sigma_I - \nu \sigma_{III}, \quad E \varepsilon_{III} = \sigma_{III} - \nu \sigma_I. \quad [106. 7]$$

Introdotti infine i valori [98. 1] delle tensioni principali, dovranno essere verificate le limitazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \frac{1 - \nu}{2} \sigma \pm \frac{1 + \nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_S \\ \sigma''_S \end{array} \right. \quad [106. 8]$$

dove  $\sigma$ ,  $\tau$  hanno le espressioni [106. 1]. Spesso il criterio viene impiegato attribuendo al rapporto di Poisson il valore  $\nu = 0,3$ , accertato sperimentalmente per un acciaio; abbiamo in tal caso:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad [106. 9]$$

o anche in termini di caratteristiche secondo le [106. 1]:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \frac{4}{\pi a^3} (0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}) \quad [106. 10]$$

Appare di un certo interesse un confronto tra la [106. 5], per i due valori  $\alpha = 2$  e  $\alpha = \sqrt{3}$ , e la [106. 10].

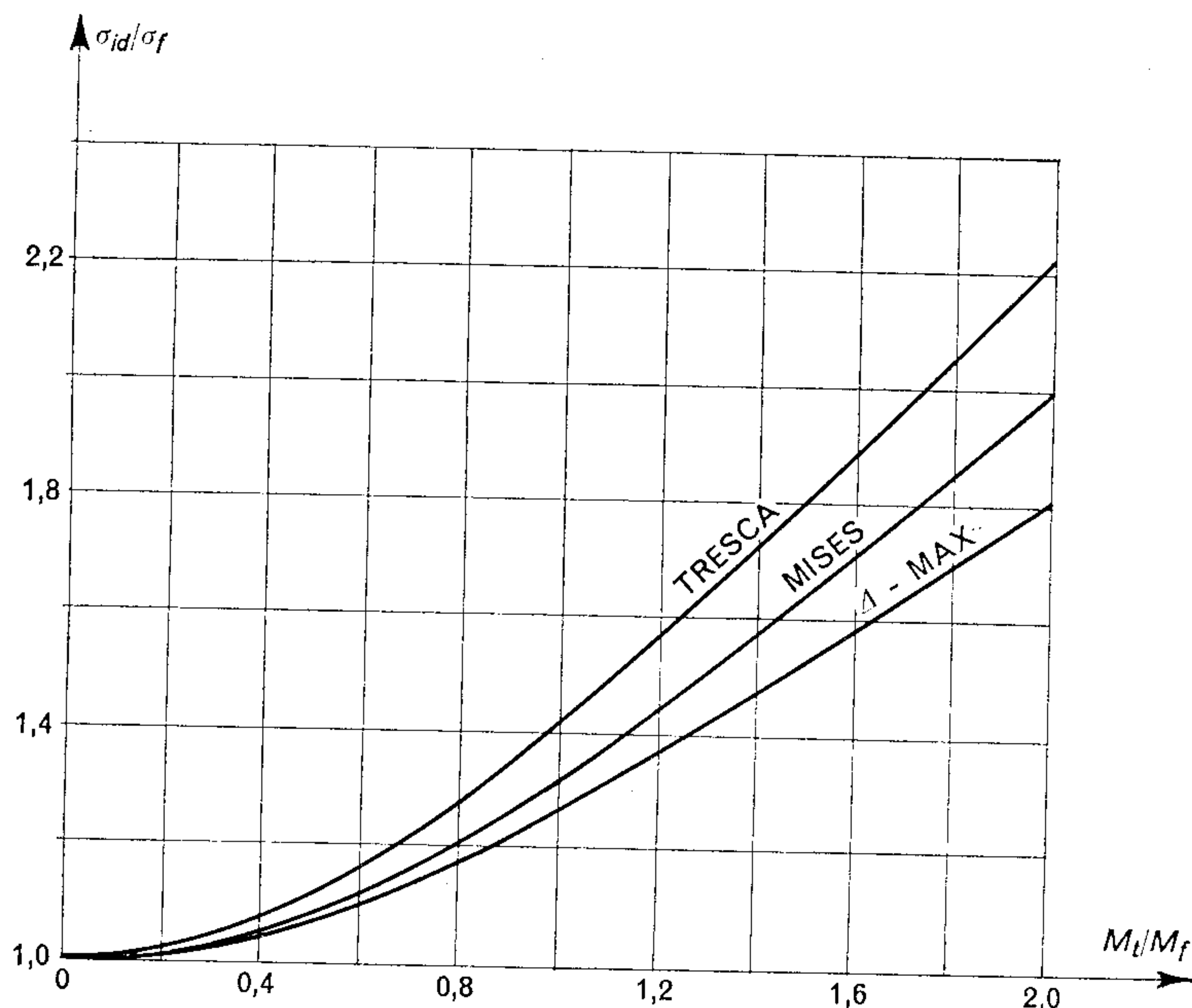


Fig. 110.

Ciò risulta dal diagramma della fig. 110 dove in funzione del rapporto  $M_t/M_f$  è stata tracciata la  $\sigma_{id}/\sigma_f$ , cioè la tensione ideale riferita alla tensione  $\sigma = \sigma_{\max}$  dovuta al solo momento flettente.

Volendo invece una verifica di sicurezza fondata sul collasso plastico della sezione dovremo determinare la curva di interazione tra  $M_f$  e  $M_t$  i cui punti sono appunto caratterizzati dalla semplice infinità di valori del momento flettente e del momento torcente ai quali corrisponde la plasticizzazione completa della sezione. L'impostazione di tale problema conduce ad una certa equazione differenziale non lineare, della quale non è nota la soluzione. Appare dunque opportuno impiegare i teoremi dell'analisi limite per costruire limitazioni inferiori e superiori della curva di interazione effettiva.

Riferiamoci per semplicità al caso d'un momento flettente  $M_f = M_2$  agente secondo un asse principale d'inerzia della sezione  $\eta \equiv x_2$ , in modo da essere in presenza di flessione retta.



Consideriamo una distribuzione cinematicamente ammissibile di velocità di deformazione, e precisamente:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\kappa} x_2, \quad \dot{\varepsilon}_{31} = \frac{\dot{\kappa}_t}{2} \Psi_{,2}, \quad \dot{\varepsilon}_{32} = -\frac{\dot{\kappa}_t}{2} \Psi_{,1}, \quad [106. 11]$$

come risulta dalle [91. 6] e [100. 7].

Dalle relazioni [66. 13] valide per uno stato perfettamente plastico, dove la funzione di snervamento  $S(\sigma_{ij})$  ha la forma [106. 2]:

$$\dot{\varepsilon} = 2\dot{\lambda}\sigma, \quad \dot{\varepsilon}_{31} = 2\alpha^2\dot{\lambda}\tau_{31}, \quad \dot{\varepsilon}_{32} = 2\alpha^2\dot{\lambda}\tau_{32}, \quad [106. 12]$$

si ottengono le tensioni associate alle velocità di deformazione [106. 11]:

$$\sigma = \frac{\dot{\kappa} x_2}{2\dot{\lambda}}, \quad \tau_{31} = \frac{\dot{\kappa}_t \Psi_{,2}}{4\alpha^2\dot{\lambda}}, \quad \tau_{32} = -\frac{\dot{\kappa}_t \Psi_{,1}}{4\alpha^2\dot{\lambda}}. \quad [106. 13]$$

Sostituendo nella condizione di plasticità [106. 2] può essere ricavato il parametro  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2\sigma_S} \sqrt{\dot{\kappa}^2 x_2^2 + \frac{\dot{\kappa}_t^2}{4\alpha^2} (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2)}, \quad [106. 14]$$

o più semplicemente, introducendo la posizione  $\Lambda = \dot{\kappa}_t/2\alpha\dot{\kappa}$ , anche:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\kappa}}{2\sigma_S} \sqrt{x_2^2 + \Lambda (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2)}. \quad [106. 15]$$

Le caratteristiche della sollecitazione  $M_f$  e  $M_t$ :

$$M_f = \int_A \sigma x_2 dA, \quad M_t = \int_A (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dA \quad [106. 16]$$

assumono quindi la forma:

$$\frac{M_f}{M_{fS}} = \frac{\sigma_S}{M_{fS}} \int_A \frac{x_2^2 dA}{\sqrt{x_2^2 + \Lambda (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2)}}, \quad [106. 17]$$

$$\frac{M_t}{M_{tS}} = -\frac{\Lambda \sigma_S}{\alpha M_{tS}} \int_A \frac{(x_1 \Psi_{,1} - x_2 \Psi_{,2}) dA}{\sqrt{x_2^2 + \Lambda (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2)}},$$

avendo indicato con  $M_{fS}$  e  $M_{tS}$  i momenti limiti in semplice flessione ed in semplice torsione.

Consideriamo una distribuzione *staticamente ammissibile* di tensioni normale  $\sigma$  e tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  tali che la tensione normale sia una

frazione di  $\sigma_S$ , cioè  $\sigma = p\sigma_S$  (con  $p < 1$ ) ed il modulo della tensione tangenziale risultante sia una frazione di  $\sigma_S$ , cioè  $\tau = q\sigma_S/a$  (con  $q < 1$ ). In termini di caratteristiche della sollecitazione, avremo:

$$M_f = p M_{fS}, \quad M_t = q M_{tS}. \quad [106. 18]$$

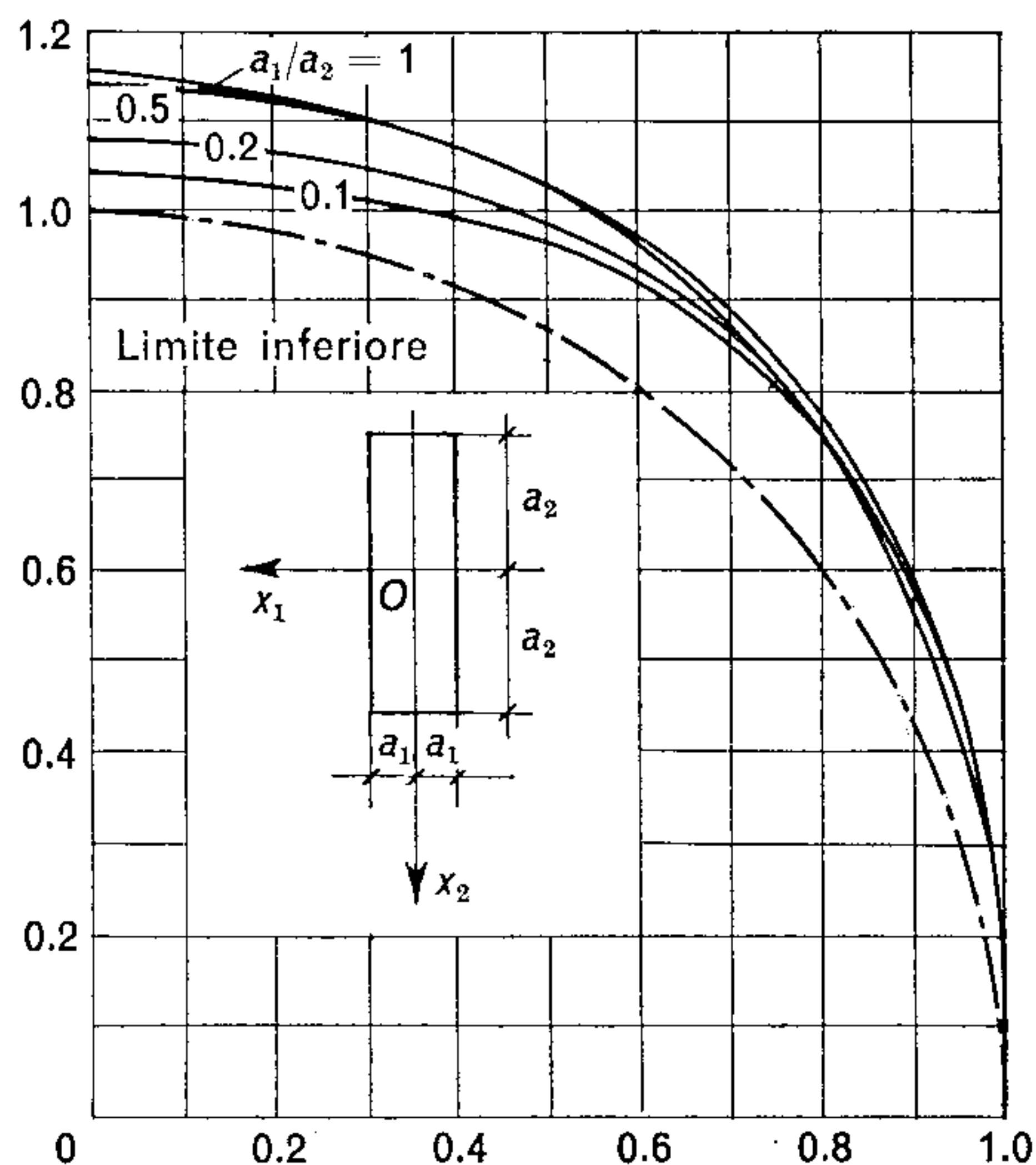


Fig. 111.

Poichè il criterio di snervamento non deve essere violato in nessun punto, la migliore approssimazione al limite inferiore si otterrà ponendo nella [106. 2] il segno di uguale:

$$p^2 + q^2 = 1, \quad [106. 19]$$

cioè quando, in termini di caratteristiche, tale limite è la circonferenza:

$$\left(\frac{M_f}{M_{fS}}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_{tS}}\right)^2 = 1. \quad [106. 20]$$

Le [106. 17] descrivono in funzione del parametro  $\lambda$  il limite superiore e le [106. 20] il limite inferiore della curva di interazione effettiva.

Poichè interessa in sostanza una soluzione approssimata, il limite superiore della curva di interazione può essere determinato con approssimazione sufficiente assumendo la funzione di tensione non necessariamente uguale all'espressione rigorosa, che verifica il problema al contorno per la sezione considerata.

Ad esempio, nel caso di una sezione rettangolare di lati  $a_1$ ,  $a_2$ , scelta la:

$$\Psi(x_1, x_2) = c(x_1^2 + x_2^2), \quad [106.21]$$

si possono calcolare gli integrali [106.17] e tracciare la curva stessa.

Tralasciando lo sviluppo dei calcoli<sup>1</sup>, nella fig. 111 sono stati riportati i limiti superiori [106.17] della curva di interazione per diversi valori del rapporto  $a_1/a_2$  ed il limite inferiore [106.20].

### 107. Soluzioni mediante procedimenti variazionali.

Lo stato di tensione-deformazione dipendente dalla risoluzione del problema al contorno nella forma [78.14] o nella forma alternativa [79.9] può essere determinato attraverso l'impiego dei cosiddetti metodi diretti del calcolo delle variazioni. Gli aspetti variazionali del problema per un generico solido elastico furono discussi nel § 36, mentre i principi di estremo vennero dimostrati nel § 39 nel caso di spostamenti infinitesimi e legame lineare tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione.

Le considerazioni generali esposte, ed in particolare i fondamenti del metodo di calcolo basato sulla [39.10], saranno ora applicate ad un caso speciale, la sollecitazione di torsione, allo scopo di chiarire la tecnica e la portata dei procedimenti variazionali. L'aspetto particolarmente semplice della condizione al contorno in tale problema permette un'esposizione efficace da un punto di vista metodologico.

La costruzione effettiva del funzionale  $J[\varepsilon_{ij}^*, u_j^*]$ , espresso dalla [39.1] in termini delle funzioni congruenti  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_j^*$ , e del funzionale  $K[\sigma_{ij}^0, f_{ij}^0]$ , espresso dalla [39.2] in termini delle funzioni equilibrate  $\sigma_{ij}^0$ ,  $f_{ij}^0$ , si ottiene partendo dall'espressione del potenziale totale, nei suoi due termini fondamentali: l'energia potenziale elastica ed il lavoro delle forze esterne.

Per quanto riguarda la prima, si ha per l'intero volume del cilindro di Saint-Venant sollecitato da un momento torcente:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (2\tau_{31}\varepsilon_{31} + 2\tau_{32}\varepsilon_{32}) dV = \frac{l}{2\mu} \int_A (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2) dA, \quad [107.1]$$

o anche, in termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  in base alle [100.7]:

$$U = \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A (\Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2) dA. \quad [107.2]$$

<sup>1</sup> F. A. GAYDON, H. NUTTAL, *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, 17-26 (1957).



Per quanto riguarda invece il lavoro esterno, esso comprenderà soltanto le forze superficiali  $f_1, f_2$  applicate alle basi del cilindro, essendo scarica per ipotesi la sua superficie laterale. D'altra parte, in corrispondenza delle basi queste forze superficiali risultano incognite perchè uguali proprio alle tensioni che vogliamo determinare, cioè:

$$\tau_{31} = \mp f_1, \quad \tau_{32} = \mp f_2, \quad [107. 3]$$

dove il segno negativo vale per la base  $A_0 (x_3 = 0)$ , ed il segno positivo vale per la base  $A_l (x_3 = l)$ .

Sulle basi sono però noti, a meno della torsione costante  $\kappa_t$ , gli spostamenti relativi nel piano  $(x_1, x_2)$ :

$$\Delta u_1 = u_1(l) - u_1(0), \quad \Delta u_2 = u_2(l) - u_2(0), \quad [107. 4]$$

tra un elemento superficiale della base  $A_l$  ed il corrispondente elemento superficiale della base  $A_0$ , situati sulla medesima parallela all'asse  $x_3$ .

Con riguardo alle prime due [100. 17] detti spostamenti hanno le espressioni:

$$\Delta \bar{u}_1 = -\kappa_t l x_2, \quad \Delta \bar{u}_2 = \kappa_t l x_1, \quad [107. 5]$$

dove la sopralineatura indica un valore prescritto.

Il lavoro compiuto dalle forze superficiali  $f_1, f_2$  sulle basi, dove sono assegnati gli spostamenti, è quindi:

$$L_u = \int_{A_u} (f_1 \Delta \bar{u}_1 + f_2 \Delta \bar{u}_2) dA = \kappa_t l \int_{A_u} (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dA, \quad [107. 6]$$

o anche ricordando la definizione [100. 9] del momento torcente  $M_t$ :

$$L_u = \kappa_t l M_t = 2 \mu l \kappa_t^2 \int_A \Psi(x_1, x_2) dA. \quad [107. 7]$$

Possiamo ora costruire il funzionale  $J[\Psi^*]$  definito in una classe di funzioni  $\Psi^*(x_1, x_2)$  che verificano l'equazione di congruenza nei punti interni di  $A$ :

$$\nabla \Psi(x_1, x_2) + 2 = 0, \quad [107. 8]$$

ma non necessariamente la condizione di equilibrio ai limiti sul contorno  $C$  di  $A$ :

$$\Psi(s) = 0. \quad [107. 9]$$

È necessario osservare che la condizione differenziale per l'equilibrio in  $A$  è implicitamente verificata poichè contenuta nella [107. 8]: ove si ricordi la deduzione di tale equazione appare infatti chiaro che essa rappresenta sia la congruenza sia l'equilibrio in  $A$ .

Il funzionale  $J[\Psi^*]$  comprenderà così esclusivamente un termine del tipo [107. 2] in quanto, come abbiamo già avvertito, il termine relativo al lavoro  $L_f$  compiuto dalle forze esterne sulla porzione  $A_f$  della frontiera dove esse sono prescritte è nullo, perchè tali forze sono prescritte, con valore nullo, sulla superficie laterale.

Otteniamo così:

$$J[\Psi^*] = \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A (\Psi_{,1}^{*2} + \Psi_{,2}^{*2}) dA, \quad [107. 10]$$

e per questo funzionale sussiste l'equazione variazionale:

$$\delta J \equiv \mu l \kappa_t^2 \int_A (\Psi_{,1}^* \delta \Psi_{,1}^* + \Psi_{,2}^* \delta \Psi_{,2}^*) dA = 0, \quad [107. 11]$$

o anche trasformando con la formula di Gauss:

$$\delta J \equiv \mu l \kappa_t^2 \left[ \int_C \Psi^* \delta \left( \frac{d\Psi^*}{dn} \right) ds - \int_C \Psi^* \delta (\nabla \Psi^*) dA \right] = 0. \quad [107. 12]$$

Nella classe delle funzioni ammissibili  $\Psi^*$  per il problema variazionale [107. 12] deve essere verificata l'equazione di congruenza [107. 8] e quindi deve risultare identicamente  $\delta(\nabla \Psi^*) = 0$ , per cui la condizione naturale del problema risulta semplicemente la:

$$\int_C \Psi^* \delta \left( \frac{d\Psi^*}{dn} \right) ds = 0. \quad [107. 13]$$

Ne discende che per una variazione arbitraria della tensione  $\delta \tau^* = \mu \kappa_t \delta(d\Psi^*/dn)$  sul contorno, come appare dalla seconda [100. 11], deve essere  $\Psi^*(s) = 0$  sul contorno stesso, e quindi soddisfatta la condizione di equilibrio [107. 9].

In modo analogo si costruisce il funzionale reciproco  $K[\Psi^0]$  definito nella classe delle funzioni  $\Psi^0(x_1, x_2)$  che verificano la condizione di equilibrio [107. 9], ma non necessariamente la equazione di congruenza [107. 8]. Tale funzionale dovrà comprendere due termini: il lavoro di deformazione complementare  $U_c$ , espresso ancora dalla [107. 2], ed il lavoro  $L_u$  compiuto dalle forze superficiali sulla porzione di frontiera, dove sono assegnati gli spostamenti, cioè sulle basi, espresso dalla [107. 7]:

$$K[\Psi^0] = - \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A (\Psi_{,1}^{02} + \Psi_{,2}^{02}) dA + 2 \mu l \kappa_t^2 \int_A \Psi^0 dA. \quad [107. 14]$$

La condizione di stazionarietà per  $K(\Psi^0)$  conduce all'equazione variazionale:

$$\delta K \equiv -\mu l \kappa_t^2 \int_A (\Psi_{,1}^0 \delta \Psi_{,1}^0 + \Psi_{,2}^0 \delta \Psi_{,2}^0 - 2 \delta \Psi^0) dA = 0, \quad [107.15]$$

o anche, raccogliendo in modo opportuno e trasformando con la formula di Gauss:

$$\delta K \equiv \mu l \kappa_t^2 \left[ \int_A (\nabla \Psi^0 + 2) \delta \Psi^0 dA - \int_C \frac{d\Psi^0}{dn} \delta \Psi^0 ds \right] = 0. \quad [107.16]$$

Poichè le funzioni ammissibili  $\Psi^0$  verificano la condizione di equilibrio al contorno [107.9], cioè  $\Psi^0(s) = 0$ , l'equazione variazionale [107.16] si riduce in definitiva alla:

$$\int_A (\nabla \Psi^0 + 2) \delta \Psi^0 dA = 0, \quad [107.17]$$

che rappresenta evidentemente una condizione più debole della [107.8], cioè della necessità per la soluzione effettiva di verificare anche tale equazione di congruenza.

Le condizioni di stazionarietà [107.13] e [107.17] rispettivamente per i due funzionali  $J[\Psi^*]$  e  $K[\Psi^0]$  corrispondono ad estremi effettivi. Infatti la differenza:

$$J - K = \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A (\Psi_{,1}^{*2} + \Psi_{,2}^{*2} + \Psi_{,1}^{02} + \Psi_{,2}^{02} - 4\Psi^0) dA \quad [107.18]$$

può essere posta nella forma equivalente:

$$J - K = \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A [(\Psi_{,1}^* - \Psi_{,1}^0)^2 + (\Psi_{,2}^* - \Psi_{,2}^0)^2] dA + \quad [107.19]$$

$$+ \mu l \kappa_t^2 \int_A (\Psi_{,1}^* \Psi_{,1}^0 + \Psi_{,2}^* \Psi_{,2}^0 - 2\Psi^0) dA.$$

Osservando allora che il secondo integrale può essere trasformato in:

$$\int_C \Psi^0 \frac{d\Psi^*}{dn} ds - \int_A \Psi^0 (\nabla \Psi^* + 2) dA, \quad [107.20]$$

esso risulta evidentemente nullo per la scelta delle funzioni ammissibili  $\Psi^*$  e  $\Psi^0$  dei due problemi variazionali nelle classi di funzioni che verificano rispettivamente l'equazione differenziale  $\nabla \Psi^* + 2 = 0$  in  $A$ , e  $\Psi^0 = 0$  su  $C$ .



La differenza tra i due funzionali si riduce così al primo integrale della [107. 19], cioè:

$$J - K = \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \int_A [(\Psi_{,1}^* - \Psi_{,1}^0)^2 + (\Psi_{,2}^* - \Psi_{,2}^0)^2] dA, \quad [107. 21]$$

ed è perciò una quantità essenzialmente non negativa.

Dalla condizione  $J[\Psi^*] \geq K[\Psi^0]$  e dall'unicità della soluzione per il problema al contorno [107. 9] discende l'esistenza di un estremo contemporaneamente per i due problemi variazionali:

$$\min J[\Psi^*] = \max K[\Psi^0]. \quad [107. 22]$$

I due funzionali devono allora coincidere quando calcolati in corrispondenza della soluzione effettiva, che soddisfa ad un tempo alla condizione al contorno  $\Psi(s) = 0$ , cioè per  $\Psi^* \equiv \Psi$ , ed all'equazione differenziale  $\nabla \Psi + 2 = 0$ , cioè per  $\Psi^0 \equiv \Psi$ :

$$J \equiv \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \left[ \int_C \Psi \frac{d\Psi}{dn} ds - \int_A \Psi \nabla \Psi dA \right] = \mu l \kappa_t^2 \int_A \Psi dA, \quad [107. 23]$$

$$K \equiv \frac{\mu l \kappa_t^2}{2} \left[ \int_C \Psi \frac{d\Psi}{dn} ds - \int_A \Psi (\nabla \Psi + 4) dA \right] = \mu l \kappa_t^2 \int_A \Psi dA.$$

Il valore comune dei funzionali risulta proporzionale alla rigidezza torsionale [100. 10], per cui le maggiorazioni:

$$J[\Psi^*] \geq \mu l \kappa_t^2 \int_A \Psi dA \geq K[\Psi^0] \quad [107. 24]$$

offrono la possibilità di ottenere approssimazioni per eccesso e per difetto della rigidezza torsionale stessa.

a) *Problema variazionale diretto.*

Nel caso del problema variazionale per il funzionale  $J[\Psi^*]$  un sistema completo di funzioni ammissibili che verificano l'equazione differenziale [107. 8], cioè la  $\nabla \Psi^* + 2 = 0$ , sarà rappresentato dalla classe delle funzioni armoniche  $\psi_k^*(x_1, x_2)$ , soluzioni della stessa equazione resa omogenea,  $\nabla \psi_k^* = 0$ , e dall'integrale particolare  $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  dell'equazione completa.

Consideriamo allora, in luogo della  $\Psi^*(x_1, x_2)$ , la successione parziale:

$$\Psi_m^* = \sum_{k=1}^m c_k \psi_k^*(x_1, x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad [107. 25]$$

dove le costanti  $c_k$  sono arbitrarie. Tale successione  $\Psi_m^*$  verifica ovviamente l'equazione differenziale, e dipende unicamente dalle costanti  $c_k$ , essendo ormai specificate le  $\psi_k^*$ . La sua variazione prima risulta:

$$\delta \Psi_m^* \equiv \frac{\partial \Psi_m^*}{\partial c_i} \delta c_i = \psi_i^* (x_1, x_2), \quad [107. 26]$$

ed il problema variazionale [104. 13] per il funzionale  $J[\Psi^*]$  viene sostituito con un problema di estremo ordinario per la funzione  $J_m(c_i)$  delle  $m$  variabili  $c_i$ , calcolata in corrispondenza della soluzione approssimata  $\Psi_m^*$ :

$$\frac{\partial J_m}{\partial c_i} \equiv \int_C \left[ \sum_{k=1}^m c_k \psi_k^* - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] \frac{d\psi_i^*}{dn} ds = 0. \quad [107. 27]$$

Tale sistema lineare, di  $m$  equazioni nelle  $m$  incognite  $c_i$  serve a determinare le costanti, ed ammette un'unica soluzione purchè le funzioni  $\psi_k^*$  siano linearmente indipendenti e la funzione  $\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$  sia diversa da zero sul contorno  $C$ .

Infatti, posto:

$$\alpha_{ik} = \int_C \psi_k^* \frac{d\psi_i^*}{dn} ds, \quad \beta_i = \frac{1}{2} \int_C (x_1^2 + x_2^2) \frac{d\psi_i^*}{dn} ds, \quad [107. 28]$$

il sistema [104. 27] assume la forma compatta:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} c_k = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad [107. 29]$$

dove, per la formula di reciprocità di Green [42. 3] risulta  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ .

Esso avrà una soluzione unica purchè  $\text{Det } \alpha_{ik} \neq 0$ . Supponiamo invece che il determinante del sistema [107. 29] sia uguale a zero, e quindi che il sistema omogeneo, per  $\beta_i = 0$ :

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} c_k = 0 \quad [107. 30]$$

ammetta soluzioni non tutte identicamente nulle.

Consideriamo allora la successione parziale:

$$\bar{\Psi}_m = \sum_{k=1}^m \bar{c}_k \psi_k^* \quad [107. 31]$$

ed escludiamo il caso  $\bar{\Psi}_m = \text{cost.}$ , corrispondente alla soluzione identicamente nulla  $c_k = 0$ . Sostituendo la [107. 31] nella [107. 30] otteniamo:

$$\int_C \bar{\Psi}_m \frac{d\psi_i^*}{dn} ds = 0. \quad [107. 32]$$

Moltiplicando ciascuna equazione [107. 32] per  $\bar{c}_i$  e sommando da 1 a  $m$ , abbiamo anche, dalla posizione [107. 31]:

$$\int_C \bar{\Psi}_m \frac{d\bar{\Psi}_m}{dn} ds = 0. \quad [107. 33]$$

Ma la funzione  $\bar{\Psi}_m$  è armonica, e quindi dalla formula di reciprocità di Green [42. 3] discende:

$$\int_C \bar{\Psi}_m \frac{d\bar{\Psi}_m}{dn} ds = \int_A (\bar{\Psi}_{m,1}^2 + \bar{\Psi}_{m,2}^2) dA, \quad [107. 34]$$

dove il secondo membro, quantità essenzialmente non negativa, potrà annullarsi solo per  $\bar{\Psi}_m = \text{cost.}$ , caso che fu escluso esplicitamente. L'ipotesi:  $\text{Det } \alpha_{ik} = 0$  è manifestamente falsa ed il sistema [107. 28] possiede perciò un'unica soluzione.

A titolo di esempio illustriamo la tecnica del procedimento nel caso di una sezione quadrata di semilato  $a$ .

Poichè la regione considerata è semplicemente connessa, un sistema completo di funzioni ammissibili  $\psi_k^*$  può essere ottenuto come parte reale e coefficiente dell'immaginario d'un polinomio armonico  $(x_1 + ix_2)^m$ . Arrestandosi a polinomi del quarto grado, due funzioni che soddisfano alle richieste condizioni di simmetria, per  $m = 0$  e  $m = 4$ , sono rispettivamente:

$$\psi_0^* = 1, \quad \psi_2^* = x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4, \quad [107. 35]$$

da cui la successione parziale [104. 25] risulta:

$$\Psi_2^* = c_0 + c_2(x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad [107. 36]$$

Le costanti  $c_0, c_2$  vengono determinate dalle equazioni [107. 27], di cui la prima è identicamente soddisfatta per  $\psi_0^* = 1$ , mentre la seconda equazione è:

$$\int_C \left[ c_0 + c_2\psi_2^* - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right] \frac{d\psi_2^*}{dn} ds = 0, \quad [107. 37]$$

dove le derivate rispetto alla normale  $n$  valgono:

$$\left( \frac{d\psi_2^*}{dn} \right)_{x_1 = \pm a} = \pm (4a^3 - 12ax_2^2), \quad \text{per } n \equiv \pm x_1, \quad [107. 38]$$

$$\left( \frac{d\psi_2^*}{dn} \right)_{x_2 = \pm a} = \pm (4a^3 - 12ax_1^2), \quad \text{per } n \equiv \pm x_2.$$



Un'altra equazione significativa, che sostituisca l'equazione per  $m = 0$ , può essere ottenuta richiedendo, ad esempio, che l'errore medio si annulli per  $x_1 = \pm a$ ,  $x_2 = \pm a$ , cioè:

$$\int_C \Psi_2^* ds \equiv \int_C [c_0 + c_2 (x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)] ds = 0, \quad [107.39]$$

ed integrando lungo il contorno:

$$15c_0 - 12a^4 c_2 - 10a^2 = 0. \quad [107.40]$$

Svolgendo i calcoli otteniamo i valori delle due costanti:

$$c_0 = \frac{53a^2}{90}, \quad c_2 = -\frac{7}{72a^2}, \quad [107.41]$$

in modo che la soluzione approssimata [107.36] diviene:

$$\Psi_2^* = \frac{53}{90} a^2 - \frac{7}{72a^2} (x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2). \quad [107.42]$$

La rigidezza torsionale corrispondente è quindi:

$$\mu K_t^* \equiv 2\mu \int_A \Psi_2^* dA = 2,2512 \mu a^4. \quad [107.43]$$

#### b) *Problema variazionale reciproco.*

Nel caso del problema variazionale per il funzionale  $K[\Psi^0]$ , scelto un sistema completo di funzioni ammissibili  $\psi_k^0$  che verificano l'equazione al contorno [107.9], consideriamo, in luogo della  $\Psi^0(x_1, x_2)$  la successione parziale:

$$\Psi_m^0 = \sum_{k=1}^m c_k \psi_k^0. \quad [107.44]$$

La  $\Psi_m^0$  verifica evidentemente la condizione al contorno  $\Psi_m^0(s) = 0$  e dipende unicamente dalle  $m$  costanti arbitrarie  $c_k$ , per cui la sua variazione prima risulta:

$$\delta \Psi_m^0 \equiv \frac{\partial \Psi_m^0}{\partial c_i} \delta c_i = \psi_i^0(x_1, x_2). \quad [107.45]$$

Il problema variazionale [107.17] per il funzionale  $K[\Psi^0]$  viene sostituito con il problema di estremo ordinario per la funzione  $K_m(c_i)$ ,

calcolata in corrispondenza della soluzione approssimata  $\Psi_m^0$ :

$$\frac{\partial K_m}{\partial c_i} \equiv \int_A \left( \sum_{k=1}^m c_k \nabla \psi_k^0 + 2 \right) \psi_i^0 dA = 0 \quad [107.46]$$

e la risoluzione di tale sistema lineare di  $m$  equazioni nelle  $m$  incognite  $c_i$ , permette di determinare le costanti arbitrarie.

Riferendoci allo stesso esempio trattato in  $a)$ , cioè ad una sezione quadrata di semilato  $a$ , assumiamo in prima approssimazione:

$$\Psi_1^0 \equiv c_1 \psi_1 = c_1 (x_1^2 - a^2) (x_2^2 - a^2), \quad [107.47]$$

cioè l'equazione del contorno a meno di una costante arbitraria  $c_1$ .

Il sistema [107.46] si riduce all'unica equazione:

$$\int_A [2c_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2a^2) + 2] (x_1^2 - a^2) (x_2^2 - a^2) dA = 0, \quad [107.48]$$

da cui effettuando l'integrazione otteniamo il valore della costante  $c_1 = 5a^2/8$ . La rigidezza torsionale diviene quindi:

$$\mu K_t^0 \equiv 2\mu \int_A \Psi_1^0 dA = 2,2464 \mu a^4. \quad [107.49]$$

Si conclude dunque che la rigidezza torsionale effettiva risulta compresa tra il valore [107.43] ed il valore [107.49], cioè:

$$2,2512 \mu a^4 \geq \mu K_t \geq 2,2464 \mu a^4. \quad [107.50]$$

In effetti il suo valore esatto, che può essere calcolato con il metodo del § 101,  $e)$ , è  $\mu K_t = 2,2496 \mu a^4$ .

### 108. Soluzioni mediante procedimenti alle differenze.

I metodi variazionali considerati nel precedente § 107 possono dare soluzioni approssimate in numerosi problemi e, talvolta, fornire anche le necessarie limitazioni dell'errore commesso: presentano tuttavia alcune gravi difficoltà che ne riducono l'impiego generale. Come abbiamo visto nella loro applicazione al caso di un cilindro soggetto a momento torcente, il successo del procedimento è affidato alla scelta fortunata delle funzioni ammissibili: tale scelta è intimamente legata alla forma della sezione ed alla struttura delle condizioni al contorno. Quando tali condizioni non siano esprimibili con relazioni analitiche particolarmente semplici, può risultare estremamente difficile ottenere un sistema completo di funzioni coordinate, ed anche quando ciò sia possibile in linea teorica, i calcoli necessari possono riuscire proibitivi.

In siffatte condizioni conviene rivolgersi a procedimenti grafici o numerici, capaci di fornire soluzioni sufficientemente approssimate del problema considerato. Il metodo numerico più noto ed efficace è quello delle *differenze finite*, dove l'equazione differenziale viene sostituita da un'equazione alle differenze e la regione continua  $A$  da un reticolato discreto  $A_{hk}$  di punti.

Tale sostituzione permette di ricondurre il problema differenziale al contorno ad un sistema di equazioni algebriche in un numero anche notevole di incognite. La risoluzione effettiva del sistema così ottenuto può allora essere affidata a particolari tecniche o ad elaboratori automatici, i quali, arrivati ormai alla terza generazione, permettono velocità di calcolo in tempo reale impensabili solo alcuni anni fa.

Il procedimento generale delle differenze finite è fondato sul concetto di *differenza prima, seconda, ecc.*, di una funzione  $f(x_1, x_2)$ , definita di un certo campo  $A$ , supposto per semplicità a connessione semplice e limitato da una curva chiusa  $C$  che ne costituisce il contorno.

Le definizioni di derivata parziale della funzione  $f(x_1, x_2)$  rispetto alle variabili indipendenti  $x_1, x_2$  affermano l'esistenza dei limiti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} [f(x_1, x_2 + k) - f(x_1, x_2)],$$
[108. 1]

e, per valori sufficientemente piccoli dell'incremento  $h$ , tali espressioni sono approssimativamente uguali ai corrispondenti rapporti incrementali.

La sostituzione della derivata con il rapporto incrementale conduce a tre definizioni diverse della *differenza prima*.

Infatti, con riguardo all'orientamento dell'asse  $x_1$  di fig. 112 possiamo riferirci al punto  $P_{i-1,j}$  a sinistra del punto considerato  $P_{ij}$ , al punto  $P_{i+1,j}$  a destra di  $P_{ij}$ , ai due punti  $P_{i-1,j}$  e  $P_{i+1,j}$ , ed ottenere le *definizioni di differenza regressiva, progressiva e centrale*:

$$D_1^r f_{ij} = \frac{1}{h} [f(x_1, x_2) - f(x_1 - h, x_2)] = \frac{1}{h} (f_{ij} - f_{i-1,j}),$$

$$D_1^p f_{ij} = \frac{1}{h} [f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)] = \frac{1}{h} (f_{i+1,j} - f_{ij}),$$
[108. 2]

$$D_1 f_{ij} = \frac{1}{2h} [f(x_1 + h, x_2) - f(x_1 - h, x_2)] = \frac{1}{2h} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}),$$



avendo scritto semplicemente  $f_{ij}$  per il valore assunto dalla funzione  $f(x_1, x_2)$  nel punto generico  $P_{ij}$ . In modo analogo vengono definite le tre differenze prime  $D_2^r$ ,  $D_2^p$ ,  $D_2$  rispetto alla variabile indipendente  $x_2$ .

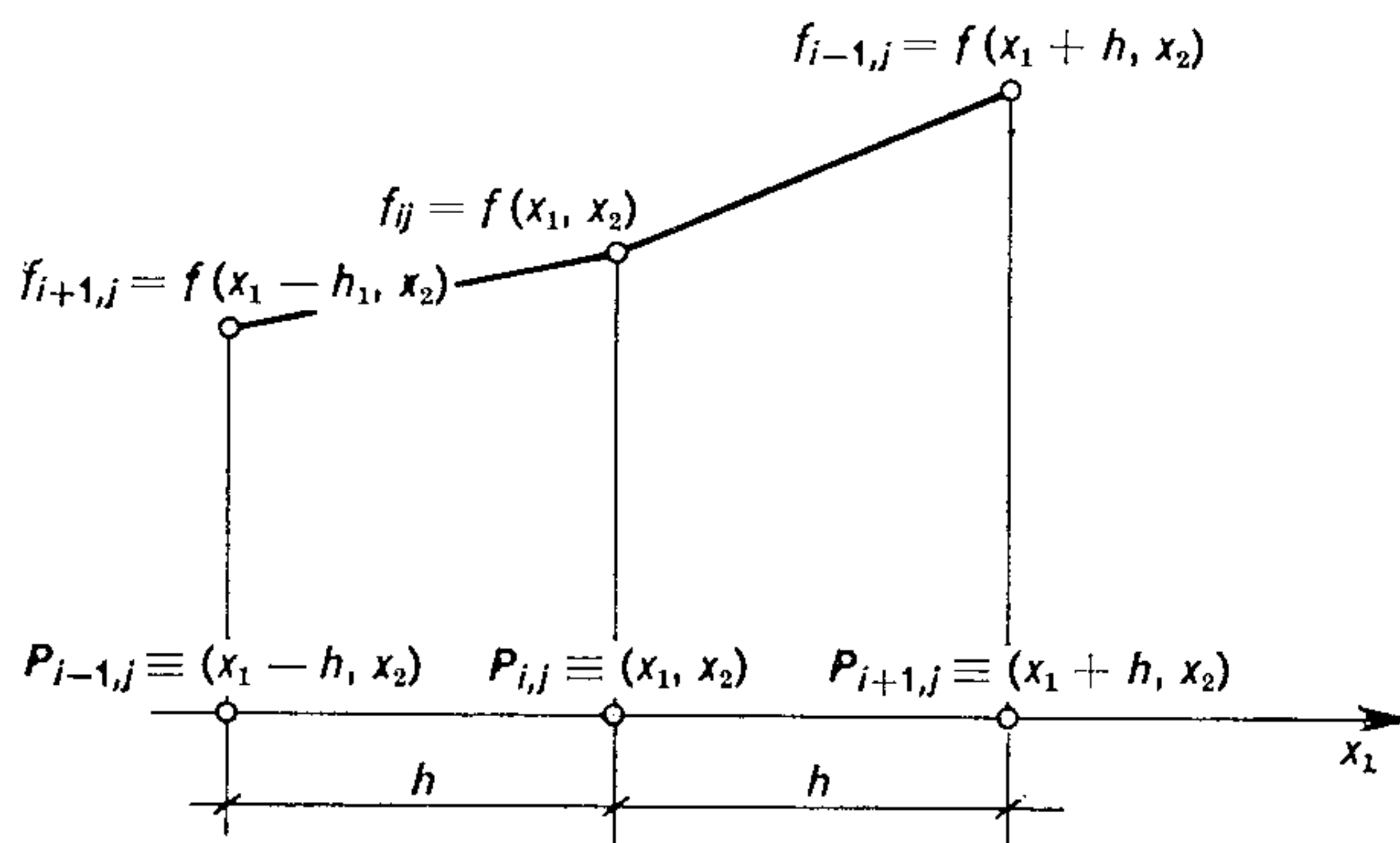


Fig. 112.

Con identico procedimento, dalle definizioni di derivata parziale seconda:

[108. 3]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} - \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1 - h, x_2)}{h} \right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[ \frac{f(x_1, x_2 + k) - f(x_1, x_2)}{k} - \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 - k)}{k} \right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{1}{2k} \left[ \frac{f(x_1 + h, x_2 + k) - f(x_1 - h, x_2 + k)}{2h} - \frac{f(x_1 + h, x_2 - k) - f(x_1 - h, x_2 - k)}{2h} \right],$$

si ottengono le differenze seconde:

$$D_{11}f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}),$$

$$D_{22}f_{ij} = \frac{1}{k^2} (f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}), \quad [108. 4]$$

$$D_{12}f_{ij} = \frac{1}{4hk} (f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1}),$$

dove  $h$ ,  $k$  indicano le due ampiezze della maglia del reticolo rettangolare indicato in fig. 113.

In generale, otteniamo le differenze di ordine superiore sostituendo la derivata parziale nel punto  $P_{ij}$ :

$$\left( \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} \right)_{ij} \quad \text{con} \quad \frac{D_1^m D_2^n f_{i-r, j-s}}{h^m k^n}, \quad [108. 5]$$

esistendo una certa libertà di scelta per  $r, s$ ; di regola  $r$ , e corrispondentemente  $s$ , varrà  $m/2$  se  $m$  è pari o  $(m-1)/2$  se  $m$  è dispari.

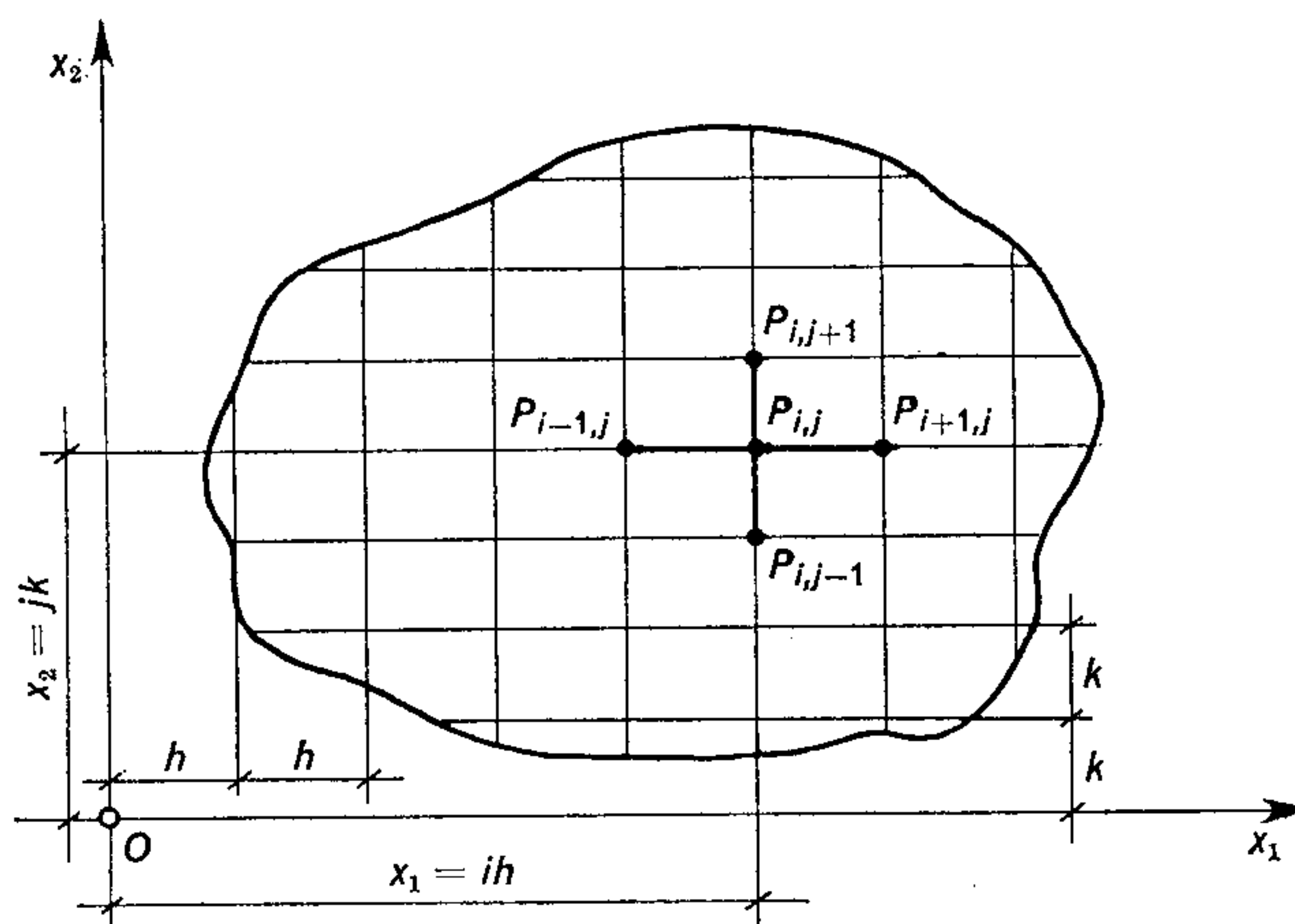


Fig. 113.

a) *Applicazione all'equazione armonica piana.*

Tenendo presenti le prime due [108. 4] l'espressione alle differenze dell'operatore di Laplace diviene:

$$\nabla_{hk} f_{ij} = \frac{1}{h^2} [f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 2(1 + \alpha^2)f_{ij} + \alpha^2(f_{i,j-1} + f_{i,j+1})], \quad [108. 6]$$

dove  $\alpha = h/k$  rappresenta il rapporto tra i lati della maglia rettangolare. Qualora le ampiezze  $h, k$  vengano assunte uguali, otteniamo per  $\alpha = 1$  la forma introdotta per la prima volta da RUNGE<sup>1</sup>:

$$\nabla_{hh} f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 4f_{ij} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}). \quad [108. 7]$$

Nel linguaggio delle differenze finite l'equazione di Laplace  $\nabla f = 0$  impone quindi al valore della funzione  $f(x_1, x_2)$ , in ogni punto  $P_{ij}$  del campo reticolare a maglia quadrata  $A_{hh}$ , di risultare la media dei valori della funzione stessa nei quattro punti immediatamente vicini.

<sup>1</sup> C. RUNGE, *Zeits. Math. Phys.*, **56**, 225 (1908).

Naturalmente, nel considerare punti diversi dagli incroci della maglia, come avviene ad esempio per i punti del contorno indicati con un circoletto pieno nella fig. 113, le differenze devono essere valutate con riguardo alle distanze effettive  $h, k$  di tali punti da quello considerato. Ciò comporta una notevole complicazione che può essere in parte evitata riportando i valori al contorno in punti di incrocio della maglia con procedimenti di interpolazione lineare o parabolica.

Nelle applicazioni conviene riferirci a grandezze adimensionali  $X_1, X_2$  definite dalla trasformazione:

$$x_1 = X_1 a, \quad x_2 = X_2 a, \quad [108. 8]$$

dove  $a$  indica una dimensione lineare caratteristica della sezione. Abbiamo quindi:

$$\nabla f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \right), \quad [108. 9]$$

ed introdotta la funzione  $F(X_1, X_2)$  definita dalla:

$$F(X_1, X_2) = \frac{1}{a^2} f(x_1, x_2), \quad [108. 10]$$

l'operatore di Laplace alle differenze assume la forma:

$$\nabla_{hh} f_{ij} = a^2 \nabla_{hh} F_{ij} = \frac{a^2}{h^2} (F_{i-1,j} + F_{i+1,j} - 4F_{ij} + F_{i,j-1} + F_{i,j+1}). \quad [108.11]$$

Per mostrare la tecnica del procedimento consideriamo il semplice esempio di una sezione quadrata di lato  $a$  sollecitata a torsione, cioè, in termini della funzione di tensione  $\Psi(x_1, x_2)$  definita dalla [100. 4], consideriamo il problema al contorno:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(x_1, x_2) + 2 &= 0 && \text{in } A, \\ \Psi(s) &= 0 && \text{su } C. \end{aligned} \quad [108. 12]$$

Introdotta una funzione  $F(X_1, X_2)$  tale che:

$$F(X_1, X_2) = \frac{1}{a^2} \Psi(x_1, x_2), \quad [108. 13]$$

il problema alle differenze risulta:

$$F_{i-1,j} + F_{i+1,j} - 4F_{ij} + F_{i,j-1} + F_{i,j+1} = -\frac{2h^2}{a^2} \quad \text{in } A_{hh}, \quad [108. 14]$$

essendo nulli i valori di  $F$  nei punti del contorno.



Con riferimento alla fig. 114 assumiamo per  $A_{hh}$  una maglia quadrata di lato  $h = a/4$ : evidenti considerazioni di simmetria permettono di ridurci a considerare solo un ottavo di sezione, e precisamente il triangolo tratteggiato in fig. 114. I valori incogniti della funzione  $F(X_1, X_2)$  si riducono così ai tre  $F_A, F_B, F_C$  per ognuno dei quali,

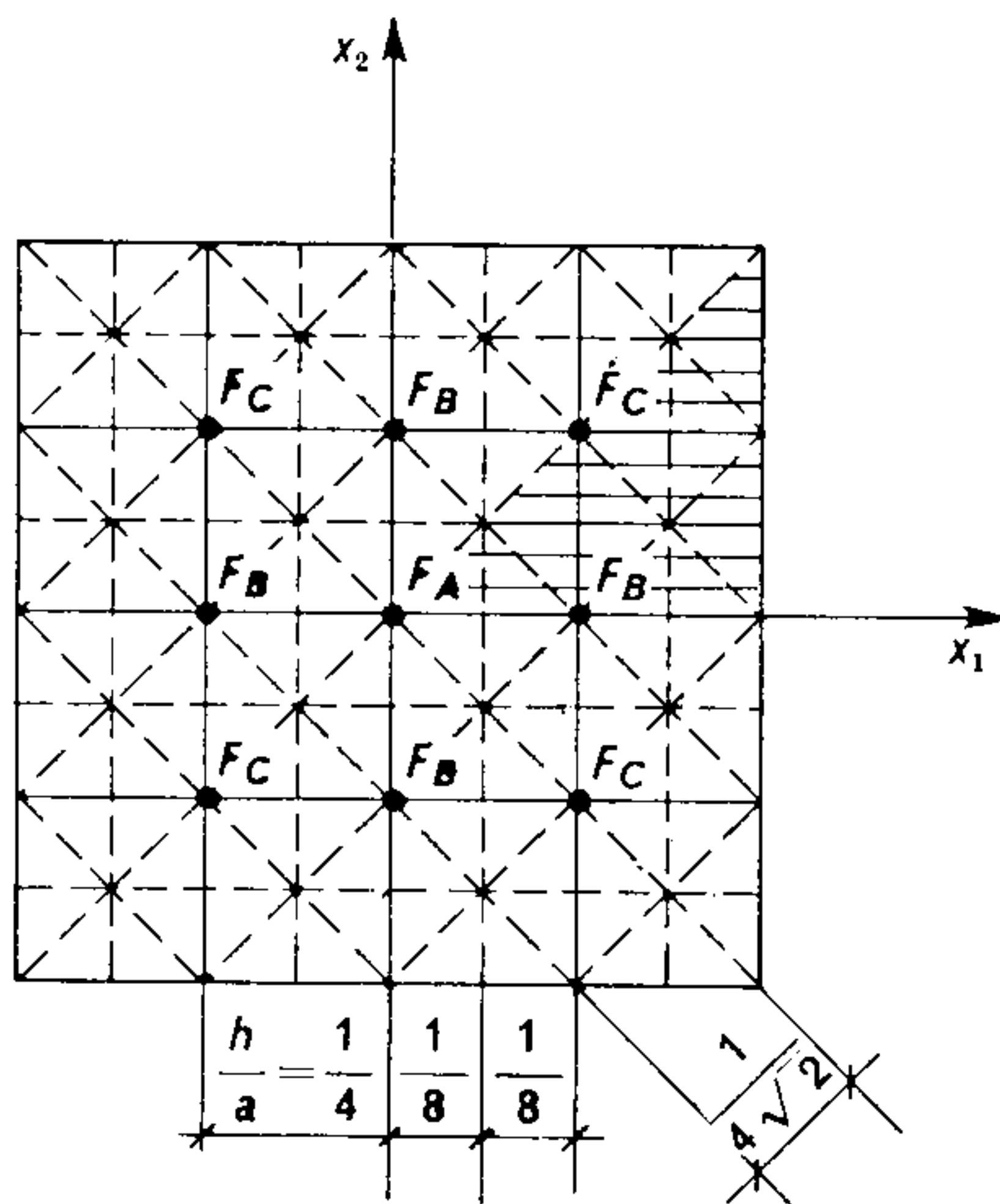


Fig. 114.

assunti successivamente  $A, B, C$  come punto  $P_{ij}$ , possiamo scrivere tre equazioni del tipo [108. 14]:

$$\begin{aligned} 4F_B - 4F_A &= -0,125, \\ 2F_A + F_C - 4F_B &= -0,125, \\ 2F_B - 4F_C &= -0,125, \end{aligned} \quad [108. 15]$$

da cui risolvendo:

$$F_A = 0,1410, \quad F_B = 0,1090, \quad F_C = 0,0855. \quad [108. 16]$$

Una migliore approssimazione si otterrà considerando lo schema diagonale punteggiato della fig. 114 con ampiezza della maglia pari a  $1/\sqrt{2}$  della precedente.

La semplice applicazione della [108.14] permetterà di ricavare i valori della  $F(X_1, X_2)$  nei punti di incrocio dai valori [108.16] già trovati e dai valori prescritti sul contorno ( $F = 0$ ). Infine, ridotta l'ampiezza della maglia a metà di quella iniziale, cioè  $a/8$ , la formula di Runge, applicata a tutti i valori trovati presi nel loro complesso, in generale non sarà più verificata. Calcolati allora

nuovamente i valori [108. 14] nel reticolo di maglia  $a/8$ , si procederà di nuovo come prima in modo iterativo sino ad ottenere scostamenti trascurabili.

Determinati i valori della  $F(X_1, X_2)$  nei punti del reticolo, la sua derivata parziale rispetto a  $X_1$  potrà essere calcolata, ad esempio, dalla formula di interpolazione di Newton:

$$F = F_0 + X_1 D_1 F_0 + X_1 \left( X_1 - \frac{h}{a} \right) \frac{D_{11} F_0}{2! h^2} + \quad [108. 17]$$

$$+ a X_1 \left( X_1 - \frac{h}{a} \right) \left( X_1 - \frac{2h}{a} \right) \frac{D_{111} F_0}{3! h^3} + \dots$$

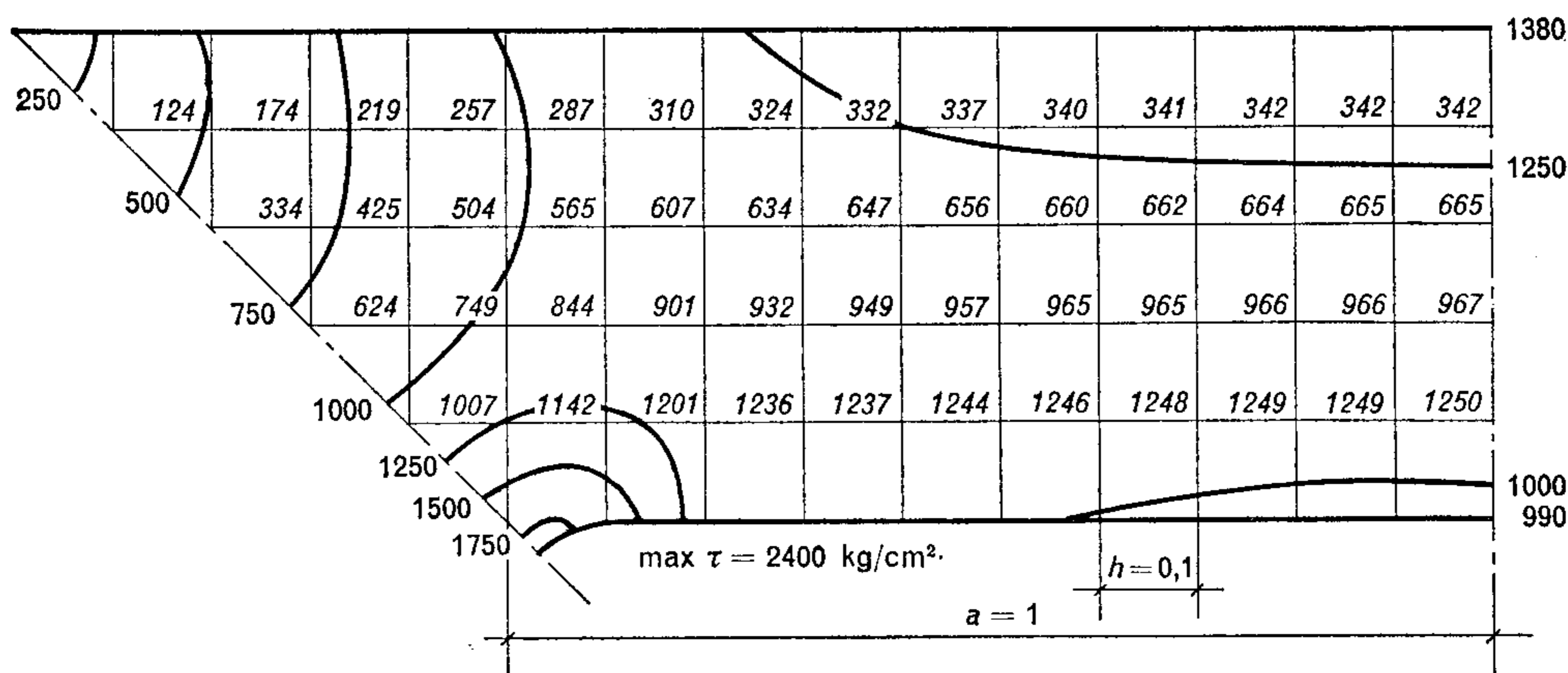


Fig. 115.

che fornisce il valore della funzione  $F$  in un punto generico, sostituendo per  $D_1 F$ ,  $D_{11} F$ ,  $D_{111} F$ , ... le differenze successive rispetto a  $X_1$ . In modo analogo si procede per la derivata della  $F(X_1, X_2)$  rispetto a  $X_2$ .

La validità del procedimento alle differenze è subordinata alla convergenza dei valori così calcolati verso i valori desunti dalla risoluzione dell'equazione differenziale: per equazioni di tipo ellittico come l'equazione di Laplace tale convergenza è assicurata in ogni caso <sup>1</sup>.

b) *Torsione elasto-plastica.*

Per mostrare le possibilità offerte dal metodo delle differenze finite anche in problemi complessi, riportiamo a titolo di esempio, con qualche

<sup>1</sup> R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *Math. Ann.*, **100**, 32-74 (1928).

modifica, l'analisi in fase elasto-plastica condotta da SHAW<sup>1</sup> su una sezione cava delimitata da due quadrati concentrici e soggetta ad un momento torcente. Per evidenti ragioni di simmetria, come già nell'esempio precedente, possiamo ridurci ad esaminare 1/8 della sezione stessa indicato in fig. 113.

Assunta come dimensione lineare caratteristica  $a$  il semilato del quadrato interno, per un'ampiezza della maglia  $h = 0,1a$  è stato svolto preliminarmente il calcolo alle differenze in fase elastica dei valori

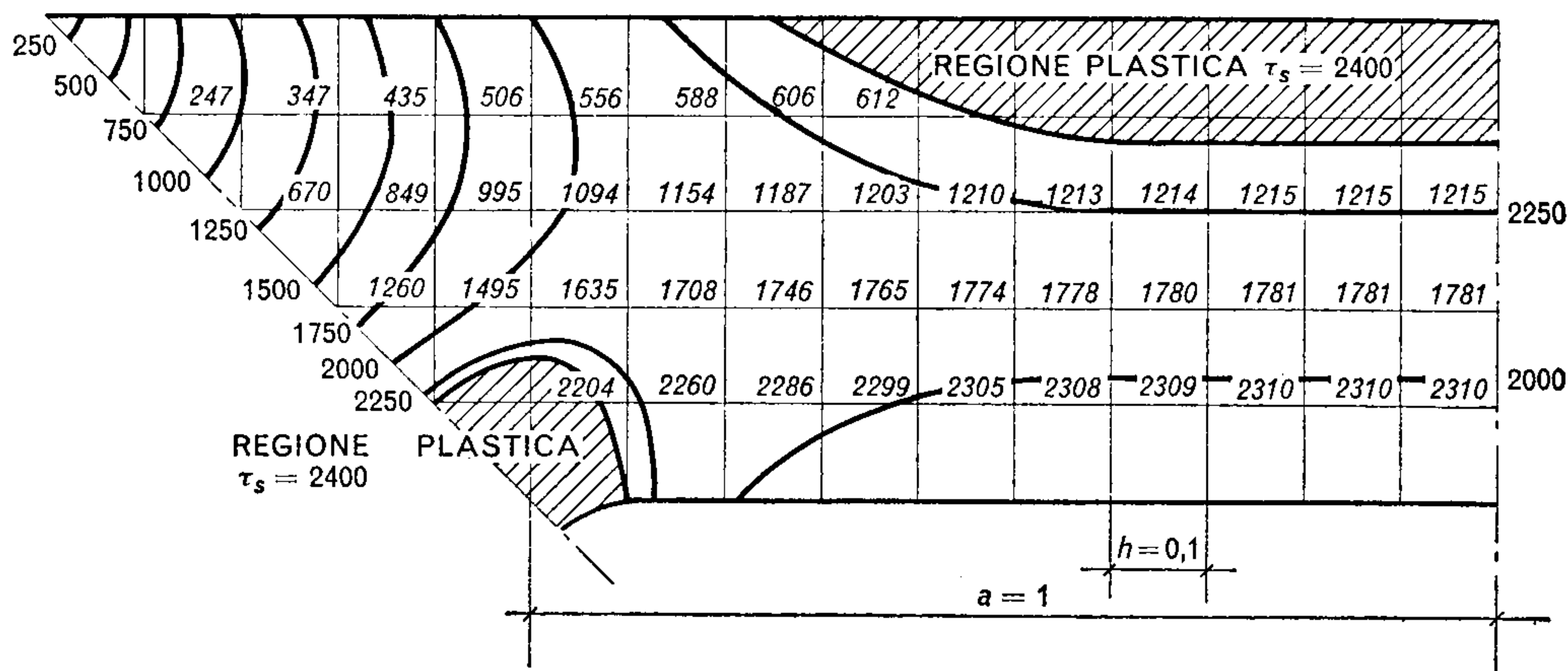


Fig. 116.

della  $F(X_1, X_2)$  proporzionale alla funzione di Prandtl secondo la [108. 13]. Per evitare cifre decimali il secondo membro della [108. 14] è stato moltiplicato per  $10^3$ , per cui anche i valori riportati nella fig. 115 in corrispondenza di ogni punto del reticolo risultano  $10^3 F_{ij}$ .

Data la doppia connessione della sezione si devono specificare i valori della  $F(X_1, X_2)$  sia sul contorno esterno sia sul contorno interno.

Le relazioni [100. 7] scritte in termini di differenze finite permettono di calcolare le tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  e quindi la tensione risultante  $\tau = (\tau_{31} + \tau_{32})^{1/2}$  di cui nella fig. 115 sono riportate le curve  $\tau = \text{cost}$ .

Dalla discussione della [100. 13] vedemmo che la tensione tangenziale assume un max sul contorno, dove si raggiungerà prima che in altre zone il limite di snervamento del materiale, assunto nell'esempio  $\tau_s = 2400 \text{ kg/cm}^2$ .

Con l'aumentare del momento torcente la zona plastica si estenderà dal contorno verso l'interno: in tali zone la pendenza della super-

<sup>1</sup> F. S. SHAW, *Australian Council Aeron.*, Report, 11 (1944).



ficie  $\Psi(x_1, x_2)$  raggiunge il valore limite costante  $\tau_s/\mu\kappa_t$ ; il rapporto adimensionale  $\tau_s/\mu\kappa_t a$  rappresenta allora la pendenza limite della superficie  $F(X_1, X_2) = \Psi(x_1, x_2)/a^2$ .

Resta dunque determinato il valore massimo  $F_s$  consentito in ogni punto dal tetto rigido della fig. 104 alla funzione  $F(X_1, X_2)$ . Quando nello svolgimento dei calcoli la  $F$  in un certo punto superi  $F_s$  è necessario diminuire questo valore della quantità  $F - F_s$ . Naturalmente tale operazione altera i valori della  $F$  nei quattro punti vicini, in quanto l'equazione [108. 14] non risulta più verificata avendo portato il valore  $F$  a  $F_s$ . Occorre dunque ripartire il residuo dell'equazione in parti uguali nei quattro punti vicini sino a raggiungere in essi il valore  $F_s$ .

Nella fig. 116 sono indicati i risultati ottenuti, riportando in ogni punto del reticolo i valori della  $F(X_1, X_2)$  e l'andamento delle linee  $\tau = \text{cost.}$ , alterate, rispetto alla fig. 115, dalla presenza delle zone plastiche rappresentate con tratteggio.