

CAPITOLO VII

STATI LIMITI DI ROTTURA

70. Teorie sulla rottura.

L'energia di deformazione di un solido viene ad accumularsi tra i legami atomici e ne può provocare la distruzione progressiva, dando inizio ad un processo a catena capace di condurre alla separazione completa del solido in parti quando il livello energetico raggiunga un valore limite.

Si perviene in tal caso ad uno stato di instabilità della struttura interna del materiale nel senso che la trasformazione in calore dell'energia di deformazione è interrotta bruscamente dall'apparizione di un nuovo meccanismo capace di trasformare tale energia in energia di attivazione delle nuove superficie lungo le quali si svilupperà il distacco progressivo. Il raggiungimento del punto di transizione dipende da tutto il processo deformativo.

La rottura consiste dunque nel distacco progressivo dei legami atomici lungo le superficie di attivazione ed il processo di distacco può essere così una continuazione del processo che dà origine alla deformazione plastica discusso nel § 63, esteso oltre il limite di snervamento. Tale situazione può aver luogo solo quando i legami interatomici vengano continuamente ristabiliti nel corso dello scorrimento plastico, come succede ad esempio in alcuni materiali metallici. Tale comportamento rappresenta però l'eccezione piuttosto che la regola: nei materiali amorfi, dove è pressochè assente lo scorrimento plastico, il distacco è sempre associato a tensioni e deformazioni normali al piano di separazione.

In altri termini lo stato di rottura può essere preceduto o no da una deformazione plastica, ma i due processi, per quanto intimamente collegati, avrebbero natura essenzialmente diversa. Si parla così di *rottura duttile* quando la fase di rottura rappresenta la fase finale di un processo rilevante di deformazione plastica, e di *rottura fragile*

quando il processo di deformazione plastica che precede il fenomeno del distacco è praticamente inesistente, almeno sul piano macroscopico.

Le teorie sulla rottura sono riferite a questa seconda situazione e fondate sulla ipotesi che la compagine solida sia indebolita dalla presenza di innumerevoli microfessure e distacchi interni, tali da sfuggire all'osservazione superficiale. Queste fessurazioni dipendono in modo estremamente complesso dalla non omogeneità del materiale e sembrerebbero dovute alla modalità di formazione dei cristalli nel passaggio dallo stato fluido allo stato solido, alle correnti di convezione nel fluido ed alle connessioni tra cristalli di diversa natura.

Benché la conoscenza del complesso fenomeno da cui trae origine la formazione delle prime fasi di fessurazione abbia carattere puramente qualitativo, tutte le cause alle quali abbiamo sopra accennato comportano concentrazioni localizzate dello stato di tensione.

Sulla base di tali considerazioni GRIFFITH¹ propose una teoria della rottura di un solido in termini della sua energia superficiale, cioè dell'energia proporzionale alla superficie di distacco ed alle tensioni agenti su di essa. La teoria stabilisce così che ogni aumento delle tensioni di trazione produce una diminuzione dell'energia di deformazione, in presenza di microfessure, superiore all'aumento di energia dovuta alla formazione di nuove superficie libere: ciò comporta una rapida estensione delle microfessure stesse e conseguente rottura.

L'aspetto analitico della teoria è fondato su un problema di elasticità risolto da INGLIS² per una striscia piana indefinita nella quale sia presente una cavità a forma di ellisse molto allungata. Con riferimento alla fig. 42 la tensione massima in corrispondenza del foro vale:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{11} (1 + 2a/b), \quad [70.1]$$

essendo a , b i semiassi dell'ellisse.

Per una ellisse molto allungata, alla quale può essere assimilata una microfessura, potremo trascurare l'unità in confronto al termine $2a/b$, per cui introducendo la curvatura massima $\kappa = a/b^2$, otterremo dalla [70.1]:

$$\sigma_{\max} = 2\sigma_{11} \sqrt{a\kappa}. \quad [70.2]$$

La differenza U_D tra le quantità di energia potenziale elastica che possono essere immagazzinate nel solido in assenza del foro ed in presenza di questo, vale:

$$U_D = \frac{\pi a^2 \sigma_{11}^2}{E}, \quad [70.3]$$

essendo E il modulo di elasticità normale definito nel § 40 a).

¹ A. A. GRIFFITH, *Phil. Trans. Roy. Soc., London (A)*, **221**, 163 (1920).

² C. E. INGLIS, *Trans. Inst. Naval Arch., London*, **60**, 219 (1919).

Ora, l'energia superficiale U_S corrispondente all'apparizione di una microfessura di ampiezza $2a$ risulta:

$$U_S = 4a\Phi_s, \quad [70.4]$$

dove Φ_s indica l'energia superficiale specifica.

Indicando perciò con $\Delta U = U_D - U_S$ la variazione di energia potenziale elastica conseguente alla formazione della microfessura, la condizione di instabilità che darebbe origine alla sua estensione è:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial a} = 0, \quad [70.5]$$

e comporta un valore della tensione $\sigma_{11} = \sigma_R$ pari a:

$$\sigma_R = \sqrt{2E\Phi_s/\pi a}. \quad [70.6]$$

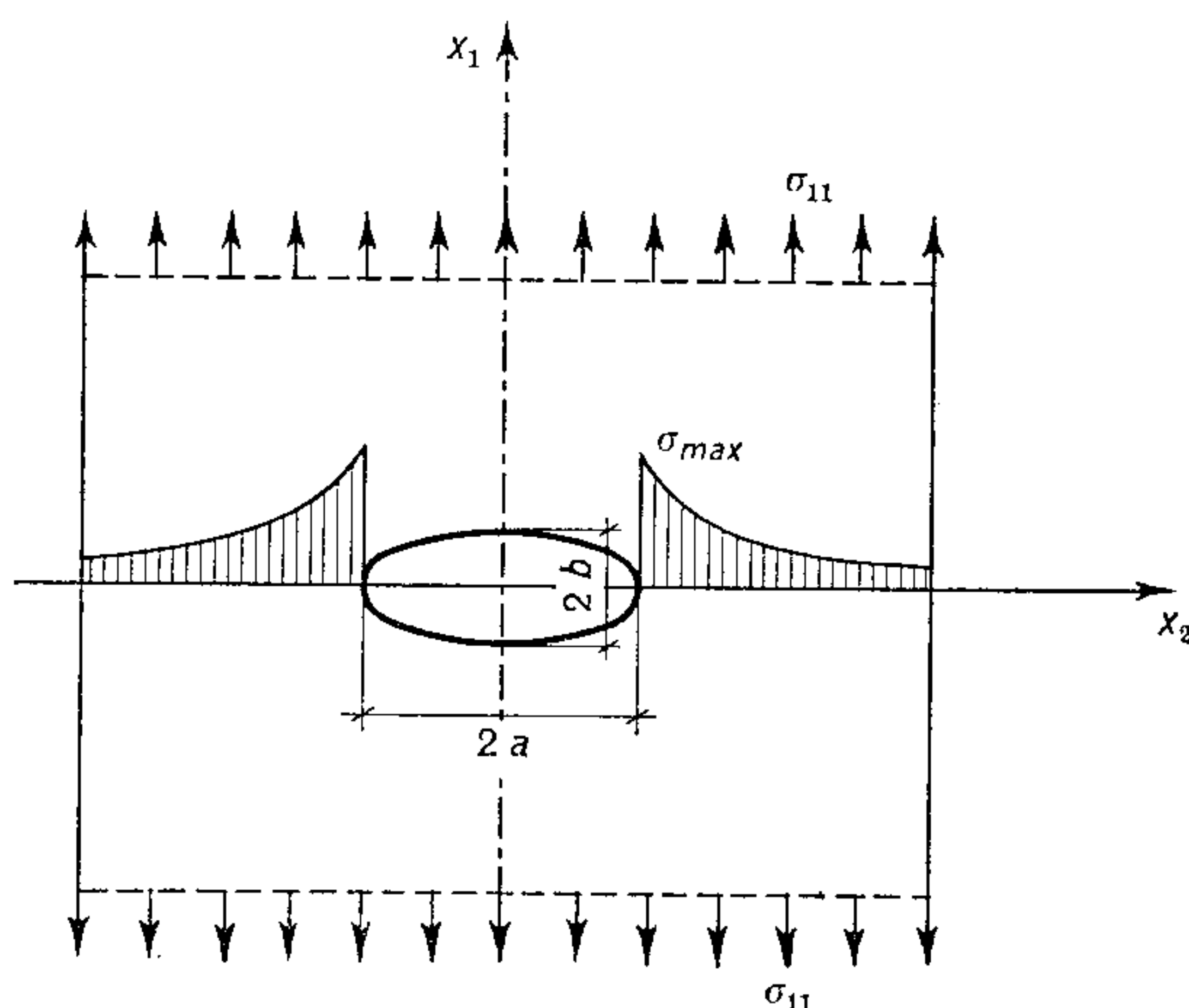


Fig. 42.

Secondo Griffith, inoltre, in un materiale soggetto a compressione semplice sono presenti anche tensioni di trazione intorno alle punte delle microfessure allungate con asse inclinato di un certo angolo rispetto alla direzione della forza di compressione. In tal modo lo stato limite di rottura nelle microfessure viene raggiunto per una tensione media di compressione più elevato di quella corrispondente ad una semplice trazione. Si ha così una spiegazione pienamente accettabile da un punto di vista meccanico della circostanza ben nota che nei materiali fragili la resistenza a rottura per compressione è considerevolmente maggiore di quella per trazione.

Il valore della teoria di Griffith risiede nell'aver mostrato come la resistenza a rottura σ_R possa essere fatta dipendere da poche variabili fisiche e come la condizione di rottura possa essere chiarita esaminando

l'equilibrio delle tensioni nelle zone indebolite dalla presenza delle microfessure.

In tali zone, di dimensioni piccole ma comparativamente grandi rispetto alle distanze atomiche, avviene uno scambio fra energie di natura diversa capace di provocare la propagazione delle regioni indebolite. Inoltre, proprio da questa interazione della energia di deformazione elastica con l'energia superficiale corrispondente alla comparsa di una microfessura appare il carattere *anelastico* dei fenomeni di rottura, secondo la definizione data nel § 46.

71. Condizione di rottura.

Sia nel caso di rottura duttile sia nel caso di rottura fragile il fenomeno del distacco è preceduto o accompagnato dalla deformazione irreversibile di una o più fasi costituenti il materiale. L'aspetto anelastico della deformazione comporta quindi notevoli modifiche strutturali associate, nei materiali metallici, alla formazione di una struttura frammentata entro il reticolo atomico fondamentale e, nei materiali amorfi, alla ridistribuzione e concentrazione delle tensioni in un numero di legami interni gradualmente decrescente.

Nella formulazione di un criterio generale di rottura occorre quindi considerare le principali variabili che hanno influenza sul fenomeno anelastico, e precisamente: lo stato di tensione, la deformazione plastica, la sua velocità, la temperatura. D'altra parte nel processo di distacco dei legami interni che dà inizio alla rottura l'influenza della deformazione elastica è profondamente diversa da quella della deformazione anelastica: infatti mentre la prima facilita la distruzione progressiva dei legami, la seconda agevola il meccanismo di diffusione riducendo così la tendenza al distacco.

Le due specie di deformazione devono quindi comparire separatamente nella condizione di rottura ed un criterio generale avrebbe quindi la forma:

$$R(\sigma_{ij}) = F(\varepsilon_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^p, T), \quad [71.1]$$

dove R , F sono funzioni opportune la cui struttura è da determinarsi sperimentalmente per ogni materiale.

Il criterio [71. 1] dovrebbe essere applicabile ad ogni tipo di rottura, e del resto, esperienze sistematiche non indicano la esistenza di un confine preciso tra rottura duttile e rottura fragile al variare dei parametri considerati. Nè sembra possedere molto fondamento l'idea, abbastanza diffusa, che la rottura fragile si verifichi sotto una tensione

ben definita, indipendente dalla deformazione plastica e dalla temperatura, quasi fosse una vera e propria costante del materiale.

Una semplificazione notevole della [71. 1] viene raggiunta nell'ipotesi che la deformazione plastica ε_{ij}^p intervenga nel criterio attraverso un parametro caratteristico, ad esempio l'energia dissipata Φ_p , in modo che la [71. 1] divenga:

$$R(\sigma_{ij}) = F(\Phi_p, \dot{\Phi}_p, T). \quad [71. 2]$$

In un materiale isotropo l'inizio della fase di rottura deve dipendere dagli invarianti dello stato di tensione I_1, I_2, I_3 , cioè:

$$R(I_1, I_2, I_3) = F(\Phi_p, \dot{\Phi}_p, T). \quad [71. 3]$$

Inoltre, poichè una espansione di volume ha sulla rottura una influenza assai più sensibile di una contrazione di volume, l'effetto della dilatazione cubica corrispondente, che di per sè non interferisce con l'isotropia del materiale, introduce una asimmetria di comportamento rispetto alla perfetta incompressibilità.

In sostanza, mentre da un lato la simmetria dei parametri caratteristici della deformazione esige che la condizione di rottura contenga le sole potenze pari degli invarianti di tensione, dall'altro la asimmetria nei confronti della dilatazione cubica comporta la presenza anche delle potenze dispari di tali grandezze.

Poiché il fenomeno della rottura rappresenta essenzialmente una dissipazione di energia, ogni criterio di rottura deve essere di tipo energetico, in modo da definire il valore limite dell'energia Φ immagazzinata nel solido prima di raggiungere il distacco dei legami. Tale punto di vista comporta condizioni analoghe a quelle discusse nel caso dello snervamento; la sola differenza consistendo nel carattere determinante che, nella rottura, deve assumere la dilatazione cubica $\Delta = I_1$.

Appare infine ragionevole supporre che l'effetto dell'energia potenziale Φ_V corrispondente alla variazione di volume abbia sull'inizio del processo di rottura una importanza diversa da quella dovuta all'energia distorcente Φ_D .

Le considerazioni precedenti conducono ad una semplificazione notevole della funzione R ed alla formulazione di un criterio di rottura per i solidi isotropi nella forma:

$$\Phi_D + f(\Delta) \Phi_V = F(\Phi_p, \dot{\Phi}_p, T), \quad [71. 4]$$

dove la funzione $f(\Delta)$ deve essere determinata dall'esperienza, essendo positiva per una espansione di volume ($\Delta > 0$) e negativa per una contrazione ($\Delta < 0$) mentre Φ_V è sempre positiva.

L'analisi sperimentale della condizione di rottura costituisce un problema certamente più difficile dell'analogo problema relativo alla condizione di plasticità. Ciò è dovuto in gran parte alla realizzazione di provini nei quali sia possibile ottenere uno stato di tensione triassiale misurabile evitando ogni anisotropia dovuta ai procedimenti tecnologici di costruzione dei provini stessi ed alla valutazione della anisotropia indotta nel corso della prova dalla deformazione plastica e dall'incrudimento.

L'influenza della storia della deformazione sulla tensione di rottura rappresenta essenzialmente il risultato della deformazione anelastica espresso nei termini Φ_p e $\dot{\Phi}_p$ della funzione F : è stato osservato ad esempio, che alla temperatura ambiente una moderata deformazione preliminare di compressione riduce il limite di rottura a trazione in circostanze intimamente collegate con l'effetto Bauschinger discusso nel § 60.

Introducendo l'energia vincolata, dovuta alla frammentazione dei cristalli sotto la precompressione, nella condizione di rottura, questa diviene sensibile alla direzione della deformazione applicata. Ciò vale, in particolare, per l'espansione cubica alla quale è dovuta la diminuzione di densità associata con l'incrudimento. L'energia vincolata riduce così il valore della energia di deformazione che può essere immagazzinata prima di pervenire alla rottura, intensificando l'influenza della espansione cubica sul limite di rottura.

D'altra parte la resistenza a rottura in trazione è aumentata da una precompressione se questa viene spinta ad intensità notevoli, in modo cioè da permettere all'incrudimento associato alla frammentazione cristallina, ed alla conseguente anisotropia, di superare l'effetto dello stato di tensione indotto da pressioni moderate.

In conclusione, sia l'effetto negativo di precompressioni moderate, sia l'effetto positivo di precompressioni spinte devono essere presi in considerazione in quanto influenti sulla deformazione plastica che precede e accompagna la rottura e non perché dipendenti direttamente dalla resistenza a rottura.

Tra i numerosi tentativi sperimentali intesi a stabilire la forma precisa della funzione di rottura R hanno particolare importanza le ricerche di Mc Adam sui materiali metallici esposte in numerose memorie¹. Volendo limitare la discussione ad uno stato di tensione caratterizzato da due tensioni principali uguali in modo da poter rappresentare i risultati in un piano, riferendoci ad un sistema avente le σ_I come ordinate e le $\sigma_{II} = \sigma_{III}$ come ascisse, otteniamo il diagramma della fig. 43: esso

¹ D. J. MC ADAM, JR, G. W. GEIL, W. D. JENKIN, *Proc. Amer. Soc. Test. Materials*, **47**, 554 (1947), e precedenti lavori ivi citati.

esprime la proiezione ortogonale sul piano (σ_I, σ_{II}) di una sezione piana della superficie di rottura R ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} = 0$).

I punti A, B caratterizzano le condizioni di rottura osservate rispettivamente in semplice trazione ed in semplice compressione, mentre i punti C, E si riferiscono alla rottura di provini cilindrici soggetti rispettivamente ad una trazione e ad una compressione idrostatica sulla superficie laterale, senza alcuna tensione in direzione assiale. Il punto D corrisponde ad uno stato di tensione triassiale con tensioni principali uguali $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$.

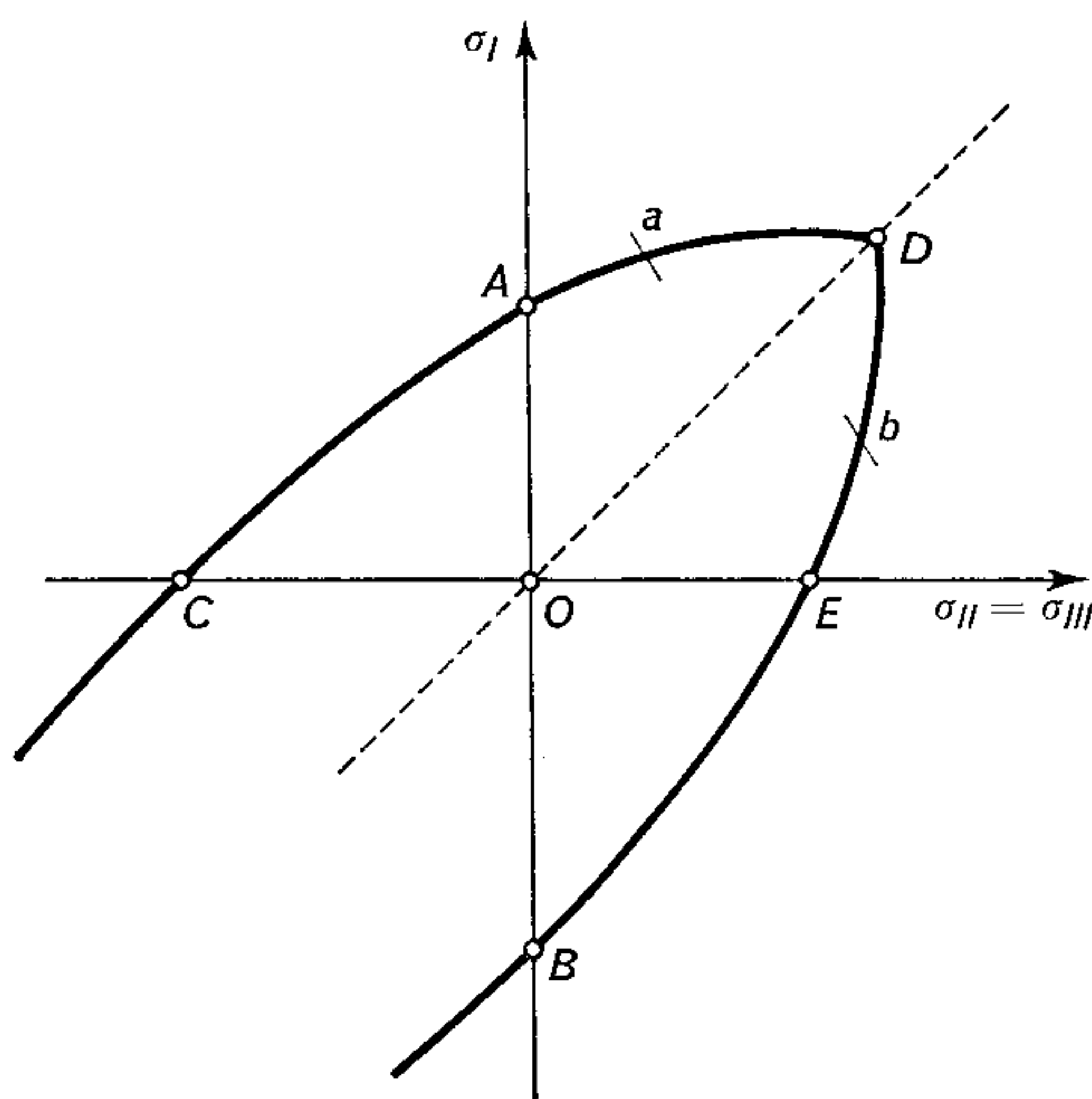


Fig. 43.

È importante notare che nel diagramma piano di Mc Adam una singola curva continua, rappresenta tutti gli stati di tensione capaci di provocare la rottura quando tutte e tre le tensioni principali sono di trazione (i tratti a o b nel quadrante positivo del piano $\sigma_I \sigma_{II}$) o quando tutte e tre le tensioni principali sono di compressione (i tratti a o b nel quadrante negativo del piano $\sigma_I \sigma_I$).

Lo stesso Mc Adam, inoltre, introducendo alcune approssimazioni sulla distribuzione delle tensioni in provini deformati plasticamente, trovò che la tensione tangenziale alla quale si verifica la rottura decresce con l'aumentare della tensione idrostatica. Ora, in uno stato di tensione biassiale, la tensione tangenziale max:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}), \quad [71.5]$$

è approssimativamente proporzionale alla radice quadrata dell'energia potenziale elastica distorcente espressa dalla [62.9]:

$$\Phi_D = \frac{1}{6\mu} \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{III} \simeq \frac{1}{6\mu} (\sigma_I - \sigma_{III})^2, \quad [71.6]$$

mentre la tensione idrostatica $\bar{\sigma}$ è proporzionale alla radice quadrata dell'energia Φ_V corrispondente ad una variazione di volume espressa dalla [62. 7]:

$$\Phi_V = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \Delta = \frac{1}{2K} \bar{\sigma}^2. \quad [71. 7]$$

Tale osservazione tenderebbe a confermare la forma [71. 4] della condizione di rottura per valori definiti di Φ_p , $\dot{\Phi}_p$, T e quindi della funzione F .

72. Criteri particolari di rottura.

Come già osservammo a proposito dei criteri particolari di plasticità, anche nel caso della rottura la specificazione della funzione $R(\sigma_{ij})$ costituisce un problema arduo, da un lato per le difficoltà insite nei procedimenti sperimentali e nella interpretazione dei risultati ottenuti in prove di rottura relative a stati di tensione complessi, dall'altro per la necessità di pervenire a relazioni sufficientemente semplici utilizzabili nelle applicazioni.

Qui esamineremo due criteri derivabili entrambi dalla [71. 4], ridotta, in base alle considerazioni esposte alla fine del § 71, alla forma:

$$\tau = f(\bar{\sigma}). \quad [72. 1]$$

Sebbene la condizione di rottura debba avere un contenuto eminentemente energetico, conviene rappresentare i criteri in discussione nel diagramma piano di Mohr esposto nel § 26.

a) Criterio di Coulomb.

Per esprimere la condizione di rottura di un materiale fragile, COULOMB¹ avanzò l'ipotesi che la situazione limite si verifichi sull'elemento superficiale che, a parità di tensione normale σ , sopporta il valore della tensione tangenziale:

$$|\tau| = (c - \sigma) \operatorname{tg} \varphi. \quad [72. 2]$$

In tale espressione c , φ rappresentano due costanti fisiche del materiale, e precisamente c esprime la *coesione* e φ l'*angolo di attrito solido*.

La [72. 2] corrisponde ad una linearizzazione della [72. 1] e, con riferimento alla fig. 44, dove è rappresentato un elemento soggetto ad

¹ C. A. COULOMB, *Mem. Acad. Roy. pres. par divers savants*, Paris, 7 (1776).

uno stato triassiale (con la direzione della σ_{II} normale al piano della fig.), esclude ogni influenza della σ_{II} sul raggiungimento della rottura per scorrimento lungo il piano critico indicato con tratteggio.

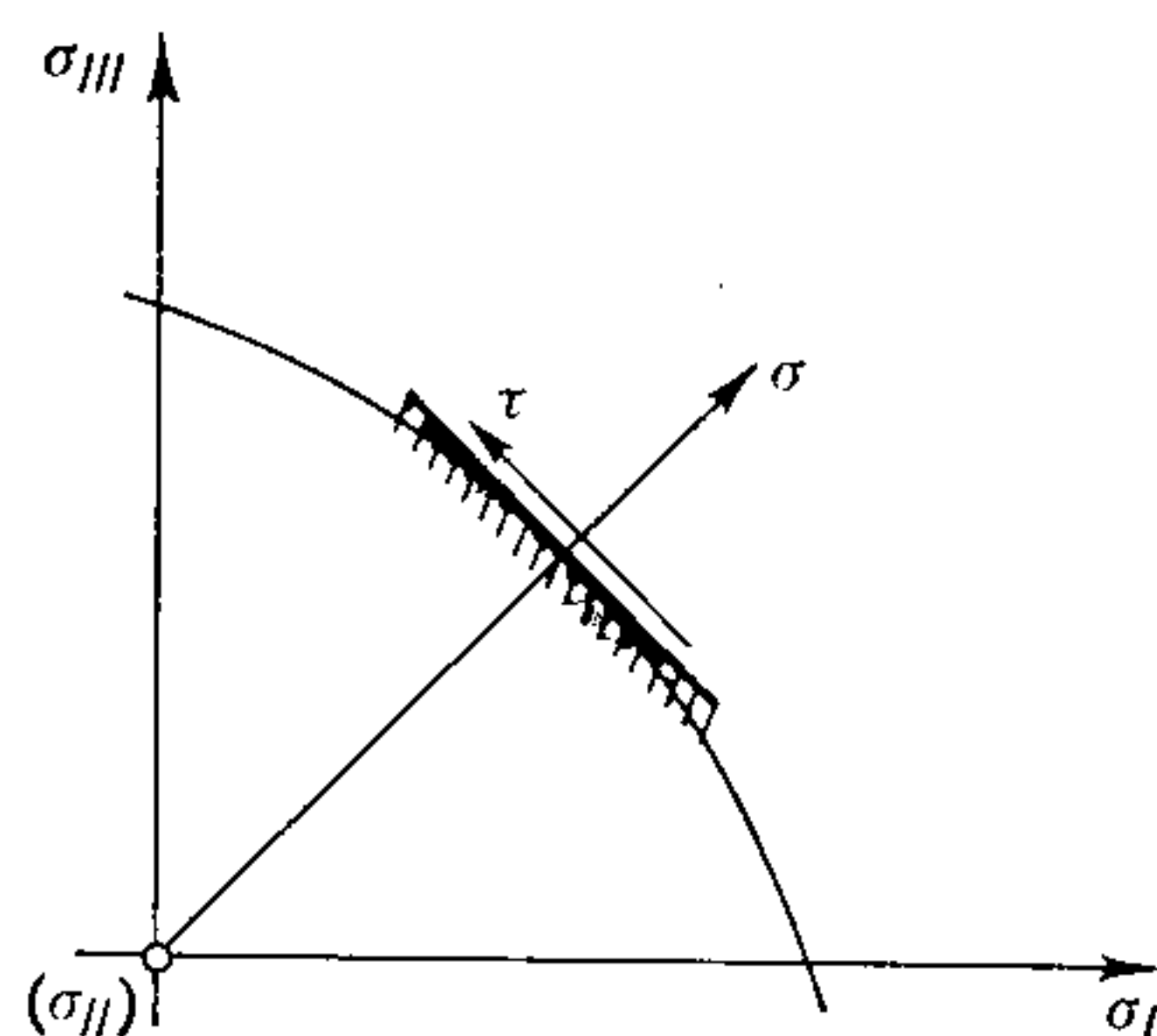


Fig. 44.

Poiché la tensione tangenziale massima:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}), \quad [72.3]$$

equivale per la [25.15] al raggio del maggiore dei cerchi di Mohr, gli stati di tensione limiti per la rottura saranno rappresentati dall'insieme dei cerchi aventi per raggio il valore [72.3] e tangenti alle due semirette di equazione $\tau = \pm (c - \sigma) \operatorname{tg} \varphi$, come appare dalla fig. 45.

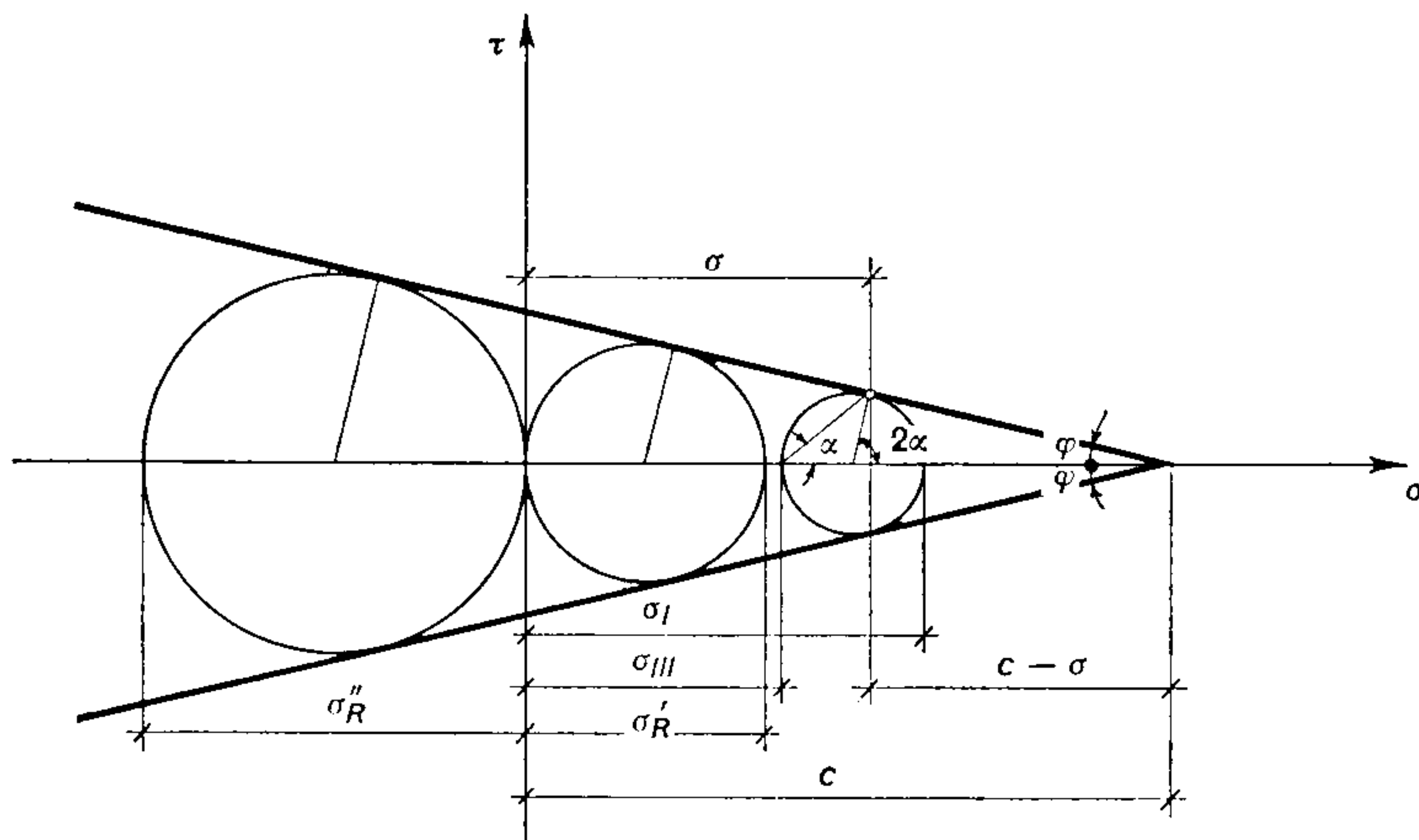


Fig. 45.

Il criterio porta quindi a considerare come *sicure per la rottura* quelle distribuzioni (σ, τ) i cui punti rappresentativi S sono interni alla regione del piano delimitata dalle due semirette [72.2]. Nella fig. 45 sono stati tracciati i due cerchi di Mohr corrispondenti ai due stati monoassiali $\sigma_I = \sigma'_R, \sigma_{III} = 0$ e $\sigma_{III} = \sigma''_R, \sigma_I = 0$, essendo σ'_R, σ''_R le ten-

sioni limiti di rottura per *semplice trazione* e per *semplice compressione* rispettivamente:

$$\sigma'_R = 2c \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \sigma''_R = 2c \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad [72.4]$$

Una interessante trasformazione del criterio può essere ottenuta osservando che:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \varphi, \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III}) + \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \sin \varphi, \quad [72.5]$$

e quindi la [72.2] diviene, in termini delle tensioni principali:

$$\frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \varphi = [c - \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III}) - \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) \sin \varphi] \operatorname{tg} \varphi, \quad [72.6]$$

o anche sviluppando e semplificando:

$$\sigma_I (1 + \sin \varphi) - \sigma_{III} (1 - \sin \varphi) = 2c \sin \varphi. \quad [72.7]$$

Dividendo tale relazione una volta per $1 + \sin \varphi$ ed una volta per $1 - \sin \varphi$ e tenendo presente la [72.4] il criterio può essere espresso dalle:

$$\sigma_I - \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \sigma_{III} = \sigma'_R, \quad [72.8]$$

$$-\sigma_{III} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_I = \sigma''_R, \quad [72.9]$$

ed infine, eliminando $\sin \varphi$, dalla seguente relazione nella quale intervengono soltanto i limiti di rottura σ'_R , σ''_R :

$$\sigma_I \sigma''_R - \sigma_{III} \sigma'_R = \sigma'_R \sigma''_R. \quad [72.10]$$

La [72.10] rappresenta, in coordinate σ_I , σ_{II} , σ_{III} un piano parallelo all'asse σ_{II} . Con un ragionamento analogo a quello seguito nella generalizzazione del criterio di Tresca nel § 62 a), volendo che la condizione di rottura sia indipendente dall'ordine col quale vengono attribuiti gli indici agli assi principali, dovremo scrivere la [72.10] nella forma:

$$\sigma_H \sigma''_R - \sigma_K \sigma'_R = \sigma'_R \sigma''_R, \quad (H, K = 1, 2, 3). \quad [72.11]$$

L'equazione completa della superficie di rottura $R(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ si otterrà così come prodotto delle equazioni dei sei piani [72.11]: tale superficie risulta dunque una piramide esagonale la cui intersezione con i piani $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \text{cost}$ è il poligono indicato in fig. 46 nel caso particolare $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$.

I punti A_I, A_{II}, A_{III} corrispondono ad uno stato limite di rottura per semplice trazione σ'_R ed i punti B_I, B_{II}, B_{III} corrispondono ad uno stato limite di rottura per semplice compressione σ''_R .

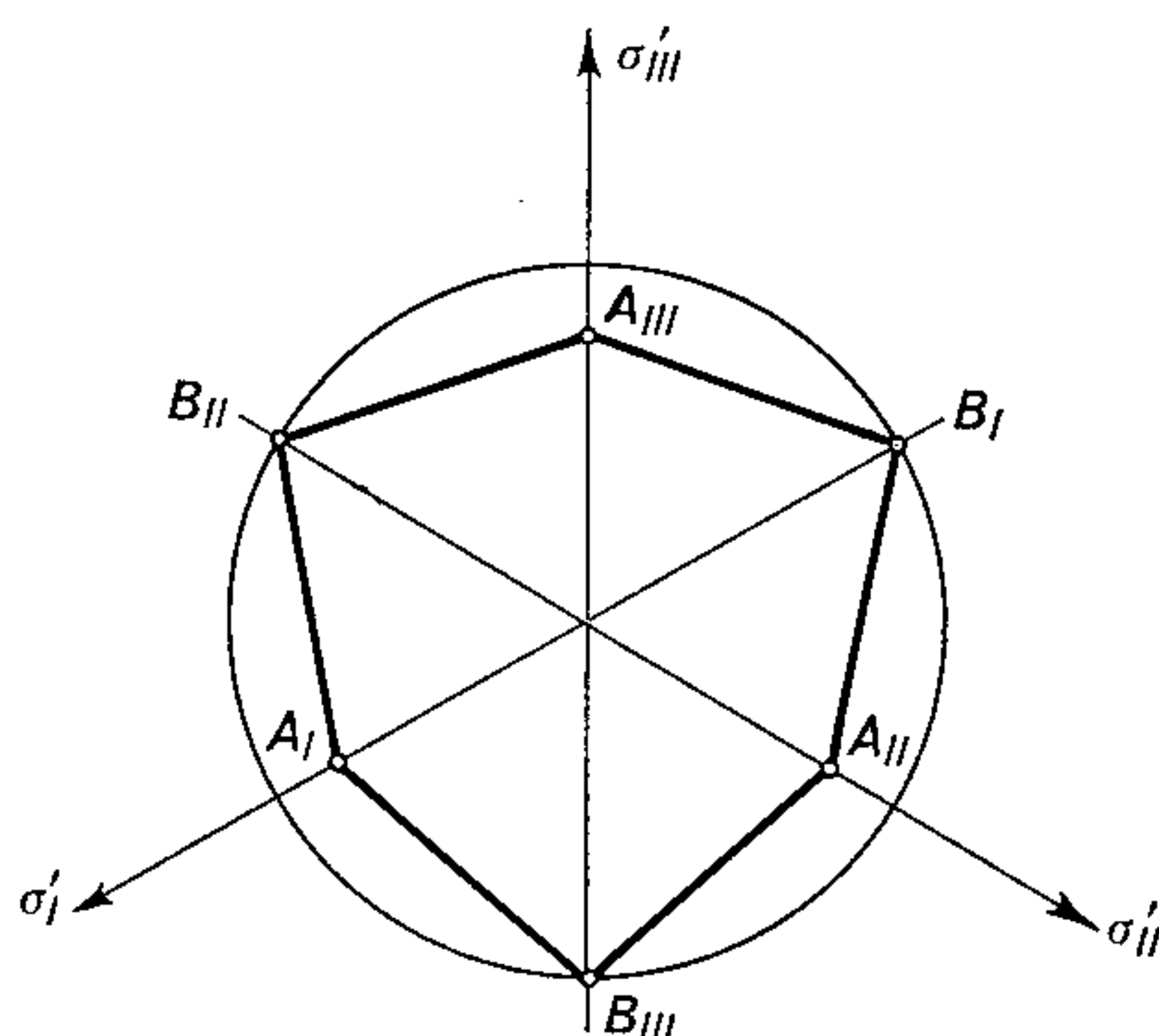


Fig. 46.

Il poligono rappresentativo del criterio per uno stato di tensione biassiale si ottiene ponendo uguale a zero nella equazione della piramide una delle tre tensioni principali: ad esempio, per $\sigma_{III} = 0$, otteniamo l'equazione:

$$\left(\frac{\sigma_I}{\sigma'_R} - \frac{\sigma_{II}}{\sigma''_R} - 1\right) \left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma'_R} - \frac{\sigma_I}{\sigma''_R} - 1\right) \left(\frac{\sigma_I}{\sigma'_R} - 1\right) \left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma'_R} - 1\right) \left(\frac{\sigma_I}{\sigma''_R} + 1\right) \left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma''_R} + 1\right) = 0, \quad [72.12]$$

relativa all'esagono indicato nella fig. 47.

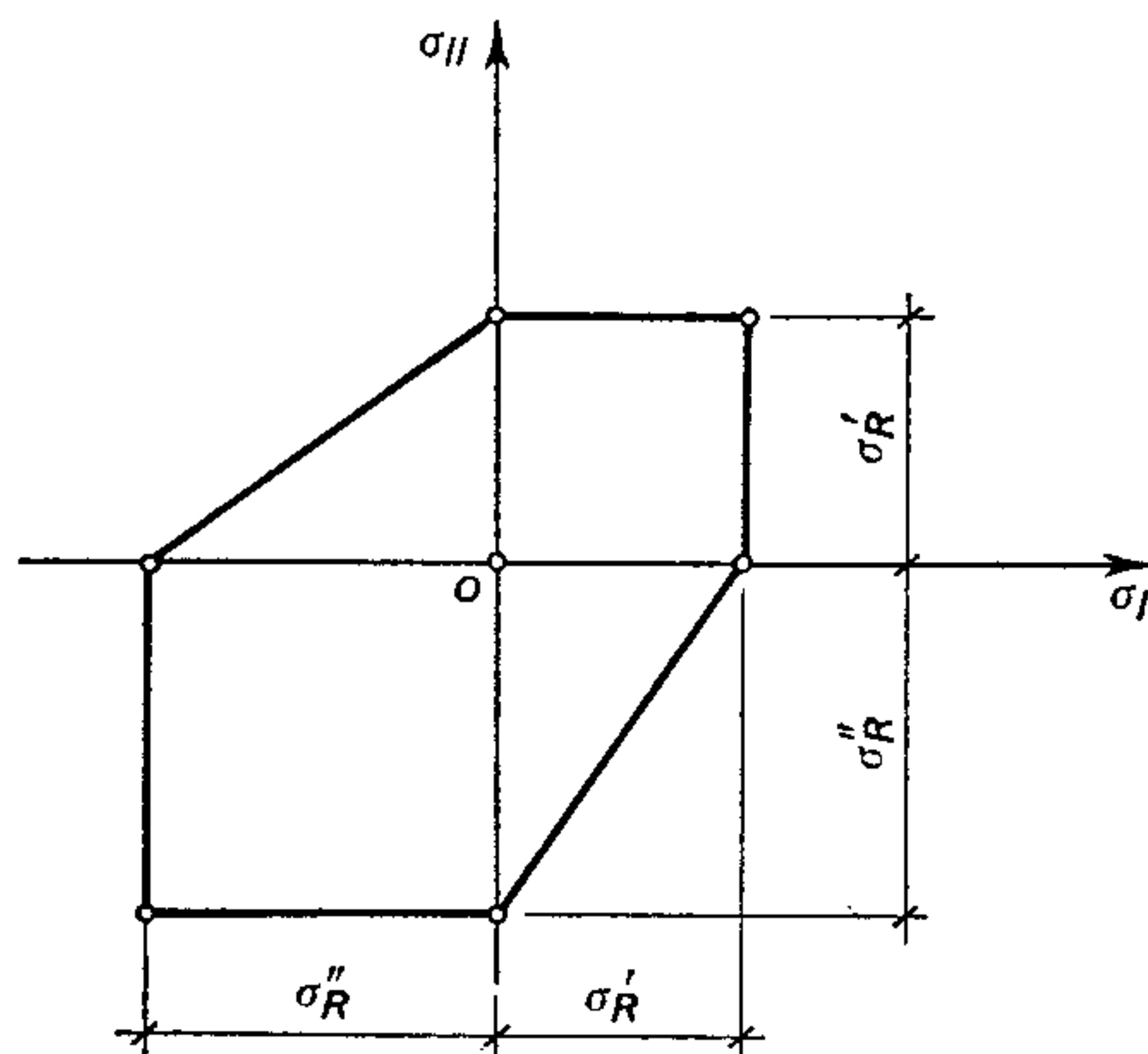


Fig. 47.

Quando le forze di coesione sono nulle, come si verifica nei materiali granulari consistenti di un numero discreto di particelle relativamente grandi, non esiste più alcuna differenza tra la deformazione anelastica e la rottura, in quanto lo *scorrimento* rappresenta l'unica condizione di rottura.

Il criterio di Coulomb si semplifica, per $c = 0$, nella condizione limite:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad [72.13]$$

o, come talvolta si preferisce, nella:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \varphi = \bar{\sigma} \sin \varphi, \quad [72.14]$$

essendo $\bar{\sigma}$ la compressione idrostatica media per uno stato biassiale.

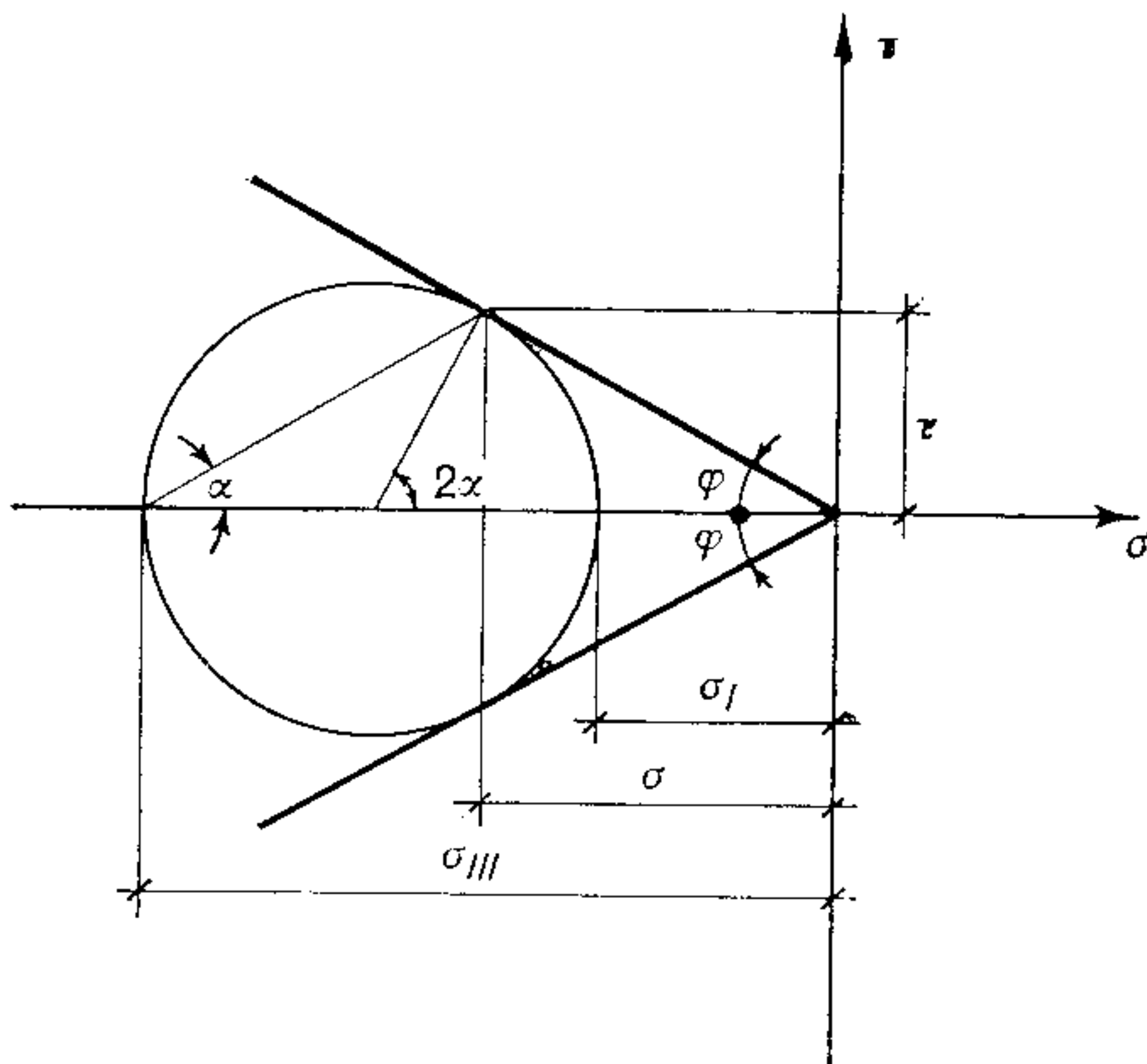


Fig. 48.

b) Criterio di Mohr.

Una generalizzazione del criterio di Coulomb fu introdotta da MOHR¹ sostituendo al legame lineare della [72.2] una funzione $f(\sigma)$ da determinarsi sperimentalmente per ogni materiale, cioè:

$$\tau = f(\sigma). \quad [72.15]$$

In tale ipotesi gli stati di tensione limiti per la rottura saranno rappresentati dall'insieme dei cerchi di Mohr aventi per raggio il valore [72.3] e tangenti alla coppia di curve [72.15] come indicato in fig. 49.

Il criterio porta dunque a considerare come distribuzioni (σ, τ) sicure nei riguardi della rottura quelle i cui punti rappresentativi S sono interni alla regione del piano delimitata dai due inviluppi $f(\sigma)$ ai cerchi.

Poichè la tensione tangenziale massima [72.2] dipende unicamente dalle tensioni principali estreme σ_I e σ_{III} , viene dunque ammesso che la tensione principale intermedia σ_{II} non abbia influenza sul raggiungimento dello stato limite di rottura.

Tale ipotesi può essere giustificata dall'osservazione che sulla superficie di provini ricavati da materiali policristallini duttili defor-

¹ O. MOHR, *Zeits. Ver. deutsch. Ing.*, **44**, 1572 (1900); **45**, 740 (1901).

mati oltre il limite di plasticità si formano due sistemi di linee di scorrimento intersecantesi sotto un angolo costante. Queste linee isogone corrispondono a due sistemi di piani paralleli di scorrimento inclinati rispetto alle direzioni secondo le quali agiscono la max e la min delle tensioni principali, cioè σ_I e σ_{III} rispettivamente. I due sistemi di piani si intersecano lungo la direzione dell'asse principale σ_{II} . È inoltre ben noto che provini ricavati da materiali fragili, come le pietre e la ghisa, quando sollecitati a compressione cominciano a rom-

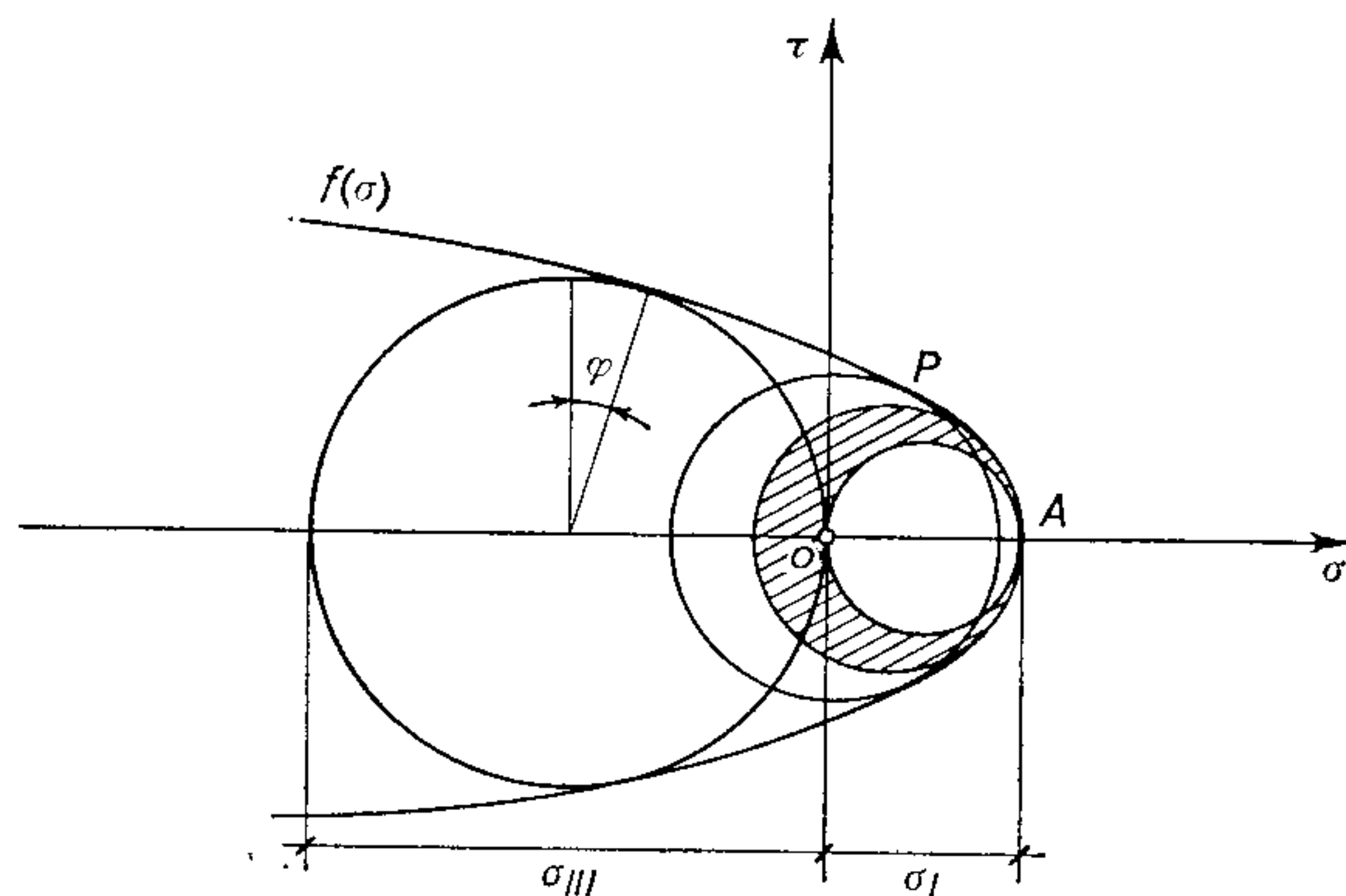


Fig. 49.

persi lungo superficie inclinate di circa 45° rispetto alla direzione della forza applicata.

Le curve limiti di rottura $f(\sigma)$ presentano un andamento caratteristico per ogni materiale e sono anche denominate per tale proprietà *curve intrinseche* del materiale stesso.

In generale i due rami simmetrici della curva si raccordano solo dalla parte delle tensioni normali positive, cioè di trazione, in quanto nessun corpo si rompe sotto una compressione idrostatica. L'asse delle ascisse σ è incontrato dalle curve limiti in un punto caratterizzato da un cerchio di Mohr di raggio nullo in cui è $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, e quindi la rottura ha luogo sotto trazioni uguali nelle tre direzioni principali. Naturalmente l'ascissa di tale punto non può essere determinata per l'impossibilità di realizzare in un provino un siffatto stato di tensione.

Conferme sperimentali del criterio di rottura di Mohr furono ottenute per numerosi materiali fragili, come alcune pietre naturali, il conglomerato cementizio, la ghisa.

Al contrario, i risultati delle esperienze effettuate su metalli duttili da LODE¹ mostrarono che il limite di snervamento è influenzato sen-

¹ W. LODE, *Physik*, **36**, 913 (1926).

sibilmente dalla tensione principale intermedia σ_{II} in contrasto con l'ipotesi fondamentale su cui è basato il criterio di Mohr. Occorre però osservare che tale criterio si riferisce essenzialmente al *limite di rottura* di un materiale piuttosto che al *limite di snervamento*, anche se a questa circostanza non sempre sia dato il dovuto risalto.

Importanti contributi alla discussione del criterio di Mohr furono apportati da LEON¹, il quale osservò come, nella rottura di materiali fragili, le curve limiti possiedano un significato fisico nella regione prossima alla intersezione con l'asse σ . Supponiamo infatti che un cerchio massimo delle tensioni coincida con il cerchio osculatore all'involuppo di Mohr nel vertice A . Poichè la normale alle curve limiti in un punto generico P definisce l'angolo di scorrimento φ , quando $P \rightarrow A$, ne deriva che $\varphi \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$: tale situazione corrisponde ad una rottura lungo un piano normale alla direzione della tensione principale σ_I .

I cerchi di Mohr tangenti all'involuppo in A e di diametro più piccolo del cerchio osculatore rappresentano tutti i possibili stati di rottura di questo tipo mentre i cerchi tangenti all'involuppo aventi diametro superiore a quello del cerchio osculatore rappresentano possibili rotture per taglio, secondo piani di scorrimento inclinati di $\varphi \neq 0$.

È interessante notare che a valori più elevati della curvatura nel vertice A dell'involuppo corrispondono deviazioni più sensibili nella direzione postulata dalle esperienze di Mc Adam.

Leon, inoltre, propose di approssimare l'involuppo con una parabola del secondo ordine con vertice in A :

$$\tau^2 = c_1 + c_2 \sigma, \quad [72.16]$$

scegliendo le costanti c_1 , c_2 in modo da adattare il criterio ai risultati sperimentali su materiali fragili fino a rapporti di oltre 5 tra la resistenza a rottura in compressione e quella in trazione, come si verifica in molti materiali lapidei e nella ghisa.

73. Rottura per sollecitazioni ripetute.

Sinora abbiamo esaminato il comportamento di un materiale sotto l'azione di un sistema di forze crescenti monotonamente o, come si dice brevemente, di tipo statico. Lo stato di rottura rappresenta in tal caso la fase terminale di un processo in cui l'incremento di deformazione non è più sufficiente a dissipare l'energia dovuta alle forze

¹ A. LEON, *Ing.-Archiv*, **4**, 421 (1933); *Bauingenieur*, **15**, 318 (1934).

applicate ed a prevenire così la diffusione delle lesioni microscopiche esistenti.

Quando il solido è sottoposto a rapide oscillazioni delle forze agenti la rottura può prodursi per intensità delle forze stesse notevolmente inferiore a quella corrispondente alla rottura sotto una singola applicazione del carico. Parleremo in tal caso di *rottura per sollecitazioni ripetute* o *per fatica*, nel senso che il comportamento del materiale si manifesta proprio attraverso i cicli ripetuti di tensione-deformazione che danno origine ad un deterioramento progressivo della struttura del materiale e ad una conseguente rottura.

A differenza della rottura causata da tensioni di tipo statico, quella dovuta a sollecitazioni ripetute si produce senza apprezzabili deformazioni permanenti. Le superficie di distacco assumono nei metalli un aspetto caratteristico che indica in modo evidente il carattere progressivo del danno dovuto alla fatica: su tali superficie si notano due zone distinte, l'una liscia e opaca che costituisce la zona della rottura per fatica, l'altra a grana cristallina che corrisponde alla zona del distacco finale.

La rottura per fatica è argomento di primaria importanza ma di ardua analisi per il grande numero di parametri da cui sembra dipendere. Su di essa hanno influenza le modalità di applicazione delle azioni esterne, e precisamente la frequenza dei cicli, l'alternarsi dei periodi di sollecitazione a quelli di riposo, le loro brusche variazioni. Importanza notevole assume inoltre la forma dei pezzi: costituiscono un invito all'innescarsi di rotture per fatica, in generale intagli, fori ed ogni cambiamento di sezione, ed in particolare tutte le cause che apportano interruzioni irregolari nelle fibre dei materiali laminati con un orientamento ben definito. Infine ha influenza lo stato superficiale, per cui le superficie lavorate offrono una maggiore resistenza alla fatica rispetto a quelle grezze: tale circostanza suggerisce l'ipotesi che la rottura abbia origine da irregolarità superficiali.

Le prime ricerche sistematiche sulla fatica sono dovute a WÖHLER¹ ed ancora oggi, per l'ampiezza di indagine e l'accurata interpretazione dei risultati, costituiscono un valido fondamento nello studio fenomenologico della fatica.

Nella fig. 50 abbiamo riportato un diagramma ottenuto da Wöhler su provini di acciaio ricavati per lavorazione meccanica da una lastra di 20 mm di spessore. Le ascisse del diagramma esprimono il numero N di cicli della sollecitazione necessari per arrivare a rottura sotto una certa tensione assegnata: vediamo come da una

¹ A. WÖHLER, *Zeitschr. Bauwesen*, **8**, 641 (1858); **10**, 583 (1860); **16**, 67 (1866); **20**, 73 (1870).

resistenza a trazione di 41 kg/mm^2 ottenuta in una prova statica ($N = 1$) si discenda a valori sempre più bassi della resistenza a rottura con l'aumentare del numero dei cicli.

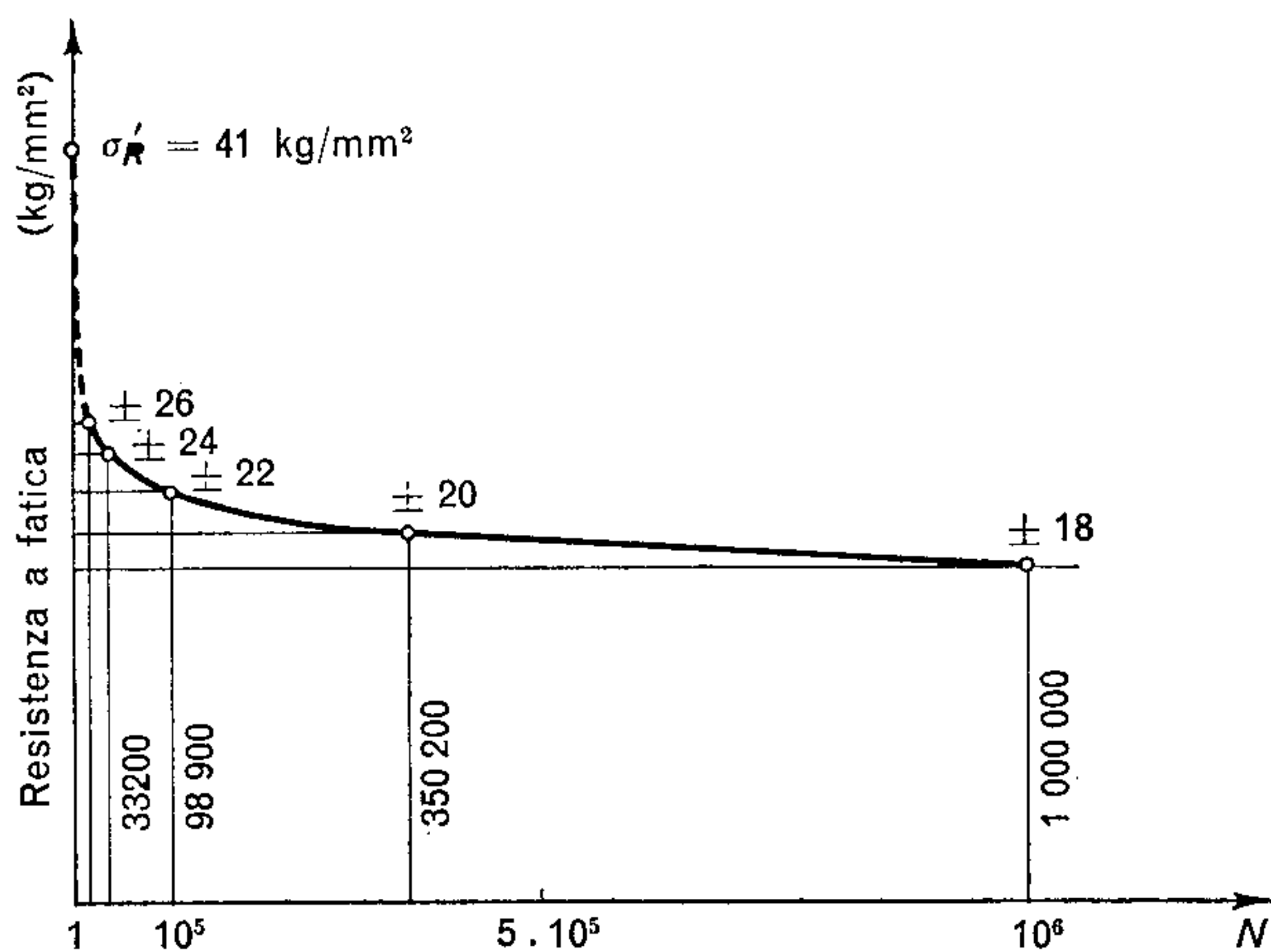


Fig. 50.

I risultati delle ricerche di Wöhler furono compendati nelle seguenti leggi:

a) quando un materiale sia sollecitato con azioni ripetute la rottura può aver luogo per tensioni inferiori a quella corrispondente alla *resistenza statica* σ_R ;

b) il numero dei cicli necessario per arrivare alla rottura è tanto più grande quanto minore è l'ampiezza $\Delta\sigma$ di oscillazione della tensione;

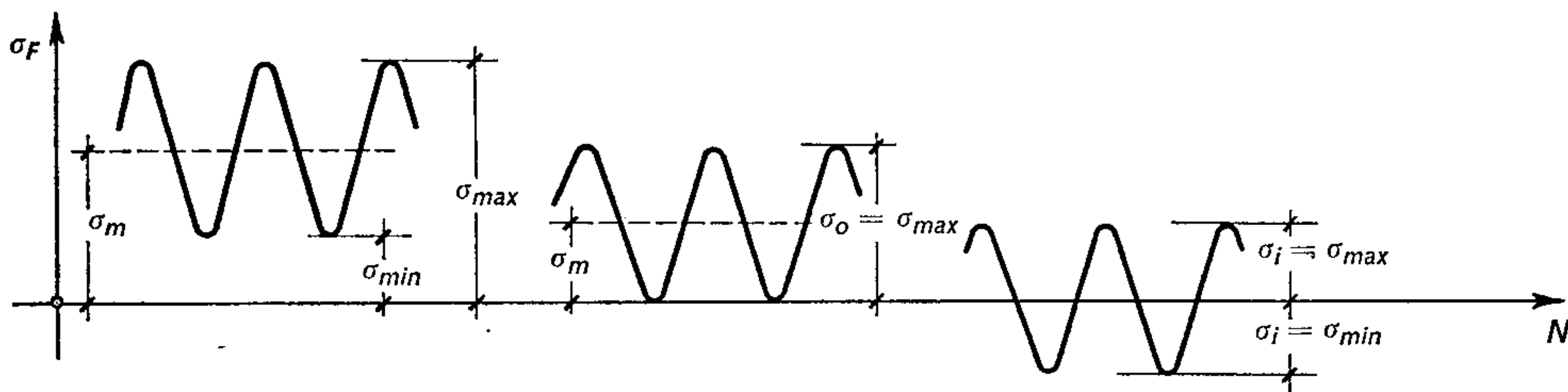


Fig. 51.

c) la tensione può oscillare indefinitamente senza produrre la rottura tra il valore zero ed un certo valore massimo σ_o , detto *resistenza originaria*;

d) la tensione può oscillare indefinitamente senza produrre la rottura tra due valori limiti uguali e di segno opposto σ_i , inferiori in valore assoluto a σ_o e detti *resistenza a forze invertite*.

Tali considerazioni possono giustificare la formula di Launhardt-Weyrauch:

$$\sigma_F = \frac{2}{3} \sigma_R \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right), \quad [73. 1]$$

nella quale si concretano in un certo senso le prime esperienze di Wöhler per la resistenza a fatica σ_F corrispondente alla rottura per sollecitazioni ripetute e che prende il posto della resistenza statica σ_R . Nella [73. 1] il doppio segno va scelto positivo qualora le due tensioni estreme $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ abbiano lo stesso segno, negativo nel caso opposto.

Dalla [73. 1] si ricavano facilmente i seguenti casi particolari:

a) Per $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, cioè per tensione invariabile, si ottiene correttamente:

$$\sigma_F = \sigma_R, \quad [73. 2]$$

come è logico in assenza di fenomeni di fatica;

b) per $\sigma_{\min} = 0$, cioè per tensione oscillante tra zero ed un massimo, si ha:

$$\sigma_F = \sigma_o = \frac{2}{3} \sigma_R, \quad [73. 3]$$

e quindi la resistenza a fatica, nel caso presente uguale per definizione alla resistenza originaria, dovrebbe risultare i 2/3 della resistenza statica;

c) per $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$, cioè per tensione oscillante tra due limiti uguali e di segno opposto:

$$\sigma_F = \sigma_i = \frac{1}{3} \sigma_R, \quad [73. 4]$$

cioè la resistenza a fatica, coincidente ora con la resistenza a forze invertite, risulterebbe 1/3 della resistenza statica.

L'esperienza conferma solo parzialmente i risultati desunti dalla [73. 1]: in particolare nel caso di resistenza a forze invertite il limite $\sigma_R/3$ appare troppo basso. D'altra parte non sembra possibile condensare in una formula così semplice fenomeni oltremodo complessi come quelli di fatica, dipendenti da un gran numero di parametri e non tutti esattamente determinabili.

La tendenza attuale è orientata in senso probabilistico, e si basa su relazioni determinate sperimentalmente tra le tensioni di *rottura per fatica* σ_F e la cosiddetta *vita di fatica* N , definita come il numero di ripetizioni delle azioni applicate capace di produrre la rottura ad un certo livello di intensità della tensione stessa.

Una relazione tra σ_F e N non è però una funzione nel senso ordinario ma un'espressione dell'andamento statistico del fenomeno. Tale concetto è coerente con l'osservazione, in quanto le vite di fatica in condizioni nominalmente identiche di servizio e di prova presentano uno scarto ben superiore a quello inevitabile in ogni prova meccanica.

Qualsiasi relazione tra σ_F e N deve perciò specificare la probabilità di rottura o la probabilità di sopravvivenza $L(N, \sigma_F)$ del materiale per ogni combinazione (N, σ_f) . Possiamo stabilire così una famiglia di relazioni tra σ_f e N per valori diversi della probabilità di

rottura o di sopravvivenza, assunti come parametri, ed ottenere in tal modo l'andamento di una misura statistica specifica della tendenza centrale, ad esempio la media o grandezze analoghe.

La relazione completa è tridimensionale: può essere rappresentata nel piano nei suoi tre aspetti diversi come indicato dal diagramma riportato nella fig. 52 in coordinate logaritmiche.

Distinguiamo in tal modo:

a) relazioni $\sigma_F(N)_L$, che danno le tensioni di rottura a fatica in funzione della vita di fatica per varie probabilità di sopravvivenza;

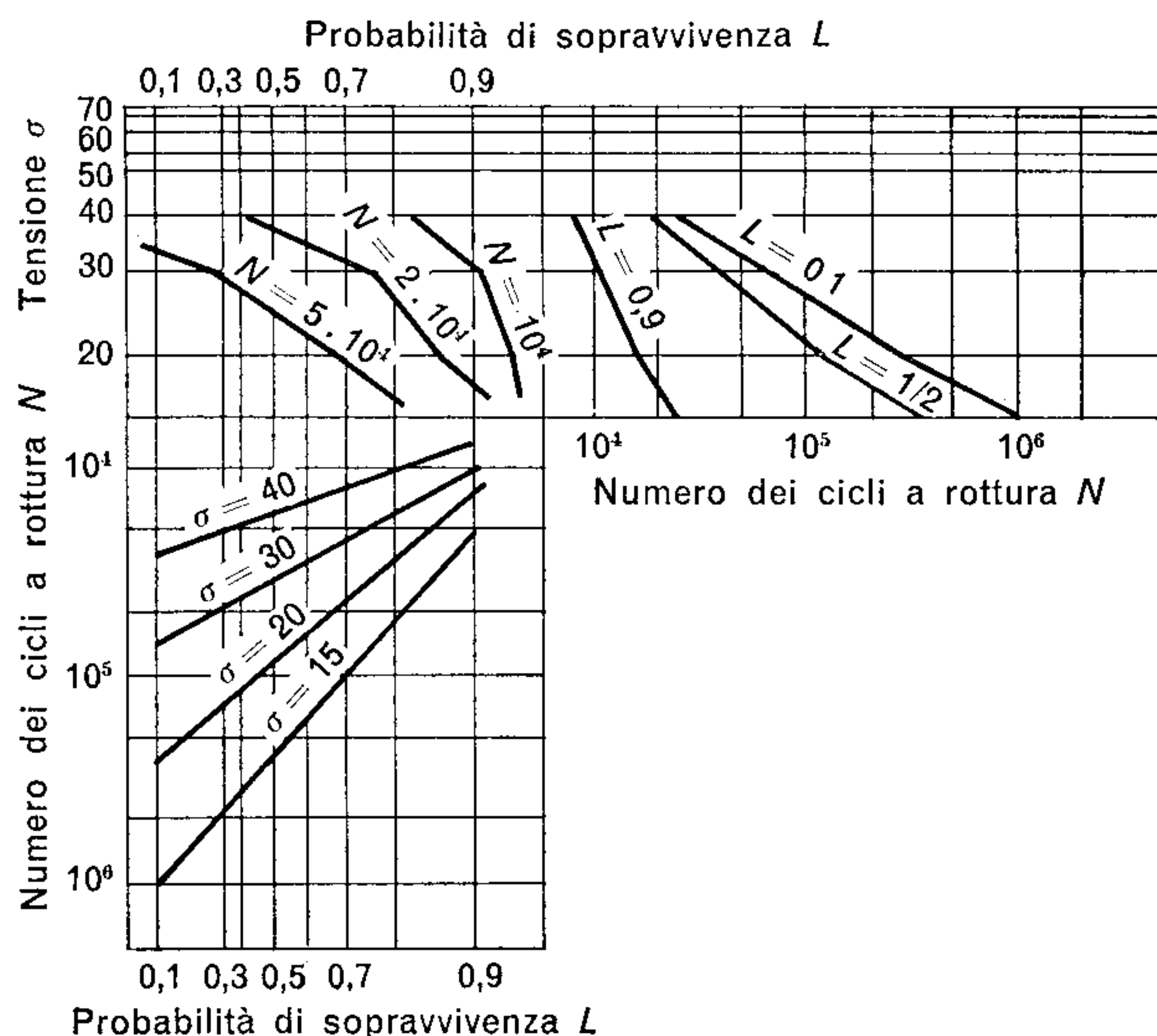


Fig. 52.

b) relazioni $L(N)_{\sigma_F}$, che danno le probabilità di sopravvivenza in funzione della vita di fatica per varie intensità della tensione di rottura;

c) relazioni $L(\sigma_f)_N$, che danno le probabilità di sopravvivenza in funzione della tensione di rottura a fatica per varie vite di fatica.

Il carattere decisamente statistico dei fenomeni di fatica rende comprensibile l'impiego di una teoria puramente statistica basata su un meccanismo non precisato di distruzione progressiva dei legami submicroscopici della struttura cristallina del materiale. Tale aspetto apre la strada alla cosiddetta *teoria dei valori estremi*, usata con successo in altri campi simili di indagine: poichè un'esposizione dei suoi fondamenti esula dai limiti della presente opera, rimandiamo ad una esauriente trattazione ¹ in merito.

¹ A. M. FREUDENTHAL, E. J. GUMBEL, *Adv. Appl. Mech.*, **4**, 117 (1956).

74. Micromeccanismo della rottura per fatica.

Nei processi di fatica si passa senza discontinuità da una fase iniziale caratterizzata dal danno incipiente a livelli submicroscopici ad una fase successiva caratterizzata dalla propagazione delle fessurazioni a livelli microscopici e macroscopici.

Durante la fase iniziale il micromeccanismo dei fenomeni di fatica è intimamente collegato con quello dello scorrimento plastico discusso nel § 59, ed analoghe alterazioni della struttura cristallina hanno influenza decisiva sul procedere dei due fenomeni. Il meccanismo fondamentale appare lo stesso, sia sotto l'azione di una forza di tipo statico, sia sotto l'azione di una forza ciclica; però la distribuzione delle linee di scorrimento differisce sensibilmente nei due casi, in quanto nel fenomeno di fatica ha luogo una brusca localizzazione del processo di scorrimento nella struttura cristallina in gruppi di striature con tendenza ad aumentare in ampiezza ed a formarne di nuove.

La spaziatura tra le linee di scorrimento osservate sulla superficie levigata dei cristalli metallici decresce da alcune decine di micron per azioni cicliche di bassa intensità sino ad alcuni micron con l'aumentare di questa.

La densità delle linee di scorrimento appare legata allo stato di incrudimento del materiale: per azioni moderate una relazione quantitativa è stata fornita da YAMAGUCHI¹ nella forma:

$$\tau - \tau_S = kn, \quad [74.1]$$

per l'eccesso $\tau - \tau_S$ della tensione tangenziale di incrudimento, dove n è il numero delle linee di scorrimento per unità di lunghezza e k una costante fisica caratteristica del materiale.

Secondo la [74.1] l'incrudimento dipenderebbe soltanto dalla densità delle linee di scorrimento e non dalla sua intensità per ogni singola linea.

La presenza di macchie leggere e di ossidazioni degli strati superficiali nelle striature prodotte da fenomeni di fatica rende manifesto il notevole aumento di temperatura nelle zone dove si è verificato lo scorrimento: non è ancora sufficientemente chiara l'origine di questo effetto termico, capace addirittura di produrre un rinvenimento della struttura cristallina compresa tra le striature.

Varie teorie sono state proposte per fornire una spiegazione esauriente del comportamento di un materiale sollecitato ad azioni ripetute da punti di vista fenomenologici e microstrutturali.

¹ K. YAMAGUCHI, *Scient. Papers Inst. Phys. Chem. Research*, Tokyo, **8**, 289 (1928); **9**, 277 (1929).

Le teorie fenomenologiche, fondate sull'ipotesi di una relazione causale tra lo smorzamento meccanico inteso come espressione dell'attrito interno ed il deterioramento progressivo riscontrato nei fenomeni di fatica, presuppongono l'esistenza di un livello critico dell'energia dissipata il quale corrisponde alla rottura per fatica. Esse non riescono a rappresentare gli aspetti più significativi del comportamento a fatica, in quanto l'ipotesi di un valore limite dell'energia dissipata è da un lato insostenibile a priori e dall'altro in aperto contrasto con l'esperienza.

Le teorie strutturali basate sull'identificazione del limite elastico di incrudimento con la tensione di rottura per fatica trascurano la differenza essenziale, alla quale abbiamo prima accennato, presente nella struttura cristallina nel caso di un'azione unidirezionale e di un'azione ciclica. È indispensabile tener conto della particolare distribuzione degli scorrimenti nelle due condizioni: la *localizzazione dello scorrimento* deve quindi costituire un aspetto tipico dell'inversione dello stato di tensione agente.

Come conseguenza della natura viscosa di una linea di scorrimento, le tensioni tangenziali in essa localizzate tendono a *rilassarsi*, cioè a diffondersi lungo la linea stessa ed a trasferirsi ai piani adiacenti. Però, se la tensione tangenziale che ha prodotto la prima linea di scorrimento decresce, hanno origine in questa tensioni residue di segno opposto, rimanendo scarica la matrice elastica circostante. Allora, con l'inversione della forza applicata, la zona della linea di scorrimento già interessata perverrà di nuovo allo snervamento sotto un'ampiezza minore della tensione perchè le tensioni residue vengono a sommarsi a quelle ora indotte. Tale meccanismo spiega il brusco concentramento dello scorrimento entro regioni localizzate, dove ha avuto inizio lo scorrimento iniziale.

Il fenomeno è esaltato dall'aumento locale della temperatura conseguente agli impulsi termici associati con i processi di scorrimento: con riguardo al valore della velocità di propagazione delle dislocazioni, circa il 10 % della velocità di propagazione delle onde elastiche nel mezzo, si ottengono per l'acciaio temperature di oltre 1000 °C, corrispondenti a distorsioni di 0,1 in un cristallo cubico deformato per taglio.

Indicando con $N_{o\tau}$ il numero massimo di cicli in corrispondenza del quale, per un dato livello di tensione tangenziale τ , non si verifica rottura per fatica, il numero dei cicli necessario per produrre tale rottura risulterà $N - N_{o\tau}$. Questo, in base alle considerazioni precedenti, deve essere una funzione inversa della densità delle striature, cioè, indicando con d la loro distanza:

$$N - N_{o\tau} = f(d) \simeq d^2. \quad [74. 2]$$

Poichè il numero previsto di striature per unità di lunghezza è $n = l/d$, dalla [74. 1] di Yamaguchi otteniamo la relazione:

$$N - N_{o\tau} = \left(\frac{k}{\tau - \tau_o} \right)^e, \quad [74. 3]$$

che rappresenta ancora la più semplice legge di fatica, e dove la costante $N_{o\tau}$ riflette la circostanza che nè per definizione, nè per significato fisico la relazione di fatica può essere estrapolata ad un numero di cicli $N = 1$.

75. Criteri di rottura per fatica.

Abbiamo discusso nel § 73 la necessità di relazioni fondate su procedimenti di analisi statistica per poter avanzare ragionevoli previsioni sulla vita di fatica di un materiale soggetto a sollecitazioni ripetute nel tempo. Dai valori così ottenuti è possibile analizzare le varie situazioni che possono presentarsi nella realtà.

Per quanto riguarda stati di tensione monoassiale, caratterizzati, ad esempio, dalla sola componente principale σ_I , siano $\sigma_{\min}^*$ e $\sigma_{\max}^*$, i *limiti di fatica*, cioè i valori estremi della tensione raggiungibili senza pericolo di rottura oscillando intorno ad una tensione media:

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\min}^* + \sigma_{\max}^*). \quad [75. 1]$$

Determinati tali limiti sperimentalmente per una successione abbastanza ampia di valori σ_m , il diagramma corrispondente, dovuto a SMITH¹, assume l'aspetto indicato in fig. 53, di forma analoga a quella dei cicli di isteresi.

Adottando una stessa scala sia per le ascisse sia per le ordinate, le due curve limiti del diagramma risultano equidistanti nella direzione delle ordinate dalla bisettrice per l'origine, perchè le ordinate di tale retta sono proprio le tensioni medie σ_m .

Le ordinate estreme del diagramma rappresentano la resistenza statica, rispettivamente di trazione σ'_R e di compressione σ''_R , mentre le ordinate dei punti dell'asse delle ordinate, $\sigma_m = 0$, rappresentano la resistenza a forze invertite σ_i , ed infine le ordinate dei due punti nei quali il diagramma taglia l'asse delle ascisse indicano la resistenza originaria, rispettivamente di trazione σ'_o e di compressione σ''_o .

Il diagramma descritto costituisce la base di discussione per poter sottoporre indefinitamente un certo solido a sollecitazioni ripetute senza pericolo di rottura per fatica.

¹ J. H. SMITH, *Journ. Iron a. Steel Institute*, 246 (1910).

Anzitutto, se vogliamo evitare tensioni superiori al limite di snervamento, alle quali corrispondono deformazioni permanenti dovute a plasticizzazioni del materiale, escluderemo dal diagramma le zone estreme caratterizzate, di regola, da tensioni σ superiori allo snervamento σ_s . Ciò è facilmente ottenuto limitando il diagramma con due rette parallele all'asse delle ascisse e di ordinate $\sigma = \sigma'_s$ e $\sigma = \sigma''_s$, rispettivamente per lo snervamento in trazione e in compressione semplice.

Inoltre, dato l'andamento pressochè rettilineo delle curve limiti nei vari tratti, al diagramma della fig. 53 potremo sostituire il dia-

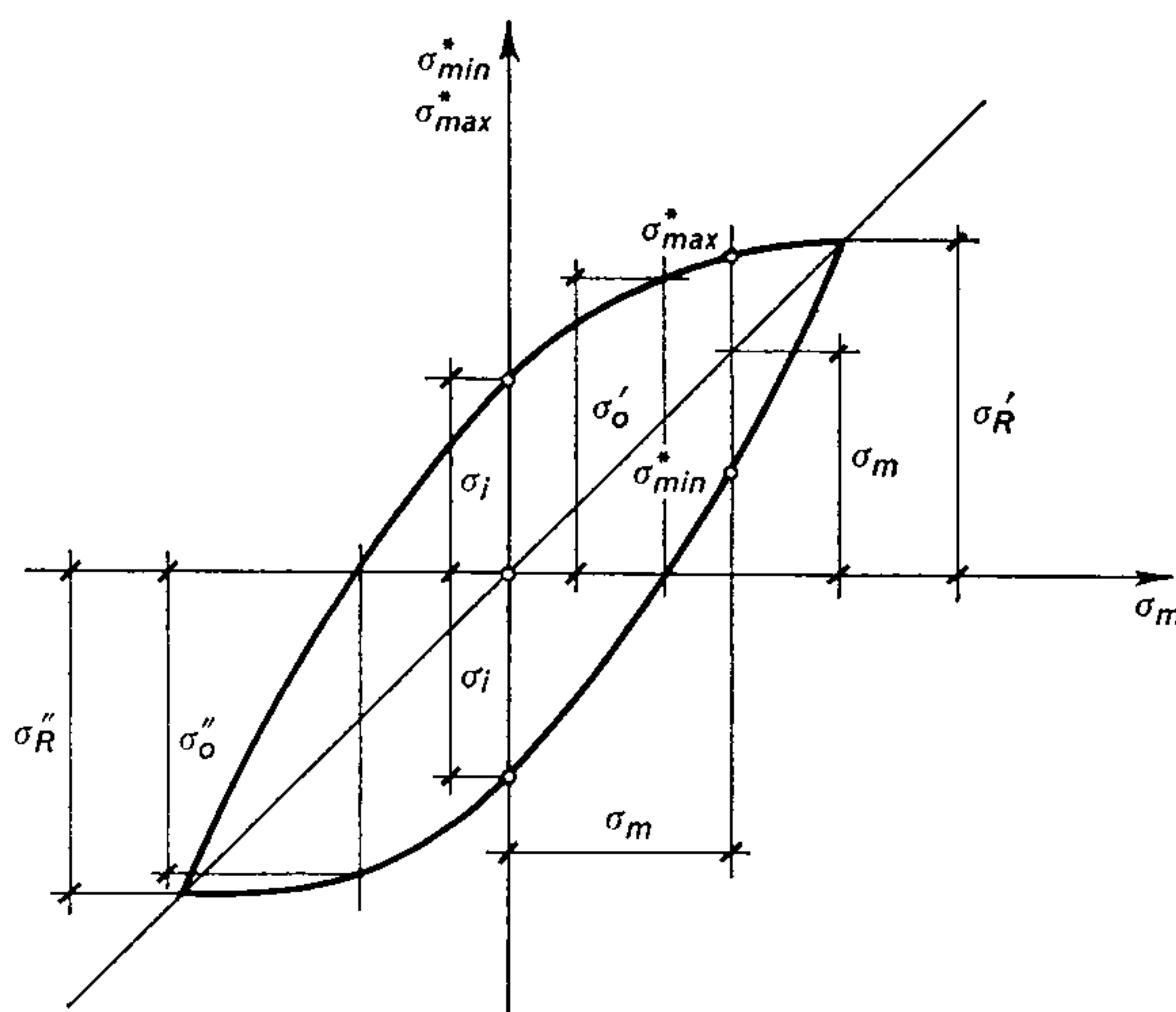


Fig. 53.

gramma ottagonale della fig. 54, ottenuto dalla semplice conoscenza della resistenza originaria e di quella a forze invertite, e ricavato quindi dal precedente tenendo fermi i punti di ordinate σ'_i , σ'_o , σ'_s e σ''_i , σ''_o , σ''_s rispettivamente, e raccordandoli con segmenti di retta, come indicato in fig. 54.

Noto tale diagramma è relativamente facile giudicare se un determinato stato monoassiale di tensione variabile risulti o no pericoloso. Assegnati i limiti $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ della tensione e calcolata la tensione media $\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\min} + \sigma_{\max})$, questa dovrà essere compresa tra i due limiti di snervamento σ'_s , σ''_s , cioè verificare la disuguaglianza:

$$\sigma'_s > \sigma_m > \sigma''_s.$$

Riportate sull'ordinata corrispondente alla tensione media σ_m le tensioni estreme $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ i corrispondenti punti rappresentativi do-

vranno essere compresi tra i punti S^* e I^* associati ai limiti di fatica $\sigma_{\min}^*$, $\sigma_{\max}^*$ relativi a quella particolare tensione media σ_m .

Nel caso di stati di tensione biassiali, caratterizzati, ad esempio, dalle due tensioni principali $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} \neq 0$, la determinazione della variazione di tensione ammissibile a fatica, senza pervenire cioè alla rottura, costituisce un problema sperimentale assai arduo.

La discussione svolta nel § 74 sul micromeccanismo dei fenomeni di fatica ha mostrato il suo intimo legame con l'analogo micromec-

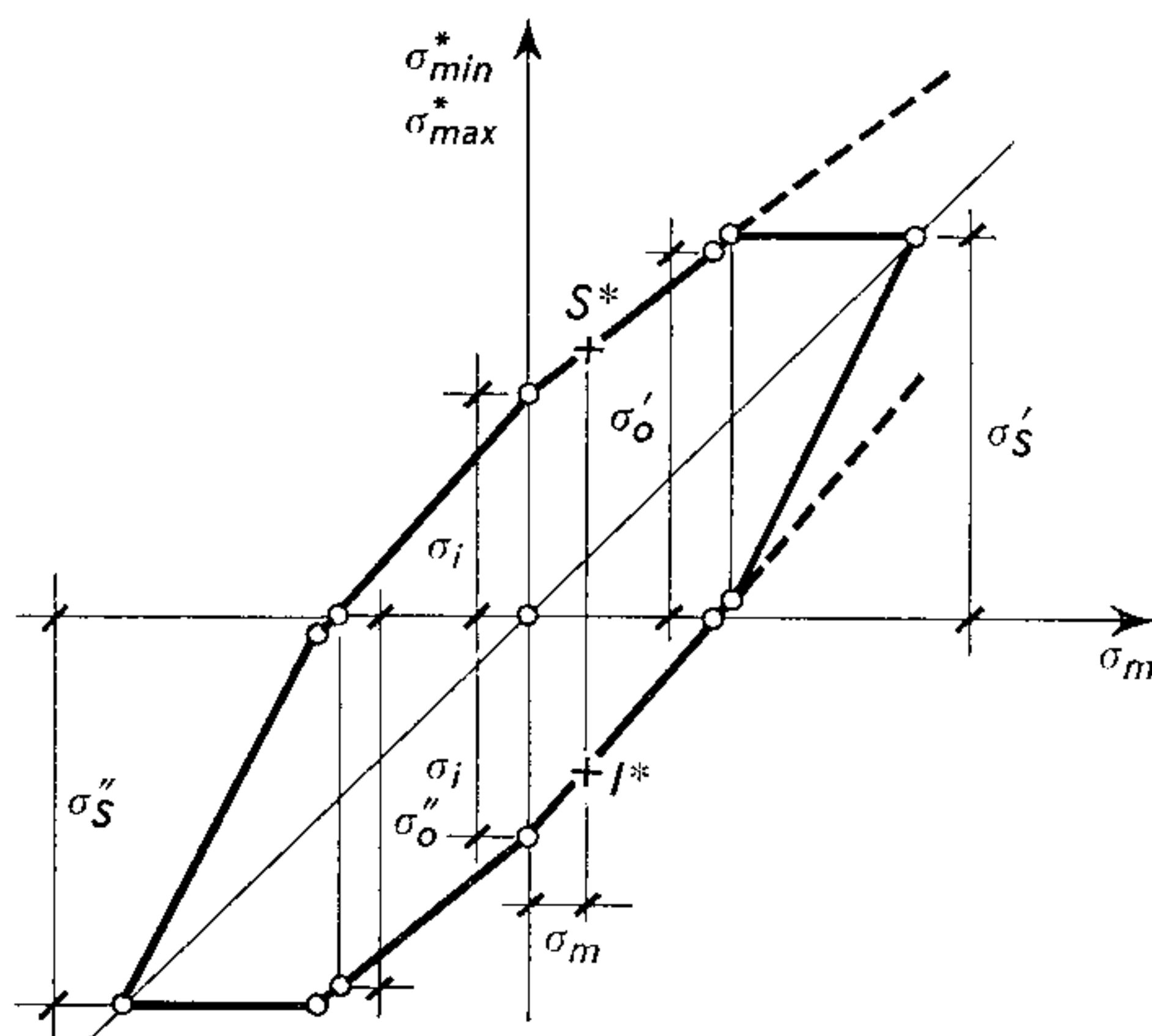


Fig. 54.

canismo della deformazione plastica. Appare probabile che un criterio valido per il raggiungimento di stati limiti di plasticità possa costituire una base abbastanza utile anche nei fenomeni di fatica. Lo stato di tensione risultante in quest'ultimo caso rappresenta però un problema di maggiore difficoltà del precedente perchè le tensioni principali e le loro direzioni possono variare separatamente in modo assolutamente arbitrario. È quindi indispensabile introdurre una semplificazione radicale supponendo che l'effettivo spettro delle tensioni sia sostituito da un diagramma equivalente sinusoidale e di ampiezza costante, che le direzioni principali rimangano inalterate, e le tensioni principali varino tutte con la stessa frequenza.

Le esperienze condotte in tali ipotesi mostrano il buon accordo con il criterio di plasticità [68. 15].

Sulla ellisse di Mises, indicata in fig. 55, sono riportati, a titolo di esempio, i risultati ottenuti da SAWERT¹, dopo aver superato notevoli difficoltà sperimentali, per un acciaio dolce rinvenuto soggetto a $N = 10^7$ cicli di tensione oscillante.

¹ W. SAWERT, *Zeits. Ver. deuts. Ing.*, **87**, 609 (1943).

Nel diagramma i valori delle tensioni principali σ_I , σ_{II} sono riferiti alla resistenza a fatica σ_F ottenuta in una prova monoassiale.

Le alternanze di tensione durante ogni ciclo andavano da un valore assegnato di trazione nel primo semiciclo ad un valore uguale di compressione nel secondo semiciclo.

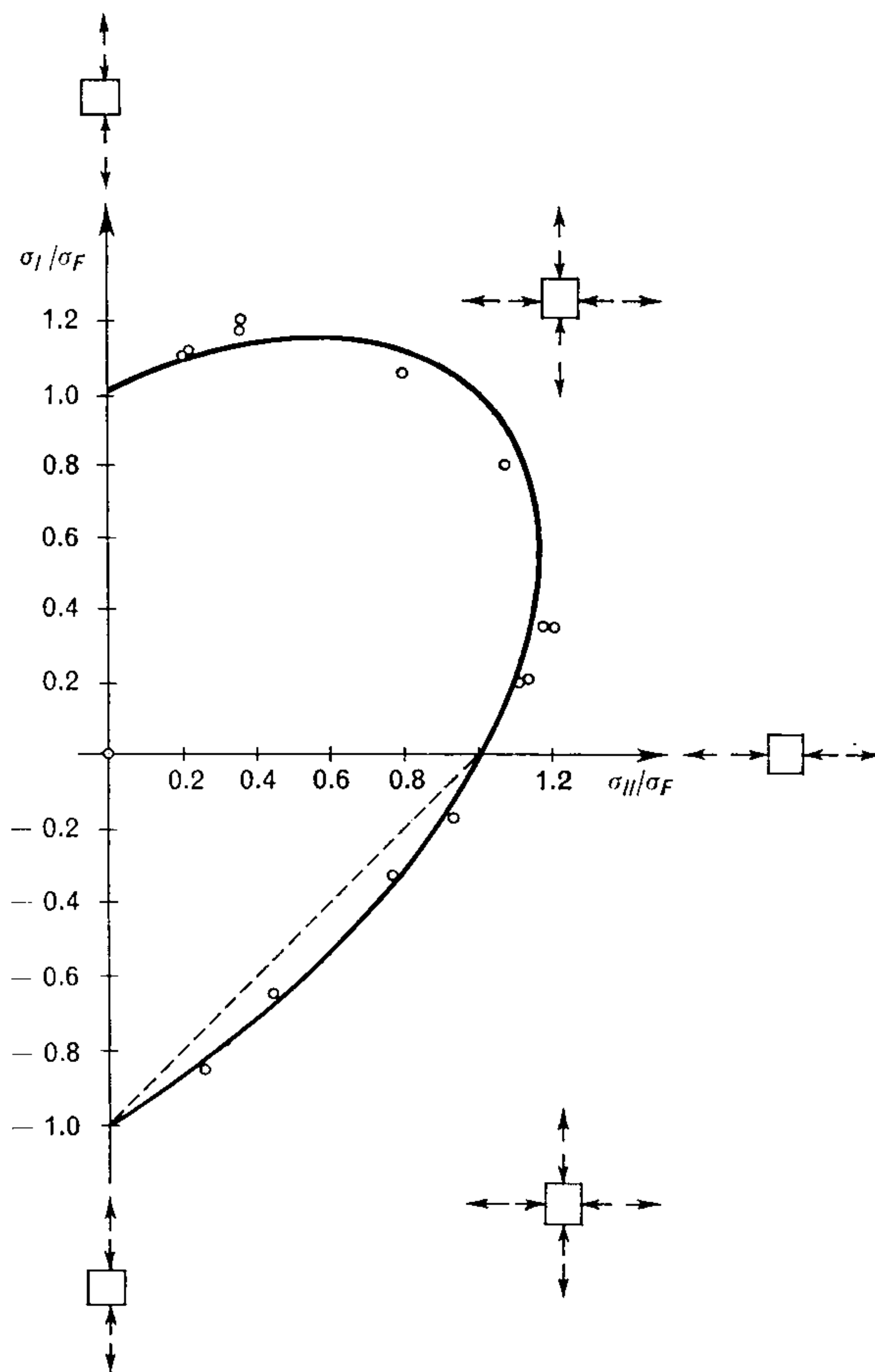


Fig. 55.

I dati del quadrante superiore si riferiscono a stati di tensione nei quali σ_I , σ_{II} oscillavano in fase, raggiungendo quindi nello stesso tempo i valori massimi di trazione e successivamente di compressione. Il quadrante inferiore rappresenta invece il caso in cui le tensioni principali σ_I , σ_{II} oscillavano in controfase, cioè mentre l'una raggiungeva il valore massimo di trazione l'altra raggiungeva il valore massimo di compressione. Gli assi σ_I , σ_{II} indicano evidentemente due stati monoassiali di tensione tra loro ortogonali.

Quando le alternanze di tensione sono sovrapposte a tensioni statiche diverse da zero, sembra che la relazione tra l'ampiezza ammis-

sibile per le prime ed il valore delle seconde sia lineare, o almeno l'accuratezza dei dati sperimentali non giustifica l'introduzione di termini di ordine superiore. Il criterio dovrebbe allora assumere l'energia potenziale Φ_D , calcolata dalla [62. 8] per l'ampiezza delle tensioni va-

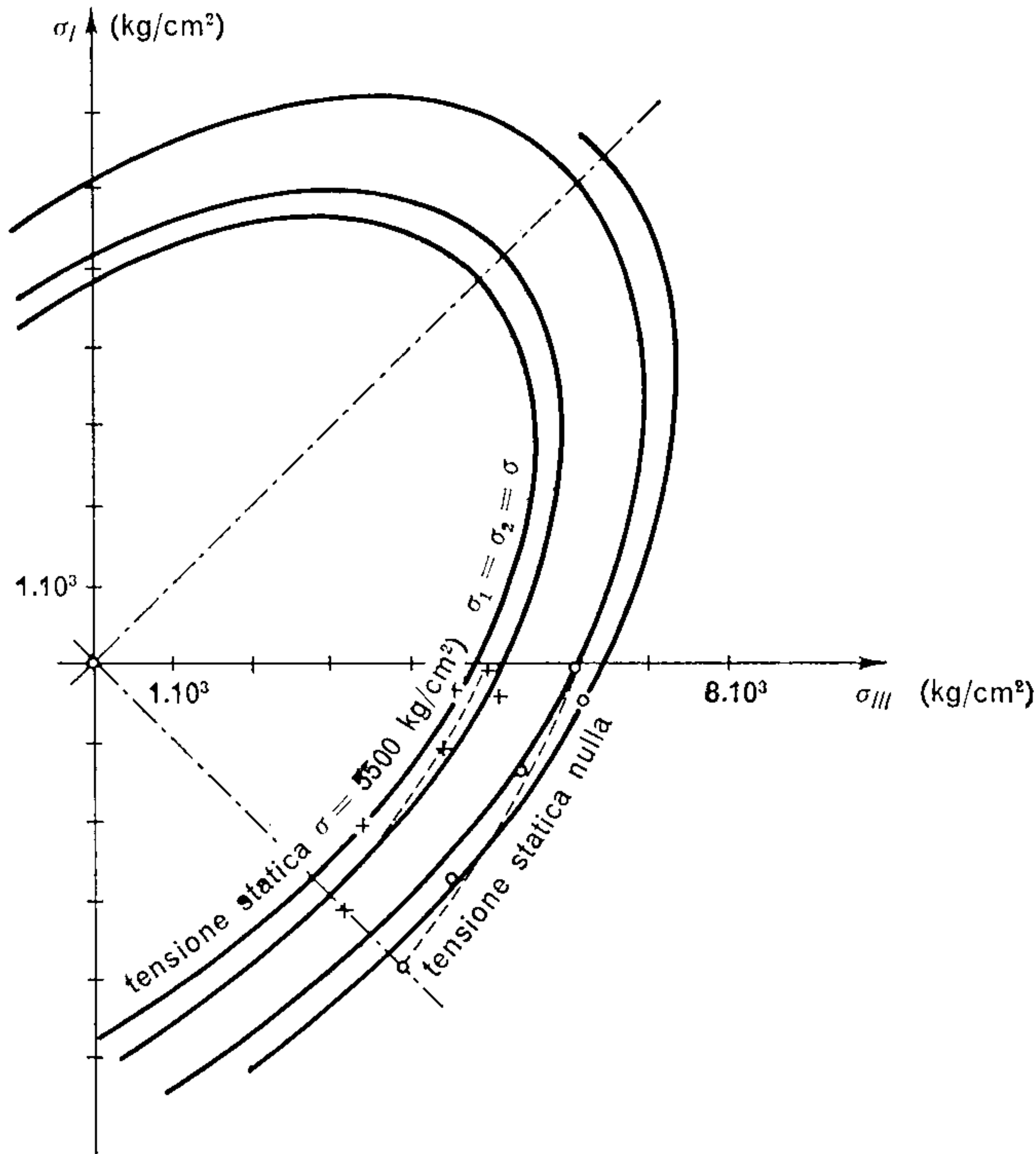


Fig. 56.

riabili σ_I , σ_{II} , σ_{III} , una funzione quadratica della media $\bar{\sigma}_m = \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_I + \bar{\sigma}_{II} + \bar{\sigma}_{III})$ delle tensioni statiche, cioè:

$$\Phi_D[\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}] = (\alpha - \beta \bar{\sigma}_m)^2, \quad [75. 2]$$

dove α è una costante del materiale, proporzionale alla resistenza a forze invertite σ_i , mentre β fornisce la variazione del campo di tensione ammissibile in presenza delle tensioni statiche.

Entrambe le costanti α , β sono assegnate per la desiderata vita di fatica e possono essere determinate da due prove monoassiali di fatica in cui le tensioni statiche siano decisamente diverse. Ad esempio, nel caso di una prova di fatica a forze invertite, per $\sigma_I = \sigma_i$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$, $\bar{\sigma}_m = 0$, il criterio si riduce a:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{6\mu}} = \alpha, \quad [75. 3]$$

mentre nel caso di una prova di fatica sotto tensioni oscillanti tra zero ed un massimo, per $\sigma_I = \sigma_o/2$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$, $\bar{\sigma}_m = \sigma_o/3$ il criterio diviene:

$$\frac{\sigma_o}{2\sqrt{6}\mu} = \alpha - \beta \frac{\sigma_o}{6}. \quad [75.4]$$

Per stati di tensione biassiali il criterio è presentato nella fig. 56 ed appare come una serie di ellissi concentriche, le cui dimensioni dipendono dalla somma delle tensioni statiche. Se tale somma è positiva, come avviene per trazioni crescenti, all'aumentare di essa in valore assoluto diminuiscono le dimensioni dell'ellisse; al contrario se tale somma è negativa, come avviene per compressioni crescenti, all'aumentare di essa in valore assoluto aumentano le dimensioni dell'ellisse.

Stabilito il valore di tale somma viene definita l'ellisse corrispondente ed ogni combinazione di tensioni oscillanti entro la sua area non comporta rottura per fatica.

Pochi dati sperimentali esistono al riguardo per poter dare un giudizio su tale problema: nella fig. 56 sono stati riportati a titolo di esempio i valori ottenuti da GOUGH¹ in prove biassiali di fatica su acciai al Ni-Cr-Mo per una vita N di 10^7 cicli.

Considerazioni analoghe valgono naturalmente per un generico stato triassiale di tensioni oscillanti sovrapposto ad uno stato triassiale di tensioni statiche.

76. Stati limiti equivalenti: verifica di sicurezza.

Abbiamo discusso nel Cap. VI e nel presente le condizioni sotto le quali si perviene ad uno stato limite di plasticità o di rottura. Volendo ora trattare contemporaneamente sia della condizione di plasticità sia della condizione di rottura, parleremo genericamente di *stati limiti*. Nel caso monoassiale di semplice trazione o di semplice compressione la situazione limite sarà raggiunta in corrispondenza di un *limite di trazione* σ'_L o di un *limite di compressione* σ''_L . Vorrà dire che tali limiti si ridurranno rispettivamente ai limiti di snervamento σ'_S , σ''_S , quando interessi il raggiungimento della fase plastica, ed ai limiti di rottura σ'_R , σ''_R quando invece interessi la resistenza definitiva del materiale.

È immediato perciò stabilire le condizioni per il non superamento di uno stato limite nei casi elementari di trazione o di compressione caratterizzati cioè rispettivamente da una sola tensione principale, σ_I o σ_{III} , diversa da zero:

$$\sigma_I \leq \sigma'_L, \quad \sigma_{III} \leq \sigma''_L. \quad [76.1]$$

Sarà dunque semplicemente necessaria una prova di trazione o di compressione, condotta sino allo snervamento o sino alla rottura del materiale per poter stabilire il criterio [76.1].

¹ H. J. GOUGH, *Aeron. Res. Council*, M 2522, London (1951).

Assai più difficile è l'analogo problema per uno stato di tensione generico caratterizzato da tre tensioni principali σ_I , σ_{II} , σ_{III} diverse da zero. Poichè evidentemente ognuna delle tre tensioni ha influenza sul raggiungimento di una situazione limite, non sarà più sufficiente una sola prova ma si renderà necessaria una serie di prove allo snervamento o alla rottura caratterizzate ognuna dalla variazione di una singola tensione principale, ferme restando le altre due.

Occorre dunque ricondurre la duplice infinità di stati limiti caratteristici per un dato materiale ai due stati limiti di semplice trazione σ'_L e di semplice compressione σ''_L , che possono essere determinati sperimentalmente in modo semplice e sufficientemente attendibile.

In generale, assegnato uno stato di tensione caratterizzato da tre tensioni principali σ_I , σ_{II} , σ_{III} si tratterà di stabilire in qual modo tale stato possa essere ricondotto ad uno stato di tensione monoassiale *ugualmente pericoloso*, caratterizzato da una tensione *ideale* od *equivalente* σ_{id} . Data la monoassialità dello stato di tensione equivalente, il non superamento della situazione limite, di plasticità o di rottura, comporterà semplicemente le due disuguaglianze:

$$\sigma'_{id} \leq \sigma'_L, \quad \sigma''_{id} \leq \sigma''_L. \quad [76. 2]$$

I due valori σ'_{id} , σ''_{id} delle tensioni ideali corrispondono alla necessità di tener conto del fatto che molti materiali da costruzione presentano valori diversi dei limiti di tensione nel caso di trazione e di compressione. In sostanza le *tensioni ideali* σ'_{id} , σ''_{id} sono le *tensioni di due stati monoassiali*, l'uno di trazione ($\sigma_I > 0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$), l'altro di compressione ($\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} < 0$), *equivalenti nel loro complesso allo stato di tensione generico considerato, sotto l'aspetto della pericolosità*.

La quasi totalità dei criteri particolari discussi nei §§ 68, 72, 75 si prefiggono appunto lo scopo di ridurre un generico stato di tensione triassiale a stati di semplice trazione e di semplice compressione, in modo da ricondurre il problema relativo al raggiungimento di uno stato limite, di plasticità o di rottura, alla semplice determinazione dei limiti σ'_L e σ''_L .

Come applicazione determineremo le tensioni ideali in base ad alcuni dei criteri citati senza alcuna distinzione tra plasticità e rottura. Ciò corrisponde alla tendenza, ancora diffusa, di applicare indifferentemente i criteri all'uno o all'altro caso, benchè ogni singolo criterio particolare sia stato proposto originariamente per interpretare una situazione limite ben definita, cioè o di plasticità o di rottura. Deve essere perciò chiaramente inteso che un'applicazione indiscriminata può non avere alcun significato fisico e non offrire alcun accordo con l'esperienza.

a) *Criterio di plasticità di Tresca.*

Il criterio esposto nel § 68 a) può essere utilizzato solo per materiali che presentino lo stesso valore dei limiti di snervamento in trazione ed in compressione. Per $\sigma'_L = \sigma''_L = \sigma_L$ le tensioni ideali si riducono ad una sola e precisamente alla:

$$\sigma_{id} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_L, \quad [76.3]$$

uguale al doppio della tensione tangenziale massima $\tau_L = k$ che conduce allo snervamento per semplice taglio.

b) *Criterio di plasticità di Mises.*

Anche il criterio esposto nel § 68 b) comporta l'identità tra i valori dei limiti di snervamento in trazione e compressione. La tensione ideale corrispondente si ottiene dalla [68.12] attribuendo a k il valore [68.13], cioè:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \leq \sigma_L. \quad [76.4]$$

c) *Criterio di rottura di Coulomb.*

Il criterio trattato nel § 72 si riferisce alla rottura di materiali con valore diverso dei limiti in trazione ed in compressione. Le tensioni ideali si ottengono immediatamente dalla [72.10] risolta una volta rispetto a σ'_L ed una volta rispetto a σ''_L , cioè:

$$\sigma'_{id} = \sigma_I - \sigma_{III} \frac{\sigma'_L}{\sigma''_L} \leq \sigma'_L, \quad \sigma''_{id} = -\sigma_{III} + \sigma_I \frac{\sigma''_L}{\sigma'_L} \leq \sigma''_L. \quad [76.5]$$

Infine, per quanto riguarda il criterio di rottura di Mohr, le espressioni delle tensioni ideali non possono essere fornite esplicitamente, in quanto dipendenti dalla relazione funzionale $\tau = f(\sigma)$, cioè dalla forma delle curve limiti della fig. 49.

Determinate le tensioni ideali attraverso un criterio opportunamente scelto ed imposte a queste le limitazioni [76.2] di non superare i valori σ'_L , σ''_L , sembrerebbe escluso il pericolo di un superamento dello snervamento o della rottura in ogni punto del materiale. In realtà è indispensabile assicurarsi che tali limitazioni siano garantite con un certo margine. I motivi di tale esigenza sono dovuti all'approssima-

zione dell'analisi teorica da un lato ed allo scostamento dei dati medi sperimentali dall'altro.

Non è pensabile infatti una valutazione esatta delle azioni esterne che sollecitano un certo corpo materiale nè una determinazione rigorosa dello stato di tensione da esse indotto. La teoria, infatti, rappresenta un'immagine più o meno fedele della realtà fisica, in quanto sostituisce a quest'ultima un modello ideale al quale si possa applicare con successo un procedimento di analisi deduttiva.

L'esperienza dimostra d'altro canto che le caratteristiche di un materiale possono variare considerevolmente in conseguenza sia della non-omogeneità del materiale stesso, sia delle modalità di prova.

Tali motivi comportano l'esigenza di limitare le tensioni ideali non già con i limiti di snervamento o di rottura, bensì con una loro frazione. Scelto allora un numero $m > 1$, definito *grado di sicurezza*, alle limitazioni [76. 2] dovranno essere sostituite le disuguaglianze assai più restrittive:

$$\sigma'_{id} \leq \frac{\sigma'_L}{m}, \quad \sigma''_{id} \leq \frac{\sigma''_L}{m}. \quad [76. 6]$$

Quando le [76. 6] siano effettivamente soddisfatte in ogni punto del corpo materiale, diremo che è *verificata la sicurezza in senso stretto*.

Il valore del grado di sicurezza m viene stabilito sulla base di considerazioni molteplici e complesse, che esulano dalla trattazione presente. Di regola m viene definito da norme regolamentari ed evidentemente potrà essere tanto più vicino all'unità quanto più precisi siano i metodi di indagine teorica e quanto più rigorose le norme di accettazione dei materiali.

Abbiamo parlato di sicurezza in senso stretto perchè, almeno nei confronti dello snervamento, a rigori non è necessario imporre che in ogni punto del corpo materiale venga evitato il raggiungimento dello stato limite. Come fu già discusso nel § 65, plasticizzazioni locali e quindi violazione delle [76. 6] non comportano necessariamente una situazione di collasso.

Appare anche chiaro come la verifica di sicurezza nel senso restrittivo delle [76. 6] sia condizione sufficiente perchè sussista la sicurezza nel senso più ampio del § 65, dove il grado di sicurezza m è *associato alle forze agenti sul corpo* e non alla *tensione limite puntuale*, come avviene nelle [76. 6].

I due concetti discussi per la verifica di sicurezza conducono a due atteggiamenti profondamente diversi che saranno sviluppati a suo tempo nella trattazione dei vari problemi particolari.