

## CAPITOLO VIII

### PROBLEMA DI SAINT-VENANT

#### 77. Formulazione del problema.

La trattazione ha avuto sinora carattere generale, nel senso di essere stata rivolta all'esposizione dei fondamenti di Meccanica dei solidi per un continuo tridimensionale di forma qualsiasi. Alcune particolarizzazioni hanno avuto lo scopo di chiarire il contenuto fisico-intuitivo dei vari fenomeni attraverso la discussione di semplici esempi.

Iniziamo ora lo studio sistematico di problemi speciali, di notevole interesse applicativo, relativi a solidi di forma particolare. Per maggiore evidenza nella trattazione dei problemi particolari scriveremo le varie relazioni per disteso; del resto la notazione compatta non offre per essi i vantaggi decisivi che ne consigliarono l'adozione nella parte generale. In particolare, le coordinate cartesiane materiali, alle quali riferiamo la configurazione indeformata, verranno indicate esplicitamente con  $x_1, x_2, x_3$ , e nelle componenti di tensione converrà distinguere le tensioni normali, componenti con indici uguali, dalle tensioni tangenziali, componenti con indici distinti, scrivendo  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  per le prime e  $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$  per le seconde.

Nel presente capitolo esamineremo il comportamento di un solido elastico omogeneo isotropo di forma cilindrica, libero nello spazio e riferito alla terna materiale  $O(x_1, x_2, x_3)$ , con l'asse  $x_3$  parallelo alla direzione comune delle generatrici del cilindro e gli assi  $x_1, x_2$  contenuti nel piano di una sezione trasversale retta, ad esempio la base di sinistra, per cui ogni punto sia individuato da una coordinata  $x_3$  positiva.

Supponiamo le forze di massa nulle e le forze di superficie, costituenti quindi da sole un sistema equilibrato, applicate esclusivamente in corrispondenza delle basi in modo che la superficie laterale del cilindro risulti libera da forze.

Se lasciamo indeterminata, almeno in un primo tempo, la distribuzione delle forze superficiali, di componenti  $f_1, f_2, f_3$ , sulle basi, la mancanza delle corrispondenti condizioni ai limiti per queste forze non ci permetterà di precisare completamente il problema della determinazione dello stato di tensione-deformazione. Alle condizioni mancanti sostituiamo allora le seguenti condizioni ausiliarie per le tre componenti di tensione:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \tau_{12} = 0. \quad [77.1]$$

Le ipotesi [77.1] non appaiono completamente arbitrarie, almeno da un punto di vista intuitivo, ma sono suggerite dalla particolare forma del solido elastico in esame e dalle modalità di applicazione

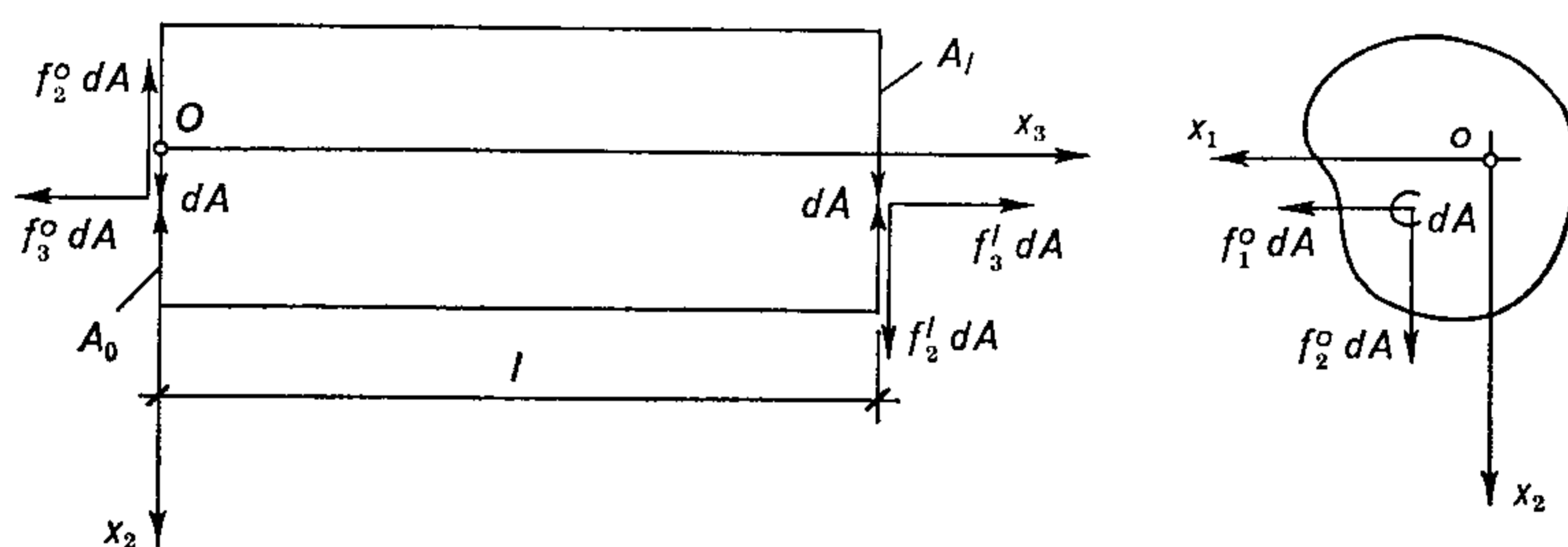


Fig. 57.

delle forze esterne: in sostanza equivalgono all'ipotesi che tra le fibre longitudinali del cilindro si esercitino azioni mutue unicamente nel senso delle fibre stesse.

Posto in questi termini il problema fu oggetto di numerose ricerche a partire dalle classiche memorie di BARRÉ DE SAINT-VENANT<sup>1</sup> e dalla celebre trattazione di CLEBSCH<sup>2</sup>, dove per la prima volta si parlò di un *de Saint-Venantsche Problem*, nelle quali la soluzione viene cercata assumendo come incognite le componenti  $u_1, u_2, u_3$  dello spostamento.

Nel seguito ci atterremo invece ad un procedimento di integrazione diretta in termini delle componenti di tensione, che offre una maggiore immediatezza rispetto all'impostazione tradizionale, come ebbe già modo di osservare l'Autore<sup>3</sup>, e fornisce tutti gli elementi sufficienti a caratterizzare lo stato di tensione-deformazione, che in effetti ci interessa, evitando di imporre al cilindro sei arbitrarie condizioni di vincolo, necessarie per individuare le componenti di spostamento a meno degli eventuali moti rigidi di traslazione e di rotazione.

<sup>1</sup> A. BARRÉ DE SAINT VENANT, *Mém. Savants étrangers*, **14**, 223 (1855); *Journal Math. Liouville* (2), **1**, 89 (1856).

<sup>2</sup> A. CLEBSCH, *Theorie der Elasticität fester Körper*, pag. 74, Leipzig (1862).

<sup>3</sup> R. F. BALDACCI, *Atti Accad. Scienze, Torino*, **90**, 604 (1955-56); *Giorn. Genio Civile*, **95**, 759 (1957).

Il problema consiste dunque nel determinare le tre sole componenti di tensione  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$ , alle quali ci siamo ridotti in virtù delle ipotesi ausiliarie [77. 1], utilizzando i gruppi di equazioni introdotte nel § 42 *b*) nella formulazione del problema dell'equilibrio elastico per un solido isotropo in termini di tensioni.

Le equazioni indefinite di equilibrio [42. 3], in assenza di forze di massa ed in conseguenza delle ipotesi [77. 1], si semplificano nelle:

$$\tau_{31,3} = 0, \quad \tau_{32,3} = 0, \quad \tau_{13,1} + \tau_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0. \quad [77. 2]$$

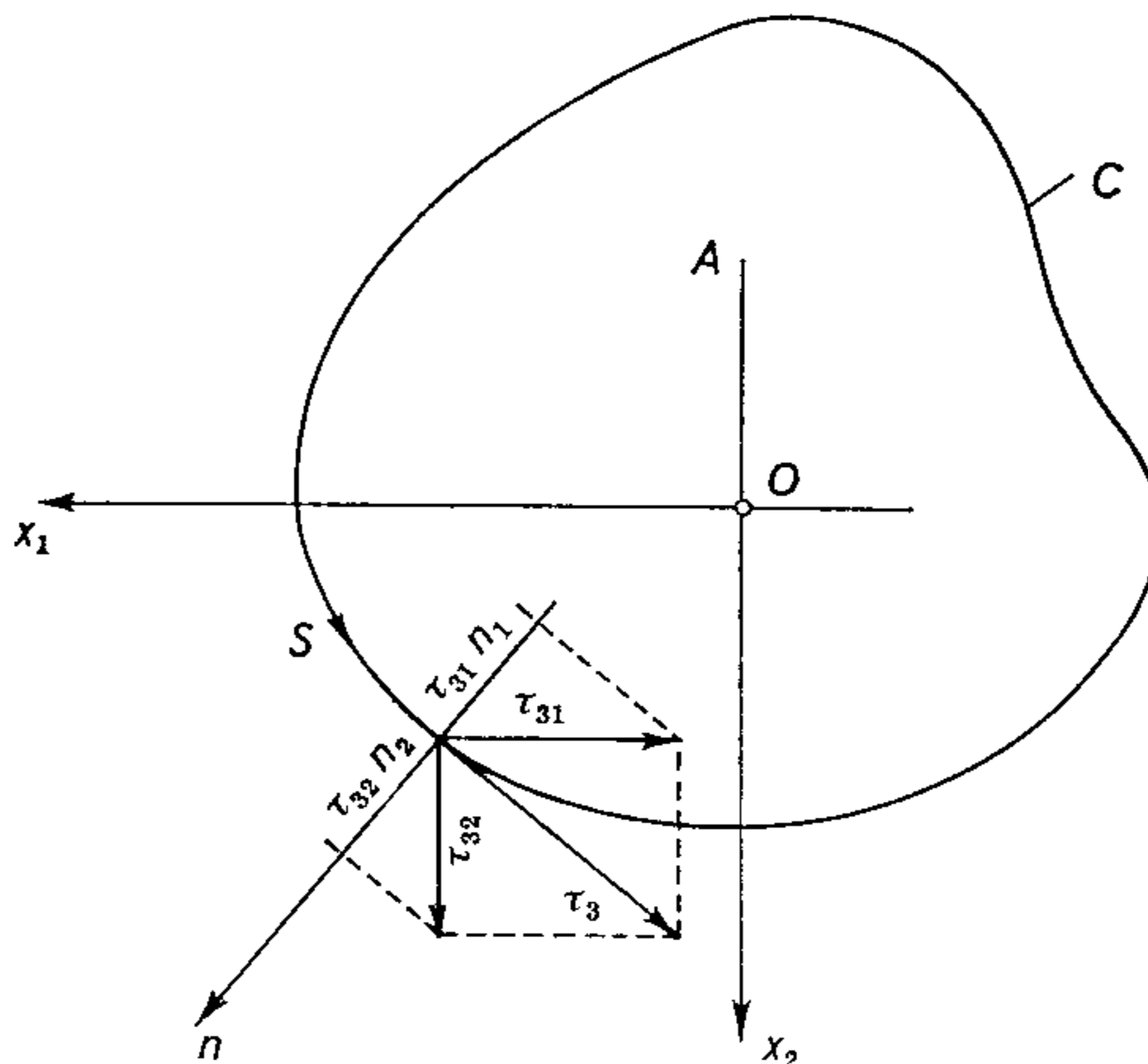


Fig. 58.

La congruenza dello stato di deformazione e l'isotropia elastica lineare vengono introdotte nel problema simultaneamente attraverso le sei equazioni di Beltrami [42. 23], che, per le ipotesi [77. 1] e la indipendenza dalla variabile  $x_3$  delle componenti tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  espressa dalle prime due [77. 2], divengono ora:

$$\begin{aligned} \sigma_{33,11} = 0, \quad \sigma_{33,22} = 0, \quad \sigma_{33,12} = 0, \quad \sigma_{33,33} = 0; \\ (1 + \nu) (\tau_{31,11} + \tau_{31,22}) + \sigma_{33,13} = 0; \\ (1 + \nu) (\tau_{32,11} + \tau_{32,22}) + \sigma_{33,23} = 0. \end{aligned} \quad [77. 3]$$

Le equazioni di equilibrio ai limiti [42. 4] devono essere prese in considerazione soltanto per la superficie laterale del cilindro, senza tener conto cioè, come abbiamo avvertito, della effettiva distribuzione delle forze superficiali sulle basi. Ora, dei tre coseni direttori  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  della normale esterna  $n$  alla superficie laterale risultano diversi da zero solo i primi due a causa della ortogonalità tra  $n$  e  $x_3$ , e quindi ne discende l'unica equazione ai limiti:

$$\tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 = 0. \quad [77. 4]$$



Essa avverte che nei punti del contorno  $C$  della sezione trasversale  $A$  la tensione tangenziale risultante  $\tau_3 \equiv (\tau_{31}, \tau_{32})$ , agente sul piano normale all'asse  $x_3$ , ha componente nulla secondo la normale  $n$  e risulta quindi tangente al contorno stesso. Proiettando le componenti della  $\tau_3$  sulla tangente e ricordando che i coseni direttori  $\nu_1, \nu_2$  della tangente sono legati ai coseni direttori  $n_1, n_2$  della normale attraverso le note relazioni:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\frac{dx_2}{dn}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_1}{dn}, \quad [77.5]$$

in accordo con il senso assunto positivo per il percorso  $s$  lungo il contorno  $C$ , l'espressione:

$$\tau_3 = \tau_{32} n_1 - \tau_{31} n_2, \quad [77.6]$$

fornisce così la tensione tangenziale totale.

### 78. Integrazione delle equazioni del problema.

Le prime quattro equazioni del sistema differenziale [77.3] affermano che la componente normale di tensione  $\sigma_{33}$  deve risultare necessariamente una funzione lineare delle variabili  $x_1, x_2, x_3$  e non dipendere dal prodotto  $x_1 x_2$ . Essa avrà dunque la forma generale:

$$\sigma_{33} = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 - x_3 (b + b_1 x_1 + b_2 x_2), \quad [78.1]$$

dove  $a, a_1, a_2$  e  $b, b_1, b_2$  rappresentano sei opportune costanti di integrazione.

Le prime due equazioni di equilibrio [77.2] sono state già utilizzate per semplificare la quinta e la sesta equazione di congruenza [77.3]. Il problema relativo alla determinazione delle incognite  $\tau_{31}, \tau_{32}$ , funzioni delle due sole variabili  $x_1, x_2$ , consisterà dunque nell'integrare nel dominio piano  $A$ , definito da una generica sezione trasversale retta del cilindro, il sistema differenziale costituito dalla terza delle [77.2] e dalle ultime due [77.3] con riguardo all'espressione [78.1] già trovata per la  $\sigma_{33}$ , cioè:

$$\begin{aligned} \tau_{31,1} + \tau_{32,2} &= b + b_1 x_1 + b_2 x_2, \\ \tau_{31,11} + \tau_{31,22} &= (1 + \nu)^{-1} b_1, \\ \tau_{32,11} + \tau_{32,22} &= (1 + \nu)^{-1} b_2, \end{aligned} \quad [78.2]$$

associate alla condizione ai limiti [77.4] sul contorno  $C$  di  $A$ .

Operiamo una trasformazione del sistema differenziale, derivando la prima delle [78.2] una volta rispetto a  $x_1$  ed una volta rispetto

a  $x_2$  e sottraendo le equazioni così ottenute rispettivamente dalla seconda e dalla terza delle [78. 2], in modo da ottenere in definitiva:

$$\begin{aligned} (\tau_{32,1} - \tau_{31,2})_{,2} &= b_1 \nu (1 + \nu)^{-1}, \\ (\tau_{32,1} - \tau_{31,2})_{,1} &= -b_2 \nu (1 + \nu)^{-1}. \end{aligned} \quad [78. 3]$$

I primi membri delle [78. 3] rappresentano le derivate parziali rispetto a  $x_2$  e rispetto ad  $x_1$  della stessa funzione, il cui differenziale totale sarà dunque:

$$d(\tau_{32,1} - \tau_{31,2}) = -\bar{\nu} b_2 dx_1 + \bar{\nu} b_1 dx_2, \quad [78. 4]$$

avendo posto per semplicità di scrittura:

$$\bar{\nu} = \nu (1 + \nu)^{-1}. \quad [78. 5]$$

Dall'integrazione della [78. 4] otteniamo così l'espressione:

$$\tau_{32,1} - \tau_{31,2} = \bar{\nu} (b_1 x_2 - b_2 x_1) + c, \quad [78. 6]$$

dove con  $c$  è stata indicata una ulteriore costante di integrazione.

Siamo allora ricondotti alla risoluzione del seguente sistema di due sole equazioni differenziali costituito dalla relazione [78. 6] così ottenuta e dalla prima delle [78. 2], cioè:

$$\begin{aligned} \tau_{32,1} - \tau_{31,2} &= c + \bar{\nu} (b_1 x_2 - b_2 x_1), \\ \tau_{31,1} + \tau_{32,2} &= b + b_1 x_1 + b_2 x_2. \end{aligned} \quad [78. 7]$$

Poniamo la soluzione di tale sistema lineare sotto forma di una somma:

$$\tau_{31} = \bar{\tau}_{31} + \tau_{31}^o, \quad \tau_{32} = \bar{\tau}_{32} + \tau_{32}^o, \quad [78. 8]$$

dove le funzioni  $\bar{\tau}_{31}$ ,  $\bar{\tau}_{32}$  soddisfano alle [78. 7], mentre le funzioni  $\tau_{31}^o$ ,  $\tau_{32}^o$  soddisfano alle stesse equazioni rese omogenee:

$$\tau_{32,1}^o - \tau_{31,1}^o = 0, \quad \tau_{31,1}^o + \tau_{32,2}^o = 0. \quad [78. 9]$$

Se la sezione è, come supponiamo, semplicemente connessa, la prima delle [78. 9] esprime la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una certa funzione  $\varphi(x_1, x_2)$  tale che:

$$\tau_{31}^o = \varphi_{,1}, \quad \tau_{32}^o = \varphi_{,2}, \quad [78. 10]$$

mentre la seconda delle stesse [78. 9] afferma che detta funzione deve soddisfare all'equazione di Laplace:

$$\nabla \varphi(x_1, x_2) \equiv \varphi_{,11} + \varphi_{,22} = 0, \quad [78. 11]$$

e risultare quindi una funzione armonica.

La condizione al contorno [77. 4], esplicitata secondo la posizione [78. 8], assume l'aspetto:

$$\tau_{31}^o n_1 + \tau_{32}^o n_2 = - (\bar{\tau}_{31} n_1 + \bar{\tau}_{32} n_2), \quad [78. 12]$$

e con riguardo alle [78. 10], anche:

$$\varphi_{,1} n_1 + \varphi_{,2} n_2 = - (\bar{\tau}_{31} n_1 + \bar{\tau}_{32} n_2), \quad [78. 13]$$

da cui, introducendo la derivata della funzione  $\varphi(x_1, x_2)$  rispetto alla normale  $n$  al contorno:

$$\frac{d\varphi}{dn} = - (\bar{\tau}_{31} n_1 + \bar{\tau}_{32} n_2). \quad [78. 14]$$

Non riesce poi difficile trovare due funzioni  $\bar{\tau}_{31}$ ,  $\bar{\tau}_{32}$  che soddisfino al sistema differenziale completo [78. 7], utilizzando, ad esempio, il noto procedimento dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{31} &= \frac{1}{2} [bx_1 + b_1(x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2) - cx_2], \\ \bar{\tau}_{32} &= \frac{1}{2} [bx_2 + b_2(x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2) + cx_1], \end{aligned} \quad [78. 15]$$

come si può facilmente verificare.

Nella sua impostazione più generale il problema di Saint-Venant è ricondotto in definitiva alla determinazione di una funzione  $\varphi(x_1, x_2)$ , armonica in un dominio piano  $A$  e la cui derivata rispetto alla normale al contorno  $C$  di  $A$  assume un valore prescritto sul contorno stesso. Cioè, in altri termini, il problema così trasformato è espresso nella classica forma di Dini-Neumann.

Assegnata dunque la forma della sezione trasversale retta del cilindro, la [78. 14] permette di individuare, a meno di una costante addittiva inessenziale ai nostri fini, la soluzione  $\varphi(x_1, x_2)$  del particolare problema relativo a tale sezione, e quindi la distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  fornite dalle [78. 8] in ogni punto di  $A$ .

Possiamo legittimamente affermare che il problema di Saint-Venant è ormai sostanzialmente risolto nella sua trasformazione in un problema noto. Come immediata conseguenza dell'armonicità della funzione  $\varphi(x_1, x_2)$ , integrando l'equazione di Laplace [78. 11] nel dominio di definizione  $A$ , otteniamo:

$$\int_A (\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) dA = 0, \quad [78. 16]$$

o anche, attraverso la trasformazione di Gauss dell'integrale doppio in un integrale curvilineo esteso al contorno  $C$  di  $A$ :

$$\int_C (\varphi_{,1} n_1 + \varphi_{,2} n_2) ds \equiv \int_C \frac{d\varphi}{dn} ds = 0. \quad [78. 17]$$

Tale risultato è conforme alla proprietà che l'esistenza della soluzione del problema di Dini-Neumann rimane subordinata ad una condizione appropriata per la derivata normale della funzione incognita, espressa appunto dalla [78. 17]. Inoltre, con riguardo all'equazione di equilibrio ai limiti [78. 14], l'integrale curvilineo può essere ricondotto di nuovo ad un integrale doppio, cioè:

$$\int_C \frac{d\varphi}{dn} ds = - \int_A (\bar{\tau}_{31,1} + \bar{\tau}_{32,2}) dA, \quad [78. 18]$$

e quindi, tenendo presente la seconda [78. 7], alla seguente condizione per le costanti  $b, b_1, b_2$ :

$$\int_A (b + b_1 x_1 + b_2 x_2) dA = 0. \quad [78. 19]$$

Per la nota definizione di momento statico  $S_1, S_2$  di un'area piana rispetto agli assi  $x_1, x_2$  la [78. 19] fornisce immediatamente la relazione:

$$b = - \frac{1}{A} (b_1 S_2 + b_2 S_1), \quad [78. 20]$$

da cui appare manifesta l'opportunità di scegliere come origine degli assi  $x_1, x_2$  proprio il baricentro di  $A$ , in modo che risultino identicamente nulli i momenti statici  $S_1, S_2$  e quindi  $b = 0$ .

Per questa scelta particolare del riferimento la condizione al contorno [78. 14] per la derivata normale della funzione armonica  $\varphi(x_1, x_2)$  diviene:

$$\frac{d\varphi}{dn} = - \frac{b_1}{2} (x_1^2 - \bar{v} x_2^2) n_1 - \frac{b_2}{2} (x_2^2 - \bar{v} x_1^2) n_2 + \frac{c}{2} (x_2 n_1 - x_1 n_2), \quad [78. 21]$$

avendo tenuto presente la ovvia semplificazione delle [78. 15] dovuta all'imporre nulla la costante  $b$ .

## 79. Soluzione alternativa.

Un aspetto alternativo del problema discusso nel precedente § 78, assai utile per la costruzione effettiva delle soluzioni nei casi particolari, emerge dall'osservazione che la seconda delle [78. 9] rappresenta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una certa funzione  $\psi(x_1, x_2)$  tale che:

$$\tau_{31}^o = \psi_{,2}, \quad \tau_{32}^o = - \psi_{,1}, \quad [79. 1]$$



mentre la prima delle stesse [78. 9] afferma che detta funzione deve soddisfare all'equazione di Laplace:

$$\nabla \psi(x_1, x_2) \equiv \psi_{,11} + \psi_{,22} = 0, \quad [79. 2]$$

e risultare quindi una funzione armonica.

Con riguardo alle [79. 1] la condizione al contorno [78. 12] diviene:

$$\psi_{,2} n_1 - \psi_{,1} n_2 = -(\bar{\tau}_{31} n_1 + \bar{\tau}_{32} n_2), \quad [79. 3]$$

o anche, introducendo i coseni direttori della tangente legati ai coseni direttori della normale dalle [77. 5]:

$$\psi_{,1} \frac{dx_1}{ds} + \psi_{,2} \frac{dx_2}{ds} = \bar{\tau}_{32} \frac{dx_1}{ds} - \bar{\tau}_{31} \frac{dx_2}{ds}. \quad [79. 4]$$

Otteniamo così una condizione ai limiti per la derivata della  $\psi(x_1, x_2)$  rispetto alla tangente:

$$\frac{d\psi}{ds} = \bar{\tau}_{32} \frac{dx_1}{ds} - \bar{\tau}_{31} \frac{dx_2}{ds}, \quad [79. 5]$$

o anche, integrando lungo  $s$ , una condizione ai limiti semplicemente per la  $\psi(x_1, x_2)$ :

$$\psi(s) = \int_s (\bar{\tau}_{32} dx_1 + \bar{\tau}_{31} dx_2), \quad [79. 6]$$

a meno di una costante addittiva inessenziale perchè non interessa tanto la funzione  $\psi(x_1, x_2)$  quanto le sue derivate parziali [79. 1].

L'integrale curvilineo al secondo membro della [79. 6] dipende esclusivamente dalla forma della sezione ed è quindi noto una volta assegnata l'equazione del contorno. Con riguardo alle [78. 15] otteniamo:

$$\begin{aligned} \psi(s) = & -\frac{b_1}{2} \int_s (x_1^2 - \bar{\nu} x_2^2) dx_2 + \\ & + \frac{b_2}{2} \int_s (x_2^2 - \bar{\nu} x_1^2) dx_1 + \frac{c}{2} \int_s (x_1 dx_1 + x_2 dx_2), \end{aligned} \quad [79. 7]$$

o anche in forma compatta, poichè sul contorno  $x_1 = x_1(s)$ ,  $x_2 = x_2(s)$ :

$$\psi(s) = -\frac{b_1}{2} P(x_2) + \frac{b_2}{2} Q(x_1) + \frac{c}{4} (x_1^2 + x_2^2), \quad [79. 8]$$

dove  $P(x_2)$ ,  $Q(x_1)$  indicano due funzioni nella sola variabile  $x_2$ ,  $x_1$  rispettivamente.



Il problema di Saint-Venant può dunque essere ricondotto anche alla determinazione di una funzione armonica  $\psi(x_1, x_2)$  in un dominio piano  $A$ , la quale assume un valore prescritto sul contorno  $C$  di  $A$ . Cioè, in altri termini, il problema così trasformato è espresso nella forma classica del problema di Dirichlet:

$$\begin{aligned} \nabla \psi(x_1, x_2) &= 0 \quad \text{in } A. \\ \psi(s) &= \bar{\psi}(s) \quad \text{su } C. \end{aligned} \quad [79. 9]$$

Assegnata la forma della sezione trasversale retta del cilindro, la [79. 8] permette di individuare il valore  $\bar{\psi}(s)$  assunto sul contorno dalla soluzione  $\psi(x_1, x_2)$  del particolare problema di Dirichlet relativo a tale sezione.

Confrontando le espressioni [78. 10], che forniscono le tensioni tangenziali in termini delle derivate parziali della  $\varphi(x_1, x_2)$ , con le [79. 1], che forniscono le stesse tensioni tangenziali in termini delle derivate parziali della  $\psi(x_1, x_2)$ , otteniamo:

$$\varphi_{,1} = \psi_{,2}, \quad \varphi_{,2} = -\psi_{,1}. \quad [79. 10]$$

Tali relazioni consentono di considerare le funzioni  $\varphi(x_1, x_2)$  e  $\psi(x_1, x_2)$  come *funzioni armoniche coniugate*, rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione di variabile complessa, e permettono perciò di attribuire a tali funzioni tutte le importanti proprietà derivabili da tale circostanza.

Ricordiamo che una funzione monodroma:

$$f(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad [79. 11]$$

della variabile complessa  $z = x_1 + ix_2$  viene detta *analitica* od *olomorfa* in un dominio assegnato  $A$  se possiede una derivata unica in tutti i punti di  $A$ . È dunque per definizione:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} + i \frac{d\psi}{dz}, \quad [79. 12]$$

e tale derivata deve risultare indipendente dalla legge con cui varia  $z$ .

Facendo allora variare  $z$  lungo l'asse reale  $x_1$ , oppure lungo l'asse immaginario  $x_2$ , cioè posto rispettivamente  $dz \equiv dx_1$ , o  $dz \equiv i dx_2$ , si dovrà ottenere sempre lo stesso valore [79. 12] per la derivata della funzione  $f(z)$ :

$$\frac{df(z)}{dz} \equiv \varphi_{,1} + i\psi_{,1} = \psi_{,2} - i\varphi_{,2}, \quad [79. 13]$$

da cui le *relazioni di monogeneità* di Cauchy-Riemann espresse proprio dalle [79. 10].

L'analiticità della  $f(z)$  comporta non solo l'esistenza delle derivate parziali del primo ordine per le funzioni  $\varphi(x_1, x_2)$  e  $\psi(x_1, x_2)$ , ma anche quella di tutte le derivate di ordine superiore. Derivando allora la [79. 10] una volta rispetto a  $x_1$  ed una volta rispetto a  $x_2$  si deduce che la parte reale  $\varphi(x_1, x_2)$  ed il coefficiente dell'immaginario  $\psi(x_1, x_2)$  di una funzione analitica devono verificare entrambi l'equazione di Laplace, da cui la denominazione di funzioni armoniche coniugate loro attribuita.

### 80. Caratteristiche della sollecitazione.

L'esistenza della funzione  $\varphi(x_1, x_2)$  ci ha permesso di istituire una relazione, la [78. 20], tra le costanti  $b, b_1, b_2$  e in definitiva di individuare la prima,  $b = 0$ , mediante una scelta opportuna per l'origine  $O(x_1, x_2, x_3)$  del sistema di riferimento. La determinazione delle sei rimanenti costanti  $a, a_1, a_2, b_1, b_2, c$  richiede di specificare la distribuzione delle forze superficiali applicate agli elementi di area delle basi del cilindro, distribuzione che lasciammo inizialmente indeterminata.

Queste forze superficiali devono cioè verificare le condizioni ai limiti in corrispondenza delle basi, dove la normale esterna  $n$  risulta ortogonale agli assi  $x_1, x_2$  ( $n_1 = n_2 = 0$ ) e parallela all'asse  $x_3$  ( $n_3 = \pm 1$ ). Abbiamo dunque le seguenti relazioni tra le componenti di tensione  $\tau_{31}, \tau_{32}, \sigma_{33}$  e le corrispondenti forze di superficie  $f_1, f_2, f_3$  agenti sulle basi:

$$\tau_{31} = \pm f_1, \quad \tau_{32} = \pm f_2, \quad \sigma_{33} = \pm f_3, \quad [80. 1]$$

ottenute dalla particolarizzazione delle [38. 4] nel caso in esame e dove il segno positivo vale per la base  $A_l$  ( $n_3 = +1$ ) e quello negativo per la base  $A_0$  ( $n_3 = -1$ ).

Appare quindi in tutta evidenza il punto essenziale del procedimento seguito nella risoluzione del problema: il cosiddetto *metodo semi-inverso* di Saint-Venant. Non viene affrontata cioè la ricerca dello stato di tensione-deformazione indotto nel cilindro da una distribuzione assegnata di forze applicate alle basi, ma viene determinata a posteriori quella distribuzione di forze compatibile con la soluzione del problema per ogni particolare forma di sezione considerata.

La compatibilità di una distribuzione siffatta è subordinata alle *condizioni di equilibrio locali* [80. 1] che devono essere verificate dalle forze superficiali  $f_1, f_2, f_3$  in ogni punto delle basi, essendo ormai specificate le tensioni  $\tau_{31}, \tau_{32}, \sigma_{33}$  a meno delle sei costanti di integrazione ancora incognite. Riesce allora chiaro come la scelta delle forze superficiali dipenda ormai soltanto da *sei condizioni di equilibrio globali arbitrarie*, pari cioè al numero delle costanti disponibili.

Ora, per ogni sezione del cilindro lo stato di sollecitazione esterna è caratterizzato da una forza  $\mathbf{R}$  e da un momento  $\mathbf{M}$ , ottenuti come forza risultante e momento risultante, rispetto al baricentro della sezione stessa, del sistema di forze superficiali applicate, ad esempio, alla base di destra del cilindro ( $x_3 = l$ ). Le componenti di  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{R} \equiv (T_1, T_2, N), \quad \mathbf{M} \equiv (M_1, M_2, M_t), \quad [80. 2]$$

vengono definite *caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione generica A* ed assumono le denominazioni specifiche di: *forze ta-*



glianti  $T_1, T_2$ , forza normale  $N$ , momenti flettenti  $M_1, M_2$ , momento torcente  $M_t$ .

Con riferimento alla fig. 59 i versi delle caratteristiche della sollecitazione vengono assunti positivi se concordi con gli assi della terna  $O(x_1, x_2, x_3)$  quando esprimono, come nel caso indicato, le azioni globali esercitate sulla generica sezione  $A$  dalla porzione di cilindro situata dalla parte dei semiassi positivi e tratteggiata in figura.

Precisamente, le componenti  $T_1, T_2, N$  della forza  $\mathbf{R}$  sono riguardate come positive se concordi con i versi positivi degli assi  $x_1, x_2, x_3$

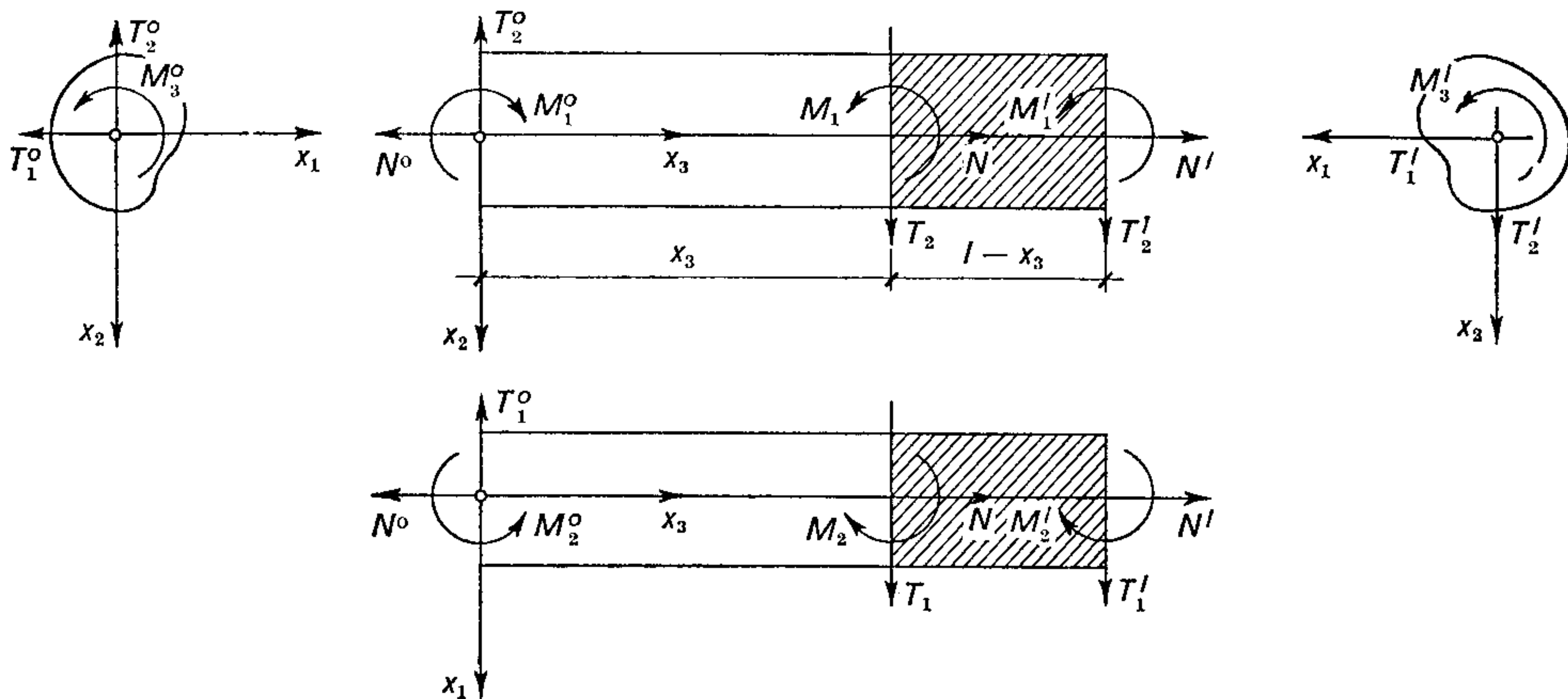


Fig. 59.

rispettivamente; le componenti  $M_1, M_2, M_t$  del momento  $\mathbf{M}$  sono riguardate come positive se concordi con le rotazioni  $\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21}$ , tendenti cioè a sovrapporre i semiassi positivi  $x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2$  secondo la convenzione adottata nel § 16, fig. 8.

Poichè le forze superficiali applicate alle basi sono equilibrate nel loro complesso, sempre assumendo come centro di riduzione il baricentro della sezione generica  $A$ , il sistema di forze applicate alla base  $A_0$  ( $x_3 = 0$ ) deve ammettere una risultante  $-\mathbf{R}$  ed un momento risultante  $-\mathbf{M}$ , cioè uguali e contrari a quelli precedentemente determinati con riferimento alle forze applicate su  $A_l$  ( $x_3 = l$ ). Di conseguenza le caratteristiche della sollecitazione relativa vengono riguardate come positive se discordi con gli assi della terna  $O(x_1, x_2, x_3)$ , quando esprimono le azioni globali esercitate sulla generica sezione  $A$  dalla porzione di cilindro situata dalla parte dei semiassi negativi.

Ora, ognuna delle due porzioni nelle quali il piano della sezione generica suddivide idealmente il cilindro è ancora in equilibrio, anche se considerata isolatamente, pur di applicare alla sezione stessa le azioni elementari che venivano trasmesse dalla porzione rimanente

prima della sconnessione. Così, ad esempio, la porzione compresa tra le ascisse  $O \div x_3$  è in equilibrio sotto l'azione delle forze esplicite  $f_1^0, f_2^0, f_3^0$  applicate alla base  $A_0$  e delle tensioni esercitate dalla porzione compresa tra le ascisse  $x_3 \div l$ , pensate applicate agli elementi superficiali di  $A$  e indotte su questi dalle forze esplicite  $f_1^l, f_2^l, f_3^l$  applicate alla base  $A_l$ .

Tale condizione, necessaria per l'equilibrio, tradotta in termini di caratteristiche della sollecitazione equivale ad affermare l'equivalenza statica stabilita dalle relazioni seguenti:

$$T_1 = \int_A \tau_{31} dA, \quad T_2 = \int_A \tau_{32} dA, \quad N = \int_A \sigma_{33} dA; \quad [80. 3]$$

$$M_1 = \int_A \sigma_{33} x_2 dA, \quad M_2 = - \int_A \sigma_{33} x_1 dA, \quad M_t = \int_A (\tau_{32} x_1 - \tau_{31} x_2) dA.$$

Semplici considerazioni ci permettono infine di esprimere le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione generica in termini delle corrispondenti caratteristiche relative alle basi del cilindro. Così, ad esempio, con riferimento alle forze applicate alla base di sinistra ( $x_3 = 0$ ):

$$T_1 = T_1^0, \quad T_2 = T_2^0, \quad N = N^0; \quad [80. 4]$$

$$M_1 = M_1^0 + T_2^0 x_3, \quad M_2 = M_2^0 - T_1^0 x_3, \quad M_t = M_t^0,$$

mentre, con riferimento alle forze applicate alla base di destra ( $x_3 = l$ ), si hanno sei espressioni analoghe.

A loro volta le caratteristiche della sollecitazione relative alle basi si ottengono dalle forze superficiali ivi applicate  $f_1, f_2, f_3$  attraverso relazioni formalmente analoghe alle [80. 3] in virtù delle equazioni di equilibrio ai limiti [80. 1]. Così, ad esempio, per la base  $A_0$ :

$$T_1^0 = \int_A f_1^0 dA, \quad T_2^0 = \int_A f_2^0 dA, \quad N = \int_A f_3^0 dA; \quad [80. 5]$$

$$M_1^0 = \int_A f_3^0 x_2 dA, \quad M_2^0 = - \int_A f_3^0 x_1 dA, \quad M_t^0 = \int_A (f_2^0 x_1 - f_1^0 x_2) dA,$$

ed espressioni simili valgono per la base  $A_l$ , pur di riferire le [80. 5] alle caratteristiche di sollecitazione ed alle forze di superficie relative a detta base.

Il principio di equivalenza elastica discusso nel § 44 ci assicura infine che una distribuzione di forze superficiali agenti sulle basi con valori locali diversi da quelli prescritti dalle [80. 1] non comporta dif-



ferenze sensibili dello stato di tensione-deformazione nei punti situati a sufficiente distanza dalle basi, purchè il sistema di forze sia staticamente equivalente, ed ammetta perciò come risultante e momento risultante proprio quei valori  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$  che hanno per componenti le stesse caratteristiche della sollecitazione  $T_1, T_2, N$  e  $M_1, M_2, M_t$  corrispondenti a quelle forze superficiali che soddisfano alle [80. 1].

### 81. Determinazione delle costanti.

Utilizziamo ora le sei condizioni globali di equilibrio [80. 3] per esprimere le rimanenti sei costanti di integrazione  $a, a_1, a_2, b_1, b_2, c$  in funzione delle sei caratteristiche della sollecitazione  $T_1, T_2, N, M_1, M_2, M_t$ .

Sostituendo nella terza delle [80. 3] l'espressione [78. 1] della tensione normale  $\sigma_{33}$  otteniamo la forza normale  $N$  nella forma:

$$N = \int_A [a + a_1 x_1 + a x_2 - x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2)] dA. \quad [81. 1]$$

Poichè l'integrale non dipende dalla variabile  $x_3$ , mentre la particolare scelta dell'origine  $O(x_1, x_2, x_3)$ , coincidente con il baricentro della sezione, comporta l'annullarsi dei momenti statici dell'area  $A$  rispetto agli assi  $x_1, x_2$ , l'espressione precedente si semplifica nella:

$$N = aA, \quad [81. 2]$$

e quindi la costante di integrazione  $a$  esprime in tal caso la forza normale  $N$  per unità di area della sezione trasversale.

Analoga sostituzione della [78. 1] nella quarta e nella quinta delle condizioni [80. 3] fornisce le seguenti espressioni dei momenti flettenti  $M_1, M_2$ :

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_A [a x_2 + (a_1 - x_3 b_1) x_1 x_2 + (a_2 - x_3 b_2) x_2^2] dA, \\ M_2 &= \int_A [a x_1 + (a_1 - x_3 b_1) x_1^2 + (a_2 - x_3 b_2) x_1 x_2] dA, \end{aligned} \quad [81. 3]$$

da cui, introducendo i momenti di inerzia  $J_1, J_2$  e centrifugo  $J_{12}$  dell'area piana  $A$  rispetto agli assi  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} M_1 &= (a_1 - x_3 b_1) J_{12} + (a_2 - x_3 b_2) J_1, \\ M_2 &= - (a_1 - x_3 b_1) J_2 - (a_2 - x_3 b_2) J_{12}. \end{aligned} \quad [81. 4]$$

Per  $x_3 = 0$  le [81. 3] si riducono ai valori dei momenti flettenti  $M_1^0, M_2^0$  agenti sulla base  $A_0$ , cioè:

$$M_1^0 = a_1 J_{12} + a_2 J_1, \quad M_2^0 = - a_1 J_2 - a_2 J_{12}, \quad [81. 5]$$

dalle quali possiamo dedurre le costanti  $a_1$ ,  $a_2$  in funzione di tali momenti:

$$a_1 = -\frac{1}{D} (M_1^0 J_{12} + M_2^0 J_1), \quad a_2 = \frac{1}{D} (M_1^0 J_2 + M_2^0 J_{12}), \quad [81.6]$$

essendo certamente diverso da zero il determinante  $D = J_1 J_2 - J_{12}^2$  del sistema [81.4]. Infatti  $D$  è un invariante in ogni trasformazione ortogonale degli assi  $x_1$ ,  $x_2$ : allora, se in particolare l'antipolarità di inerzia viene riferita agli assi principali, per l'annullarsi del momento centrifugo risulta:  $D = J_I J_{II} \neq 0$ .

Il significato delle costanti  $b_1$ ,  $b_2$  si ottiene immediatamente sviluppando le [81.3] con riguardo alle [81.4]:

$$M_1 = M_1^0 - x_3 (b_1 J_{12} + b_2 J_1), \quad M_2 = M_2^0 + x_3 (b_1 J_2 + b_2 J_{12}). \quad [81.7]$$

Il confronto di tali relazioni con le [80.4] relative ai momenti flettenti  $M_1$ ,  $M_2$  permette di concludere immediatamente che:

$$T_2 = - (b_1 J_{12} + b_2 J_1), \quad T_1 = - (b_1 J_2 + b_2 J_{12}). \quad [81.8]$$

Risolvendo il sistema, il cui determinante è ancora  $D = J_1 J_2 - J_{12}^2$  otteniamo i valori delle costanti  $b_1$ ,  $b_2$  in funzione delle forze di taglio:

$$b_1 = -\frac{1}{D} (T_1 J_1 - T_2 J_{12}), \quad b_2 = -\frac{1}{D} (-T_1 J_{12} + T_2 J_2). \quad [81.9]$$

La forma delle espressioni trovate per le costanti  $a_1$ ,  $a_2$  e  $b_1$ ,  $b_2$  suggerisce di scegliere *gli assi ortogonali  $x_1$ ,  $x_2$  coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia dell'area  $A$  e quindi coincidenti con gli assi principali d'inerzia  $x_I$ ,  $x_{II}$* . Con tale scelta si annulla il momento centrifugo e le [81.5], per  $J_1 = J_I$ ,  $J_2 = J_{II}$ , si semplificano nelle:

$$a_1 = -\frac{M_2^0}{J_2}, \quad a_2 = \frac{M_1^0}{J_1}, \quad [81.10]$$

mentre a loro volta le [81.9] si semplificano nelle corrispondenti:

$$b_1 = -\frac{T_1}{J_2}, \quad b_2 = -\frac{T_2}{J_1}. \quad [81.11]$$

Ognuna delle costanti  $a_1$ ,  $a_2$  e  $b_1$ ,  $b_2$  viene così a dipendere da una sola caratteristica della sollecitazione  $M_2^0$ ,  $M_1^0$  e  $T_1$ ,  $T_2$  rispettivamente.

Rimane ormai da determinare la costante  $c$  sostituendo le espressioni [78.8] delle tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  nell'ultima condizione

delle [80. 3] non ancora utilizzata. Il momento torcente  $M_t$  viene allora espresso come somma di due integrali:

$$M_t = \int_A (x_1 \varphi_{,2} - x_2 \varphi_{,1}) dA + \int_A (x_1 \bar{\tau}_{32} - x_2 \bar{\tau}_{31}) dA, \quad [81. 12]$$

dove il secondo, con riguardo alle espressioni [78. 15] per  $\tau_{31}$  e  $\tau_{32}$  con  $b = 0$ , assume la forma:

$$\frac{1}{2} \int_A [-b_1 (x_1^2 x_2 - \bar{v} x_1^3) + b_2 (x_1 x_2^2 - \bar{v} x_1^3) + c (x_1^2 + x_2^2)] dA. \quad [81. 13]$$

Introducendo per semplicità di scrittura i momenti di terzo ordine  $J_{111}$ ,  $J_{222}$ ,  $J_{112}$ ,  $J_{122}$  rispetto agli assi  $x_1$ ,  $x_2$  ed il momento d'inerzia polare  $J_0$  rispetto al baricentro  $O(x_1, x_2, x_3)$  potremo scrivere l'integrale [81. 13] in forma più compatta e pervenire così alla relazione:

$$M_t = \int_A (x_1 \varphi_{,2} - x_2 \varphi_{,1}) dA + \frac{1}{2} [-b_1 (J_{122} - \bar{v} J_{111}) + b_2 (J_{112} - \bar{v} J_{222}) + c J_0], \quad [81. 14]$$

che fornisce il momento torcente in funzione delle tre costanti di integrazione  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$ .

## 82. Distribuzione della tensione normale.

Quando il sistema di forze superficiali applicate alle basi del cilindro comporti come uniche caratteristiche della sollecitazione diverse da zero la forza normale  $N$  ed i momenti flettenti  $M_1$ ,  $M_2$ , lo stato di tensione si riduce alla sola componente  $\sigma_{33}$ , poichè risultano in tal caso identicamente nulle le componenti tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  dipendenti dalle forze di taglio  $T_1$ ,  $T_2$  e dal momento torcente  $M_t$ .

La tensione  $\sigma_{33}$  risulta tensione principale, o di trazione  $\sigma_{33} = \sigma_I$ , o di compressione  $\sigma_{33} = \sigma_{III}$ , in quanto unica componente di tensione agente sul piano della sezione trasversale e normale a questo. In entrambi i casi le altre due tensioni principali sono identicamente nulle: lo stato di tensione è quindi monoassiale secondo l'asse principale  $x_3$  e qualsiasi coppia di assi ortogonali nel piano della sezione può essere riguardata come principale.

Con riferimento ai valori [81. 2] e [81. 10] delle costanti di integrazione  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , tenendo presente che, in assenza di forze taglianti, i momenti flettenti [80. 4] si mantengono costanti lungo l'asse  $x_3$ , cioè  $M_1 = M_1^0$ ,  $M_2 = M_2^0$ , l'espressione [78. 1] della  $\sigma_{33}$  può essere scritta in termini delle caratteristiche  $N$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  nella forma:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2}. \quad [82. 1]$$



La coppia risultante  $M = (M_1, M_2)$  appartiene ad un piano  $(\eta, x_3)$  passante per l'asse  $x_3$ , e quindi in tale piano sarà possibile ridurre il sistema costituito dalla forza  $N$  agente secondo  $x_3$  e dal momento  $M$  ad un'unica forza, ancora di intensità  $N$ , parallela a  $x_3$  ed applicata in un punto  $C$  della sezione trasversale, di coordinate (per  $N, M_1, M_2$  positivi secondo la convenzione adottata):

$$\bar{x}_1 = -\frac{M_2}{N}, \quad \bar{x}_2 = \frac{M_1}{N}, \quad [82. 2]$$

denominato *centro di sollecitazione*.

Introdotti i *raggi principali centrali d'inerzia dell'area A* attraverso le note definizioni:

$$J_1 = \varrho_1^2 A, \quad J_2 = \varrho_2^2 A, \quad [82. 3]$$

possiamo dare alla [82. 1] la forma:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_1 \bar{x}_1}{\varrho_2^2} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{\varrho_1^2} \right). \quad [82. 4]$$

Ne deriva allora che il luogo dei punti della sezione dove risulta nulla la tensione normale è rappresentato dalla retta  $\xi$  di equazione:

$$\frac{x_1 \bar{x}_1}{\varrho_2^2} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{\varrho_1^2} = -1, \quad [82. 5]$$

detta *asse neutro*, intersecante gli assi  $x_1, x_2$  nei punti  $X_1, X_2$  e situata quindi da parte opposta di  $C$  rispetto al baricentro  $O$  della sezione.

Indicando con  $\alpha$  e  $\beta$  gli angoli che l'asse  $x_1$  forma rispettivamente con gli assi  $\xi$  e  $\eta$ , poichè risulta dalla fig. 60:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\varrho_1^2 \bar{x}_1}{\varrho_2^2 \bar{x}_2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \quad [82. 6]$$

otteniamo la relazione notevole:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}, \quad [82. 7]$$

che permette, assegnato l'asse di sollecitazione  $\eta$  e quindi l'angolo  $\beta$ , di determinare la direzione dell'asse neutro  $\xi$  mediante l'angolo  $\alpha$ .

La distribuzione della tensione normale  $\sigma_{33}$  risulta infine dal diagramma, indicato in fig. 60, riportando i valori [82. 1] a partire da una fondamentale parallela all'asse di sollecitazione  $\eta$ . Dato l'anda-



mento lineare delle  $\sigma_{33}$  sarà sufficiente disporre di due sole tensioni: conviene riferirsi ai valori  $\sigma_{33} = 0$  in corrispondenza dell'asse neutro  $\xi$  e  $\sigma_{33} = N/A$  in corrispondenza della parallela baricentrica  $\xi_0$  a questo.

I valori massimo  $\sigma'$  e minimo  $\sigma''$  della tensione  $\sigma_{33}$  si hanno nei punti  $P'$  e  $P''$  individuati dalle tangenti estreme al contorno della sezione condotte parallelamente all'asse neutro. Di regola il valore

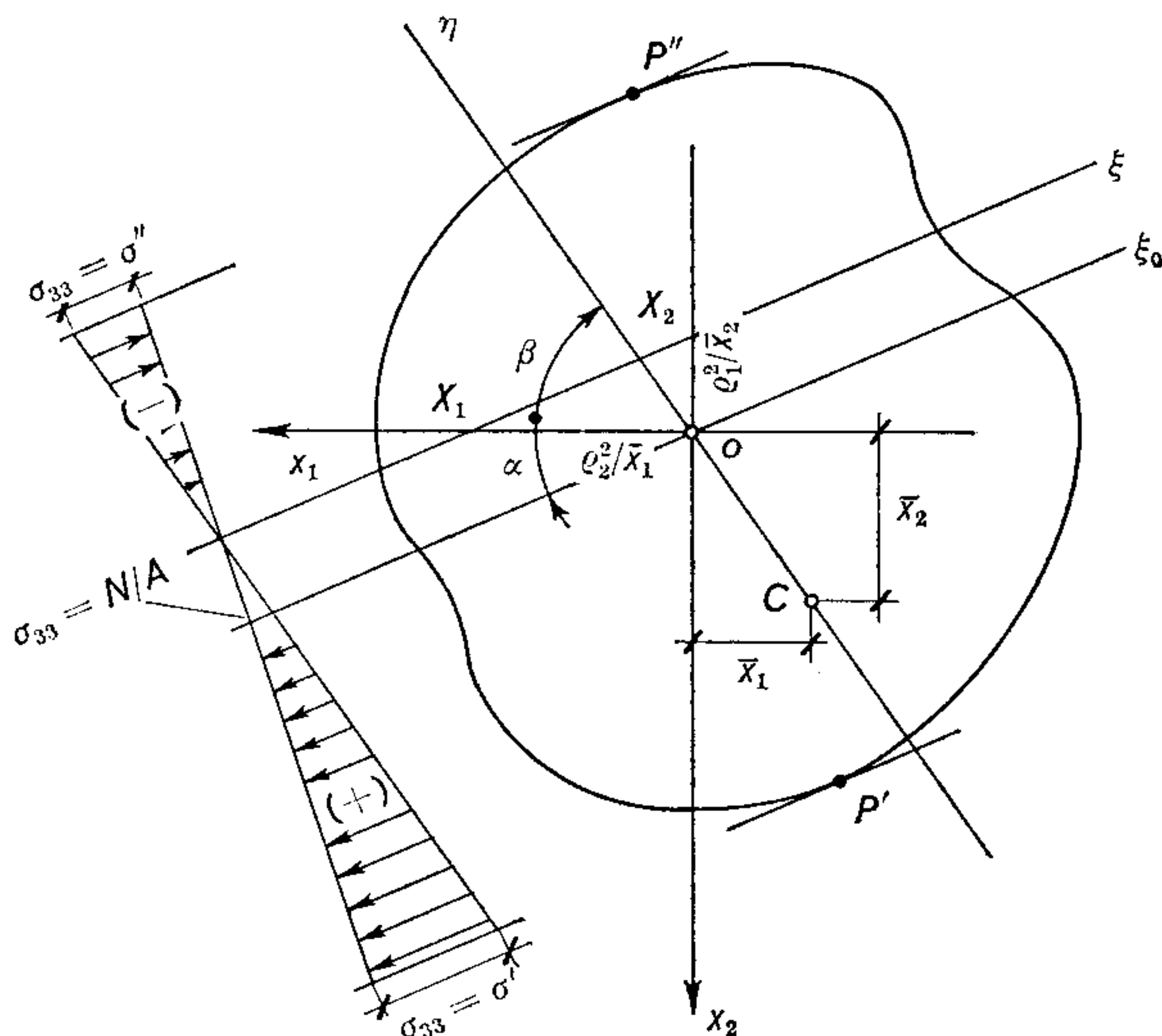


Fig. 60.

positivo viene assunto per le tensioni di trazione ed il valore negativo per quelle di compressione.

Alcune interessanti considerazioni possono essere tratte dall'esame della [82. 5]: essa infatti subordina una *corrispondenza di antipolarità* tra il centro di sollecitazione  $C$  e l'asse neutro  $\xi$ , rispetto all'ellisse a punti reali di equazione:

$$\frac{x_1^2}{e_2^2} + \frac{x_2^2}{e_1^2} = 1, \quad [82. 8]$$

cioè rispetto all'*ellisse centrale d'inerzia dell'area A*. Poichè  $C$  e  $\xi$  sono rispettivamente *antipolo* e *antipolare*, le direzioni dell'asse neutro  $\xi$  e dell'asse di sollecitazione  $\eta$  risultano coniugate rispetto all'ellisse centrale di inerzia [82. 8].

Assegnato  $C$ , e quindi  $\eta$ , la determinazione di  $\xi$  può essere così ricondotta ad un ben noto problema di geometria delle masse, fondato sulla proprietà proiettiva che la corrispondenza su  $\eta$  tra  $C$  e l'intersezione  $C'$  di  $\eta$  con  $\xi$  è una involuzione ellittica di potenza:

$$\overline{CO} \cdot \overline{CO'} = -e_{\xi_0}^2. \quad [82. 9]$$

Nella [82. 9]  $e_{\xi_0}$  indica il raggio d'inerzia relativo all'asse baricentrico  $\xi_0$  parallelo a  $\xi$ , quindi il raggio dell'ellisse centrale d'inerzia [82. 8] secondo la direzione  $\eta$ , coniugata a  $\xi$ , mentre il segno negativo esprime il fatto che  $C$  e  $C'$  sono situati da parti opposte rispetto al baricentro  $O$ .

Dalle proprietà fondamentali dell'antipolarità di inerzia si rileva che, se il centro di sollecitazione  $C$  è *esterno* al nocciolo centrale di inerzia dell'area  $A$ , l'asse neutro taglierà la sezione; al contrario, se  $C$  è *interno* al nocciolo l'asse neutro sarà esterno alla sezione e questa risulterà integralmente soggetta a tensioni dello stesso segno, tutte di trazione o tutte di compressione, a seconda del verso della forza normale  $N$ .

Se il centro di sollecitazione coincide con il baricentro l'asse neutro diventa la retta impropria della giacitura  $\xi$ : la sollecitazione si riduce ad una forza normale  $N$  che genera uno stato di tensione uniforme nella sezione espresso dalla:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A}. \quad [82. 10]$$

Se il centro di sollecitazione coincide con il punto improprio di  $\eta$  l'asse neutro diventa  $\xi_0$ : la sollecitazione si riduce ad una coppia  $M \equiv (M_x, M_y)$  che genera uno stato di tensione espresso dalla:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2}. \quad [82. 11]$$

Anche in questo secondo caso ci si può ricondurre ad una espressione monomia. Sostituendo a  $M_1, M_2$  i loro valori in funzione di  $M$ , otteniamo la tensione  $\sigma_{33}$  nella forma:

$$\sigma_{33} = M \left( \frac{x_2 \sin \beta}{J_1} - \frac{x_1 \cos \beta}{J_2} \right). \quad [82. 12]$$

Siano poi  $H, X_1, X_2$  le intersezioni della retta antipolare dell'elemento generico di area  $dA$  con gli assi  $\eta, x_1, x_2$  rispettivamente; dalla similitudine del triangolo  $X_1 O X_2$  con il triangolo tratteggiato della fig. 61, abbiamo:

$$\overline{OX_2} \cdot \overline{OH} \cos \beta = (\overline{OX_2} - \overline{OH} \sin \beta) \overline{OX_1}, \quad [82. 13]$$

dove  $\overline{OX_1}, \overline{OX_2}$  sono definiti dalle particolarizzazioni della [82. 9] agli assi  $x_1, x_2$ , cioè:  $\overline{OX_1} \cdot \overline{OX'_1} = -e_2^2, \overline{OX_2} \cdot \overline{OX'_2} = -e_1^2$ , e quindi:

$$\frac{1}{\overline{OH}} = \frac{\sin \beta}{\overline{OX_2}} + \frac{\cos \beta}{\overline{OX_1}} = -\frac{x_2 \sin \beta}{e_1^2} - \frac{x_1 \cos \beta}{e_2^2}. \quad [82. 14]$$

D'altra parte, se indichiamo con  $J_\xi = e_\xi^2 A$  il momento di inerzia dell'area  $A$  rispetto all'asse neutro  $\xi \equiv \xi_0$  è anche:

$$\overline{OH} \cdot \overline{OH'} = -e_\xi^2, \text{ e per } \overline{OH'} = \eta \text{ risulta: } \frac{1}{\overline{OH}} = -\frac{\eta}{e_\xi^2}. \quad [82. 15]$$

Segue allora dal confronto delle [82. 14] e [82. 15] la trasformazione della [82. 12] nella forma monomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M \eta}{J_{\xi}}, \quad [82. 16]$$

che può talvolta riuscire utile nelle applicazioni.

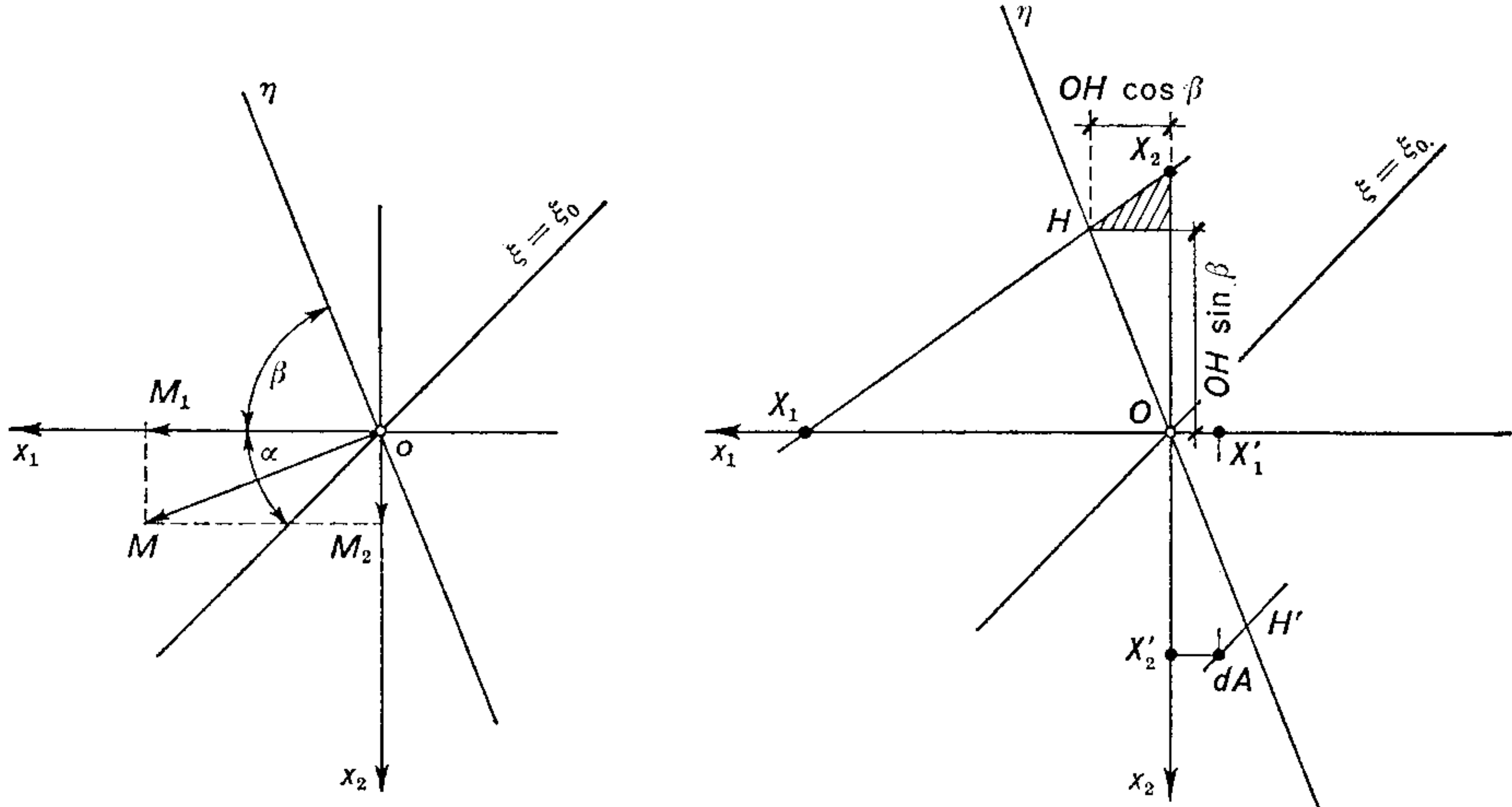


Fig. 61.

### 83. Distribuzione delle tensioni tangenziali.

Come risulta dalle [78. 15], con riguardo alle relazioni [81. 11] e [81. 14], le tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  dipendono dalle forze di taglio  $T_1$ ,  $T_2$  e dal momento torcente  $M_t$ . La loro distribuzione può essere specificata soltanto dopo la risoluzione del problema al contorno, nella forma di Dini-Neumann [78. 14] per la funzione armonica  $\varphi(x_1, x_2)$  o nella forma di Dirichlet [79. 9] per la funzione armonica coniugata  $\psi(x_1, x_2)$ .

#### a) Problemi particolari al contorno.

Considerando, ad esempio, il problema in termini della  $\varphi(x_1, x_2)$ , la forma [78. 22] della corrispondente condizione ai limiti suggerisce di scindere il problema al contorno per la  $\varphi(x_1, x_2)$  in tre problemi parziali per tre funzioni armoniche  $\varphi_1(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_2(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_t(x_1, x_2)$ :

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{b_1}{2} \varphi_1(x_1, x_2) - \frac{b_2}{2} \varphi_2(x_1, x_2) + \frac{c}{2} \varphi_t(x_1, x_2), \quad [83. 1]$$

indipendenti così dalle costanti  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$ , al contrario della  $\varphi(x_1, x_2)$ , e le cui derivate normali verificano separatamente le tre seguenti condizioni ai limiti sul contorno  $C$  di  $A$ :

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2)n_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dn} = (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2)n_2, \quad \frac{d\varphi_t}{dn} = x_2n_1 - x_1n_2. \quad [83. 2]$$



Le funzioni  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_t$  sono compatibili nel senso dei tre corrispondenti problemi parziali di Dini-Neumann, come appare immediatamente dall'applicazione della trasformazione di Gauss ad ognuna delle [83. 2]:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\varphi_1}{dn} ds &\equiv \int_C (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2) n_1 ds = 2 \int_A x_1 dA = 0, \\ \int_C \frac{d\varphi_2}{dn} ds &\equiv \int_C (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2) n_2 ds = 2 \int_A x_2 dA = 0, \\ \int_C \frac{d\varphi_t}{dn} ds &\equiv \int_C (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds = 0. \end{aligned} \quad [83. 3]$$

In modo analogo possiamo considerare, in alternativa, il problema in termini della  $\psi(x_1, x_2, x_3)$  e, con riguardo alla condizione al contorno [79. 7], introdurre tre funzioni armoniche  $\psi_1(x_1, x_2)$ ,  $\psi_2(x_1, x_2)$ ,  $\psi_t(x_1, x_2)$ :

$$\psi(x_1, x_2) = -\frac{b_1}{2} \psi_1(x_1, x_2) + \frac{b_2}{2} \psi_2(x_1, x_2) + \frac{c}{2} \psi_t(x_1, x_2), \quad [83. 4]$$

indipendenti così dalle costanti  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$ , al contrario della  $\psi(x_1, x_2)$ , e tali da assumere sul contorno  $C$  rispettivamente i valori:

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= \int_s (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2) dx_2, & \psi_2(s) &= \int_s (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2) dx_1, \\ \psi_t(s) &= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad [83. 5]$$

Le tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  potranno allora essere ottenute per sovrapposizione delle soluzioni dei tre problemi parziali al contorno [83. 2] nella forma:

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= \frac{1}{2} [b_1 (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2 - \varphi_{1,1}) - b_2 \varphi_{2,1} + c (\varphi_{t,1} - x_2)], \\ \tau_{32} &= \frac{1}{2} [b_2 (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2 - \varphi_{2,2}) - b_1 \varphi_{1,2} + c (\varphi_{t,2} + x_1)], \end{aligned} \quad [83. 6]$$

per cui l'espressione [81. 14] del momento torcente diviene:

$$\begin{aligned} M_t &= -\frac{b_1}{2} \left[ \int_A (x_1 \varphi_{1,2} - x_2 \varphi_{1,1}) dA + J_{122} - \bar{\nu}J_{111} \right] - \\ &\quad - \frac{b_2}{2} \left[ \int_A (x_1 \varphi_{2,2} - x_2 \varphi_{2,1}) dA + J_{112} - \bar{\nu}J_{222} \right] + \\ &\quad + \frac{c}{2} \left[ \int_A (x_1 \varphi_{t,2} - x_2 \varphi_{t,1}) dA + J_0 \right]. \end{aligned} \quad [83. 7]$$



Qualora si considerino i tre problemi al contorno [83. 5] si ottengono espressioni analoghe pur di sostituire alle derivate parziali delle funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_t$  le derivate parziali delle funzioni  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  legate alle prime da relazioni di monogeneità del tipo [79. 10].

Deduciamo dalla [83. 7] che in assenza di forze taglienti  $T_1, T_2$ , cioè per valori identicamente nulli delle costanti  $b_1, b_2$ , il momento torcente dipende esclusivamente dalla costante  $c$ . Al contrario, in assenza di momento torcente la costante  $c$  non si annulla identicamente ma, come combinazione lineare delle costanti  $b_1, b_2$ , viene a dipendere, in definitiva, dalle forze di taglio  $T_1, T_2$ . La condizione  $c = 0$  non conduce così all'annullarsi del momento torcente ma impone semplicemente una relazione tra  $T_1, T_2, M_t$ .

L'aspetto delle [82. 3] e [82. 4] suggerisce di ricondurre il problema a due problemi più semplici:

I) Un problema caratterizzato dalla condizione  $c = 0$  ed al quale corrisponderanno, in generale, tre caratteristiche di sollecitazione diverse da zero  $T_1, T_2, M_t$ , o anche, se vogliamo, una sola forza  $T \equiv (T_1, T_2)$  applicata in un punto  $C_T$  della sezione trasversale, distinto dal baricentro, le cui coordinate  $x_1^*, x_2^*$  sono fornite dalla particolarizzazione della [82. 4] al caso  $c = 0$ :

$$\int_A (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dA = x_1^* T_2 - x_2^* T_1, \quad [83. 8]$$

che deve valere per ogni scelta arbitraria di  $T_1, T_2$  e dove alle tensioni tangenziali sotto il segno di integrale sono da attribuirsi i valori [82. 3] per  $c = 0$ .

Le coordinate  $x_1^*, x_2^*$  sono date dalla [83. 7] scritta per  $c = 0$ :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{2J_1} \left[ \int_A (x_1 \varphi_{2,2} - x_2 \varphi_{2,1}) dA + J_{112} - \bar{\nu} J_{222} \right], \\ x_2^* &= - \frac{1}{2J_2} \left[ \int_A (x_1 \varphi_{1,2} - x_2 \varphi_{1,1}) dA + J_{122} - \bar{\nu} J_{111} \right], \end{aligned} \quad [83. 9]$$

e dipendono esclusivamente dalla sezione trasversale e dal rapporto di Poisson del materiale. Esse individuano il punto  $C_T$  definito *centro di taglio*.

II) Un problema caratterizzato dalla condizione  $b_1 = b_2 = 0$ , al quale corrisponderanno tre caratteristiche della sollecitazione diverse da zero  $T_1, T_2, M_t''$ , tali che:

$$\int_A (\tau_{32} x_1 - \tau_{31} x_2) dA = M_t - x_1^* T_2 + x_2^* T_1, \quad [83. 10]$$

dove alle tensioni tangenziali sotto il segno di integrale sono da attribuirsi i valori [82. 3] per  $b_1 = b_2 = 0$ .

La soluzione del problema è ottenuta sovrapponendo le soluzioni dei problemi I) e II).

L'introduzione del centro di taglio  $C_T$  permette di semplificare l'analisi del problema relativo alle tensioni tangenziali  $\tau_{31}, \tau_{32}$  separando gli effetti del caso  $c = 0$  da quelli

del caso  $b_1 = b_2 = 0$  con l'artificio di conglobare il momento torcente nella forza di taglio alterandone il punto di applicazione.

A tale circostanza viene fatto di solito riferimento con la affermazione alquanto ambigua che la presenza di una forza di taglio dà luogo ad un momento torcente. Poiché  $T$  e  $M_t$ , come caratteristiche della sollecitazione devono risultare indipendenti appare manifesta la improprietà di una tale locuzione.

### b) Sezioni simmetriche.

La separazione degli effetti dovuti al taglio  $T$  ed al momento torcente  $M_t$  dipende dunque in modo essenziale dalla forma della se-

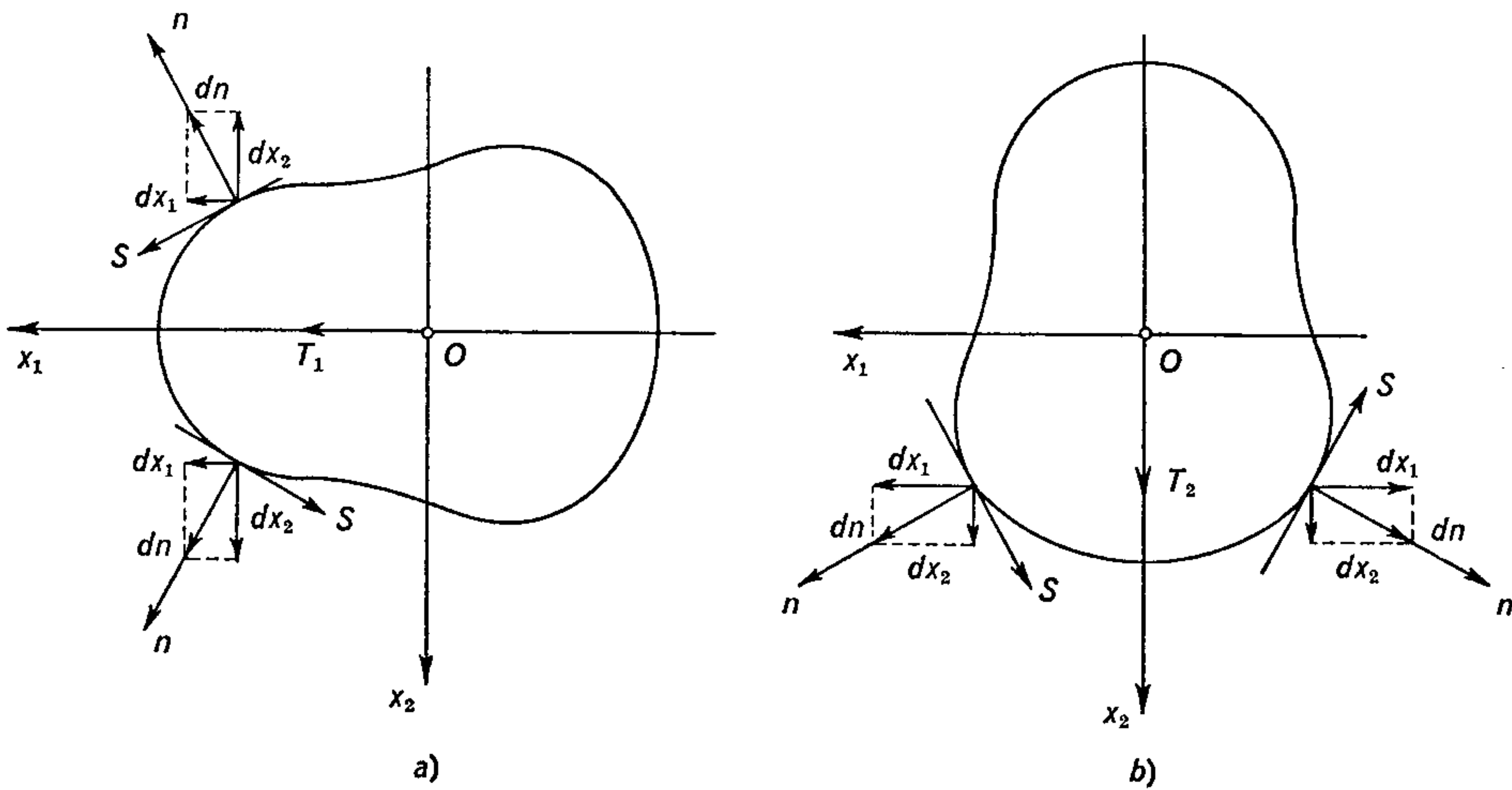


Fig. 62.

zione: è prevedibile che detta separazione riesca effettivamente possibile in presenza di andamenti particolari del contorno.

Quando la sezione possiede un asse di simmetria, ad esempio  $x_1$ , devono risultare nulli gli integrali estesi all'area  $A$  delle funzioni *dispari* in  $x_2$ , per cui è identicamente:  $J_{122} = J_{111} = 0$ . D'altra parte, con riferimento alla fig. 62 a), i coseni direttori  $n_1$  e  $n_2$  della normale al contorno sono funzioni rispettivamente *pari* e *dispari* in  $x_2$ , per cui la derivata normale:

$$\frac{d\varphi_1}{dn} \equiv \varphi_{1,1}n_1 + \varphi_{1,2}n_2 = (x_1^2 - \bar{v}x_2^2)n_1, \quad [83.11]$$

risulta *pari* in  $x_2$  e quindi le derivate parziali della  $\varphi_1$ :  $\varphi_{1,1}$  *pari* in  $x_2$  e  $\varphi_{1,2}$  *dispari* in  $x_2$ .

In conclusione risulta nulla nella [83.7] l'intera espressione che moltiplica la costante  $b_1$ , e quindi se il taglio  $T$  si riduce all'unica

componente  $T_1$ , cioè  $b_2 = 0$  per  $T_2 = 0$ , il momento torcente dipende soltanto dalla costante  $c$ .

Analogamente, se la sezione possiede un asse di simmetria  $x_2$  [fig. 62 b)], sono identicamente nulli  $J_{112} = J_{222} = 0$ , come funzioni *dispari* in  $x_1$ , mentre la derivata normale della funzione  $\varphi_2$ :

$$\frac{d\varphi_2}{dn} \equiv \varphi_{2,1}n_1 + \varphi_{2,2}n_2 = (x_2^2 - \bar{v}x_1^2)n_2 \quad [83. 12]$$

riesce *pari* in  $x_1$ , come conseguenza del fatto che ora  $n_1$  è *dispari* in  $x_1$  e  $n_2$  è *pari* in  $x_1$ . Le derivate parziali sono rispettivamente:  $\varphi_{2,1}$  *dispari* in  $x_1$  e  $\varphi_{2,2}$  *pari* in  $x_1$ ; è dunque nullo il coefficiente della costante  $b_2$  nella relazione [83. 7].

Allora nell'ipotesi che il taglio  $T$  si riduca all'unica componente  $T_2$ , cioè  $b_1 = 0$  per  $T_1 = 0$ , il momento torcente dipende soltanto dalla costante  $c$ .

In entrambi i casi la derivata normale della funzione  $\varphi_t$ :

$$\frac{d\varphi_t}{dn} \equiv \varphi_{t,1}n_1 + \varphi_{t,2}n_2 = x_2n_1 - x_1n_2 \quad [83. 13]$$

risulta *dispari* sia in  $x_1$  sia in  $x_2$ , e quindi le derivate parziali devono essere:  $\varphi_{t,1}$  *dispari* in  $x_2$  e *pari* in  $x_1$ ,  $\varphi_{t,2}$  *pari* in  $x_2$  e *dispari* in  $x_1$ .

Qualora la sezione ammetta due assi di simmetria  $x_1, x_2$ , sono identicamente nulli entrambi i coefficienti delle costanti  $b_1, b_2$ ; perciò anche in presenza di una forza di taglio generica  $T \equiv (T_1, T_2)$  il momento torcente dipende esclusivamente dalla costante  $c$ .

In ogni caso di sezione simmetrica sollecitata a taglio secondo l'asse, o gli assi, di simmetria è valida l'espressione:

$$M_t = \frac{c}{2} \left[ \int_A (x_1\varphi_{t,2} - x_2\varphi_{t,1}) dA + J_o \right], \quad [83. 14]$$

anche in presenza di forze taglianti.

Una interessante trasformazione<sup>1</sup> della [83. 14] si ottiene osservando che l'integrale doppio può essere anche scritto, con riguardo alla formula di Gauss ed alla condizione al contorno [83. 13]:

$$\int_A [(x_1\varphi_t)_{,2} - (x_2\varphi_t)_{,1}] dA = \int_C \varphi_t (x_1n_2 - x_2n_1) ds = - \int_C \varphi_t \frac{d\varphi_t}{dn} ds, \quad [83. 15]$$

<sup>1</sup> Malgrado la sua semplicità la formula [83. 17] appare per la prima volta, incidentalmente, nella tesi di M. STONE, *Electrical analog in the study of torsion*, Abstracts of Theses, Grad. School Univ. Pittsburgh, **9**, 265-274 (1933).



e successivamente riportato in un integrale doppio:

$$-\int_C \varphi_t (\varphi_{t,1} n_1 + \varphi_{t,2} n_2) ds = -\int_A [(\varphi_t \varphi_{t,1})_{,1} + (\varphi_t \varphi_{t,2})_{,2}] dA . \quad [83. 16]$$

In definitiva, essendo  $\varphi_t(x_1, x_2)$  armonica in  $A$  ( $\nabla \varphi_t = 0$ ), otteniamo:

$$M_t = \frac{c}{2} \left[ J_0 - \int_A (\varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2) dA \right] , \quad [83. 17]$$

dove l'integrale al secondo membro è il cosiddetto *integrale di Dirichlet* indicato di solito con  $D[\varphi_t]$ .

L'espressione del momento torcente assume così la forma compatta:

$$M_t = \frac{c}{2} (J_0 - D[\varphi_t]) , \quad [83. 18]$$

assai utile in certe applicazioni.

### c) Tensioni tangenziali medie.

Riprendiamo ora in esame il caso generale di sezione generica e limitiamo in essa un'area parziale  $\Omega$  mediante una retta  $r$  intersecante il contorno in due punti  $A, B$  come indicato in fig. 63.

Consideriamo l'integrale, esteso a tale area  $\Omega$ , dell'espressione fornita dalla seconda delle [78. 7]:

$$I(\Omega) = \int_{\Omega} (\tau_{31,1} + \tau_{32,2}) d\Omega = \int_{\Omega} (b_1 x_1 + b_2 x_2) d\Omega . \quad [83. 19]$$

Assegnati alle costanti  $b_1, b_2$  i loro valori [81. 11] ed introdotti i momenti statici  $S_1(\Omega), S_2(\Omega)$  dell'area  $\Omega$ , individuata dalla retta  $r$ , rispetto agli assi  $x_1, x_2$ , l'integrale diviene:

$$I(\Omega) = - \left[ \frac{T_1 S_2(\Omega)}{J_2} + \frac{T_2 S_1(\Omega)}{J_1} \right] . \quad [83. 20]$$

D'altra parte lo stesso integrale può essere trasformato con la formula di Gauss in un integrale esteso al contorno  $s(\Omega)$  dell'area  $\Omega$ , composto dal tratto rettilineo  $r = AB$  e dal tratto curvilineo  $s_r = \widehat{BA}$  nel senso indicato come positivo in fig. 63:

$$I(\Omega) = \int_{s(\Omega)} (\tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2) ds . \quad [83. 21]$$



Ora, per le condizioni di equilibrio al contorno [77. 4] la funzione integranda è nulla su  $s$  e quindi su  $s_r$ , per cui l'integrale [83. 21] si riduce al solo tratto rettilineo  $r$  dove i coseni direttori assumono i valori:  $n_1 = \tilde{n}_1$ ,  $n_2 = \tilde{n}_2$ .

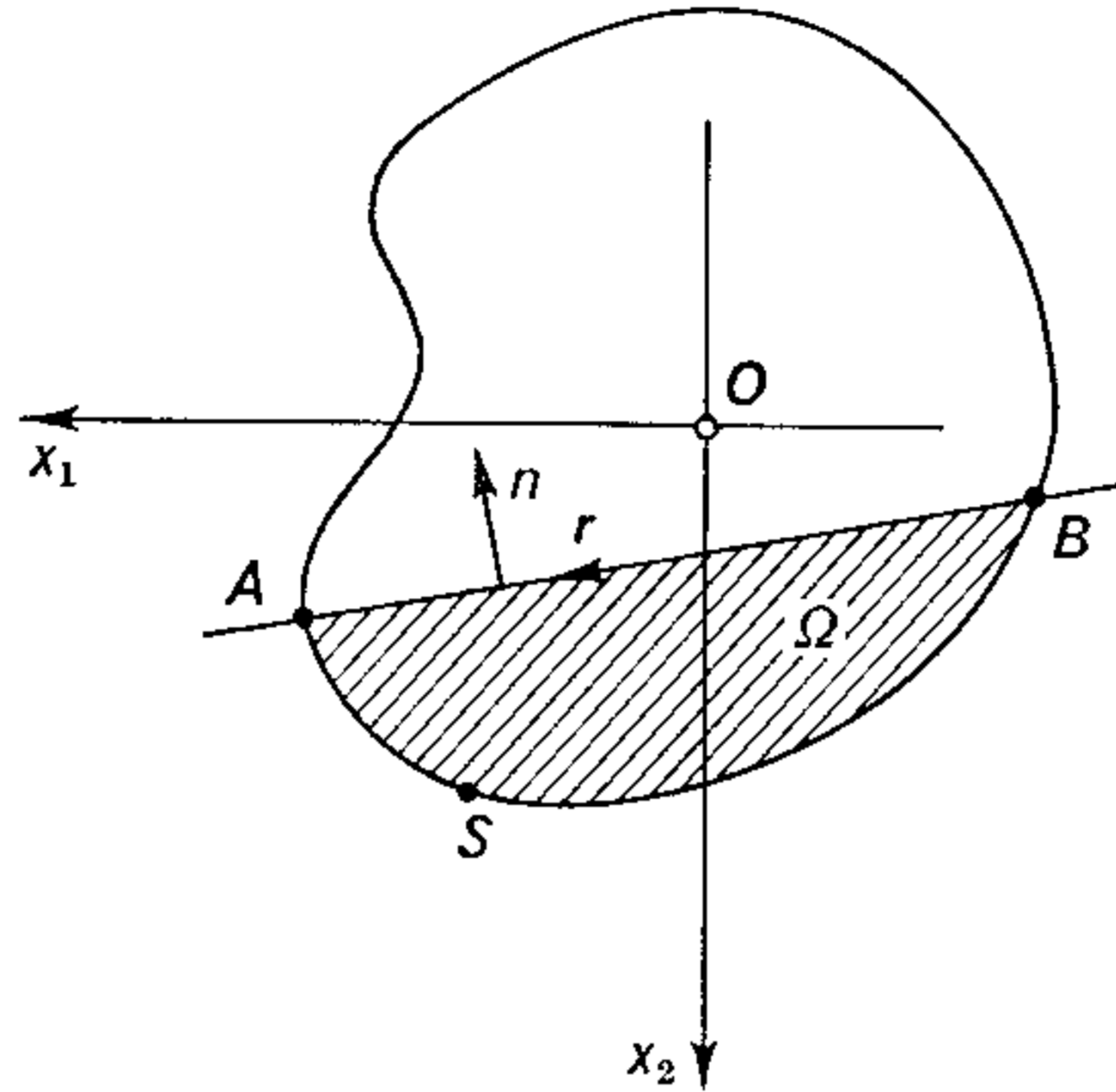


Fig. 63.

In conclusione, confrontando la [83. 20] con la [83. 21] e indicando con  $\tilde{\tau}_{31}$ ,  $\tilde{\tau}_{32}$  i valori medi delle tensioni tangenziali sul tratto  $r$ , otteniamo la relazione:

$$\tilde{\tau}_{31}\tilde{n}_1 + \tilde{\tau}_{32}\tilde{n}_2 = -\frac{1}{r} \left[ \frac{T_1 S_2(\Omega)}{J_2} + \frac{T_2 S_1(\Omega)}{J_1} \right], \quad [83. 22]$$

da cui il valore medio  $\tilde{\tau}_{3n}$  della componente della tensione tangenziale sulla normale a  $r$ :

$$\tilde{\tau}_{3n} = -\frac{1}{r} \left[ \frac{T_1 S_2(\Omega)}{J_2} + \frac{T_2 S_1(\Omega)}{J_1} \right]. \quad [83. 23]$$

Il valor medio della tensione tangenziale dipende esclusivamente dalle forze di taglio  $T_1$ ,  $T_2$  e non dal momento torcente  $M_t$ : una scelta opportuna della retta  $r$ , precisamente parallela a  $x_1$ , o a  $x_2$ , permette di determinare, per  $\tilde{n}_1 = 0$ ,  $\tilde{n}_2 = \pm 1$ , oppure  $\tilde{n}_1 = \pm 1$ ,  $\tilde{n}_2 = 0$ , i valori medi di ciascuna componente della tensione tangenziale.

#### 84. Stato di deformazione.

La conoscenza delle componenti di tensione  $\sigma_{33}$ , espressa in forma finita dalla [78. 1], e  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$ , ottenute come soluzioni del problema al contorno [78. 14] o [79. 13], ci permette di ricavare le componenti di deformazione [15. 2] dalle relazioni [40. 8], valide per un solido elastico omogeneo isotropo, quando in esse venga tenuto conto delle ipotesi fondamentali [77. 1] del problema di Saint-Venant.

In termini del modulo di elasticità normale  $E$ , definito dalla [40. 10], e del rapporto di contrazione trasversale  $\nu$ , definito dalla [40. 13], otteniamo le tre componenti di deformazione con indici uguali, cioè le tre dilatazioni lineari:

$$\varepsilon_{11} \equiv u_{1,1} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad \varepsilon_{22} \equiv u_{2,2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad \varepsilon_{33} \equiv u_{3,3} = \frac{1}{E} \sigma_{33}, \quad [84. 1]$$

essendo  $u_1, u_2, u_3$  le componenti di spostamento secondo la terna  $x_1, x_2, x_3$ .

In termini del modulo di elasticità tangenziale  $\mu$ , definito dalla [40. 17], otteniamo le tre componenti di deformazione con indici distinti, cioè, a meno del fattore  $1/2$ , le tre dilatazioni angolari:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = 0, \\ \varepsilon_{23} \equiv \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2\mu} \tau_{32}, \\ \varepsilon_{31} \equiv \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} (u_{3,1} + u_{1,3}) = \frac{1}{2\mu} \tau_{31}. \end{aligned} \quad [84. 2]$$

Consideriamo ora le tre componenti di rotazione dell'elemento generico in sè, ottenute specificando le [16. 7] nel riferimento attuale  $x_1, x_2, x_3$  con riguardo alla convenzione sui segni adottata nel § 16, fig. 8 e conservata nella definizione dei momenti  $M_1, M_2, M_t$  di cui al § 80, fig. 59. Riguardando dunque come positive le rotazioni che nei tre piani coordinati tendono a sovrapporre rispettivamente  $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1$ , saranno positive le componenti:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) \quad \text{nel piano } (x_1 x_2), \\ \omega_{32} &= \frac{1}{2} (u_{3,2} - u_{2,3}) \quad \text{nel piano } (x_2 x_3), \\ \omega_{13} &= \frac{1}{2} (u_{1,3} - u_{3,1}) \quad \text{nel piano } (x_3 x_1). \end{aligned} \quad [84. 3]$$

Le derivate rispetto alle coordinate possono essere espresse, come mostrammo nelle [17. 7], in termini delle derivate delle componenti di deformazione, cioè, tenendo presente che ora è  $\varepsilon_{12} = 0$  mentre  $\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$  sono indipendenti dalla variabile  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \omega_{21,1} &= -\varepsilon_{11,2}, & \omega_{21,2} &= \varepsilon_{22,1}, & \omega_{21,3} &= \varepsilon_{32,1} - \varepsilon_{31,2} \\ \omega_{32,1} &= \varepsilon_{31,2}, & \omega_{32,2} &= \varepsilon_{32,2} - \varepsilon_{22,3}, & \omega_{23,3} &= \varepsilon_{33,2}, \\ \omega_{13,1} &= \varepsilon_{11,3} - \varepsilon_{31,1}, & \omega_{13,2} &= -\varepsilon_{32,1}, & \omega_{13,3} &= -\varepsilon_{33,1}. \end{aligned} \quad [84. 4]$$

Le derivate miste delle componenti di spostamento si ottengono dalla [16. 1] per  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} u_{2,1} &= \omega_{21}, & u_{3,2} &= \varepsilon_{32} + \omega_{32}, & u_{1,3} &= \varepsilon_{13} + \omega_{13}, \\ u_{1,2} &= \omega_{12}, & u_{2,3} &= \varepsilon_{23} + \omega_{23}, & u_{3,1} &= \varepsilon_{31} + \omega_{31}, \end{aligned} \quad [84. 5]$$

ed hanno il significato geometrico di rotazioni nei piani  $(x_1x_2)$ ,  $(x_2x_3)$ ,  $(x_3x_1)$  degli elementi lineari inizialmente paralleli agli assi  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  rispettivamente.

Infine, tenendo presenti le [84. 1] e [84. 5] otteniamo i differenziali delle componenti di spostamento nella forma:

$$\begin{aligned} du_1 &= \varepsilon_{11} dx_1 + \omega_{12} dx_2 + (\varepsilon_{13} + \omega_{13}) dx_3, \\ du_2 &= \omega_{21} dx_1 + \varepsilon_{22} dx_2 + (\varepsilon_{23} + \omega_{23}) dx_3, \\ du_3 &= (\varepsilon_{31} + \omega_{31}) dx_1 + (\varepsilon_{32} + \omega_{32}) dx_2 + \varepsilon_{33} dx_3. \end{aligned} \quad [84. 6]$$

L'integrazione effettiva delle [84. 6] non ha interesse nella presente trattazione generale: ad essa ricorreremo nel successivo Cap. IX per lo sviluppo di alcuni casi particolari. Le proprietà generali dello stato di deformazione del cilindro di Saint-Venant possono essere discusse in modo sistematico senza ricorrere alle componenti di spostamento, ma sulla base esclusiva delle relazioni sopra riportate: tale analisi sarà svolta nei successivi §§ 85-86, separatamente per la deformazione associata alla tensione normale e per quella associata alle tensioni tangenziali.

### 85. Deformazione associata alla tensione normale.

Alla componente normale di tensione  $\sigma_{33}$  corrispondono le tre componenti di deformazione  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  espresse dalle [84. 1], dove in luogo di  $\sigma_{33}$  possiamo introdurre le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  mediante la [82. 1].

Vediamo così che le fibre longitudinali del cilindro di Saint-Venant subiscono dilatazioni lineari:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} \right), \quad [85. 1]$$

proporzionali alla distanza delle fibre stesse dall'asse  $x_3$ , mentre le fibre trasversali, rispettivamente parallele agli assi  $x_1$ ,  $x_2$ , subiscono dilatazioni lineari:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \left( \frac{N}{A} - \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} \right) = -\nu \varepsilon_{33}, \quad [85. 2]$$

$\nu$  volte minori delle precedenti e di segno contrario.



In assenza di forze taglienti  $T_1$ ,  $T_2$  e di momento torcente  $M_t$  risultano identicamente nulle le tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  e di conseguenza, per le [84. 2], le componenti di deformazione  $\varepsilon_{32}$ ,  $\varepsilon_{13}$ , oltre la  $\varepsilon_{12}$ . In altri termini, quando lo stato di tensione si riduce alla sola componente  $\sigma_{33}$ , due elementi lineari, ortogonali prima della deformazione e paralleli ad una coppia qualsiasi di assi coordinati, si mantengono ortogonali. L'asse  $x_3$  è dunque direzione principale sia per lo stato di tensione, sia per lo stato di deformazione.

Ogni elemento lineare parallelo a  $x_3$  subisce una dilatazione, diversa per ogni fibra longitudinale ma costante con  $x_3$ . In particolare la variazione di lunghezza dell'asse del cilindro si ottiene integrando la [85. 1] nell'intervallo  $(0, l)$  per  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ :

$$\Delta l \equiv \int_0^l (\varepsilon_{33})_0 dx_3 = \frac{Nl}{EA}, \quad [85. 3]$$

e dipende quindi dalla sola forza normale.

La dilatazione superficiale  $\Delta_A = \Delta_{12}$  di un elemento del piano  $(x_1x_2)$  risulta definita per deformazioni infinitesime dalla [15. 4] e quindi nel caso presente:

$$\Delta_{12} \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = -2\nu\varepsilon_{33}. \quad [85. 4]$$

La variazione di area della sezione trasversale:

$$\Delta A \equiv \int_A \Delta_{12} dA = -\frac{2\nu}{E} \int_A \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} \right) dA = -\frac{2\nu N}{E}, \quad [85. 5]$$

dipende così dalla sola forza normale e rappresenta una contrazione dell'area  $A$  per  $N$  positiva, cioè di trazione.

La dilatazione cubica  $\Delta_V$ , definita per deformazioni infinitesime dalla [15. 5], risulta ora:

$$\Delta_V \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = (1 - 2\nu)\varepsilon_{33}, \quad [85. 6]$$

per cui la variazione di volume dell'intero cilindro:

$$\begin{aligned} \Delta V &\equiv \int_V \Delta_V dV = \\ &= \frac{1 - 2\nu}{E} \int_0^l dx_3 \int_A \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} \right) dA = \frac{(1 - 2\nu) Nl}{E}, \quad [85. 7] \end{aligned}$$

dipende anch'essa dalla sola forza normale.

Le derivate [84. 4] delle componenti di rotazione dell'elemento generico in sè divengono nel caso in esame:

$$\begin{aligned} \omega_{21,1} &= \frac{\nu M_1}{EJ_1}, & \omega_{21,2} &= \frac{\nu M_2}{EJ_2}, & \omega_{21,3} &= 0, \\ \omega_{32,1} &= 0, & \omega_{32,2} &= 0, & \omega_{32,3} &= \frac{M_1}{EJ_1}, \\ \omega_{13,1} &= 0, & \omega_{13,2} &= 0, & \omega_{13,3} &= \frac{M_2}{EJ_2}, \end{aligned} \quad [85. 8]$$

e dipendono esclusivamente dai momenti flettenti. Ora, in assenza di dilatazioni angolari, le rotazioni [84. 5] si riducono alle sole compo-

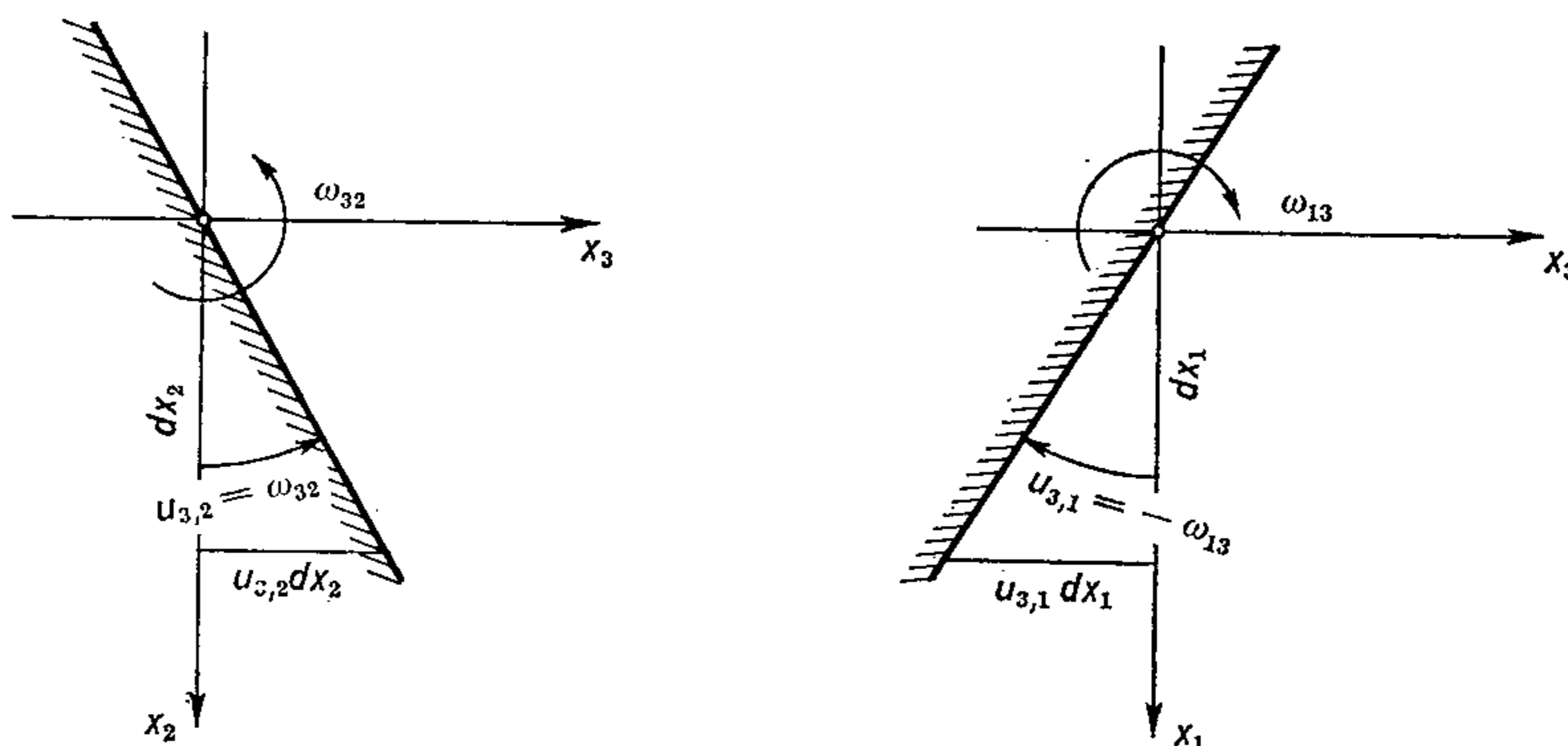


Fig. 64.

nenti ottenibili dalle [85. 8] e risultano quindi indipendenti dalle variabili  $x_1, x_2$  sia la rotazione  $u_{3,2} = \omega_{32}$  nel piano  $(x_2x_3)$ , perchè  $\omega_{32,1} = \omega_{32,2} = 0$ , sia la rotazione  $u_{3,1} = -\omega_{13}$  nel piano  $(x_3x_1)$ , perchè  $\omega_{13,3} = \omega_{13,2} = 0$ .

Ne deriva che la *sezione trasversale si deve conservare piana nel corso della deformazione*. Tale proprietà discende così dall'impostazione del problema di Saint-Venant: tuttavia è opportuno ricordare che la conservazione delle sezioni piane può essere assunta come ipotesi, svolgendo su questa base una trattazione elementare della flessione, dovuta a Navier e talvolta ancora utilizzata.

Operando ora una trasformazione ortogonale degli assi  $x_1, x_2$  negli assi  $\xi, \zeta$ , come mostrato nella fig. 65, si indichino le componenti del vettore  $\omega$  con un solo indice, in analogia con la stessa notazione adottata per i momenti, e precisamente l'indice che caratterizza la normale al piano sul quale agiscono, cioè:  $\omega_1 = \omega_{32}$ ,  $\omega_2 = \omega_{13}$ ,  $\omega_3 = \omega_{21}$ .

Nel nuovo riferimento le componenti  $\omega_\xi = \omega_{3\xi}$ ,  $\omega_\zeta = \omega_{\xi 3}$  risultano:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha, \\ \omega_\zeta &= -\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{85. 9}$$

mentre, tenendo presenti le [85. 8], le derivate rispetto a  $x_3$  di tali componenti assumono l'aspetto:

$$\begin{aligned}\omega_{\xi,3} &= \frac{1}{E} \left( \frac{M_1}{J_1} \cos \alpha + \frac{M_2}{J_2} \sin \alpha \right), \\ \omega_{\zeta,3} &= \frac{1}{E} \left( \frac{M_2}{J_2} \cos \alpha - \frac{M_1}{J_1} \sin \alpha \right).\end{aligned}\tag{85. 10}$$

La  $\omega_{\zeta,3}$  sarà nulla nel caso in cui l'asse  $\xi$  assuma una direzione, individuata da  $\operatorname{tg} \alpha = x_2/x_1$ , tale che:

$$\frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} = 0.\tag{85. 11}$$

Confrontando questa equazione con la [82. 11] scritta per  $\sigma_{33} = 0$  si deduce che la curvatura  $\omega_{\zeta,3}$  nel piano  $(\xi x_3)$  si annulla quando  $\xi$

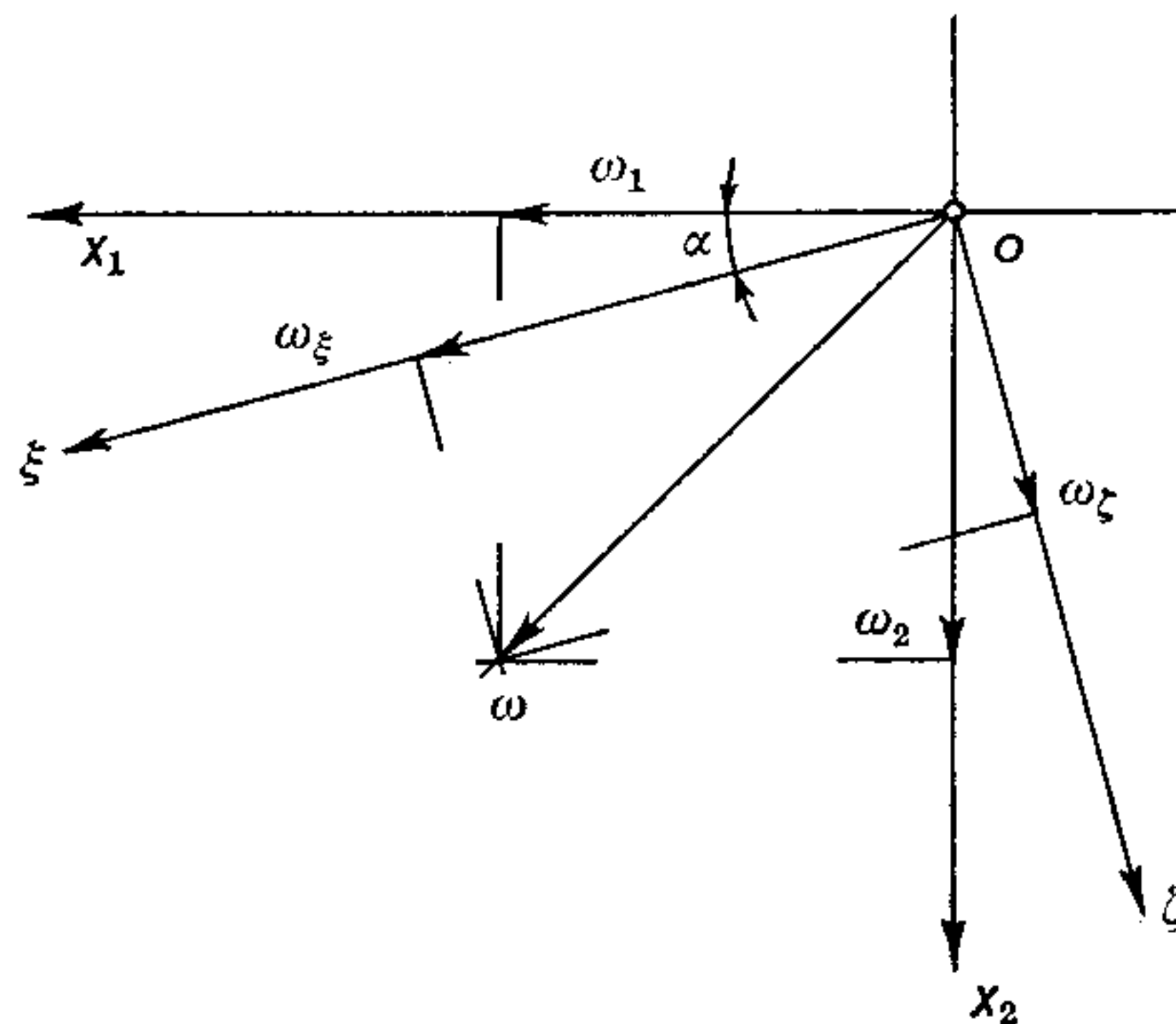


Fig. 65.

coincide con la parallela baricentrica all'asse neutro e quindi  $\zeta$  è normale a  $\xi$ .

La configurazione deformata dell'asse del cilindro dovuta al momento flettente  $M \equiv (M_1, M_2)$  è dunque contenuta in un piano  $(\zeta x_3)$  normale all'asse neutro  $\xi$  ed è rappresentata da una linea a curvatura costante  $\omega_{\xi,3}$  diversa da zero, cioè da un arco di cerchio.

A tale linea daremo il nome di *linea elastica* ed al piano  $(\zeta x_3)$  *piano di flessione*. Poichè, in generale, l'asse di sollecitazione  $\eta$  non è ortogonale all'asse neutro, possiamo concludere che il piano di flessione  $(\zeta x_3)$



non coincide con il piano di sollecitazione ( $\eta x_3$ ) ma forma con questo un *angolo di deviazione*  $\delta$ . Tale circostanza giustifica il nome di *flessione deviata* attribuito talvolta alla flessione dovuta ad un momento generico  $M \equiv (M_1, M_2)$ , per distinguerla dalla cosiddetta *flessione retta*, dovuta invece ad un particolare momento  $M$ , caratterizzato da una sola componente di sollecitazione,  $M_1$  o  $M_2$ , diversa da zero, e agente quindi in un piano normale ad un asse principale d'inerzia della se-

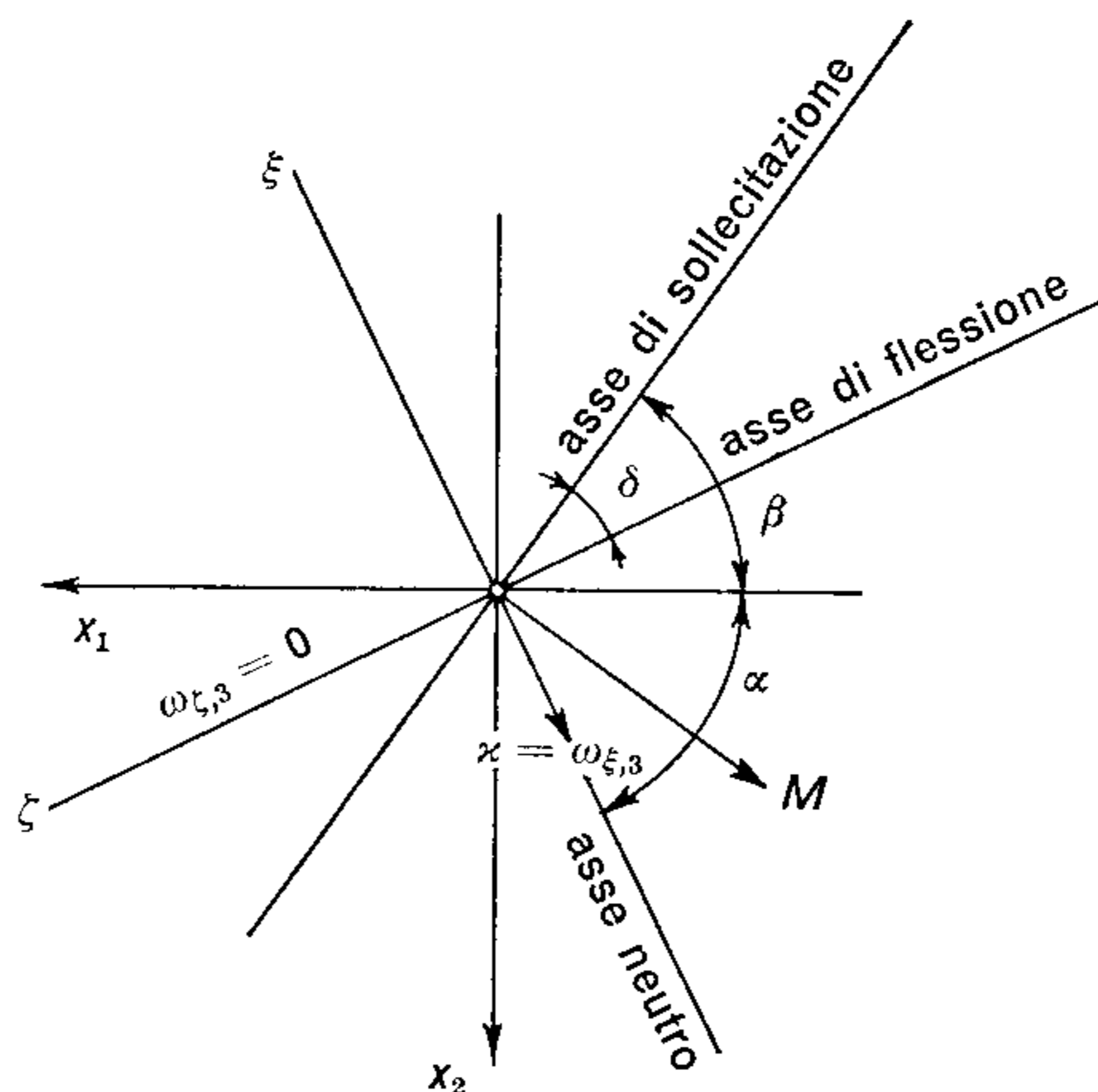


Fig. 66.

zione,  $x_2$  o  $x_1$  rispettivamente. A tale caso particolare corrisponde evidentemente un asse neutro,  $x_1$  o  $x_2$ , perpendicolare all'asse di sollecitazione,  $x_2$  o  $x_1$ , ed una deviazione  $\delta = 0$  del piano di flessione dal piano di sollecitazione.

Da relazioni formalmente analoghe alle [85. 8], ma riferite alla terna ortogonale  $(\xi, \zeta, x_3)$  anzichè alla terna principale  $(x_1, x_2, x_3)$ , otteniamo inoltre le curvature degli elementi lineari inizialmente paralleli agli assi  $\xi, \zeta$ :

$$\begin{aligned} \omega_{3,\xi} &= -\varepsilon_{\xi\xi,\zeta} = \nu \omega_{\xi,3}, \\ \omega_{3,\zeta} &= \varepsilon_{\zeta\zeta,\xi} = \nu \omega_{\zeta,3}, \end{aligned} \quad [85. 12]$$

dove la seconda vale  $\omega_{\zeta,3} = 0$  se  $\xi$  è parallela all'asse neutro.

Abbiamo visto che l'asse  $x_3$  è asse principale anche per lo stato di deformazione, cioè due elementi lineari ortogonali, inizialmente paralleli agli assi  $x_3, \zeta$  rispettivamente, devono mantenersi ortogonali ( $\varepsilon_{3\zeta} = 0$ ) nel corso della deformazione. Perciò la linea elastica deve incontrare perpendicolarmente i piani delle sezioni trasversali nella configurazione deformata: questi devono formare un fascio il cui so-

stegno ha traccia  $C$  sul piano  $(\zeta x_3)$ . L'arco di cerchio che costituisce la linea elastica ha centro in  $C$  e raggio  $R = 1/\kappa$ , mentre tutte le fibre inizialmente parallele a  $x_3$  si dispongono secondo archi di cerchio concentrici.

La seconda delle [85. 12] mostra che nel piano  $(x_1, x_2)$  della sezione trasversale la corda baricentrica parallela a  $\xi$  si deforma in un arco di cerchio di raggio  $1/\nu$  volte maggiore di  $R$ . Le corde parallele a  $\zeta$  si mantengono invece rettilinee nel corso della deformazione e ruotano in modo da risultare ortogonali al cerchio suddetto.

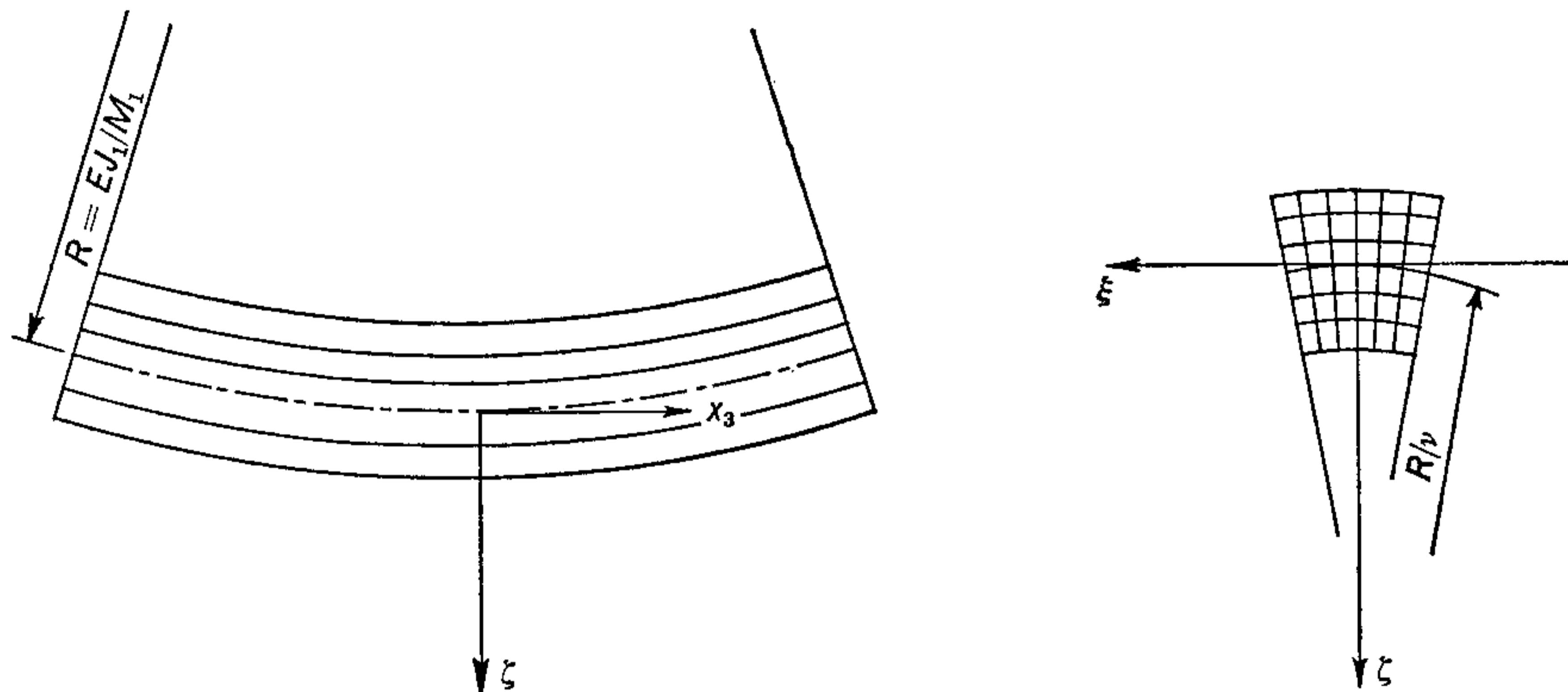


Fig. 67.

I precedenti risultati appaiono nella fig. 67 dove la sezione trasversale è stata assunta di forma rettangolare per maggiore evidenza di rappresentazione.

Infine, integrando nell'intervallo  $(0, l)$  la curvatura  $\kappa = \omega_{\xi,3}$ :

$$\Delta \omega = \int_0^l \omega_{\xi,3} dx_3 = \frac{l}{E} \left( \frac{M_1}{J_1} \cos \alpha + \frac{M_2}{J_2} \sin \alpha \right), \quad [85. 13]$$

otteniamo la rotazione relativa tra i piani, inizialmente paralleli, contenenti le sezioni trasversali terminali del cilindro.

Il lavoro di deformazione dovuto alla tensione normale risulta dalle relazioni [81. 1] e [84. 1]:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \varepsilon_{33} dV = \frac{1}{2E} \int_V \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1 x_2}{J_1} - \frac{M_2 x_1}{J_2} \right)^2 dV, \quad [85. 14]$$

da cui sviluppando e tenendo conto che  $x_1, x_2$  sono assi principali centrali d'inerzia:

$$U_\sigma = \frac{1}{2E} \int_0^l \left( \frac{N^2}{A} + \frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} \right) dx_3, \quad [85. 15]$$

e per momenti flettenti costanti, come avviene in assenza di taglio:

$$U_{\sigma} = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_1^2 l}{2EJ_1} + \frac{M_2^2 l}{2EJ_2}. \quad [85.16]$$

La particolare scelta del riferimento  $O(x_1, x_2, x_3)$  adottata permette di separare nell'espressione del lavoro di deformazione i contributi dovuti rispettivamente alla forza normale  $N$ , al momento flettente  $M_1$  ed al momento flettente  $M_2$ .

### 86. Deformazione associata alle tensioni tangenziali.

La presenza delle forze taglianti  $T_1, T_2$  e del momento torcente  $M_t$  comporta uno stato di tensione caratterizzato dalle componenti tangenziali  $\tau_{31}, \tau_{32}$  e dalla componente normale dovuta ai momenti flettenti variabili necessari per l'equilibrio rigido del cilindro e indotti, attraverso le costanti  $b_1, b_2$ , dai tagli ad esse associati, come mostrano le [81.11].

#### a) Considerazioni generali.

Limitandoci ad esaminare l'effetto sulla deformazione delle sole tensioni tangenziali, possiamo subito osservare che alle tensioni  $\tau_{31}, \tau_{32}$  corrispondono le componenti di deformazione  $\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$  date dalle [84.2] e le componenti di rotazione dell'elemento in sè  $\omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{13}$  date dalle [84.4] per  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ .

Le componenti di rotazione nei piani  $(x_1x_2), (x_2x_3), (x_3x_1)$  degli elementi lineari, inizialmente paralleli agli assi  $x_1, x_2, x_3$  rispettivamente, si ottengono allora dalle [84.5]. In particolare, nel piano  $(x_2x_3)$  gli elementi lineari inizialmente paralleli all'asse  $x_2$ , e nel piano  $(x_3x_1)$  gli elementi lineari inizialmente paralleli all'asse  $x_1$ , subiscono rotazioni  $u_{3,2}, u_{3,1}$  che dipendono in modo complesso dalle derivate delle funzioni  $\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_t(x_1x_2)$  e non si prestano ad una discussione significativa, almeno in generale.

La rotazione locale nel piano  $(x_1x_2)$ , poichè  $\varepsilon_{12} = 0$ , coincide con la rotazione dell'elemento generico in sè, risultando:

$$u_{2,1} = \omega_{21} = -\omega_{12} = -u_{1,2}. \quad [86.1]$$

Con riguardo alle [84.4] essa ha variazioni nulle rispetto a  $x_1, x_2$  mentre la sua variazione  $\kappa_t = \omega_{21,3}$  lungo l'asse  $x_3$ , coincide a meno del fattore  $2\mu$  con il secondo membro della prima [78.7], cioè:

$$\kappa_t \equiv \omega_{21,3} = \frac{1}{2\mu} [c + \bar{v} (b_1x_2 - b_2x_1)], \quad [86.2]$$



ed esprime la *torsione* delle fibre inizialmente parallele all'asse  $x_3$ . La legge di variazione [86. 2] mostra come la deformazione della sezione nel proprio piano ( $x_1 x_2$ ) sia composta da una rotazione rigida  $c/2\mu$  e da una distorsione variabile da punto a punto, dipendente esclusivamente dai tagli  $T_1, T_2$  che intervengono nelle costanti  $b_1, b_2$ .

b) *Deformazione dovuta al momento torcente.*

In assenza di taglio la costante  $c$  dipende dal solo momento torcente  $M_t$  e la [86. 2] diviene semplicemente:

$$c = 2\mu\kappa_t. \quad [86. 3]$$

Le rotazioni nei piani ( $x_2 x_3$ ), ( $x_3 x_1$ ) degli elementi lineari inizialmente paralleli agli assi  $x_2, x_1$  rispettivamente, cioè:

$$u_{3,2} = \varepsilon_{32} + \omega_{32}, \quad u_{3,1} = \varepsilon_{31} + \omega_{31}, \quad [86. 4]$$

possono essere determinate in termini della torsione  $\kappa_t$ .

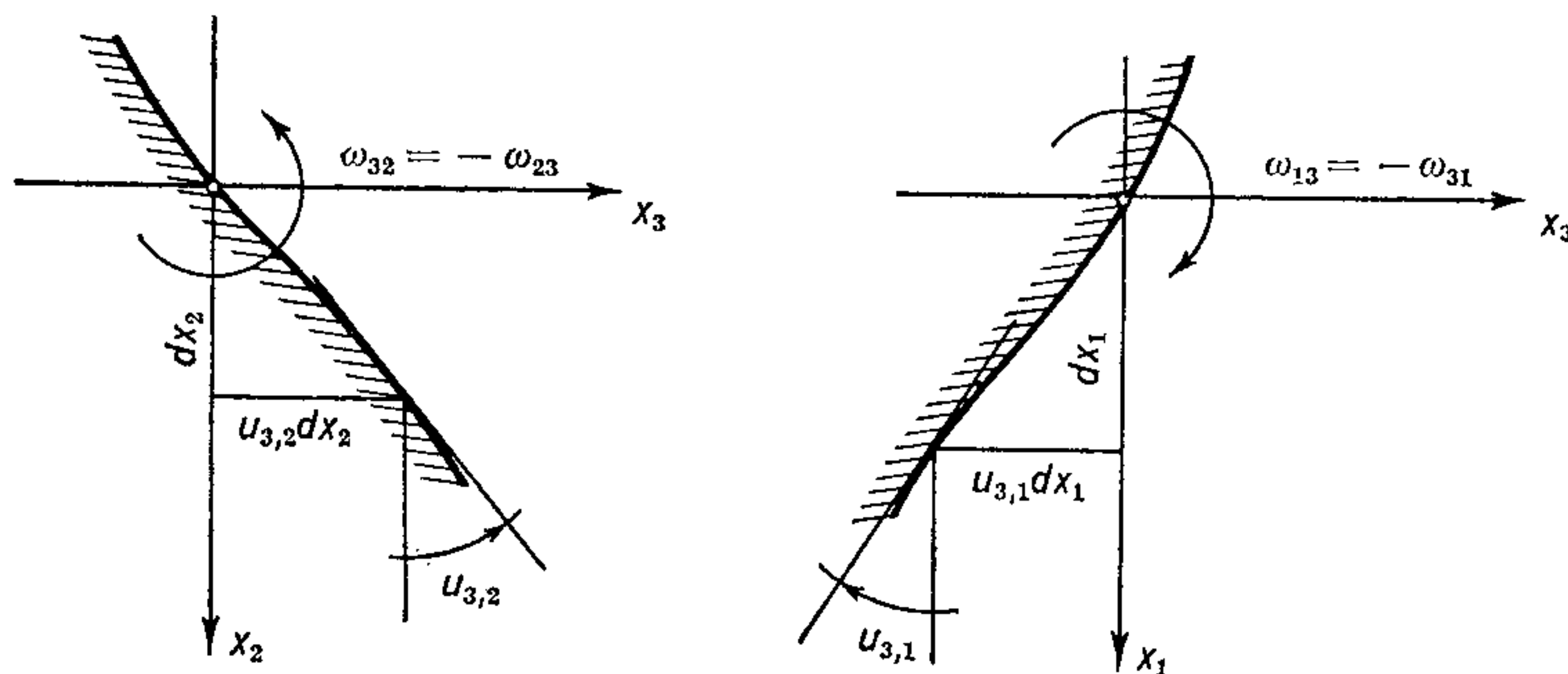


Fig. 68.

Infatti le componenti  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{31}$  risultano dalle [84. 2] ponendovi per  $\tau_{32}, \tau_{31}$  i valori ottenuti dalle [83. 6] per  $b_1 = b_2 = 0$ :

$$\varepsilon_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,2} + x_1), \quad \varepsilon_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,1} - x_2), \quad [86. 5]$$

mentre le derivate delle  $\omega_{32}, \omega_{31}$  divengono con riguardo alle [84. 4]:

$$\begin{aligned} \omega_{32,1} &= \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,12} - 1), & \omega_{32,2} &= \frac{\kappa_t}{2} \varphi_{t,22}, & \omega_{32,3} &= 0, \\ \omega_{31,1} &= \frac{\kappa_t}{2} \varphi_{t,11}, & \omega_{31,2} &= \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,12} + 1), & \omega_{31,3} &= 0. \end{aligned} \quad [86. 6]$$

Otteniamo così, integrando le precedenti equazioni differenziali, le componenti di rotazione dell'elemento in sè:

$$\omega_{32} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,2} - x_1), \quad \omega_{31} = \frac{\kappa_t}{2} (\varphi_{t,1} + x_2), \quad [86. 7]$$

a meno di due costanti che esprimono le rotazioni rigide d'insieme intorno agli assi  $x_1, x_2$  rispettivamente.

Sostituendo le espressioni trovate [86. 5] e [86. 7] nelle [86. 4] abbiamo infine le rotazioni:

$$u_{3,2} = \kappa_t \varphi_{t,2}, \quad u_{3,1} = \kappa_t \varphi_{t,1}, \quad [86. 8]$$

per cui la sezione trasversale subirà un ingobbamento fuori del proprio piano ( $x_1 x_2$ ) anche in presenza del solo momento torcente.

Tale ingobbamento risulta nullo se, e solo se,  $\varphi_{t,1} = \varphi_{t,2} = 0$ . In tal caso si annulla identicamente la derivata normale della  $\varphi_t(x_1, x_2)$  e la condizione al contorno [78. 22], per  $b_1 = b_2 = 0$ , sarà soddisfatta purchè:

$$x_2 n_1 - x_1 n_2 = 0. \quad [86. 9]$$

In altri termini, ricordando le relazioni [77. 5] tra i coseni direttori della normale e della tangente al contorno, l'equazione differenziale di questo, corrispondente a tale particolare situazione, deve risultare:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0, \quad [86. 10]$$

da cui integrando discende l'equazione in termini finiti di una circonferenza.

Possiamo dunque affermare che *la sezione trasversale del cilindro soggetto ad un momento torcente rimane piana quando il suo contorno ha la forma circolare.*

Sempre nel caso particolare di solo momento torcente esprimiamo la costante  $c$  delle [83. 18] mediante la [86. 3] in modo da poter scrivere la seguente relazione tra il momento torcente  $M_t$  e la torsione  $\kappa_t$ :

$$M_t = \kappa_t \mu (J_0 - D[\varphi_t]). \quad [86. 11]$$

L'espressione trovata mostra che per ottenere una deformazione torsionale assegnata  $\kappa_t$  è necessario un momento torcente  $M_t$  tanto più grande quanto maggiore è il prodotto  $\mu (J_0 - D[\varphi_t])$ , denominato *rigidezza a torsione*, e dipendente: dalle caratteristiche elastiche del materiale attraverso il modulo tangenziale  $\mu$ , dalla forma e dalle dimensioni della sezione trasversale attraverso  $J_0$  e  $D[\varphi_t]$ .

Un problema di notevole interesse ha per oggetto la determinazione della forma di sezione che, a parità degli altri parametri, presenta la massima rigidezza.

L'integrale di Dirichlet  $D[\varphi_t]$  è, per sua definizione, una quantità essenziale non negativa:

$$D[\varphi_t] \equiv \int_A (\varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2) dA \geq 0, \quad [86.12]$$

e la rigidezza a torsione sarà quindi massima per quella particolare forma di sezione alla quale corrisponde il minimo di  $D[\varphi_t]$ . Tale minimo è evidentemente lo zero e viene raggiunto per una funzione  $\varphi_t(x_1, x_2)$  le cui derivate parziali annullino la [86.12], cioè per  $\varphi_{t,1} = 0$ ,  $\varphi_{t,2} = 0$  e quindi  $\varphi_t(x_1, x_2) = \text{cost.}$

Una funzione siffatta è certamente armonica e verifica così l'equazione differenziale del problema  $\nabla \varphi_t = 0$ . Per essere una soluzione del problema dovrà verificare anche la condizione al contorno [78.22]: con ragionamento identico a quello che ci ha condotti alla [86.10], possiamo quindi affermare che *la sezione circolare offre la rigidezza torsionale massima.*

Per tale motivo conviene riferire la rigidezza torsionale di una sezione generica  $\mu(J_0 - D[\varphi_t])$  a quella  $J_0$  della sezione circolare, introducendo il cosiddetto *fattore di torsione*  $q$ , definito dal rapporto:

$$q = \frac{J_0}{J_0 - D[\varphi_t]}, \quad [86.13]$$

e che offre il vantaggio, rispetto alla rigidezza torsionale, di dipendere esclusivamente dalla forma della sezione e non dalle sue dimensioni.

In termini del fattore di torsione  $q$  la relazione fondamentale [86.11], risolta rispetto alla torsione  $\kappa_t$ , diviene:

$$\kappa_t = q \frac{M_t}{\mu J_0}, \quad [86.14]$$

e rappresenta l'espressione consueta impiegata nelle applicazioni.

Nella discussione precedente abbiamo implicitamente supposto  $J_0 > D[\varphi_t]$ : potrebbe sorgere il dubbio che ciò non si verifichi e la rigidezza torsionale diventi negativa. È evidente l'assurdo fisico di una ipotesi siffatta, perché in tal caso ad un momento torcente positivo dovrebbe corrispondere una rotazione torsionale negativa, o viceversa. D'altra parte una teoria deve essere non contraddittoria in sé ed ogni dimostrazione contenuta nell'ambito della teoria stessa: l'impossibilità della situa-



zione prospettata deve quindi emergere da considerazioni puramente analitiche. Si consideri a tale scopo l'espressione:

$$J_0 - D[\varphi_t] \equiv \int_A (x_1^2 + x_2^2 - \varphi_{t,1}^2 - \varphi_{t,2}^2) dA, \quad [86. 15]$$

che, tenendo presenti la [83. 14] e la [83. 17], può essere scritta formalmente:

$$\begin{aligned} J_0 - D[\varphi_t] &= \int_A [x_1 + x_2^2 - 2(x_1\varphi_{t,2} - x_2\varphi_{t,1}) + \varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2] dA = \\ &= \int_A [x_1 - \varphi_{t,2}]^2 + [x_2 + \varphi_{t,1}]^2 dA > 0. \end{aligned} \quad [86. 16]$$

Si deve escludere evidentemente l'annullarsi di tale espressione perché ciò condurrebbe alla condizione impossibile:  $\varphi_{t,2} = x_1$ ,  $\varphi_{t,1} = -x_2$ . L'integrale di Dirichlet è dunque limitato superiormente dal momento polare d'inerzia: la rigidezza torsionale non può essere nulla o negativa ed il fattore di torsione infinito o negativo.

c) *Lavoro di deformazione.*

Il lavoro di deformazione dovuto alle tensioni tangenziali  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$ , risulta:

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_V (2\tau_{31}\varepsilon_{31} + 2\tau_{32}\varepsilon_{32}) dV, \quad [86. 17]$$

e tenendo presenti le relazioni [83. 6] e [84. 2], anche:

$$\begin{aligned} U_\tau &= \frac{l}{8\mu} \int_A \{ [-b_1\varphi_{1,1} - b_2\varphi_{2,1} + c\varphi_{t,1} + \\ &+ b_1(x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2) - cx_2]^2 + [-b_1\varphi_{1,2} - b_2\varphi_{2,2} + \\ &+ c\varphi_{t,2} + b_2(x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2) + cx_1]^2 \} dA. \end{aligned} \quad [86. 18]$$

Sviluppando i quadrati indicati, se la sezione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi  $x_1$ ,  $x_2$ , il carattere *pari* o *dispari* in  $x_1$ ,  $x_2$  delle varie funzioni sotto il segno di integrale, sulla base dei risultati ottenuti nel § 82, permette di ridurre l'espressione precedente alla:

$$\begin{aligned} U_\tau &= \frac{b_1^2 l}{8\mu} \int_A [\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{1,2}^2 + (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2)(x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2 - 2\varphi_{1,1})] dA + \\ &+ \frac{b_2^2 l}{8\mu} \int_A [\varphi_{2,1}^2 + \varphi_{2,2}^2 + (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2)(x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2 - 2\varphi_{2,2})] dA + \\ &+ \frac{c^2 l}{8\mu} \int_A [\varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\varphi_{t,2}x_1 - \varphi_{t,1}x_2)] dA. \end{aligned} \quad [86. 19]$$

Osserviamo inoltre che, per quanto riguarda l'ultimo termine del terzo integrale, una trasformazione analoga alla [86.16] permette di sostituirlo con  $2(\varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2)$ .

Esprese allora le costanti  $b_1, b_2$  mediante le corrispondenti forze di taglio  $T_1, T_2$  in base alle [81.11] e la costante  $c$  mediante il momento torcente  $M_t$  in base alla [83.17], valida, per sezione simmetrica rispetto ad entrambi gli assi  $x_1, x_2$ , anche in presenza di taglio, introduciamo le notazioni:

$$\begin{aligned} K_1^{-1} &= \frac{1}{4J_2^2} \int_A [\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{1,2}^2 + (x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2)(x_1^2 - \bar{\nu}x_2^2 - 2\varphi_{1,1})] dA, \\ K_2^{-1} &= \frac{1}{4J_1^2} \int_A [\varphi_{2,1}^2 + \varphi_{2,2}^2 + (x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2)(x_2^2 - \bar{\nu}x_1^2 - 2\varphi_{2,2})] dA, \quad [86.20] \\ K_t &= \int_A [x_1^2 + x_2^2 - (\varphi_{t,1}^2 + \varphi_{t,2}^2)] dA = J_0 - D[\varphi_t]. \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo il lavoro di deformazione associato alle tensioni tangenziali nella forma:

$$U_\tau = \frac{T_1^2 l}{2\mu K_1} + \frac{T_2^2 l}{2\mu K_2} + \frac{M_t^2 l}{2\mu K_t}, \quad [86.21]$$

dove  $\mu K_1, \mu K_2$  sono le due *rigidezze a taglio* secondo gli assi  $x_1, x_2$  rispettivamente e  $K_t$  è la *rigidezza a torsione*.

Possiamo così concludere che per sezioni simmetriche rispetto ad entrambi gli assi è possibile separare nell'espressione del lavoro di deformazione i contributi dovuti rispettivamente alla forza di taglio  $T_1$ , alla forza di taglio  $T_2$  ed al momento torcente  $M_t$ .

Nelle applicazioni, anzichè alle rigidezze  $K$ , si usa fare riferimento a certi rapporti adimensionali che offrono il vantaggio di dipendere esclusivamente dalla forma della sezione e non dalle sue dimensioni. Già venne introdotto il *fattore di torsione*  $q$ , espresso dalla [86.13] come rapporto tra la rigidezza torsionale  $J_0$  della sezione circolare e la rigidezza della sezione generica considerata. Così possiamo definire i cosiddetti *fattori di taglio*:

$$\chi_1 = \frac{A}{K_1}, \quad \chi_2 = \frac{A}{K_2}, \quad [86.22]$$

in modo che il lavoro di deformazione [86.20] assuma la forma:

$$U_\tau = \chi_1 \frac{T_1^2 l}{2\mu A} + \chi_2 \frac{T_2^2 l}{2\mu A} + q \frac{M_t^2 l}{2\mu J_0}. \quad [86.23]$$

Il significato dei fattori di taglio appare considerando una distribuzione uniforme delle tensioni tangenziali sulla sezione, cioè  $\tau_{31} = T_1/A$ ,  $\tau_{32} = T_2/A$ . In questo caso ipotetico le rigidezze a taglio risulterebbero  $K_1 = A$ ,  $K_2 = A$ , come mostra uno sviluppo della [86. 17]. I fattori di taglio esprimono dunque il rapporto tra la rigidezza corrispondente a siffatta distribuzione uniforme delle tensioni tangenziali e la rigidezza corrispondente alla loro distribuzione effettiva per ogni forma particolare di sezione.