

CAPITOLO VI

STATI LIMITI DI PLASTICITÀ

59. Fondamenti fisici della plasticità.

Abbiamo discusso nel Capitolo V i vari aspetti della risposta anelastica derivante dalla dissipazione di energia potenziale elastica nella sua interazione con energia di altra natura. Una importante risposta anelastica che vogliamo ora esaminare si presenta nei solidi a struttura ordinata in ben definiti reticoli cristallini quando lo stato di tensione-deformazione raggiunge certi valori limiti: si manifesta allora un comportamento tipico del solido nel quale alla fase fondamentale elastica si associa una fase irreversibile definita normalmente come *plastica*.

Il processo di deformazione corrisponde dunque ad un sistema a due fasi ed ha tutte le caratteristiche di uno stato anelastico. Il motivo per cui ne abbiamo preferito una trattazione separata è duplice: da un lato la particolare importanza della deformazione plastica rispetto ad altre risposte anelastiche, dall'altro il suo aspetto limite, almeno sul piano fenomenologico. Vedremo infatti che non interessa tanto la caratterizzazione del comportamento plastico di un solido, quanto la determinazione del valore limite nel superamento del quale la deformazione diviene irreversibile.

Così, ad esempio, negli aggregati policristallini costituenti la maggior parte dei metalli impiegati nelle costruzioni sono presenti difetti che disturbano la regolarità del reticolo strutturale e ne indeboliscono la idoneità ad ostacolare eventuali cause di deformazione. Alcuni di questi difetti, noti sotto il nome di *dislocazioni* per la loro notevole mobilità, come fu intuito per la prima volta da PRANDTL¹, possono spostarsi come entità geometriche in presenza di sollecitazioni anche modeste.

¹ L. PRANDTL, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **8**, 85 (1928).

Un esempio molto semplice di dislocazione può essere ottenuto pensando inserito nel reticolo di un cristallo a struttura cubica un piano atomico addizionale, come indicato schematicamente in fig. 33, mediante un taglio nel semipiano $x = 0$, $y > 0$.

In tal caso, a distanza notevole dalla zona perturbata, la parte superiore del cristallo ha subito uno spostamento pari ad un periodo del reticolo, mentre la parte inferiore ha conservato la sua disposizione originaria. In entrambe le parti la struttura cristallina è assoluta-

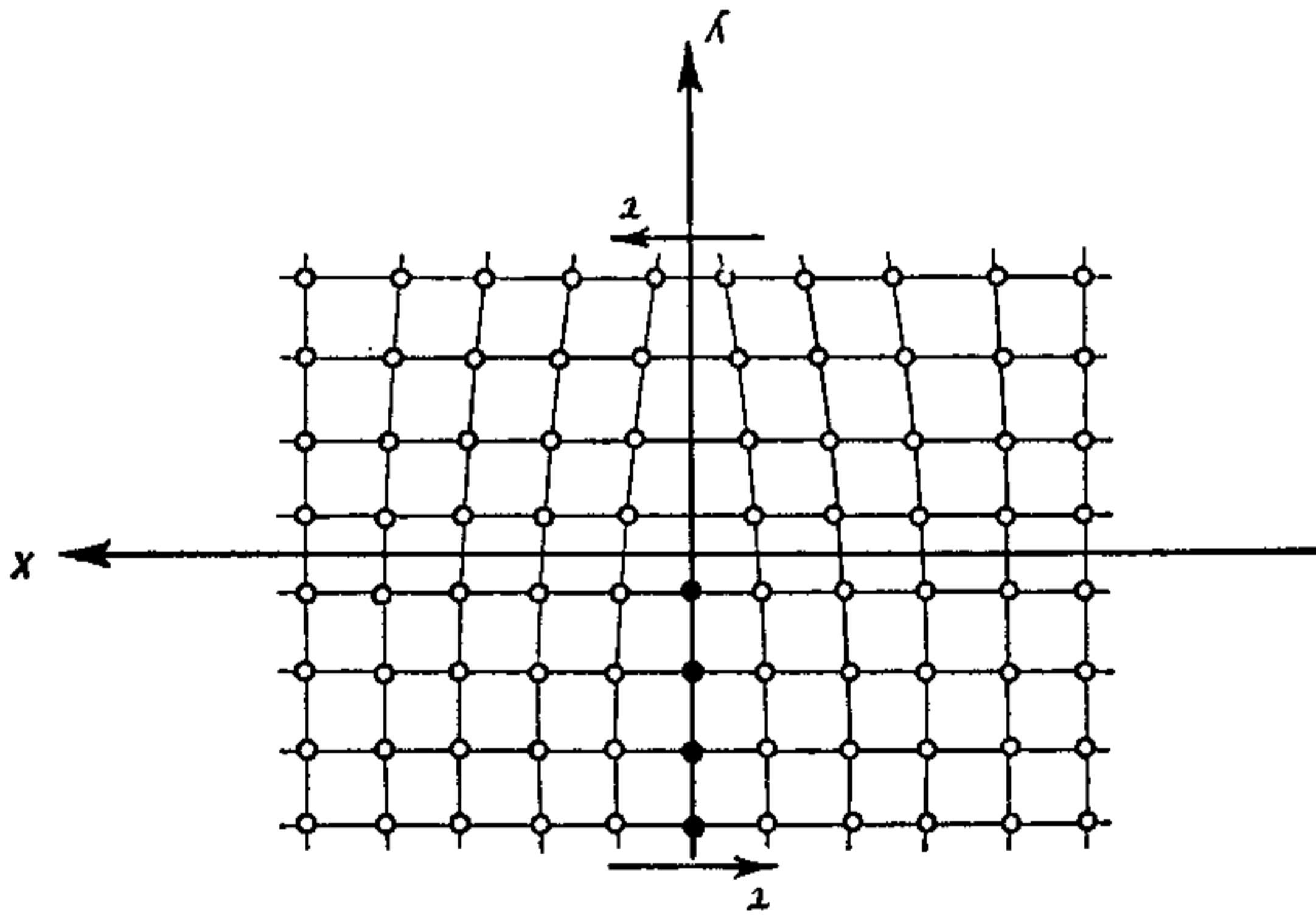


Fig. 33.

mente regolare mentre nella zona di transizione, in prossimità dell'origine, è presente una imperfezione del reticolo.

Per effetto di una tensione tangenziale τ la dislocazione si muove verso sinistra scorrendo sul piano $y = 0$, e, raggiunto il bordo del cristallo, provocherà uno spostamento relativo pari ad una distanza atomica, in modo da poter ripristinare la regolarità della struttura. Rimuovendo la tensione applicata il processo risulterà perfettamente reversibile ed il cristallo si disporrà di nuovo secondo lo schema della figura. In un aggregato policristallino il comportamento di ogni singolo cristallo è influenzato dalla presenza di quelli vicini. Le dislocazioni si riferiscono allora a piani di scorrimento diversi in quanto, di regola, due grani adiacenti possiedono un orientamento diverso dei loro assi cristallografici, ed esiste quindi la possibilità per le dislocazioni stesse di restare bloccate in numero sempre maggiore con l'aumentare della intensità delle azioni applicate e dar così luogo ad una alterazione irreversibile del reticolo cristallino.

Il passaggio di un gran numero di dislocazioni è reso manifesto dalla apparizione di striature superficiali molto sottili, dette *linee di scorrimento plastico* e messe in evidenza per la prima volta da LÜDERS¹,

¹ LÜDERS, *Dinglers Polytech. Journ.* (1854).

le quali si spargono rapidamente interessando zone sempre più ampie dell'aggregato policristallino.

Lo stato di tensione corrispondente alla formazione delle prime striature rappresenta una situazione limite, detta di *snervamento*, dipendente dal numero e dall'orientamento dei processi di scorrimento simultanei, e successiva alla transizione da una *risposta elastica* ad una *risposta plastica*, in quanto nel superamento di tale limite solo una parte della deformazione può essere recuperata alla rimozione delle azioni che l'hanno provocata.

Nella zona tra due linee di scorrimento, poste a distanze dell'ordine di 10^4 intervalli atomici, il reticolo cristallino si deforma ancora elasticamente ed allo scarico tende a ritornare nella sua configurazione primitiva compatibilmente con le distorsioni permanenti prodottesi lungo le linee di scorrimento plastico. In altri termini sono contemporaneamente presenti sia una deformazione elastica sia una deformazione plastica, ma solo quando lo stato di tensione raggiunge il limite di snervamento le direzioni di scorrimento plastico vengono effettivamente attivate e tale limite possiede un valore approssimativamente uguale per tutte le linee.

Il movimento delle dislocazioni è impedito progressivamente dal disordine locale del reticolo nelle zone di concentrazione delle dislocazioni stesse, per cui anche nella fase plastica la deformazione potrà procedere solo incrementando lo stato di tensione. Tale circostanza viene di solito presentata come *incrudimento* del materiale, inteso nel senso di energia spesa (*work-hardening*) per deformare ulteriormente il solido al di là del limite di snervamento.

60. Aspetti fenomenologici della plasticità.

Abbiamo visto come il comportamento di un solido nel campo elasto-plastico debba presentare certe peculiari caratteristiche conseguenti al meccanismo di deformazione ad un livello cristallografico. Sul piano macroscopico, che qui ci interessa, gli aspetti della deformazione plastica possono essere messi in evidenza riferendoci al caso tipico di uno stato di tensione monoassiale.

Tale situazione viene realizzata in un provino di forma cilindrica sollecitato da forze assiali uguali e di verso opposto applicate in corrispondenza delle basi. Se la lunghezza l_0 del provino è rilevante rispetto alla dimensione della sua sezione trasversale, ad una sufficiente distanza dagli estremi sarà lecito supporre di trovarci nelle condizioni del § 40 *a*) con una distribuzione uniforme della tensione normale.

Se N è l'intensità della forza applicata e A l'area della sezione trasversale, in ogni suo punto sarà presente una tensione normale $\sigma = N/A$ che, per fissare le idee, supporremo di trazione. Aumentando la forza N da zero ad un valore attuale il provino subisce un aumento Δl della sua lunghezza primitiva l_0 e quindi una dilatazione $\varepsilon = \Delta l/l_0$.

Il risultato della esperienza sopra descritta conduce al tracciamento di una curva caratteristica, detta correntemente *diagramma di*

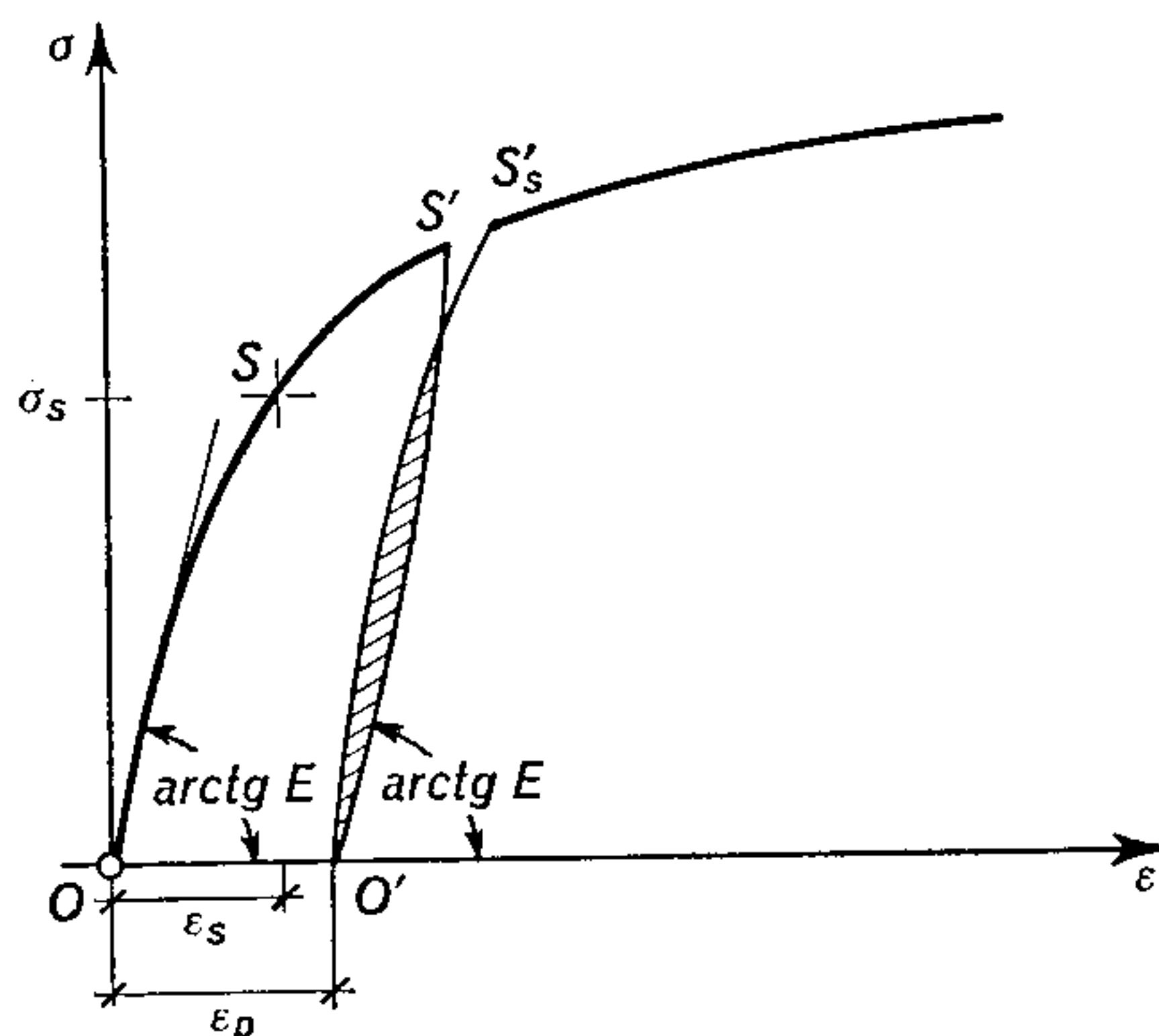


Fig. 34.

deformazione, con andamento che, per un metallo duttile, è stato indicato in fig. 34.

L'esame del diagramma (σ, ε) mette in evidenza alcune interessanti proprietà.

Durante l'applicazione della forza N crescente, il provino si deforma elasticamente e riprende la forma primitiva alla rimozione del carico: la deformazione ε è sensibilmente proporzionale alla tensione σ , cioè vale la legge di Hooke, $\sigma = E\varepsilon$, in un tratto iniziale il cui limite è strettamente legato alla sensibilità degli strumenti impiegati nella misura.

Il campo elastico si estende sino ad un valore σ_s della tensione, *limite di snervamento o di plasticità*, oltre il quale si rileva allo scarico una deformazione permanente apprezzabile.

La deformazione deve essere sostenuta da un aumento della tensione anche oltre il limite di snervamento: tale incremento di tensione va progressivamente diminuendo e tende a zero con l'aumentare della deformazione.

Se la tensione, raggiunto un valore σ' oltre lo snervamento σ_s , viene ridotta, la deformazione diminuisce secondo una legge rappresentata da una retta sensibilmente parallela alla tangente nell'origine

al diagramma di deformazione, cioè dalla legge di Hooke $\sigma = E\varepsilon$. Prima che la tensione sia completamente rimossa nasce una deformazione plastica di lieve entità ma tale da produrre un ritardo nella risposta della deformazione alla tensione ed un conseguente *ciclo di isteresi* nella successiva fase di carico, come è stato indicato con tratteggio in maniera esagerata in fig. 34. Nell'acciaio dolce l'isteresi scompare col tempo: lentamente alla temperatura ambiente, in pochi minuti a 100 °C.

La curva di deformazione riprende da un punto S'_s praticamente coincidente con S' , e procede come la continuazione della curva primitiva. Il punto S'_s , come ogni punto della curva a destra di S , può essere considerato come il nuovo limite di snervamento del provino al quale sia stata impressa una pre-deformazione: $\varepsilon'_p = \overline{OO'}$.

Vediamo dunque che il limite di snervamento del materiale si innalza con il procedere monotonicamente di una deformazione plastica. Al contrario se, dopo aver raggiunto la tensione di snervamento σ_s , il provino fosse stato scaricato e soggetto ad una forza di compressione, il limite di snervamento per questa sollecitazione risulterebbe $\sigma''_s < \sigma_s$, come osservò per primo BAUSCHINGER¹, malgrado i metalli presentino usualmente lo stesso limite di snervamento in trazione e in compressione, quando naturalmente tali limiti siano determinati in una prova senza inversione di segno della tensione applicata.

L'interpretazione corrente degli effetti sopra delineati trae origine dalla considerazione che nel corso della deformazione plastica gli assi cristallografici di ciascun grano ruotano gradualmente verso una direzione comune: viene generato in tal modo un orientamento preferenziale e di conseguenza una crescente anisotropia, anche se il materiale aveva inizialmente un comportamento sensibilmente isotropo. Lo snervamento si produce nei grani che godono di un orientamento più favorevole nei riguardi della deformazione plastica, mentre la tensione aumenta meno rapidamente nei grani già plasticizzati che in quelli ancora in fase elastica.

Se allora il provino, inizialmente soggetto ad una forza di trazione sino a produrre lo snervamento, viene scaricato, i grani ancora elastici saranno parzialmente impediti nella loro tendenza a riprendere la forma primitiva dalla deformazione irreversibile dei grani plasticizzati. Sorgeranno così delle tensioni residue, e precisamente *trazioni* nei grani elastici, *compressioni* in quelli plastici. In termini di queste tensioni residue sarebbero spiegati sia il ritardo della risposta nella successiva fase di carico, isteresi elastica, sia il raggiungimento di un li-

¹ J. BAUSCHINGER, *Zivilingenieur*, **27**, 289 (1881).

mite di snervamento in compressione ad un livello di tensione più basso del precedente.

Una analisi più attenta dei fenomeni dimostra però lo scarso fondamento fisico del punto di vista corrente. Infatti la deformazione, riguardata ad un livello strutturale, non possiede assolutamente carattere di uniformità e non sembra aver molto significato il concetto di tensione residua applicato ad un singolo grano.

Inoltre, nel caso dell'isteresi, il fenomeno dovrebbe scomparire al diminuire della tensione applicata anzichè tendere ad un valore costante come mostra l'esperienza.

Una spiegazione più attendibile può essere ottenuta in termini di linee di scorrimento. L'isteresi infatti trarrebbe origine dalla mobilità parziale delle dislocazioni introdotta dalla deformazione plastica. Tale deformazione resta confinata alle linee di scorrimento localizzate e proprio in queste perciò devono trovarsi le dislocazioni, la cui alta concentrazione avrebbe la proprietà di conferire loro un comportamento quasi-viscoso con graduale trasformazione nella struttura cristallina della matrice circostante indeformata.

Analogamente l'effetto Bauschinger può essere spiegato dalla circostanza che dopo la formazione di una linea di scorrimento per effetto di una forza, ad esempio, di trazione, applicata al provino, la tensione tangenziale localizzata lungo tale linea e nella matrice elastica circostante viene quasi interamente eliminata. Durante la rimozione della forza applicata devono nascere necessariamente in queste zone delle tensioni tangenziali di segno opposto a quelle originarie. Perciò sotto l'azione di una forza di compressione lo snervamento sarà prodotto da tensioni tangenziali più piccole delle precedenti.

61. Condizione di plasticità.

Le basi di una teoria sugli stati elasto-plastici, in accordo con gli aspetti sperimentali caratteristici brevemente delineati, devono da un lato rappresentare uno strumento sufficientemente generale per comprendere i più svariati problemi incontrati nelle applicazioni, e dall'altro possedere i necessari requisiti di semplicità per consentire la risoluzione effettiva, sia pure soltanto approssimata, dei problemi stessi.

Tali esigenze comportano la necessità di trascurare alcuni fenomeni non determinanti nei riguardi dello scopo fondamentale che la teoria si prefigge, anche se in questo modo il campo di indagine viene arbitrariamente circoscritto.

Supporremo così di ritenere valida la teoria solo per temperature alle quali siano trascurabili il rinvenimento, lo scorrimento viscoso

ed ogni effetto termico e non prenderemo in considerazione i fenomeni dovuti a disuniformità strutturale a livello microscopico come l'isteresi nei cicli di carico e l'effetto Bauschinger.

Sotto tali ipotesi restrittive potremo ammettere che lo snervamento di un materiale dipenda esclusivamente dallo stato di tensione e dallo stato di deformazione plastica.

L'ovvia estensione del risultato ottenuto nel caso di tensione monoassiale e discusso nel § 60 ad un generico stato triassiale caratterizzato da componenti di tensione σ_{ij} e da componenti di deformazione plastica ε_{ij}^p , conduce ad esprimere tale dipendenza attraverso una *funzione di snervamento o di plasticità* $S(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ che rappresenta l'equivalente triassiale del punto S di coordinate $(\sigma_S, \varepsilon_S)$ nel diagramma di deformazione di fig. 34.

Il passaggio dallo stato elastico a quello elasto-plastico per ogni possibile combinazione delle componenti di tensione σ_{ij} è così segnato dalla:

$$S(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad [61. 1]$$

detta *condizione di plasticità o criterio di snervamento*.

La caratterizzazione del legame funzionale $S(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ per un dato materiale rappresenta un problema sperimentale di notevole difficoltà, in quanto tale legame dipende in modo estremamente complesso dalla storia del materiale e, in particolare, dal programma di carico seguito nel raggiungimento dello stato limite di plasticità.

Sebbene la distribuzione delle tensioni a livelli microscopici sia intimamente connessa con tutte le circostanze precedenti, ammetteremo però che, comunque venga raggiunto un certo stato di tensione, la situazione limite sia sempre la stessa. Infine è necessario introdurre una ulteriore ipotesi, di carattere essenziale nello sviluppo della teoria, e precisamente che la funzione di snervamento dipenda dalla deformazione plastica attraverso *un solo parametro*, cioè che la condizione di plasticità [61. 1] possa essere posta nella forma:

$$S(\sigma_{ij}) = k(\varepsilon_{ij}^p). \quad [61. 2]$$

Alla [61. 2] può essere attribuito un semplice significato geometrico al quale viene fatto spesso riferimento per immediatezza intuitiva. Lo stato di tensione è individuato, come sappiamo, dalle sei componenti σ_{ij} o, nel riferimento principale, dalle tre componenti principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. Tali componenti, nello spazio astratto degli stati di tensione, possono essere riguardate come coordinate di un *punto-tensione* $S \equiv (\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$. La condizione di plasticità impone a questo

punto di trovarsi sulla superficie $S(\sigma_{ij}) = k$, che assume allora il nome di *luogo di snervamento* in quanto, in linguaggio geometrico, i suoi punti S sono rappresentativi di stati tensionali limiti per lo stato puramente elastico.

Infine, sulla scorta di quanto è stato messo sinora in evidenza dai risultati sperimentali supporremo, in ogni caso, che il luogo di snervamento sia rappresentato da una *superficie convessa*. Nel corso della deformazione plastica tale superficie può cambiare di forma e dimen-

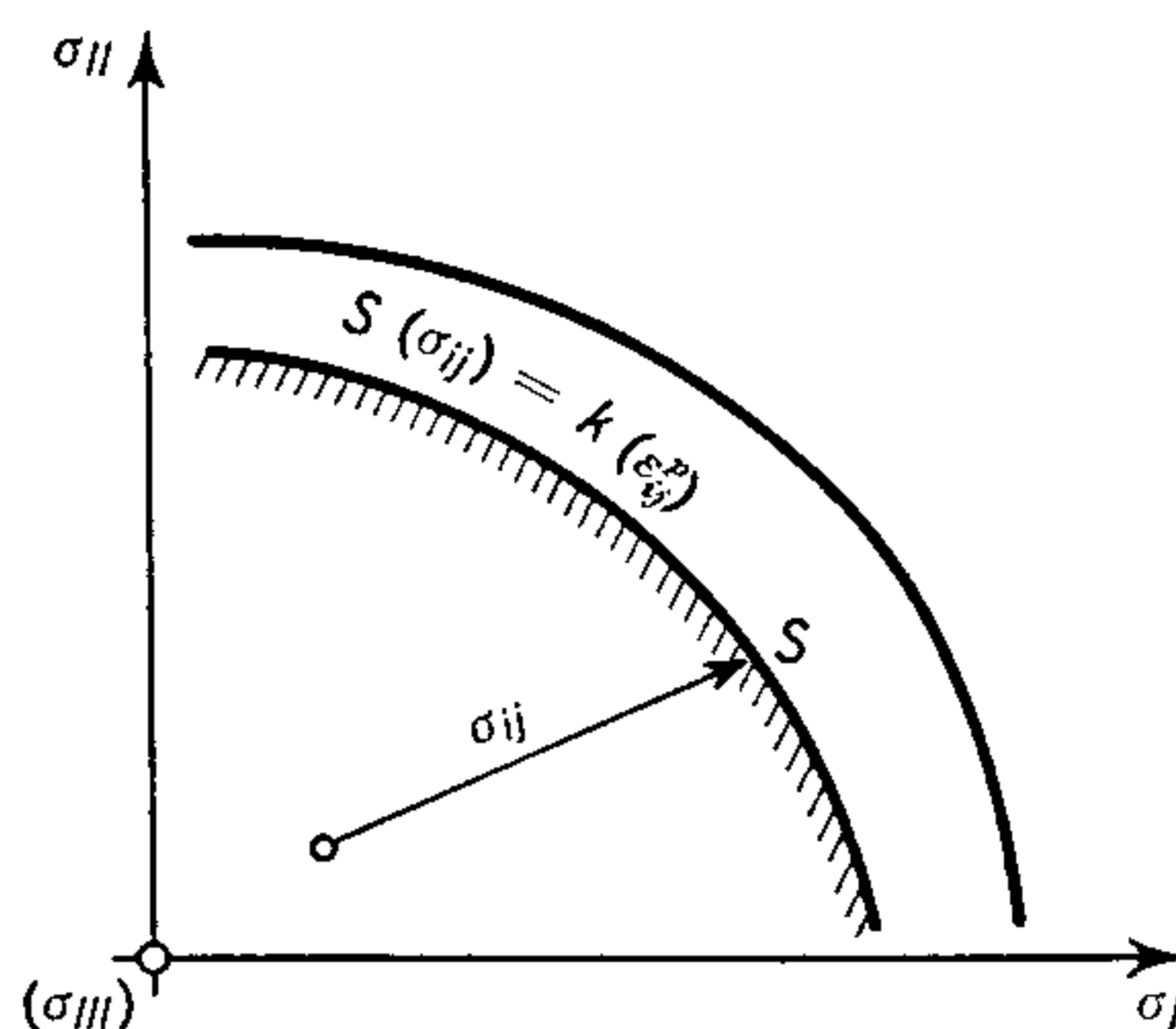


Fig. 35.

sioni, anche se nella presente trattazione prescindiamo dagli eventuali cambiamenti di forma del luogo di snervamento.

Varie possibilità di scelta sussistono in merito al parametro k : la più convincente appare quella di assumerlo funzione del *lavoro di deformazione plastica*:

$$S(\sigma_{ij}) = k(\Phi_p), \quad [61.3]$$

cioè del lavoro compiuto dalle componenti di tensione nel corso della deformazione plastica di un elemento dV di volume:

$$\Phi_p = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad [61.4]$$

dove l'integrale è esteso all'effettivo percorso Γ seguito nel processo di deformazione a partire da un certo stato iniziale.

Il lavoro Φ_p risulta una grandezza essenzialmente positiva perchè la transizione tra due stati del materiale accompagnata da deformazione plastica è una trasformazione irreversibile in senso termodinamico e costituisce la definizione stessa o il *postulato fondamentale della plasticità*¹.

Oltre lo snervamento si rende dunque necessario un incremento positivo di lavoro plastico per incrementare la deformazione ed ogni

¹ A. A. ILJUSIN, *Prikl. Mat. Meh.*, **25**, 503 (1961).

stato successivo di deformazione plastica è caratterizzato da una diversa condizione di plasticità dipendente dal lavoro plastico totale. Ciò è dovuto all'incrudimento plastico del materiale e può essere spiegato ad un livello strutturale in termini di energia necessaria ad attivare la deformazione ancora elastica del reticolo cristallino nelle zone interposte tra due successive linee di scorrimento.

In alcuni materiali metallici però, una volta superato lo snervamento S , la tangente al diagramma di deformazione di fig. 34 ha una inclinazione assai lieve rispetto all'asse ε , tanto che, almeno in prima approssimazione, appare giustificato supporre la tangente perfettamente orizzontale.

Quando sia accettabile tale semplificazione ci troviamo in presenza di un comportamento detto *perfettamente plastico*, nel quale gli incrementi $d\varepsilon_{ij}^p$ della deformazione plastica, dovuti a certi incrementi $d\sigma_{ij}$ della tensione, crescono così rapidamente da rendere impossibile l'esistenza di stati di tensione per i quali $S(\sigma_{ij}) > 0$. La condizione di plasticità risulta allora indipendente dalla deformazione plastica ed assume la forma semplificata:

$$S(\sigma_{ij}) = 0, \quad [61. 5]$$

cioè il limite di snervamento viene raggiunto sempre per lo stesso valore della funzione $S(\sigma_{ij})$.

La costruzione effettiva della funzione di snervamento, tipica per ogni materiale, rappresenta un problema sperimentale di importanza decisiva per l'ulteriore sviluppo della Meccanica degli stati plastici. Da una parte la funzione $S(\sigma_{ij})$ deve essere in accordo con l'esperienza, e dall'altra possedere una struttura analitica abbastanza semplice perchè ne sia reso agevole l'impiego nella risoluzione dei problemi concreti, anche se tale condizione possa, di fatto, peggiorare l'interpretazione dei dati sperimentali.

Nel caso in cui il solido si comporti isotropicamente la funzione di snervamento deve dipendere dallo stato di tensione attraverso gli invarianti, secondo la definizione di isotropia data nel § 35, cioè:

$$S(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad [61. 6]$$

dove gli invarianti I_1, I_2, I_3 sono espressi dalle [23. 6] in termini delle componenti principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$.

Poichè l'esperienza dimostra che una pressione puramente idrostatica non comporta una deformazione plastica apprezzabile, si può ammettere che lo snervamento dipenda esclusivamente dagli invarianti del

deviatore di tensione s_{ij} e non dalla componente isotropa $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$. La [61. 6] viene allora semplificata nella:

$$S(J_2, J_3) = 0, \quad [61. 7]$$

essendo identicamente nullo l'invariante lineare J_1 del deviatore e risultando J_2, J_3 dalle [24. 4] o dalle [24. 5].

Oltre alla supposta indipendenza dello stato plastico da $\bar{\sigma}$ e quindi per la [40. 15] da ogni cambiamento di volume, ammettiamo che stati

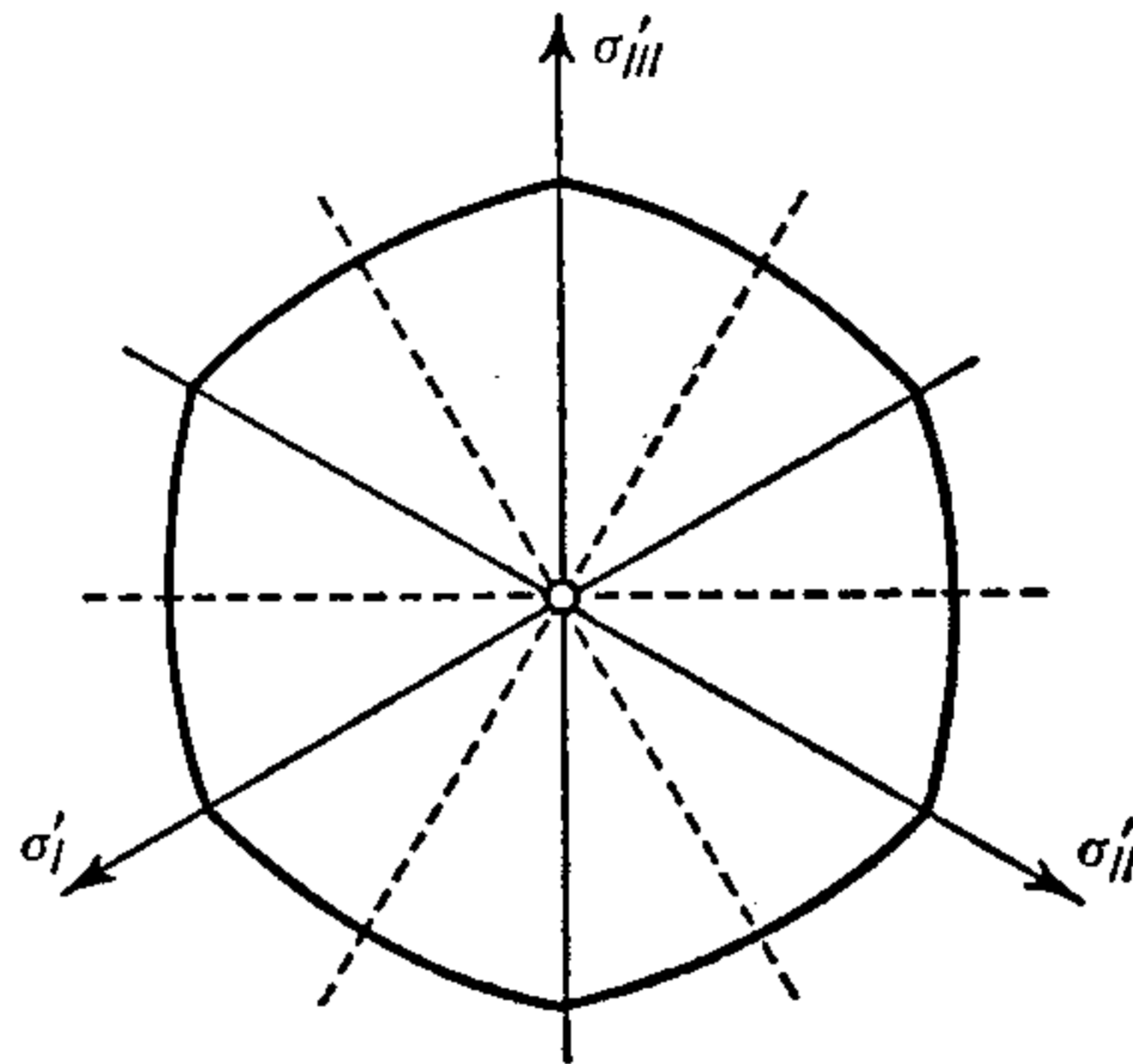


Fig. 36.

plastici caratterizzati da componenti di tensione σ_{ij} e $-\sigma_{ij}$ siano simmetrici, cioè che il materiale possieda, in valore assoluto, lo stesso limite di snervamento in trazione e in compressione semplici.

Nello spazio delle tensioni assumiamo come sistema di coordinate la terna delle direzioni principali di tensione $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ che sappiamo coincidenti con le direzioni principali del deviatore di tensione (s_I, s_{II}, s_{III}) . In questo riferimento il luogo di snervamento $S(J_2, J_3) = 0$ rappresenta una superficie cilindrica il cui asse è perpendicolare al piano $J_1 \equiv s_I + s_{II} + s_{III} = 0$, ed ha coseni direttori uguali a $1/\sqrt{3}$.

Poichè la intersezione della superficie cilindrica con i piani $J_1 = \text{cost.}$ è sempre costituita dalla stessa curva C , possiamo semplicemente assumere tale curva come immagine del luogo di snervamento sul piano $J_1 = 0$, secondo quanto è indicato in fig. 36.

L'isotropia impone alla curva intersezione C di essere simmetrica rispetto alle proiezioni $\sigma'_I, \sigma'_{II}, \sigma'_{III}$ sul piano $J_1 = 0$ degli assi principali di tensione $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, mentre l'uguaglianza degli stati limiti in trazione ed in compressione impone l'ulteriore simmetria rispetto ai tre assi (tratteggiati in fig. 36) perpendicolari a dette proiezioni.

In definitiva la curva di snervamento è composta di tratti identici in ognuno dei sei settori di 60° ed ogni tratto è simmetrico rispetto alla bisettrice di ogni settore.

62. Criteri particolari di plasticità.

Numerosi criteri sono stati proposti negli ultimi cento anni: qui ci limiteremo a discuterne i più importanti dal punto di vista applicativo: in *a)* e *b)* esporremo due criteri di impiego corrente e del tipo particolare rappresentato nella fig. 36 mentre in *c)* faremo un rapido cenno ad altri criteri.

a) Criterio di Tresca.

Per interpretare una vasta serie di dati sperimentali ottenuti in prove di estrusione su metalli dolci, una condizione di plasticità, ancora

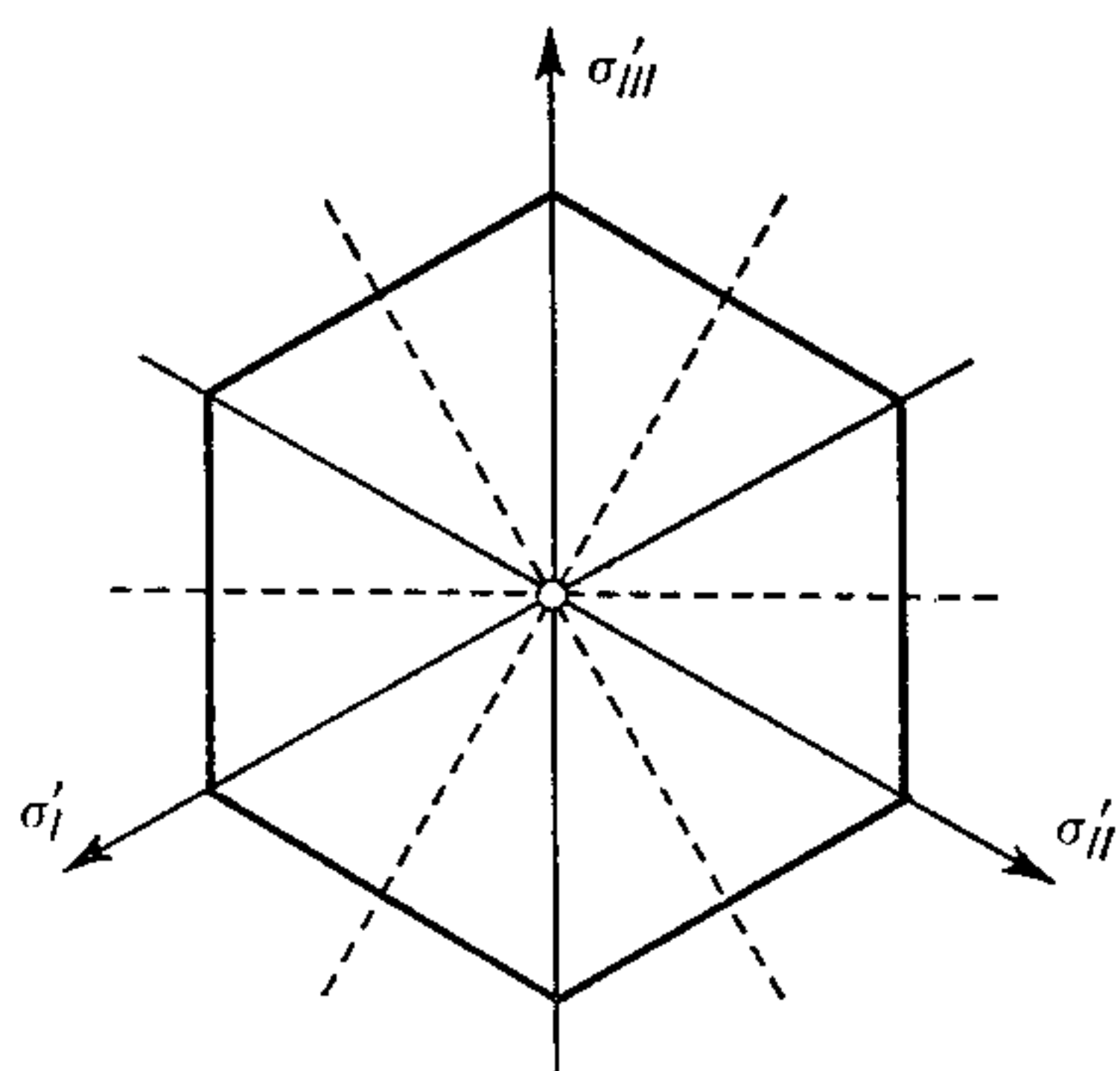


Fig. 37.

oggi largamente usata, venne proposta da TRESCA¹ e successivamente riveduta da BARRÉ DE SAINT-VENANT².

Secondo tale ipotesi lo snervamento viene raggiunto quando la tensione tangenziale massima perviene ad un valore limite k , chiamato da Tresca *coefficiente di fluidità*, e precisamente al limite di snervamento ottenuto in una prova di semplice taglio, del tipo descritto nel § 40 *d)*.

L'ipotesi sembrerebbe confermata dalla coincidenza, sia pure approssimata, tra la direzione delle prime bande di scorrimento plastico e quella della tensione tangenziale massima. Poiché tale tensione è rappresentata dal raggio del maggiore dei cerchi di Mohr, con riguardo alle [25. 15] il criterio può anche essere espresso nella forma:

$$|\tau| \equiv \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) = k. \quad [62. 1]$$

Per rispettare la simmetria della curva di snervamento è necessario completare la relazione originaria [62. 1] in modo che la condizione di

¹ H. TRESCA, *Comptes Rendus Acad. Sciences*, **59**, 754 (1864).

² A. BARRÉ DE SAINT VENANT, *Comptes Rendus Acad. Sciences*, **70**, 473 (1870); **74**, 1009 (1872).

plasticità sia indipendente dall'ordine con il quale vengono attribuiti gli indici agli assi delle tensioni principali.

Diremo allora che lo snervamento viene raggiunto quando una delle tre differenze: $\sigma_I - \sigma_{III}$, $\sigma_{II} - \sigma_I$, $\sigma_{III} - \sigma_{II}$, raggiunge in valore assoluto il limite $2k$, per cui l'equazione completa del luogo di snervamento diviene:

$$[(\sigma_I - \sigma_{III})^2 - 4k^2][(\sigma_{II} - \sigma_I)^2 - 4k^2][(\sigma_{III} - \sigma_{II})^2 - 4k^2] = 0, \quad [62.2]$$

e corrisponde a tre coppie di piani paralleli.

Nello spazio delle tensioni principali i sei piani [62.2] definiscono un prisma esagonale retto che interseca il piano $J_1 \equiv s_I + s_{II} + s_{III} = 0$ secondo un esagono regolare.

Il criterio di plasticità di Tresca costituisce un esempio di funzione di snervamento dotata di punti singolari.

Per uno stato monoassiale di semplice trazione del tipo descritto nel § 40 a), essendo $\sigma_I = \sigma_S$ il limite di snervamento in questo caso particolare, il criterio [62.2] per $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ si riduce alla: $\sigma_S = 2k$. Per uno stato di semplice taglio del tipo

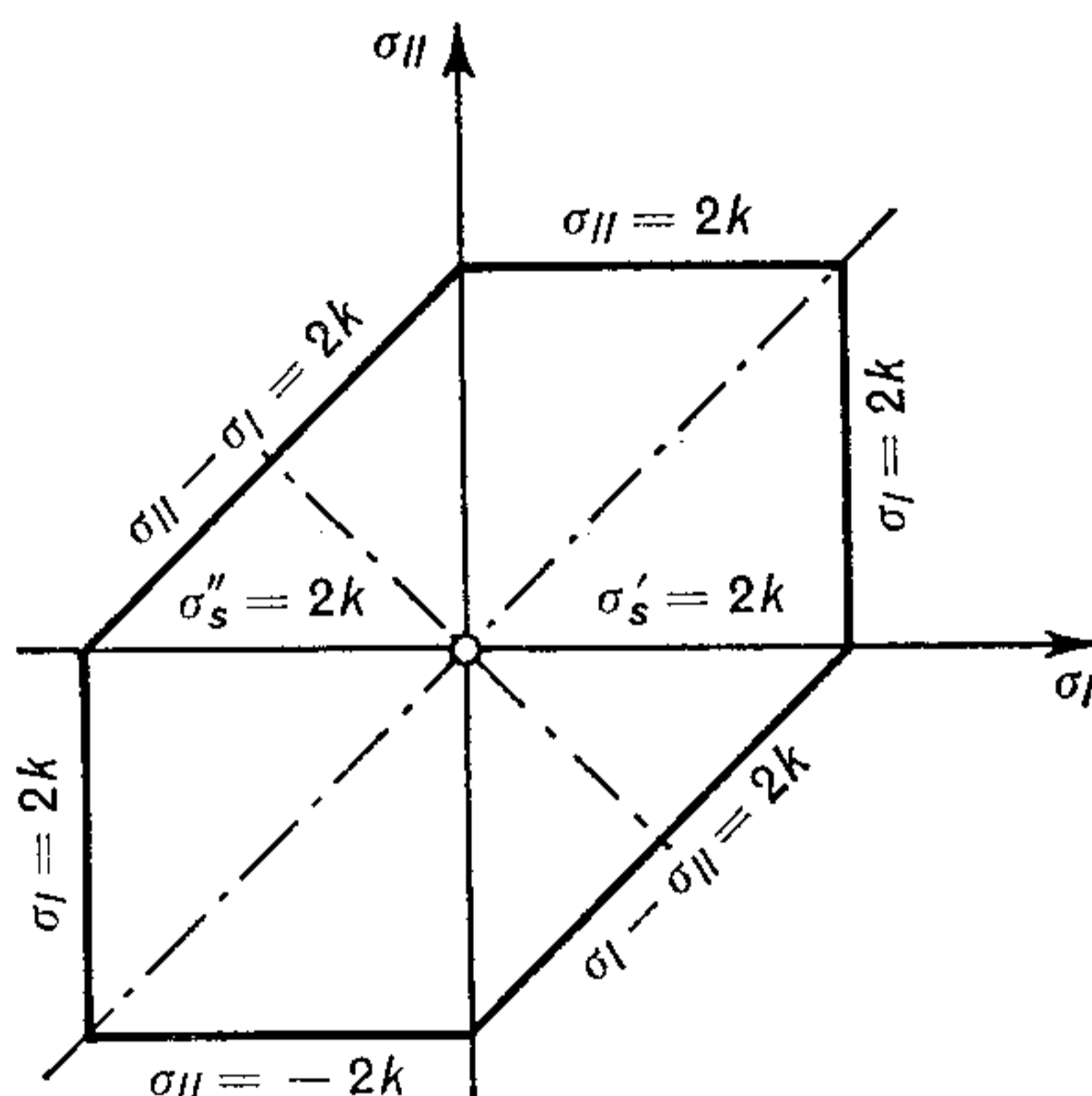


Fig. 38.

descritto nel § 40 d), dalla definizione stessa del criterio si ottiene il limite di snervamento raggiunto in tale situazione: $\tau_S = k$.

Secondo il criterio di Tresca la tensione di snervamento per semplice trazione dovrebbe perciò risultare il doppio della tensione di snervamento per semplice taglio, anche se l'esperienza dimostra eccessivo tale rapporto.

Per uno stato di tensione biassiale caratterizzato dalle sole due tensioni principali σ_I , σ_{II} , il criterio [62.2], essendo $\sigma_{III} = 0$, si riduce alla:

$$(\sigma_I - 4k^2)(\sigma_{II} - 4k^2)[(\sigma_{II} - \sigma_I)^2 - 4k^2] = 0, \quad [62.3]$$

e la sua rappresentazione grafica nel piano (σ_I, σ_{II}) è l'esagono indicato nella fig. 38 come intersezione del prisma esagonale regolare [62.2] con il piano (σ_I, σ_{II}) , cioè $\sigma_{III} = 0$.

b) *Criterio di Mises.*

Il più semplice criterio di plasticità per un solido isotropo incompressibile è dovuto a VON MISES¹ e consiste nell'assumere la funzione di snervamento limitata al solo invariante J_2 del deviatore di tensione:

$$S(J_2, J_3) = J_2 + k^2 = 0, \quad [62. 4]$$

cioè, tenendo presente la seconda delle [24. 4]:

$$s_{ij} s_{ij} = 2k^2, \quad [62. 5]$$

o anche, in termini delle componenti principali del deviatore stesso in base alla seconda delle [24. 5]:

$$s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 = 2k^2. \quad [62. 6]$$

Il luogo di snervamento è dunque un cilindro circolare e la sua curva intersezione col piano $J_1 = 0$ è un cerchio di raggio $k/\sqrt{2}$.

Alla condizione di plasticità di Mises viene spesso fatto riferimento attraverso una sua interpretazione, dovuta a HENCKY² e fondata sulla proporzionalità tra l'invariante J_2 e l'energia di deformazione Φ_D associata al cambiamento di forma di un solido elastico. Questa energia risulta dalla differenza tra l'energia potenziale elastica Φ e l'energia Φ_V corrispondente ad una variazione di volume, cioè:

$$\Phi_D = \Phi - \Phi_V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \Delta. \quad [62. 7]$$

Dalle relazioni [40. 7] e [40. 8] abbiamo allora per sostituzione nella [62. 7]:

$$\begin{aligned} \Phi_D &\equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij} \lambda \Theta}{3\lambda + 2\mu} \right) \sigma_{ij} - \frac{\Theta^2}{3(3\lambda + 2\mu)} \right] = \quad [62. 8] \\ &= \frac{1}{12\mu} (3 \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \Theta^2), \end{aligned}$$

o anche, in termini delle componenti del deviatore di tensione, con riguardo alle [24. 1] e [24. 2]:

$$\Phi_D \equiv \frac{1}{12\mu} [3 (s_{ij} + \delta_{ij} \bar{\sigma})^2 - 9\bar{\sigma}^2] = \frac{1}{4\mu} s_{ij} s_{ij}. \quad [62. 9]$$

Possiamo dunque interpretare il criterio di Mises [62. 5] nel senso che lo snervamento viene raggiunto quando l'energia potenziale elastica *distorcente* perviene al valore limite $\Phi_D = k^2/2\mu$.

¹ R. V. MISES, *Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse*, 582 (1913).

² H. HENCKY, *Zeits. angew. Math. Mech.*, 4, 323 (1924).

La forma [62. 8] è particolarmente utile nelle applicazioni; scritta per disteso assume l'aspetto, in termini delle componenti di tensione:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 6k^2, \quad [62. 10]$$

o più semplicemente in termini delle componenti principali:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2. \quad [62. 11]$$

Se consideriamo, ad esempio, uno stato monoassiale di semplice trazione del tipo introdotto nel § 40 a), essendo $\sigma_{11} = \sigma_S$ il limite di snervamento in questo caso particolare, la [62. 10] si riduce alla:

$$\sigma_S = k\sqrt{3}. \quad [62. 12]$$

Se invece prendiamo in esame uno stato di semplice taglio del tipo descritto nel § 40 d), indicando con $\sigma_{12} = \tau_S$ il limite di snervamento raggiunto in tale situazione, la [62. 10] si riduce alla:

$$\tau_S = k. \quad [62. 13]$$

Secondo il criterio di Mises la tensione di snervamento per semplice trazione è così $\sqrt{3}$ volte la tensione di snervamento per semplice taglio, rapporto più vicino ai dati sperimentali di quello desunto dal criterio di Tresca.

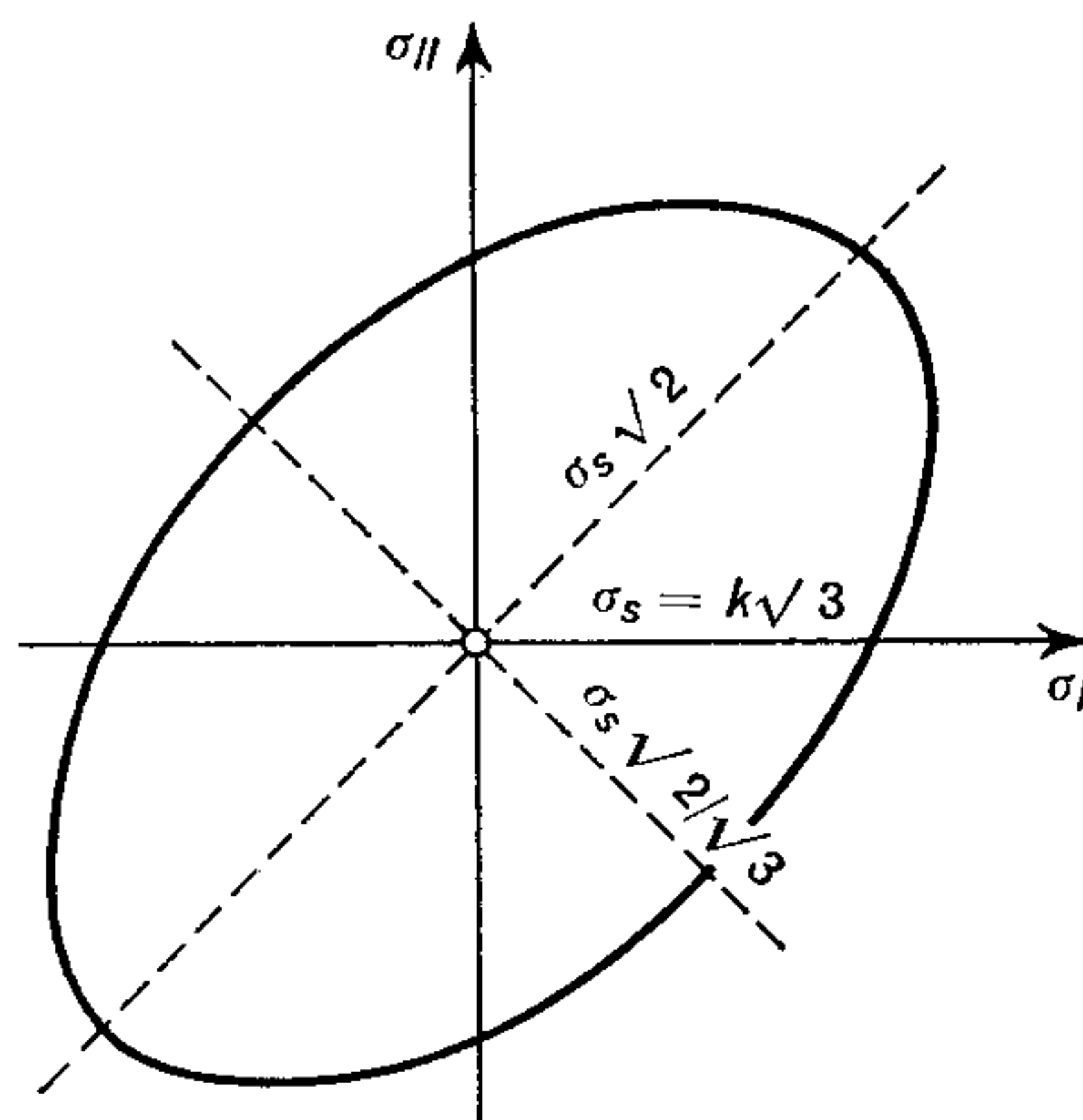


Fig. 39.

Per uno stato di tensione biassiale caratterizzato dalle sole due tensioni principali σ_I , σ_{II} , il criterio [62. 11], per $\sigma_{III} = 0$, si riduce alla:

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = 3k^2, \quad [62. 14]$$

e la sua rappresentazione grafica sul piano (σ_I, σ_{II}) è l'ellisse indicata nella fig. 39 ed ottenuta come intersezione del cilindro circolare [62. 11] con il piano (σ_I, σ_{II}) .

c) Altri criteri particolari.

I due criteri di plasticità prima discussi sono correntemente impiegati nello studio dei problemi elasto-plastici per il loro carattere di notevole semplicità ed il soddisfacente accordo con l'esperienza.

Dobbiamo però ricordare anche altri criteri o per il loro indiscutibile interesse storico o per la migliore loro aderenza ai risultati sperimentali.

I due più vecchi criteri, di attribuzione incerta, assumevano come limiti per il raggiungimento dello snervamento la *tensione massima* e la *dilatazione massima* rispettivamente: successivamente modificati si tradussero nei noti criteri della *tensione max-min* e della *dilatazione max-min*.

Nel primo caso la situazione limite sarebbe raggiunta quando: o la tensione massima σ_I o la tensione minima σ_{III} raggiungono i limiti di snervamento per semplice trazione o per semplice compressione, cioè:

$$\sigma_I \leq \sigma'_S, \quad \sigma_{III} \leq \sigma''_S. \quad [62. 15]$$

Nel secondo caso la situazione limite sarebbe raggiunta quando: o la dilatazione massima ε_I o la dilatazione minima ε_{III} raggiungono i limiti di dilatazione corrispondenti allo snervamento per semplice trazione o per semplice compressione, cioè:

$$E \varepsilon_I \leq \sigma'_S, \quad E \varepsilon_{III} \leq \sigma''_S. \quad [62. 16]$$

In contrasto con tali criteri BELTRAMI¹ intuì per primo con estrema chiarezza che « *la vera misura del cemento a cui è messa la coesione di un corpo elastico non debba essere desunta nè dalla sola tensione max, nè dalla sola dilatazione max, ma debba risultare, in un qualche modo, dall'insieme di tutte le tensioni, o di tutte le dilatazioni che regnano nell'intorno di ogni punto del corpo* », ed assunse l'energia potenziale elastica Φ come misura del raggiungimento di uno stato limite, cioè:

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \leq k^2. \quad [62. 17]$$

Successivamente il polacco HUBER², osservò che un solido può sopportare una pressione puramente idrostatica senza raggiungere una deformazione plastica apprezzabile, al contrario di quanto avviene in presenza di uno stato di trazione uniforme. Propose quindi un criterio misto, adottando l'energia potenziale elastica Φ , e quindi l'ipotesi di Beltrami, come misura degli stati limiti per tensioni principali positive e l'energia potenziale elastica distorcente Φ_D , anticipando così il criterio di Mises, come misura degli stati limiti per tensioni principali negative:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \leq k^2, & \text{per } \Delta > 0; \\ \Phi_D &\equiv \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} \leq k^2, & \text{per } \Delta \leq 0. \end{aligned} \quad [62. 18]$$

Infine, partendo dall'osservazione che il raggiungimento di uno stato limite di plasticità deve dipendere anche dall'invariante del primo ordine I_1 dello stato di tensione, lo stesso MISES³ e SCHLEICHER⁴ proposero indipendentemente di sostituire la costante k della [62. 4] con una funzione, cioè:

$$J_2 + f(I_1) = 0. \quad [62. 19]$$

Schleicher discusse diffusamente i vari casi particolari relativi alla struttura della funzione $f(I_1)$ e precisamente quando essa ha andamento lineare e parabolico, e

¹ E. BELTRAMI, *Rend. Ist. Lombardo* (2), **18**, 704 (1885).

² M. T. HUBER, *Czasopismo Techniczne*, Lwow, **22**, 81 (1904).

³ R. V. MISES, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **5**, 147 (1925).

⁴ F. SCHLEICHER, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **5**, 478 (1925); **6**, 199 (1926).

quindi è rappresentata nello spazio delle tensioni principali rispettivamente da un cono e da un paraboloido di rotazione.

Limitandoci a questi brevi cenni del criterio [62. 19] che, del resto, non è di applicazione facile, rimandiamo per una esposizione più diffusa alla memoria di RENDULIC¹, dove sono criticamente discusse le possibili forme del luogo di snervamento corrispondenti ad espressioni analitiche semplici: cono, iperboloido, paraboloido, e sono analizzati i necessari confronti con i risultati sperimentali.

63. Relazioni elasto-plastiche.

Nel corso della deformazione plastica ad incrementi $d\sigma_{ij}$ dello stato di tensione corrispondono in generale incrementi $d\varepsilon_{ij}^p$ dello stato di deformazione plastica: ciò non si verifica quando le variazioni $d\sigma_{ij}$ sono tali da mantenere il punto rappresentativo dello stato di tensione sulla superficie di snervamento. Parleremo in tal caso di *cambiamenti neutri*, in corrispondenza dei quali, non verificandosi alcuna deformazione plastica, deve risultare dalla [61. 2]:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} = 0, \quad [63. 1]$$

perchè il parametro k non dipende, per ipotesi, dallo stato di tensione ma solo dall'intera storia della deformazione plastica attraverso il lavoro plastico totale Φ_p .

La condizione [63. 1] è rispettata se gli incrementi $d\varepsilon_{ij}^p$ della deformazione plastica hanno la forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \pi_{ij} dS, \quad [63. 2]$$

dove le π_{ij} devono rappresentare le componenti di un tensore doppio simmetrico in accordo con il carattere tensoriale delle $d\varepsilon_{ij}^p$ ed essere funzioni: da un lato, dello stato di tensione σ_{ij} e degli incrementi di tensione $d\sigma_{ij}$, dall'altro, della intera storia del materiale.

Una proprietà importante per le π_{ij} discende dalla osservazione che un incremento $d\varepsilon_{ij}^p$ di deformazione plastica si verifica lungo certe direzioni preferenziali di scorrimento plastico quando lo stato di tensione vi raggiunge un valore limite ben definito. Appare dunque in accordo con l'esperienza ammettere che gli incrementi di tensione $d\sigma_{ij}$, pur influenzando il valore degli incrementi di deformazione plastica $d\varepsilon_{ij}^p$, non ne alterino la direzione: ciò equivale a supporre che le π_{ij} siano funzioni soltanto della storia del materiale e dello stato di tensione.

¹ L. RENDULIC, *Bauingenieur*, **19**, 159 (1938).

Se allora le π_{ij} non dipendono dagli incrementi di tensione, le relazioni [63. 2] risultano linearizzate in tali incrementi, che compaiono solo in dS , espresso dalla [63. 1].

Appare inoltre opportuno separare nelle π_{ij} i due aspetti di dipendenza sopra delineati, ponendo con sufficiente generalità:

$$\pi_{ij} = H \frac{\partial P}{\partial \sigma_{ij}}, \quad [63. 3]$$

dove H è legata alla storia del materiale mentre P è unicamente funzione delle componenti di tensione.

La funzione $P(\sigma_{ij})$ non dipende dunque dal programma di carico, cioè dal particolare percorso seguito nel realizzare un certo stato di deformazione plastica, e possiede quindi la proprietà caratteristica delle funzioni potenziali: rappresenta il cosiddetto *potenziale plastico* e permette di esprimere gli incrementi della deformazione plastica nella forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = H \frac{\partial P}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk}, \quad [63. 4]$$

ottenuta per la prima volta da MELAN¹.

Nella deformazione di un elemento policristallino un sistema di direzioni dello scorrimento plastico richiede, per essere attivato, uno stato di tensione nel quale sia raggiunto il valore critico lungo tali direzioni e non sia superato lungo le altre; cioè tale sistema individua i rapporti sia tra le componenti dello stato incrementale della deformazione plastica sia tra le componenti di tensione ed i valori critici di scorrimento. Deve dunque esistere una relazione tra il potenziale plastico P e la funzione di snervamento S . Benchè non risulti nota tale relazione per un particolare materiale, sembra che l'ipotesi $P \equiv S$ possieda uno speciale significato. In tal caso gli incrementi della deformazione plastica $d\varepsilon_{ij}^p$, ortogonali alla superficie P per la posizione [63. 2] lo sono anche alla superficie S , e le relazioni di Melan [63. 4] assumono allora l'aspetto:

$$d\varepsilon_{ij}^p = H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk}. \quad [63. 5]$$

Le [63. 4] e [63. 5] hanno significato dove il materiale è plasticizzato, cioè nei punti in cui è verificata la condizione di plasticità [61. 2] e $dS > 0$.

Nel caso di materiali senza incrudimento, cioè per stati perfettamente plastici, non possono verificarsi incrementi di tensione oltre lo

¹ E. MELAN, *Ingenieur-Archiv*, **9**, 116 (1938).

snervamento: gli incrementi di deformazione plastica $d\varepsilon_{ij}^p$ devono essere quindi indipendenti da $d\sigma_{ij}$ e le π_{ij} risultare indipendenti dalla storia del materiale perchè il luogo di snervamento è sempre lo stesso qualunque sia il programma di carico, come mostra la condizione di plasticità [61. 5]. Allora gli incrementi di deformazione plastica derivano semplicemente da una funzione potenziale P ed assumono la forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial P}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda, \quad [63. 6]$$

o anche nell'ipotesi $P \equiv S$:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda, \quad [63. 7]$$

dove $d\lambda$ è un parametro, dipendente dal tempo e dalle coordinate, così definito: $d\lambda > 0$ per $S(\sigma_{ij}) = 0$, $dS = 0$, e $d\lambda = 0$ per $S(\sigma_{ij}) < 0$ o per $S(\sigma_{ij}) = 0$, $dS < 0$.

La deformazione totale si otterrà tenendo conto anche della parte elastica, per cui gli incrementi di deformazione risultano dalla somma:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad [63. 8]$$

Per un legame lineare tensioni-deformazioni in campo elastico del tipo [35. 7] gli incrementi totali di deformazione avranno la forma, per un materiale dotato di incrudimento:

$$d\varepsilon_{ij} = a_{ijhk} d\sigma_{hk} + H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk}, \quad [63. 9]$$

e per uno stato perfettamente plastico:

$$d\varepsilon_{ij} = a_{ijhk} d\sigma_{hk} + \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda. \quad [63. 10]$$

Qualora la funzione di plasticità $S(\sigma_{ij})$, come avviene in particolare nel criterio di Tresca [62. 2], possieda punti singolari dove non hanno significato le derivate $\partial S / \partial \sigma_{ij}$, possiamo evitare la difficoltà considerando le funzioni S_α tra due punti singolari. Allora uno stato di tensione sulla superficie di snervamento è descritto dal valore zero di una o più funzioni S_α , tutte le rimanenti risultando negative.

Le relazioni per gli incrementi delle velocità di deformazione plastica sono in tal caso:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha} C_{\alpha} H_{\alpha} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk}, \quad [63. 11]$$

dove le funzioni di incrudimento H_α dipendono esclusivamente dalla storia del processo di deformazione, ed i coefficienti valgono $C_\alpha = 0$ se ogni $S_\alpha < 0$ oppure $dS_\alpha < 0$ e $C_\alpha = 1$ se ogni $S_\alpha = 0$ e $dS_\alpha > 0$.

La deduzione delle relazioni elasto-plastiche [63. 9] e [63. 10] può essere ottenuta, in alternativa, basandosi sopra un postulato introdotto da DRUCKER¹. Consideriamo un corpo in prossimità dello snervamento sotto l'azione di una distribuzione di tensioni σ_{ij} e pensiamo di applicare lentamente e rimuovere lentamente un incremento di tensione addizionale $d\sigma_{ij}$; postuliamo che il lavoro compiuto durante il ciclo così ottenuto sia rispettivamente positivo, nel caso di un materiale dotato di incrudimento, o nullo, nel caso di un materiale perfettamente plastico.

Tale affermazione non segue da considerazioni puramente termodinamiche che devono postulare semplicemente la irreversibilità del processo di deformazione plastica, ma rappresenta una speciale ipotesi o in altri termini una necessaria *regola associata di scorrimento plastico*.

Non è difficile dimostrare che l'ipotesi di Drucker è logicamente equivalente alla esistenza di un potenziale plastico coincidente con la funzione di snervamento ed alla supposta convessità della superficie di snervamento.

Le relazioni elasto-plastiche sono espresse in forma differenziale tra gli incrementi di deformazione $d\varepsilon_{ij}$ e gli incrementi di tensione $d\sigma_{ij}$: per ottenere tali relazioni in forma finita è necessario specificare l'effettivo percorso seguito nel raggiungere una certa situazione finale ed integrare lungo il percorso stesso, in quanto lo stato di deformazione raggiunto dipende dall'effettivo programma di carico.

Invece che agli incrementi differenziali $d\varepsilon_{ij}$, $d\sigma_{ij}$ possiamo anche riferirci alle derivate $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\sigma}_{ij}$ rispetto al tempo t o ad altro parametro con questo correlato: tale notazione, formalmente più semplice, è quella attualmente in uso e ad essa ci riferiremo nel seguito.

Le relazioni elasto-plastiche assumono allora l'aspetto, per materiali con incrudimento:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = a_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk} + H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} \dot{\sigma}_{hk}, \quad [63. 12]$$

e per materiali senza incrudimento:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = a_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk} + \lambda \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}}. \quad [63. 13]$$

È necessario osservare che malgrado la derivazione temporale le relazioni stesse sono indipendenti dal tempo il quale compare nel fenomeno elasto-plastico come un semplice parametro.

¹ D. C. DRUCKER, *Quart. Appl. Math.*, **7**, 411 (1950).

64. Relazioni elasto-plastiche particolari.

La scelta di una particolare condizione di plasticità, e quindi di una struttura specifica per la funzione $S(\sigma_{ij})$, permette di ottenere relazioni particolari tra le velocità di deformazione plastica e le componenti di tensione.

Se accettiamo il criterio di Mises [62. 4], per uno stato perfettamente plastico le [63. 7] divengono:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = - \dot{\lambda} \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} = \dot{\lambda} s_{ij}. \quad [64. 1]$$

Ora, per la supposta incompressibilità in fase plastica, le componenti ε_{ij}^p del tensore di deformazione coincidono con le componenti e_{ij}^p del deviatore di deformazione e quindi, con riguardo alle relazioni di elasticità isotropa [40. 8], le velocità totali di deformazione risultano:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\lambda} s_{ij} + \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij}. \quad [64. 2]$$

A queste devono essere aggiunte la condizione di compressibilità [40. 16] per la fase elastica:

$$\dot{\Theta} = K \dot{\Delta}, \quad [64. 3]$$

e la condizione di plasticità:

$$s_{ij} s_{ij} = 2k^2. \quad [64. 4]$$

Derivando questa ultima relazione rispetto al tempo, cioè:

$$s_{ij} \dot{s}_{ij} = 0, \quad [64. 5]$$

osserviamo che: prescritta una velocità di tensione tale da verificare la [64. 5], in modo che l'elemento rimanga plastico, la velocità di deformazione elastica risulta nota mentre sia il parametro $\dot{\lambda}$ sia la velocità di deformazione plastica riescono incogniti.

Appaiono quindi necessarie altre considerazioni per individuare queste grandezze, ad esempio gli eventuali vincoli geometrici al contorno od i legami interni costituiti dagli elementi adiacenti a quello considerato.

Le relazioni precedenti furono introdotte da PRANDTL¹ nel problema piano e da REUSS² nel caso generale discusso. L'ipotesi di assenza di incrudimento sulla quale sono fondate non diminuisce il valore della

¹ L. PRANDTL, *Proc. 1st Int. Congress Appl. Mech.*, 43, Delft (1924).

² A. REUSS, *Zeits. angew. Math. Mech.*, 10, 266 (1930).

teoria, in quanto nella maggior parte dei materiali impiegati nelle costruzioni l'entità dell'incrudimento è relativamente modesta e le equazioni stesse rappresentano una approssimazione sufficiente alla realtà fisica.

Supponiamo ora di specificare il percorso della deformazione plastica imponendo ad essa un andamento rettilineo: ciò equivale a mantenere costanti i rapporti tra le componenti di deformazione e quindi i corrispondenti rapporti tra le componenti di tensione, in modo che rimangano fisse le loro direzioni principali. Otteniamo allora dalla [64. 2] per $s_{ij} = cs_{ij}^0$:

$$\dot{e}_{ij} = c\dot{\lambda}s_{ij}^0 + \frac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij}, \quad [64. 6]$$

dove s_{ij}^0 rappresentano dei valori costanti di tensione e c un parametro crescente monotonicamente. Integrando rispetto al tempo:

$$e_{ij} = s_{ij}^0 \int c\dot{\lambda} dt + \frac{1}{2\mu} s_{ij} = \left(C + \frac{1}{2\mu} \right) s_{ij}, \quad [64. 7]$$

dove abbiamo introdotto per semplicità $C = \int c\dot{\lambda} dt/c$.

Le [64. 7] furono introdotte direttamente da HENCKY¹ come relazioni elasto-plastiche ed impiegate frequentemente nella risoluzione di problemi particolari. La deduzione precedente ne dimostra però la validità nel caso molto particolare in cui il percorso della deformazione plastica abbia andamento rettilineo.

Inoltre non è difficile mostrare come le [64. 7] siano inadatte a descrivere completamente il comportamento di uno stato elasto-plastico. Infatti, supponiamo che dopo aver subito una certa deformazione plastica l'elemento venga scaricato e successivamente caricato in modo da raggiungere un diverso stato di tensione il cui punto rappresentativo si trovi sulla superficie di snervamento. La deformazione plastica non può essere cambiata mentre secondo le [64. 7] il suo valore dovrebbe risultare completamente diverso perchè lo stato di tensione è cambiato. Ciò comporterebbe l'assurda conseguenza che la deformazione plastica stessa dovrebbe aver subito una variazione durante lo scarico ed il carico successivo, questo spinto non oltre il luogo di snervamento.

65. Problema dell'equilibrio elasto-plastico.

Consideriamo uno stato elasto-plastico di un solido in presenza di certe distribuzioni assegnate di forze p_j nel volume occupato dal solido,

¹ H. HENCKY, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **4**, 323 (1924).

di forze f_j su una porzione A_f della frontiera A , di spostamenti u_j sulla porzione rimanente A_u .

Nel generico intervallo di tempo dt gli incrementi differenziali delle componenti di deformazione $d\varepsilon_{ij}$ e delle componenti di spostamento du_j dovranno verificare le equazioni di congruenza e le condizioni di vincolo imposte. Riferendoci alle derivate $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{u}_j rispetto al tempo anzichè agli incrementi differenziali, avremo:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \text{in } V + A; \quad [65.1]$$

$$\dot{u}_j = \bar{u}_j, \quad \text{su } A_u. \quad [65.2]$$

Analogamente gli incrementi differenziali dp_j , df_j delle forze e $d\sigma_{ij}$ delle componenti di tensione dovranno verificare le equazioni di equilibrio indefinite e ai limiti, cioè, in termini delle corrispondenti velocità \dot{p}_j , \dot{f}_j , $\dot{\sigma}_{ij}$:

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{p}_j = 0, \quad \text{in } V; \quad [65.3]$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_i = \dot{f}_j, \quad \text{su } A_f. \quad [65.4]$$

Senza introdurre relazioni ulteriori i due gruppi di equazioni precedenti possono essere collegati attraverso il teorema dei lavori virtuali, applicato ora alle velocità invece che alle grandezze originarie.

Precisamente, per una distribuzione equilibrata di velocità delle forze-tensioni e per una distribuzione virtuale congruente di velocità degli spostamenti-deformazioni, sussiste il seguente *teorema delle velocità degli spostamenti virtuali*:

$$\int_V \dot{p}_j \delta \dot{u}_j dV + \int_A \dot{f}_j \delta \dot{u}_j dA = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \quad [65.5]$$

In modo analogo, per una distribuzione congruente di velocità degli spostamenti-deformazioni e per una distribuzione virtuale equilibrata di velocità delle forze-tensioni è valido, come duale del precedente, il seguente *teorema della velocità delle forze virtuali*:

$$\int_V \dot{u}_j \delta \dot{p}_j dV + \int_A \dot{u}_j \delta \dot{f}_j dA = \int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} dV. \quad [65.6]$$

La dimostrazione dei teoremi viene svolta con l'identico procedimento seguito nel § 30 e nel § 32.

Quando invece di una distribuzione di velocità \dot{p}_j , \dot{f}_j , $\dot{\sigma}_{ij}$ si consideri una distribuzione di forze-tensioni equilibrata p_j , f_j , σ_{ij} , vale ancora un teorema analogo alla [65.5] purchè naturalmente tale distribuzione

venga associata a variazioni virtuali congruenti della distribuzione delle velocità degli spostamenti-deformazione, cioè:

$$\int_V p_j \delta \dot{u}_j dV + \int_A f_j \delta \dot{u}_j dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \quad [65. 7]$$

Così pure un teorema analogo alla [65. 6] vale per una distribuzione congruente di spostamenti-deformazioni u_j , ε_{ij} associata a variazioni virtuali equilibrate della distribuzione delle velocità delle forze-tensioni:

$$\int_V u_j \delta \dot{p}_j dV + \int_A u_j \delta \dot{f}_j dA = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} dV. \quad [65. 8]$$

La formulazione completa del *problema dell'equilibrio elastoplastico* comporta la necessità di prendere in considerazione, oltre le equazioni di congruenza [65. 1], [65. 2] e le equazioni di equilibrio [65. 3], [65. 4] la condizione di plasticità [61. 3] o [61. 5] ed i legami costitutivi, di tipo elastico [35. 7] e di tipo elasto-plastico [63. 12] o [63. 13], tra le velocità di deformazione e di tensione.

Questi legami possono essere rappresentati con relazioni della stessa struttura:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left(a_{ijhk} + \alpha H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} \right) \dot{\sigma}_{hk}, \quad [65. 9]$$

pur di attribuire al parametro α il valore *zero* nelle zone elastiche, perchè non ancora plasticizzate o corrispondenti a ritorni elastici, ed il valore *uno* nelle zone plasticizzate, cioè:

$$\alpha = 0, \text{ per } S(\sigma_{ij}) < k, \text{ o per } S(\sigma_{ij}) = k, \dot{S} < 0; \quad [65. 10]$$

$$\alpha = 1, \text{ per } S(\sigma_{ij}) = k, \dot{S} > 0.$$

Come già avvertimmo nel § 38 a) per il problema della elasticità classica, le dimostrazioni di esistenza costituiscono un aspetto notevole in ogni teoria, sia perchè permettono di mostrare la non contraddittorietà della formulazione matematica di un certo problema fisico, sia perchè possono indicare la via per la costruzione effettiva della soluzione.

Nel caso in esame il problema esistenziale è stato recentemente risolto in condizioni abbastanza generali da VILLAGGIO¹, utilizzando un metodo moderno di analisi funzionale che permette di dimostrare contemporaneamente l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Qui ci limitiamo a discutere soltanto il problema della unicità, dimostrato per la prima volta da MELAN², con argomenti di carattere

¹ P. VILLAGGIO, *Rend. Ist. Lombardo (A)*, **96**, 712 (1962).

² E. MELAN, *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien (2)*, **147**, 73 (1938); *Ing.-Archiv*, **9**, 116 (1938).

elementare e seguendo sostanzialmente il metodo usato da Kirchhoff nella dimostrazione di unicità del problema elastico, come fu esposto nel § 38 c).

Supponiamo dunque che esistano due soluzioni distinte $\dot{\sigma}'_{ij}$ e $\dot{\sigma}''_{ij}$ per le velocità di tensione in corrispondenza degli stessi valori \dot{p}_j , \dot{f}_j , \dot{u}_j prescritti rispettivamente in V , su A_f , su A_u in conformità delle [65. 3], [65. 2], [65. 4]. La differenza $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}''_{ij}$ rappresenta una velocità di tensione *autoequilibrata*, soluzione cioè delle equazioni di equilibrio [65. 3] e [65. 4] rese omogenee mentre la differenza $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} - \dot{\varepsilon}''_{ij}$ tra le velocità di deformazione associate rispettivamente a $\dot{\sigma}'_{ij}$ e $\dot{\sigma}''_{ij}$ deriva da velocità di spostamento nulle su A_u per la [65. 2].

Il teorema dei lavori virtuali nella forma [65. 5] applicato a dette differenze diviene semplicemente:

$$\int_V (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}''_{ij}) (\dot{\varepsilon}'_{ij} - \dot{\varepsilon}''_{ij}) dV = 0, \quad [65. 11]$$

dove abbiamo posto $\dot{\varepsilon}_{ij}$ in luogo di $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}$ perchè le velocità di deformazione possono essere riguardate come virtuali in conseguenza del loro carattere regolare e infinitesimo espresso dalle equazioni di congruenza [65. 1].

Ora, in generale, quando uno stato elasto-plastico assume una certa configurazione deformata, le tensioni corrispondenti avranno superato il limite di snervamento solo in alcune regioni del corpo mentre in altre regioni o non avranno ancora raggiunto tale limite o saranno ritornate in campo elastico da uno stato plastico precedente. In sostanza, con riguardo alle relazioni elasto-plastiche [65. 9], la funzione integranda della [65. 11] diviene:

$$\begin{aligned} (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}''_{ij}) (\dot{\varepsilon}'_{ij} - \dot{\varepsilon}''_{ij}) &= a_{ijhk} (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}''_{ij}) (\dot{\sigma}'_{hk} - \dot{\sigma}''_{hk}) + \quad [65. 12] \\ &+ H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}''_{ij}) (\alpha' \dot{\sigma}'_{hk} - \alpha'' \dot{\sigma}''_{hk}). \end{aligned}$$

Il primo termine al secondo membro, relativo alla parte elastica della deformazione, risulta certamente positivo dato il carattere definito positivo dell'energia potenziale elastica [37. 7], mentre il secondo termine, relativo alla parte plastica della deformazione, è sicuramente positivo o nullo. Tale circostanza sussiste sia nella zona dove le soluzioni sono entrambe elastiche ($\alpha' = \alpha'' = 0$) o entrambe elasto-plastiche ($\alpha' = \alpha'' = 1$), sia nelle zone dove una è elastica e l'altra elasto-plastica. Infatti le condizioni [65. 10] comportano per $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 0$: $\dot{S}' > 0$, $\dot{S}'' < 0$ e per $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 1$: $\dot{S}' < 0$, $\dot{S}'' > 0$.

In ogni caso la funzione integranda della [65. 11] è una quantità essenzialmente positiva in palese contraddizione con la [65. 11] stessa: i due stati di velocità di tensione $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\sigma}_{ij}$ devono necessariamente coincidere, imponendo così l'unicità della soluzione.

Per un materiale dotato di incrudimento l'unicità delle velocità di tensione assicura quindi anche l'unicità delle velocità di deformazione, mentre per uno stato perfettamente plastico non possiamo trarre dalle [65. 11] identica conclusione. Invero in quest'ultimo caso le velocità di deformazione non sono uniche, come del resto è implicito nella definizione stessa di plasticità perfetta.

L'unicità delle velocità di tensione $\dot{\sigma}_{ij}$ corrispondenti ad una stessa distribuzione assegnata di velocità per le forze e per gli spostamenti \dot{u}_j , \dot{f}_j , \dot{p}_j non comporta una distribuzione unica delle tensioni σ_{ij} , perchè questa dipende in modo determinante dalla storia completa del procedimento di carico, cioè del percorso effettivamente seguito per arrivare allo stato finale.

La sola conoscenza dei dati finali per le forze e per gli spostamenti non può essere quindi sufficiente ad individuare lo stato di tensione finale. Però, se viene specificata anche la distribuzione della deformazione plastica ε_{ij}^p , allora sussiste l'unicità anche per lo stato di tensione. Infatti la differenza tra due distribuzioni ipotetiche di velocità di deformazione si riduce in tal caso alla sola parte elastica e quindi la dimostrazione di unicità discende direttamente dal teorema di Kirchhoff dimostrato nel § 38 c).

Qualora si prescindano dall'ipotesi di un potenziale plastico P , è stato dimostrato da FINZI¹ che l'unicità può essere assicurata dal carattere definito in segno di una certa forma quadratica, i cui coefficienti sono le componenti del tensore quadruplo che rappresenta il legame costitutivo, differenziale o finito, tra le tensioni e le deformazioni.

66. Principi di estremo.

Anche per gli stati elasto-plastici sussistono alcuni principi di estremo di notevole interesse applicativo in quanto aprono la strada all'impiego dei cosiddetti metodi diretti di calcolo delle variazioni.

In analogia con quanto fu detto a suo tempo nel § 38 per gli stati elastici, una distribuzione $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ delle velocità di deformazione sarà definita *cinematicamente ammissibile* o, in breve, *congruente* se può essere derivata da velocità di spostamento \dot{u}_j^* le quali assumano certi valori

¹ L. FINZI, *Rend. Ist. Lombardo* (A), **95**, 653 (1961).

prescritti su una porzione A_u della frontiera A del solido, cioè se risultano verificate le equazioni:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*), \quad \text{in } V + A; \quad [66. 1]$$

$$\dot{u}_j^* = \bar{u}_j \quad \text{su } A_u. \quad [66. 2]$$

A tale distribuzione congruente $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ corrisponderanno, in generale, certe velocità di tensione $\dot{\sigma}_{ij}^*$ non necessariamente equilibrate.

L'espressione [65. 5] del teorema sulle velocità degli spostamenti virtuali, scritta per le variazioni congruenti $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^*$, appare come l'equazione variazionale per la stazionarietà del funzionale:

$$J[\dot{\varepsilon}_{ij}^*, \dot{u}_j^*] = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV - \int_V \dot{p}_j \dot{u}_j dV - \int_{A_f} \dot{f}_j \dot{u}_j dA. \quad [66. 3]$$

Analogamente diremo *staticamente ammissibile* o, in breve, *equilibrata*, una distribuzione della velocità di tensione $\dot{\sigma}_{ij}^0$ se verifica le equazioni indefinite di equilibrio nei punti interni del solido e le equazioni ai limiti sulla porzione A_f della frontiera A , cioè se:

$$\dot{\sigma}_{ij,i}^0 + \dot{p}_j = 0, \quad \text{in } V; \quad [66. 4]$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 n_i = \bar{f}_j, \quad \text{su } A_f; \quad [66. 5]$$

ed inoltre, nel caso di plasticità perfetta, se:

$$S(\dot{\sigma}_{ij}^0) \leq 0, \quad [66. 6]$$

in quanto non sono possibili tensioni oltre il limite di snervamento.

Alla distribuzione equilibrata delle velocità di tensione $\dot{\sigma}_{ij}^0$ corrisponderanno certe velocità di deformazione $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ non derivabili necessariamente da velocità di spostamento \dot{u}_j^0 , e quindi, in generale, non congruenti. In altri termini le $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ sono fisicamente possibili solo per un elemento isolato di volume, ma non più quando l'elemento sia inserito nel contesto del solido e soggetto ai legami ad esso imposti dagli elementi circostanti e dagli eventuali vincoli esterni.

Nel caso in esame l'espressione [65. 6] del teorema sulle velocità delle forze virtuali, scritta per le variazioni equilibrate $\delta \dot{\sigma}_{ij}^0$, rappresenta la condizione di stazionarietà per un secondo funzionale:

$$K[\dot{\sigma}_{ij}^0, \dot{f}_{ij}^0] = - \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^0 dV + \int_{A_u} \dot{f}_j^0 \bar{u}_j^0 dA. \quad [66. 7]$$

Se allora consideriamo la differenza:

$$J - K = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* + \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^0) dV - \quad [66. 8]$$

$$- \int_V \dot{p}_j \dot{u}_j^* dV - \int_{A_j} \dot{f}_j \dot{u}_j^* dA - \int_{A_u} \dot{f}_j^0 \dot{u}_j dA ,$$

e teniamo presente che le $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ sono congruenti e le $\dot{\sigma}_{ij}^0$ equilibrate, il secondo integrale si trasforma in:

$$\int_V \dot{p}_j \dot{u}_j^* dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV - \int_A \dot{\sigma}_{ij}^0 n_i \dot{u}_j^* dA , \quad [66. 9]$$

per cui in definitiva, sostituendo nella [66. 8]:

$$J - K = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* + \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^0 - 2 \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^*) dV . \quad [66. 10]$$

Poichè le relazioni elasto-plastiche [65. 9] comportano la condizione di reciprocità:

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^0 , \quad [66. 11]$$

in virtù della simmetria dei coefficienti elastici e dei coefficienti plastici:

$$a_{ijhk} = a_{hkij}, \quad H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} = H \frac{\partial S}{\partial \sigma_{hk}} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} , \quad [66. 12]$$

la differenza [66. 10] tra i due funzionali diviene:

$$J - K = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) (\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij}^0) dV . \quad [66. 13]$$

Con ragionamento analogo a quello seguito nella deduzione delle [65. 10] e [65. 11] vediamo che l'integrale di volume è sempre positivo ad eccezione del caso in cui $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}^0$, cioè in corrispondenza di una soluzione ad un tempo congruente ed equilibrata che, per il teorema di unicità, è la soluzione effettiva.

I due teoremi di estremo possono quindi essere enunciati in forma analoga a quella incontrata nel § 39 per gli stati elastici.

In contrasto con il procedimento qui seguito, che fornisce contemporaneamente i due principi di estremo nella forma:

$$\min J = \max K , \quad [66. 14]$$

dove l'uguaglianza $J = K$ sussiste solo per la soluzione effettiva, di solito viene fatto ricorso a due dimostrazioni distinte, l'una per assicurare il minimo di J , l'altra il massimo di K .

Sotto tale forma meno sintetica di quella esposta esistono due teoremi, il primo dovuto sostanzialmente a GREENBERG¹ ed il secondo dimostrato da HODGE e PRAGER².

Esistono anche principi di minimo validi per relazioni elasto-plastiche nella forma finita [64. 7]: tali teoremi sono soggetti naturalmente alle stesse limitazioni già discusse a proposito delle [64. 7]. Tra questi presenta un interesse storico il noto principio di HAAR-KÁRMÁN³, associato alla condizione di plasticità di Mises [62. 5] ed alla ulteriore ipotesi che non si verifichino *ritorni elastici* dal luogo di snervamento in ogni fase del processo deformativo.

Qualora la deformazione plastica sia specificata attraverso le sue componenti ε_{ij}^p , si possono dare due teoremi analoghi ai precedenti per le deformazioni ε_{ij}^* e per le tensioni σ_{ij}^0 . Essi non sono però dei veri e propri principi di elasto-plasticità, ma esprimono piuttosto delle condizioni di estremo valide per stati elastici in presenza di deformazioni prescritte e possiedono un contenuto puramente formale, derivando semplicemente dai corrispondenti principi noti per uno stato perfettamente elastico.

67. Collasso plastico.

In uno stato perfettamente plastico non possono esistere tensioni il cui punto rappresentativo sia esterno alla superficie di snervamento, e tale circostanza ne rappresenta proprio la definizione. Qualora in una regione del solido venga raggiunta la condizione limite $S(\sigma_{ij}) = 0$, e la deformazione plastica proceda indefinitamente senza necessità di ulteriori incrementi di tensione, fermi restando cioè i valori delle forze applicate che ne hanno determinato l'inizio, parleremo di *collasso per scorrimento plastico* e diremo che quella particolare distribuzione di forze costituisce un *sistema limite di carico*, mentre la distribuzione delle corrispondenti velocità di deformazione non contenuta rappresenta un *meccanismo di collasso*.

Immaginando di aumentare le forze agenti sul solido, di volume p_j e di superficie f_j , in modo proporzionale, diremo che il numero positivo m rappresenta un *coefficiente di sicurezza* per tali forze se il sistema mp_j, mf_j è un sistema limite di carico.

Consideriamo ora una distribuzione congruente di velocità di deformazione $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, nel senso delle [65. 1] e [65. 2], derivabile cioè da velocità di spostamento \dot{u}_j^* tali da assumere certi valori prescritti sulla porzione A_u della frontiera A . Tale distribuzione sarà riguardata come *cinematicamente ammissibile per il collasso*, e le $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ coincideranno con i valori $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ della velocità di deformazione plastica sulla superficie di snervamento. A questa distribuzione $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ corrisponderanno certe tensioni σ_{ij}^* in equi-

¹ H. J. GREENBERG, *Quart. Appl. Math.*, **7**, 85 (1949).

² P. G. HODGE, W. PRAGER, *Journal Math. Phys.*, **27**, 1 (1948).

³ A. HAAR, TH. VON KÁRMÁN, *Nachr. Wiss. Göttingen, math.-phys. klasse*, 204 (1909).

librio, secondo le [65. 3] e [65. 4], non già con le forze effettivamente applicate p_j, f_j , ma con un sistema di forze $m^* p_j, m^* f_j$ ad esse proporzionali secondo il fattore m^* , detto un *moltiplicatore cinematicamente ammissibile* associato alle $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$.

Analogamente una distribuzione equilibrata di tensioni σ_{ij}^0 sarà indicata come staticamente ammissibile per il collasso qualora il suo punto rappresentativo sia interno o appartenga alla superficie di snervamento $S(\sigma_{ij}) = 0$. Le velocità di deformazione $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ corrispondenti non verificheranno in generale le equazioni di congruenza mentre a loro volta le σ_{ij}^0 saranno equilibrate non già con le forze effettivamente

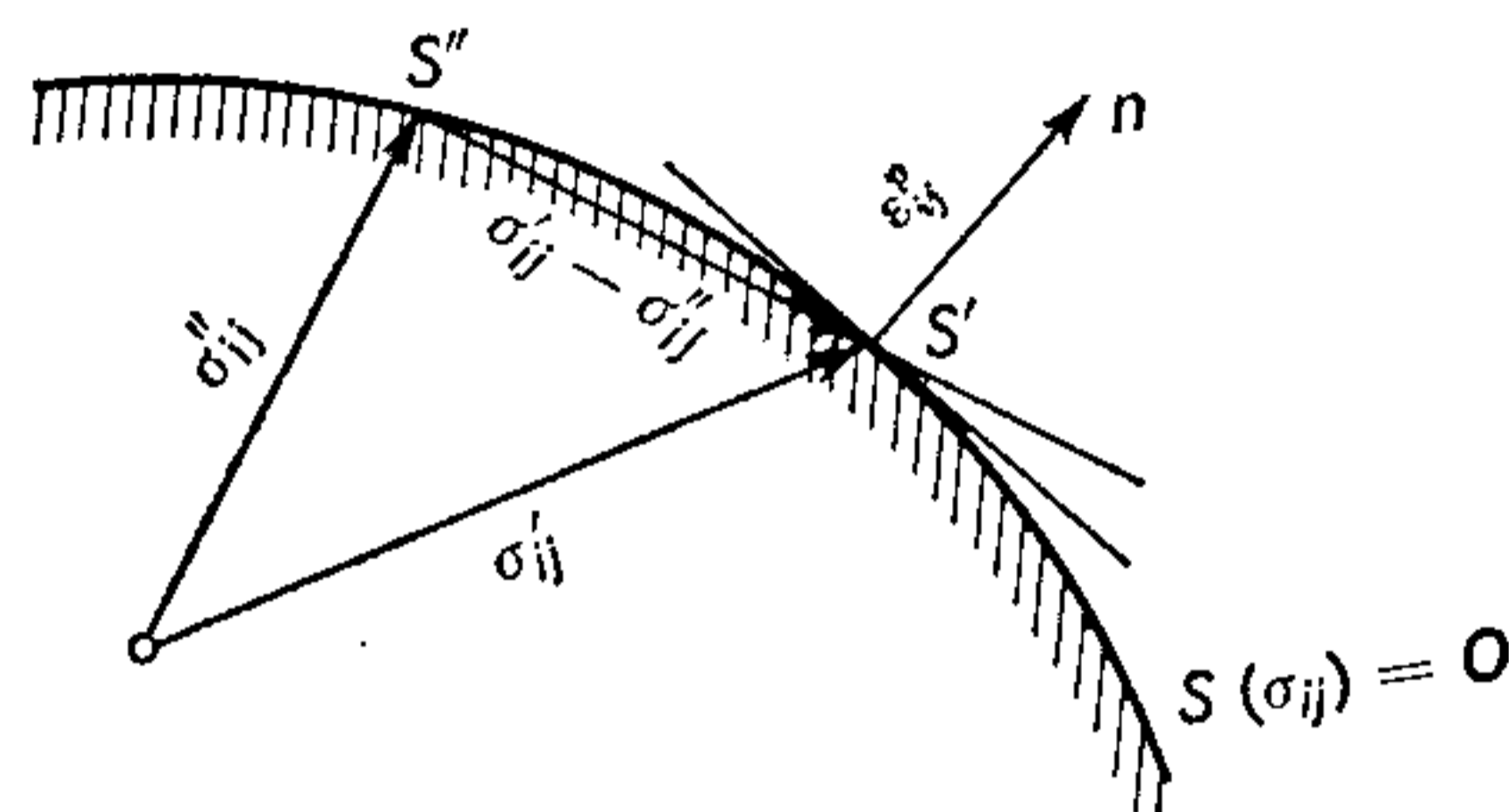


Fig. 40.

applicate p_j, f_j bensì con un sistema di forze $m^0 p_j, m^0 f_j$ ad esse proporzionale secondo il fattore m^0 , detto un *moltiplicatore staticamente ammissibile* associato alle σ_{ij}^0 .

Abbiamo visto nel § 65 che per un generico stato elasto-plastico la conoscenza delle condizioni assegnate nella configurazione finale non lascia prevedere una distribuzione unica di tensioni σ_{ij} . Nel caso di uno stato perfettamente plastico la possibilità di collasso è indipendente dalla storia del programma di carico e può essere perciò dimostrata l'unicità della distribuzione di tensioni in quelle regioni del solido dove sono presenti velocità di deformazione diverse da zero nell'effettivo meccanismo di collasso.

Allora se, al solito, σ'_{ij} e σ''_{ij} indicano due distribuzioni distinte di tensioni ottenute in due diversi programmi di carico ed associate allo stesso meccanismo di collasso $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, la loro differenza $\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}$ deve risultare autoequilibrata. L'equazione dei lavori virtuali [65. 7] scritta per tale differenza e per una variazione virtuale della velocità di deformazione coincidente con $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ assume la forma:

$$\int_V (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV = 0. \quad [67. 1]$$

Siano allora S', S'' i punti rappresentativi degli stati di tensione $\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}$ sul luogo di snervamento: poichè questo è per ipotesi una

superficie convessa, l'angolo formato tra la direzione $\overline{S'S''}$, di componenti $\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$, e la normale n , secondo la quale è diretta la velocità di deformazione plastica di componenti $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, è inferiore ad un angolo retto, come appare nella fig. 40, per cui il prodotto scalare:

$$(\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0. \quad [67. 2]$$

Tale condizione è in contrasto con la [67. 1] e quindi, poichè in uno stato perfettamente plastico sulla superficie di snervamento è certamente $\dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0$, ne consegue la coincidenza $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$, cioè l'unicità della soluzione nel meccanismo di collasso effettivo.

68. Teoremi dell'analisi limite.

Discutiamo ora come la conoscenza delle distribuzioni cinematicamente ammissibili $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ e delle distribuzioni staticamente ammissibili σ_{ij}^0 possa fornire limitazioni superiori ed inferiori per il coefficiente di sicurezza m .

Assunto come sistema virtuale congruente di spostamenti-deformazioni una distribuzione cinematicamente ammissibile $\dot{u}_j, \dot{\varepsilon}_{ij}$, e come sistema equilibrato di forze tensioni una distribuzione data dalle differenze:

$$m^* p_j - m^0 p_j, \quad m^* f_j - m^0 f_j, \quad \sigma_{ji}^* - \sigma_{ji}^0; \quad [68. 1]$$

tra le forze-tensioni associate allo stato cinematicamente ammissibile prescelto e quelle associate ad uno stato staticamente ammissibile, l'equazione dei lavori virtuali [65. 7] diviene:

$$(m^* - m^0) \left[\int_V p_j \dot{u}_j^* dV + \int_A f_j \dot{u}_j^* dA \right] = \int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV. \quad [68. 2]$$

Ma le velocità di deformazione cinematicamente ammissibili $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ coincidono, per definizione, con i valori delle velocità di deformazione plastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, e quindi il punto S^* rappresentativo dello stato di tensione σ_{ij}^* ad esse corrispondente deve trovarsi sulla superficie di snervamento $S(\sigma_{ij}) = 0$, mentre il punto S^0 rappresentativo dello stato di tensione staticamente ammissibile σ_{ij}^0 sarà interno o, al più, appartenente a $S(\sigma_{ij}) = 0$.

Data la convessità della superficie di snervamento, il piano tangente in S^* lascia tutti i punti S^0 dalla stessa parte in modo che l'angolo formato tra la direzione $\overline{S^0 S^*}$, di componenti $\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0$, e la normale n , secondo cui è diretta la velocità della deformazione plastica, di componenti $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, è non superiore ad un angolo retto, come appare in fig. 41, per cui il prodotto scalare:

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad [68. 3]$$

Potremo quindi affermare che:

$$m^* - m^0 \geq 0, \quad [68.4]$$

cioè la differenza tra un qualsiasi moltiplicatore cinematicamente ammissibile m^* ed un qualsiasi moltiplicatore staticamente ammissibile m^0 risulta una quantità positiva, eccettuato il caso in cui $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0$, che si verifica in corrispondenza dell'unica soluzione ad un tempo cinematicamente e staticamente ammissibile, o, in altri termini, della soluzione effettiva σ_{ij} . Il coefficiente di sicurezza m a questa associato

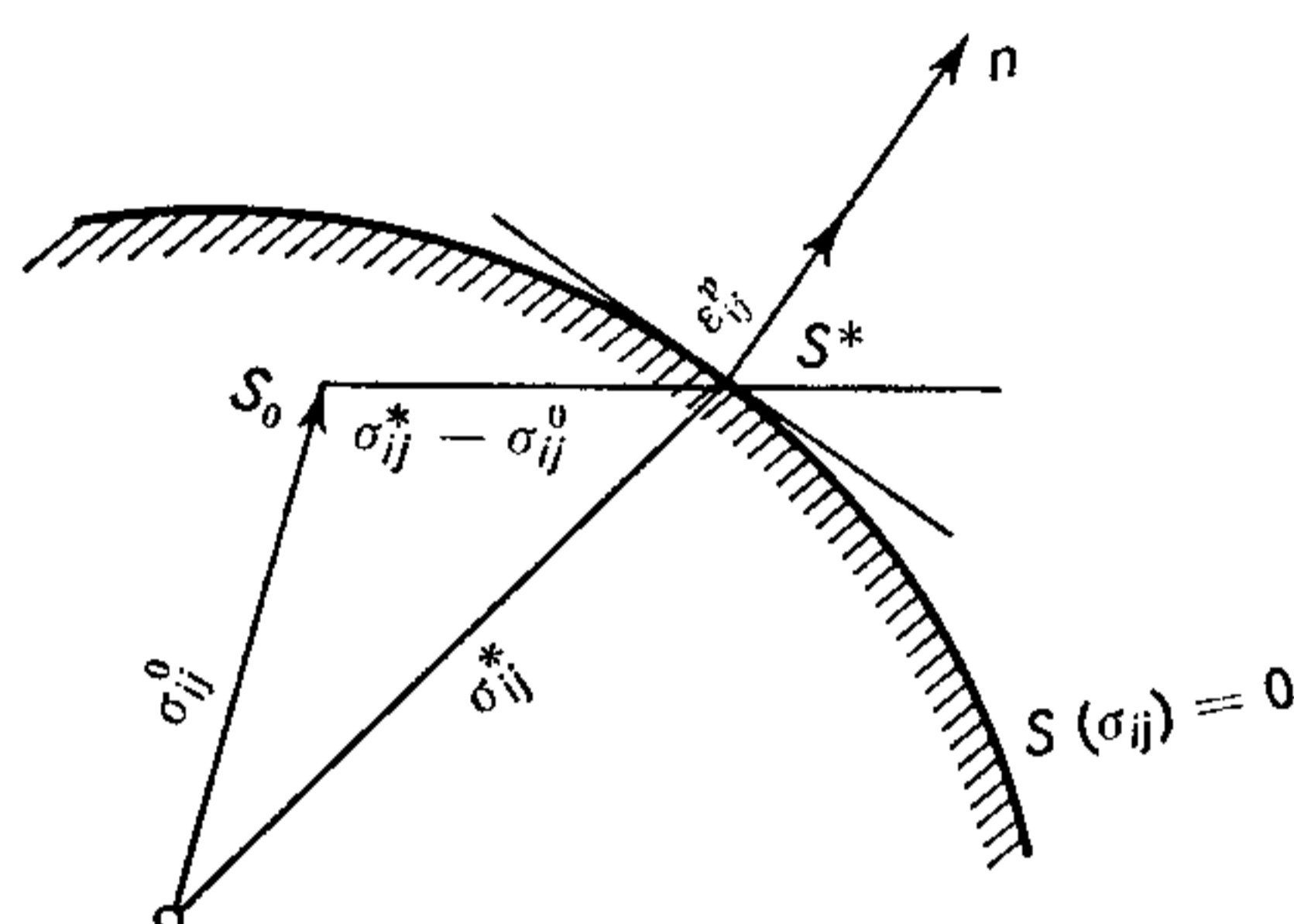


Fig. 41.

rappresenta così l'elemento di separazione tra i moltiplicatori cinematicamente ammissibili ed i moltiplicatori staticamente ammissibili, e precisamente è:

$$\min m^* = \max m^0, \quad [68.5]$$

La relazione dimostrata afferma così contemporaneamente l'esistenza di un minimo per m^* e di un massimo per m^0 e comporta la validità dei due teoremi seguenti per un solido perfettamente plastico:

a) *la totalità dei moltiplicatori cinematicamente ammissibili m^* ha come estremo inferiore il coefficiente di sicurezza m del sistema di forze applicate;*

b) *la totalità dei moltiplicatori staticamente ammissibili m^0 ha come estremo superiore il coefficiente di sicurezza m del sistema di forze applicate.*

L'esame della relazione [67 2] mostra che la disuguaglianza [68.4] $m - m^0 > 0$ sussiste purchè risulti positiva la quantità:

$$\dot{L}_u^* = \int_V p_j \dot{u}_j^* dV + \int_A f_j \dot{u}_j^* dA, \quad [68.6]$$

cioè la velocità del lavoro virtuale che le forze effettive compirebbero in corrispondenza delle velocità virtuali \dot{u}_j^* del meccanismo di collasso.

Tale restrizione è soltanto apparente perchè in caso contrario basterà riferirsi ad una distribuzione cinematicamente ammissibile per il collasso avente velocità $-\dot{u}_j^*$, ottenuta cioè moltiplicando per -1 la distribuzione prescelta \dot{u}_j^* .

La dimostrazione precedente, inedita, permette dunque di pervenire simultaneamente ai due principi di estremo per uno stato di collasso plastico enunciati in *a)* e *b)*. Di solito invece si fa ricorso a due dimostrazioni distinte per ognuno dei due teoremi.

Vediamo pure che in un certo programma di carico un solido perfettamente plastico sarà capace di sopportare le forze esterne ad esso applicate soltanto se in ogni fase del programma di carico riesca possibile trovare una distribuzione di tensioni *staticamente ammissibile e sicura* σ_{ij}^s , il cui punto rappresentativo sia, cioè, interno alla superficie di snervamento.

Viceversa un solido perfettamente plastico non potrà sopportare le forze esterne ad esso applicate in un certo programma di carico se esiste almeno una distribuzione di velocità di deformazione *cinematicamente ammissibile* $\dot{\epsilon}_{ij}^*$.

Le proprietà ora enunciate, anzichè dedotte dalla [68.5] possono formare oggetto di dimostrazione diretta e costituiscono due teoremi detti del *collasso plastico* o dell'analisi limite, dei quali il primo è sostanzialmente dovuto a FEINBERG¹ mentre la dimostrazione del secondo fu data da DRUCKER, GREENBERG e PRAGER².

I teoremi del collasso plastico rappresentano un aspetto importante della teoria della plasticità in quanto costituiscono il fondamento della cosiddetta *analisi limite*, cioè dei procedimenti che realizzano una approssimazione migliore nello stabilire il coefficiente di sicurezza rispetto a quella ottenuta con i metodi della elasticità classica.

Una limitazione per l'applicazione pratica dei teoremi del collasso è costituita dalla circostanza che essi non forniscono alcun criterio nei riguardi della deformazione plastica locale. Ciò rappresenta un serio inconveniente perchè la deformazione del solido potrebbe anche raggiungere valori inaccettabili all'approssimarsi del limite di collasso.

Se ci limitiamo ad esaminare la deformazione plastica *globale* ed ammettiamo che la valutazione del lavoro plastico totale realizzato sia un criterio attendibile di giudizio possiamo dimostrare che *la deformazione plastica totale rimane limitata per un programma di carico di durata finita, purchè il coefficiente di sicurezza m risulti maggiore dell'unità in ogni fase del programma stesso.*

Indichiamo con $m > 1$ il più piccolo coefficiente di sicurezza che si verifica nel programma di carico: sarà allora possibile trovare una distribuzione staticamente

¹ S. M. FEINBERG, *Prikl. Math. Mekh.*, **12**, 63 (1948).

² D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *Journ. Appl. Mech.*, **18**, 371, (1951).

ammissibile di tensioni σ_{ij}^0 , tale che $m\sigma_{ij}^0$ rappresenti uno stato di tensione il cui punto rappresentativo sia interno, o, al più, sulla superficie di snervamento.

Se allora σ_{ij} rappresenta lo stato di tensione effettivo ed $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ lo stato di velocità di deformazione associato, l'equazione dei lavori virtuali [65. 7], scritta per lo stato di tensione $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ autoequilibrato e per lo stato di velocità di deformazione virtuale $\dot{\varepsilon}_{ij}$, risulta:

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) (\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV = 0. \quad [68. 7]$$

D'altra parte segue dalla [68. 3] che:

$$(\sigma_{ij} - m\sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0, \quad [68. 8]$$

per cui, integrando quest'ultima equazione rispetto al volume V , dividendo per m e sottraendo dalla [68. 7], otteniamo la disuguaglianza:

$$\frac{m-1}{m} \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \leq \int_V (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV. \quad [68. 9]$$

L'integrale del primo membro rappresenta la velocità con la quale si ottiene lavoro plastico in tutto il solido: tale lavoro risulta limitato in qualsiasi programma di carico come appare evidente integrando la [68. 9] rispetto al tempo.

69. Adattamento plastico.

I criteri di collasso esaminati sinora si riferiscono a programmi di carico proporzionali, cioè a distribuzioni di forze p_j, f_j variabili tutte proporzionalmente con lo stesso moltiplicatore m . Una situazione diversa, più aderente alla realtà, si presenta quando ciascuna forza può variare, entro certi limiti assegnati, indipendentemente dalle altre. In tal caso, per evitare il collasso plastico, è necessario che nessuna combinazione delle forze costituisca un sistema limite di carico.

La condizione enunciata non è sufficiente: infatti il lavoro plastico e la deformazione globale possono aumentare indefinitamente in un programma complesso, anche se nessuna singola combinazione di carico sia tale da provocare il collasso. In uno o più particolari cicli di carico possono verificarsi certe velocità della deformazione plastica capaci di ripetersi.

Definiamo tale situazione come *collasso per deformazione plastica ciclica*; esso comporta valori inaccettabili della deformazione plastica, ogni ciclo critico di carico ripetuto risultando in un incremento di tale deformazione.

La proprietà fondamentale del collasso per deformazione plastica ciclica implica che il collasso stesso viene evitato qualora non si produca un ulteriore scorrimento plastico dopo le prime fasi del programma di carico. Si dovranno quindi sviluppare tensioni residue, dovute alla

deformazione plastica dei primi cicli di carico, le quali, sommate alle tensioni di natura elastica indotte dai cicli successivi, non superino in nessun punto il limite di snervamento.

Qualora si verifichi tale situazione diremo che il solido si *adatta plasticamente* ad uno stato di deformazione permanente e di tensione residua corrispondente.

Indichiamo con $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ le componenti di tensione e deformazione effettive in una certa fase t del programma di carico; con $\sigma_{ij}^e(t)$, $\varepsilon_{ij}^e(t)$ le componenti della *risposta elastica* di tensione e deformazione nello stesso programma allo stesso istante t , ed osserviamo che tale distribuzione è unica.

Siano inoltre $\sigma_{ij}^r(t)$, $\varepsilon_{ij}^r(t)$ le componenti di tensione e deformazione residue, che rimangono nel solido dopo la rimozione dei carichi esterni p_j , f_j e degli eventuali vincoli prescritti da certi spostamenti u_j . Evidentemente le tensioni residue sono autoequilibrate in quanto devono verificare le equazioni di equilibrio, indefinite ed ai limiti, rese omogenee per l'assenza delle forze esterne.

Devono sussistere per definizione le seguenti relazioni:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r ; \quad [69. 1]$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^r + \varepsilon_{ij}^p . \quad [69. 2]$$

Ciò premesso veniamo ad illustrare un importante criterio per giudicare in quali condizioni uno stato perfettamente plastico può adattarsi a qualche distribuzione di tensioni residue indipendenti dal tempo. Tale criterio, introdotto per la prima volta da BLEICH¹ in un caso particolare fu successivamente dimostrato in generale da MELAN².

Supponiamo di trovare, in ogni punto del solido e per ogni possibile combinazione dei carichi applicati, variabili entro certi limiti prescritti, una distribuzione di tensioni residue $\bar{\sigma}_{ij}$ indipendenti dal tempo tali che la loro somma con le tensioni elastiche σ_{ij}^e rappresenti uno stato di tensione sicuro σ_{ij}^s , cioè con punto-tensione rappresentativo entro la superficie di snervamento $S(\sigma_{ij})$:

$$\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^e \leq \sigma_{ij}^s . \quad [69. 3]$$

L'energia potenziale elastica corrispondente alla differenza $\sigma_{ij}^r - \sigma_{ij}$ tra le tensioni residue all'istante t e quelle indipendenti dal tempo che verificano il criterio [69. 3] vale per l'intero solido:

$$U_r = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}) (\varepsilon_{ij}^r - \varepsilon_{ij}) dV . \quad [69. 4]$$

¹ H. BLEICH, *Bauingenieur*, **13**, 261 (1932).

² E. MELAN, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien* (2), **147**, 73 (1938); *Ing.-Archiv*, **9**, 116 (1938).

Derivando rispetto al tempo e tenendo conto delle relazioni di elasticità tra tensioni e deformazioni, otteniamo:

$$\dot{U}_r = \int_V (\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^r dV, \quad [69. 5]$$

o anche, con riguardo alla [69. 2]:

$$\dot{U}_r = \int_V (\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV. \quad [69. 6]$$

D'altra parte lo stato di tensione $\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}$ è autoequilibrato, come differenza tra due distribuzioni autoequilibrate, mentre lo stato di velocità di deformazione $\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e$ è cinematicamente ammissibile, come differenza tra due distribuzioni cinematicamente ammissibili. La applicazione del teorema delle velocità virtuali [65. 7] a tali stati ci assicura che:

$$\int_V (\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV = 0. \quad [69. 7]$$

La [69. 6] si riduce allora semplicemente alla:

$$\dot{U}_r = - \int_V (\sigma_{ij}^r - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV, \quad [69. 8]$$

o anche, tenendo presenti la definizione [69. 1] di tensione residua ed il criterio di Bleich-Melan [69. 3], alla:

$$\dot{U}_r = - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV. \quad [69. 9]$$

Dovrebbero perciò esistere distribuzioni di velocità di deformazione plastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ capaci di rendere negativa la \dot{U}_r : ciò è in aperto contrasto con la proprietà fondamentale per l'energia potenziale elastica di avere un carattere definito positivo; ne consegue per lo scorrimento plastico l'impossibilità di procedere indefinitivamente.

Il criterio di Bleich-Melan [69. 3] ci assicura dunque che: *da un certo istante in poi $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ e lo stato perfettamente plastico dovrà adattarsi a qualche distribuzione di tensioni residue $\bar{\sigma}_{ij}$ indipendenti dal tempo, di solito dipendenti dall'effettivo programma di carico. A partire da tale istante la risposta a successive variazioni dei carichi entro i limiti prescritti dovrà risultare perfettamente elastica.*

In caso contrario, cioè qualora non sia possibile trovare una distribuzione di tensioni residue $\bar{\sigma}_{ij}$ che verifichi il criterio di Bleich-Melan [69. 3] l'adattamento plastico è impossibile e la deformazione plastica ε_{ij}^p procederà fino al collasso.

Come fu già osservato nel § 68 a proposito del collasso plastico, anche in questo caso la dimostrazione precedente non ci permette di ricavare alcun criterio nei riguardi della entità di deformazione plastica raggiunta localmente prima dell'adattamento. È possibile fornire soltanto una limitazione per la deformazione plastica globale associata al lavoro plastico totale compiuto nel corso del programma di carico.

Infatti, se esiste un coefficiente di sicurezza $m > 1$ nei confronti dell'adattamento plastico, deve esistere una distribuzione di tensioni residue $\bar{\sigma}_{ij}$ indipendenti dal tempo, tale che:

$$m(\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^e) = m\sigma_{ij}^p, \quad [69. 10]$$

per ogni distribuzione staticamente ammissibile di tensioni σ_{ij} il cui punto rappresentativo sia sulla superficie di snervamento $S(\sigma_{ij})$.

Segue dalla [68. 3], o dalla [68. 8], che:

$$(\sigma_{ij} - m\sigma_{ij}^s) \varepsilon_{ij}^p \geq 0, \quad [69. 11]$$

e quindi la funzione integranda della [69. 9] dovrà verificare la disuguaglianza:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \varepsilon_{ij}^p \geq \frac{m-1}{m} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p. \quad [69. 12]$$

Integrando rispetto al volume V del solido la derivata rispetto al tempo del lavoro plastico totale \dot{U}_p dovrà risultare con riguardo alla [69. 9]:

$$\dot{U}_p \leq -\frac{m}{m-1} \dot{U}_r. \quad [69. 13]$$

Integrando rispetto al tempo t dall'istante iniziale $t=0$ all'istante $t=\bar{t}$, in corrispondenza del quale le tensioni residue sono ritornate ai loro valori iniziali, otteniamo infine:

$$U_p \leq \frac{m}{m-1} |U_r(0) - U_r(\bar{t})| \leq \frac{m}{m-1} \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV, \quad [69. 14]$$

per cui un coefficiente di sicurezza anche di poco superiore all'unità è sufficiente a garantire che la deformazione plastica globale si mantenga entro limiti ragionevoli.