

CAPITOLO V

STATI ANELASTICI

46. Risposta anelastica.

Nei solidi reali possono manifestarsi deviazioni più o meno sensibili dalla perfetta elasticità nella risposta della deformazione alla tensione, per cui è necessario discutere la possibile forma di relazioni di tipo non elastico tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione.

In particolare può cadere in difetto la corrispondenza monodroma tra le dette componenti, perchè una parte della deformazione non si annulla quando vengono rimosse le forze applicate al solido: siamo allora in presenza di deformazioni permanenti dovute alla irreversibilità del processo di cui esse sono conseguenza.

Un comportamento perfettamente elastico esigerebbe infatti che l'energia potenziale acquisita dal solido nel corso della deformazione venisse totalmente restituita in modo da rispettare la perfetta reversibilità della trasformazione nel senso della Termodinamica. Evidentemente tale circostanza non può verificarsi nella realtà dovendo essere sempre presente una dissipazione di energia nel corso della deformazione: ad essa è dovuto ogni scostamento più o meno sensibile dal modello ideale del solido elastico.

Se allora assumiamo a fondamento della nostra analisi proprio questo aspetto di irreversibilità della trasformazione vediamo che esso è caratteristico di una vasta classe di fenomeni, nei quali la deviazione da una risposta puramente elastica della deformazione alla tensione applicata è dovuta appunto ad una dissipazione di energia elastica nella sua interazione con flussi di energia di altra natura.

In tal caso si parlerà generalmente di *risposta anelastica* e sarà conveniente pensare a modelli ideali di solidi in cui questo tipo di

risposta segua leggi particolari dove, oltre al consueto legame elastico tra le componenti di tensione e di deformazione, dovranno comparire ulteriori relazioni indipendenti, atte a caratterizzare il fenomeno specifico causa di anelasticità.

D'altra parte in nessun materiale reale lo stato di deformazione è unicamente funzione dello stato di tensione, ma dipende dalla temperatura, dalla distribuzione più o meno ordinata a livelli molecolari o atomici, dal campo elettrico e magnetico.

La presenza di queste nuove variabili induce, in generale, due fenomeni tipici: la *diffusione* o *rilassamento* delle loro fluttuazioni, cioè la tendenza ad assumere un valore uniforme nei punti del solido, e la *variazione* dei loro valori per effetto della deformazione.

In genere parleremo dunque di stato anelastico quando alla fase elastica si contrapponga almeno un'altra fase, dove alla parola fase attribuiamo un significato molto ampio, e tale stato anelastico sarà così tipico di un modello ideale nel quale si verificano le circostanze anzidette.

La identificazione di un materiale reale con un modello di corpo continuo, omogeneo ed isotropo rappresenta una ipotesi indispensabile per poter istituire le leggi rappresentative di fenomeni in modo semplice ed espressivo: in realtà tutti i materiali sono composti da un numero grandissimo di particelle discrete e le loro proprietà meccaniche costituiscono la media del comportamento dei gruppi di elementi.

Ora l'aggregazione delle varie particelle dà luogo ad una specifica *tipologia di gruppo* dalla quale il gruppo stesso viene caratterizzato, e nei riguardi della risposta complessiva assumono una maggiore importanza le leggi costitutive di legame tra le singole particelle piuttosto delle proprietà intrinseche alle particelle stesse.

Appare chiaro come l'influenza dei singoli elementi costituenti il gruppo sulle proprietà meccaniche del gruppo stesso tenderà a diminuire col crescere del numero degli elementi lasciando sempre più importanza all'aspetto costitutivo.

Perciò se una proprietà materiale dipende dal comportamento di un piccolo numero di elementi si avranno fluttuazioni considerevoli di tale proprietà. Ad esempio, la resistenza alla rottura offerta da un determinato materiale è determinata sostanzialmente da imperfezioni locali nella struttura del gruppo e dipende quindi da un limitato numero di elementi: di conseguenza essa mostra un campo di fluttuazione molto più esteso di quello inerente a proprietà dipendenti da un numero molto grande di elementi, come le costanti elastiche.

In generale i fenomeni di tipo anelastico rappresentano proprietà più sensibili alla struttura di gruppo dei fenomeni di tipo puramente elastico.

47. Visco-elasticità.

Il più semplice ed interessante esempio di stato anelastico è fornito dal comportamento di un corpo costituito da una matrice solida nella quale sia diffuso un liquido viscoso. L'interazione delle due fasi, la solida elastica e la liquida viscosa, dà luogo ad una dissipazione di energia e quindi ad una deviazione della risposta tensione-deformazione rispetto ad uno stato perfettamente elastico.

Applicando un sistema di forze ad un corpo di tale natura avremo una deformazione elastica nella matrice solida ed un corrispondente stato di tensione espresso da relazioni di pura elasticità. Tale aspetto della risposta si verifica in un tempo molto breve, in accordo con la velocità di propagazione delle onde elastiche nel corpo, e può essere riguardato praticamente come istantaneo.

Successivamente anche la fase liquida subirà una deformazione progressiva nel tempo con una velocità dipendente dal livello della tensione applicata, venendo così ad alterare lo stato della fase solida.

Qualora la matrice elastica si comportasse come un solido perfettamente rigido, in essa si verificherebbe soltanto una alterazione della distribuzione di tensioni indotte inizialmente dalle forze applicate, cioè una diffusione della tensione nei vari punti, ma poichè siffatta situazione è puramente ideale, il rilassamento della tensione sarà sempre accompagnato da una deformazione dovuta alla presenza del liquido viscoso e chiamata *scorrimento viscoso*.

Con la rimozione delle forze applicate avremo un ritorno parziale alle condizioni iniziali del sistema in quanto parzialmente impedito dalla presenza di liquido viscoso. Le tensioni residue tenderanno a scomparire gradualmente col trascorrere del tempo e daranno così luogo ad un caratteristico effetto di *elasticità ritardata*, mentre la dissipazione dell'energia di deformazione attraverso gli elementi viscosi condurrà ad una deformazione permanente ad attestare la irreversibilità del processo.

Il meccanismo descritto può esprimere una varietà praticamente infinita di risposte visco-elastiche in dipendenza della maggiore o minore influenza della fase solida sulla fase liquida: ai due casi estremi corrispondono rispettivamente il solido elastico ed il liquido viscoso.

Gli aspetti caratteristici dello stato visco-elastico prima descritto possono essere messi in evidenza con una esperienza monoassiale di semplice trazione condotta sopra un provino cilindrico.

Supponiamo di sollecitare il campione in modo da realizzare uno stato di tensione uniformemente distribuita sulla sezione trasversale, come fu detto nel § 40 a), e di mantenerla costante nel tempo.

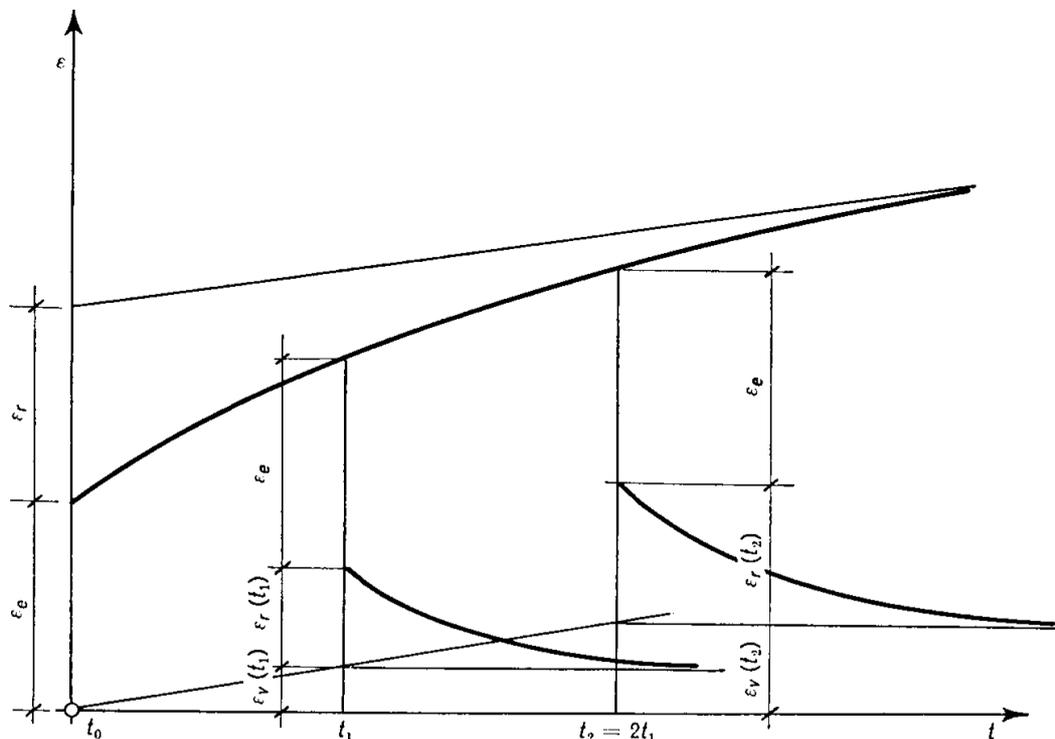


Fig. 26.

Si osserva allora, all'istante t_0 di applicazione della tensione, una deformazione ϵ_e puramente elastica che può essere integralmente recuperata. Negli istanti successivi $t > t_0$, durante i quali la tensione risulta invariata, la deformazione aumenta gradualmente.

Se ad un certo istante t_1 rimuoviamo le forze applicate, troviamo oltre alla reversibilità della ϵ_e , una nuova deformazione della quale la parte $\epsilon_r(t_1)$ viene recuperata nel tempo mentre la parte $\epsilon_v(t_1)$ ha carattere permanente.

La deformazione ϵ_r ha dunque un comportamento *reversibile*, sebbene differito nel tempo e rappresenta la deformazione elastica ritardata, mentre la deformazione ϵ_v ha carattere *irreversibile* e rappresenta l'aspetto viscoso del fenomeno.

Se la rimozione delle forze fosse avvenuta in un istante $t_2 = 2t_1$ avremmo osservato ancora una deformazione elastica ritardata $\epsilon_r(t_2) < 2\epsilon_r(t_1)$ ed una deformazione viscosa $\epsilon_v(t_2) \simeq 2\epsilon_v(t_1)$.

Lasciando invece le forze applicate al provino per un tempo lunghissimo si nota che la deformazione elastica ritardata tende ad un limite finito ε_r , ottenuto nella fig. 26 come intersezione sull'asse ε dell'asintoto al diagramma (ε, t) .

48. Relazioni elastiche e viscose.

Il comportamento fisico di un materiale visco-elastico viene schematizzato facendo ricorso ai due stati ideali corrispondenti alla predominanza della fase solida e della fase liquida nei riguardi della tensione e della deformazione.

La formulazione analitica si basa sulla legge di Hooke per i solidi elastici e sulla legge di Newton per i liquidi viscosi, entrambe generalizzate per tener conto degli effetti dovuti sia alla variazione di forma sia alla variazione di volume.

Nel caso di isotropia le relazioni elastiche assumono la nota forma diretta:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \Delta, \quad [48. 1]$$

dove le costanti di Lamé hanno i significati discussi nel § 40, ed inversa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda \Theta}{2\mu + 3\lambda} \right). \quad [48. 2]$$

Esse compendiano i due aspetti fondamentali della risposta elastica, variazione di forma e variazione di volume, come riesce evidente spezzando la [48. 1] in due gruppi di relazioni, valide rispettivamente per le componenti dei deviatori di tensione s_{ij} e di deformazione e_{ij} , e per le componenti isotrope, tensione media $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \Theta$ e dilatazione cubica Δ . Con riguardo alla [40. 16] si ha infatti:

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad [48. 3]$$

$$\bar{\sigma} = K \Delta \quad \text{con } K = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}. \quad [48. 4]$$

Analogamente la legge viscosa lineare collega le componenti di tensione σ_{ij} con le componenti $\dot{\varepsilon}_{ij}$ della velocità di deformazione, indicando per semplicità di notazione la derivata temporale con un punto, attraverso le relazioni dirette:

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij} \zeta \dot{\Delta} \quad [48. 5]$$

e le loro inverse:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda \Theta}{2\eta + 3\zeta} \right). \quad [48. 6]$$

In esse la costante η indica l'ordinario coefficiente di viscosità mentre la costante ζ è collegata alla viscosità di volume H , come si vede chiaramente spezzando le [48. 5] in due gruppi analoghi alle [48. 3] e [48. 4], cioè:

$$s_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij} \quad [48. 7]$$

$$\bar{\sigma} = H \dot{\Delta} \quad \text{con } H = \frac{2\eta + 3\zeta}{3}. \quad [48. 8]$$

È opportuno ricordare che nella idrodinamica classica vengono prese in considerazione solo le relazioni [48. 7] tra i deviatori, sostanzialmente dovute a Newton, ma per viscosità elevate dell'ordine di 10^7 poise (1 poise = 1 dine sec cm⁻²), come quelle che hanno interesse nei materiali considerati nella presente trattazione, anche il coefficiente H può avere un ruolo importante, come mostrò REINER¹.

49. Elasticità ritardata.

Se nell'interazione tra la fase elastica e la fase viscosa lo stato di deformazione è determinato dalla prima, otteniamo un comportamento tipico realizzato per sovrapposizione degli stati di tensione del sistema a due fasi, cioè:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v. \quad [49. 1]$$

Esprimendo allora le tensioni σ_{ij}^e della fase elastica in termini delle componenti di deformazione ε_{ij} secondo la [48. 1] e le tensioni σ_{ij}^v della fase viscosa in termini delle componenti $\dot{\varepsilon}_{ij}$ della velocità di deformazione secondo la [48. 5], otteniamo il tipo fondamentale di risposta visco-elastica definita dalle:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}(\lambda \Delta + \zeta \dot{\Delta}). \quad [49. 2]$$

Introducendo le componenti dei deviatori e dei tensori isotropi, le relazioni precedenti si spezzano nei due gruppi:

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \quad [49. 3]$$

$$\Theta = 3K \Delta + 3H \dot{\Delta}. \quad [49. 4]$$

Qualora sia accettabile l'ipotesi di incompressibilità sia per il solido elastico sia per il fluido viscoso la [49. 4] degenera per $\Delta, \dot{\Delta} \rightarrow 0$; $K, H \rightarrow \infty$, e le [49. 3] risultano le uniche relazioni significative. Esse vengono correntemente attribuite a KELVIN² benchè fossero già state

¹ M. REINER, *Applied Sciences Res.* (A), **1**, 475 (1949).

² LORD KELVIN, *Math. Phys. Papers*, **3**, 27 (1875).

precedentemente introdotte da MEYER¹, e si prestano ad una chiara discussione del fenomeno in esame.

Scritte le relazioni [49. 3] nella forma:

$$e_{ij} + \frac{\mu}{\eta} e_{ij}(t) = \frac{1}{2\eta} s_{ij}(t), \quad [49. 5]$$

l'integrazione rispetto al tempo t della generica di esse dà luogo alle:

$$e_{ij}(t) = \exp(-\mu t/\eta) \left[e_{ij}^0 + \frac{1}{2\eta} \int_0^t s_{ij} \exp(\mu t/\eta) dt \right], \quad [49. 6]$$

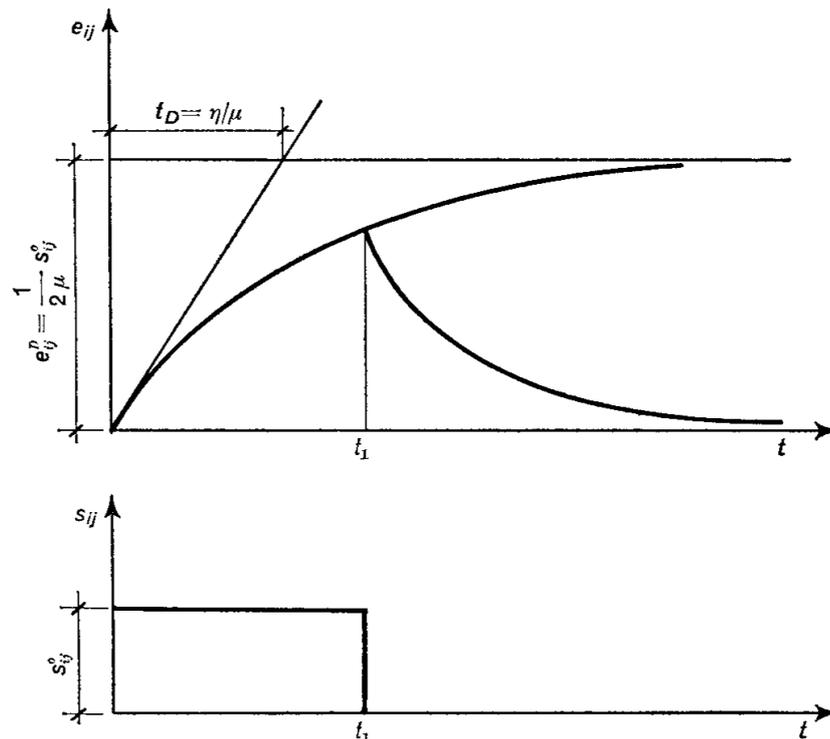


Fig. 27.

dove le $e_{ij}^0 = e_{ij}(0)$ rappresentano i valori iniziali delle componenti del deviatore di deformazione.

Se lo stato di tensione è mantenuto costante nel tempo, ed uguale al suo valore iniziale, cioè $s_{ij}(t) = s_{ij}^0$, allora si ha:

$$e_{ij}(t) = e_{ij}^0 \exp(-t/t_D) + \frac{s_{ij}^0}{2\mu} [1 - \exp(-t/t_D)], \quad [49. 7]$$

nella quale il rapporto $t_D = \eta/\mu$ ha le dimensioni di un tempo e viene denominato *tempo di ritardo* della risposta elastica differita o *tempo di rilassamento della deformazione*, come risulta dalla fig. 27.

¹ O. E. MEYER, *J. reine angew. Math.*, **78**, 130 (1874); *Ann. d. Physik* (6), **1**, 108 (1874).

In assenza di deformazione iniziale, $e_{ij}^0 = 0$, la [49. 7] si semplifica venendo a mancare il primo termine, e sotto tale ipotesi possiamo determinare la deformazione in un certo istante $t_1 > t_0$, cioè:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}^0}{2\mu} [1 - \exp(-t_1/t_D)]. \quad [49. 8]$$

Supponiamo ora di rimuovere lo stato di tensione nell'istante $t = t_1$, per cui la deformazione successiva si otterrà dalla [49. 7], scritta per $s_{ij}^0 = 0$ e per una deformazione iniziale $e_{ij}^0 = e_{ij}(t_1)$ fornita dalla [49. 8], cioè:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}^0}{2\mu} \exp(-t/t_D) [1 - \exp(-t_1/t_D)], \quad [49. 9]$$

valida per $t > t_1$.

Il comportamento descritto è rappresentato nella fig. 27 dove il tratto del diagramma per $t \leq t_1$ viene calcolato mediante la [49. 7] con $e_{ij}^0 = 0$ ed il tratto successivo, per $t > t_1$, mediante la [49. 9].

Appare chiaramente l'aspetto caratteristico del tipo di risposta visco-elastica esaminata, dovuto sostanzialmente al ritardo della deformazione rispetto alla tensione applicata o rimossa: si parlerà dunque di *elasticità ritardata* o *differita*.

La tangente nell'origine al diagramma è la retta di equazione: $2\mu t_D \dot{e}_{ij}(0) = s_{ij}^0$, ottenuta per derivazione della [49. 7] rispetto a t nel punto $t = 0$, con $e_{ij}^0 = 0$. Il tempo di ritardo t_D è dato quindi dalla intersezione di tale tangente sull'asintoto al diagramma, cioè sulla retta di equazione $e_{ij}^D = s_{ij}^0/2\mu$, ottenuta dalla [49. 7] per $t = \infty$.

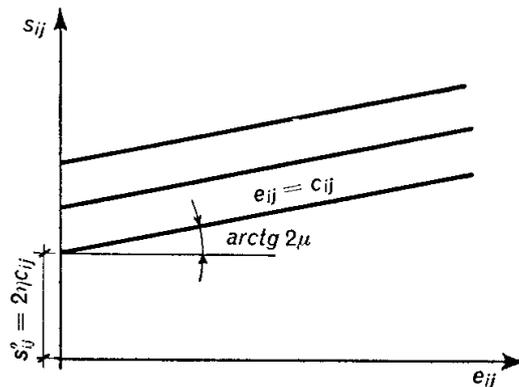


Fig. 28.

Se la velocità di deformazione è mantenuta costante, cioè $\dot{e}_{ij}(t) = c_{ij}$, la deformazione procede con la legge lineare $e_{ij}(t) = c_{ij} t$ e la tensione viene espressa pure da una legge lineare:

$$s_{ij}(t) = 2\mu e_{ij} + 2\eta c_{ij}, \quad [49. 10]$$

ottenuta direttamente dalla [49. 3] ed indicata nel diagramma (s_{ij} , e_{ij}) della fig. 28.

Se invece è tenuta costante la velocità di incremento della tensione, cioè $\dot{s}_{ij}(t) = k_{ij}$, e quindi la tensione stessa vale $s_{ij}(t) = k_{ij} t$, allora sviluppando l'integrale della [49. 6] otteniamo la seguente legge di deformazione:

$$e_{ij}(t) = \exp(-t/t_D) \left\{ e_{ij}^0 + \frac{k_{ij} t}{2\mu} \left[1 - \frac{t_D}{t} + \frac{t_D}{t} \exp(-t/t_D) \right] \right\}. \quad [49. 11]$$

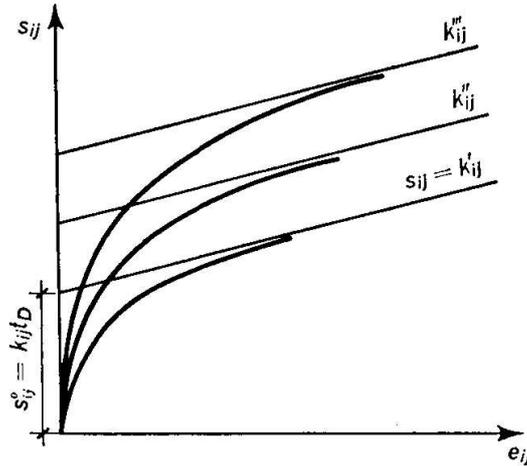


Fig. 29.

Essa, per $k_{ij} = 0$, fornisce la cosiddetta *funzione dell'elasticità ritardata*:

$$e_{ij}(t) = e_{ij}^0 \exp(-t/t_D), \quad [49. 12]$$

mentre per deformazione iniziale nulla $e_{ij}^0 = 0$, dà luogo, per $t = s_{ij}/k_{ij}$, al diagramma tensioni-deformazioni all'istante $t = 0$:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{k_{ij}}{s_{ij}} t_D [1 - \exp(-s_{ij}/k_{ij} t_D)] \right\}, \quad [49. 13]$$

rappresentato nella fig. 29 per una serie di valori della velocità di incremento della tensione $\dot{s}_{ij} = k_{ij}$.

Tutti i diagrammi (s_{ij}, e_{ij}) sono tangenti nell'origine all'asse s_{ij} .

50. Scorrimento viscoso.

Se nell'interazione tra la fase elastica e la fase viscosa lo stato di tensione è determinato dalla prima, otteniamo un comportamento del sistema a due fasi realizzato per sovrapposizione degli stati di deformazione ε_{ij}^e della fase elastica e ε_{ij}^v della fase viscosa, o anche in termini di velocità:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^v, \quad [50. 1]$$

per cui, con riguardo alle [52. 2] e [52. 6]:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2\mu} + \frac{\sigma_{ij}}{2\eta} - \delta_{ij} \left[\frac{\dot{\lambda}\Theta}{2\mu(2\mu+3\lambda)} + \frac{\zeta\Theta}{2\eta(2\eta+3\zeta)} \right]. \quad [50. 2]$$

Spezzando al solito in componenti dei deviatori e dei tensori isotropi di deformazione e di tensione otteniamo le relazioni:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2\mu} + \frac{s_{ij}}{2\eta}, \quad [50. 3]$$

$$\dot{\Delta} = \frac{\dot{\Theta}}{3K} + \frac{\Theta}{3H}, \quad [50. 4]$$

le prime delle quali sono associate al nome di MAXWELL¹ e costituiscono le uniche equazioni significative nel caso in cui sia il solido sia il liquido risultino incompressibili.

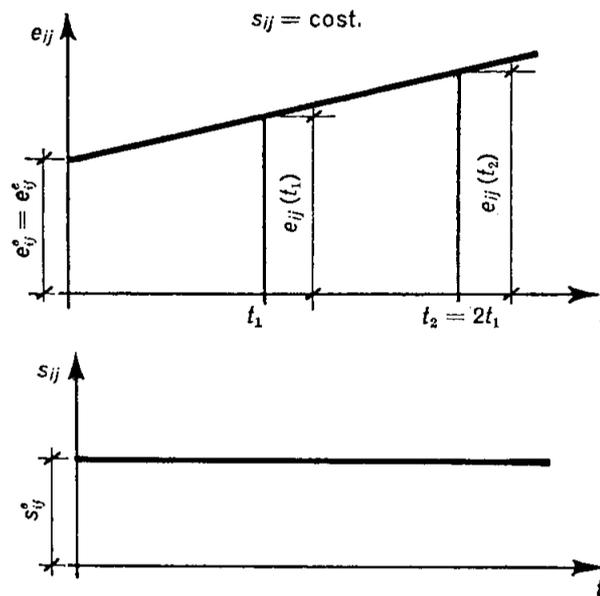


Fig. 30.

L'andamento in funzione del tempo della generica componente e_{ij} del deviatore di deformazione per tensione costante si ottiene immediatamente dalle [50. 3] per $\dot{s}_{ij} = 0$, $s_{ij} = s_{ij}^0$:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}^0 t}{2\eta} + e_{ij}^0, \quad [50. 5]$$

ed è rappresentato dalla retta indicata nella fig. 30, dove e_{ij}^0 esprime la deformazione all'istante iniziale $t = 0$, cioè la parte elastica della deformazione stessa.

¹ J. C. MAXWELL, *Phil. Mag.* (14), **35**, 133 (1868).

L'integrale della generica [50. 3] risulta:

$$s_{ij}(t) = \exp(-\mu t/\eta) [s_{ij}^0 + 2\mu \int_0^t \dot{e}_{ij} \exp(\mu t/\eta) dt], \quad [50. 6]$$

dove $s_{ij}^0 = s_{ij}(0)$ rappresentano i valori iniziali delle componenti del deviatore di tensione. Si ha dunque rilassamento dello stato di tensione

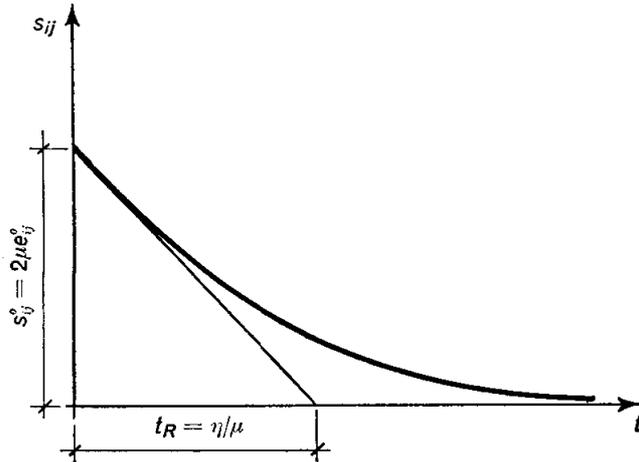


Fig. 31.

per deformazione costante, cioè per $\dot{e}_{ij} = 0$, $e_{ij} = e_{ij}^0$, e la [50. 6] si riduce alla:

$$s_{ij}(t) = s_{ij}^0 \exp(-t/t_R), \quad [50. 7]$$

dove abbiamo introdotto il cosiddetto *tempo di rilassamento della tensione* $t_R = \eta/\mu$.

Dalla rappresentazione grafica della [50. 7], riportata nella fig. 31, vediamo che la tangente nell'origine alla curva (s_{ij}, t) , cioè la retta di equazione $\dot{s}_{ij}(0) = -s_{ij}^0/t_R$, interseca l'asse dei tempi nel punto individuato da una ascissa uguale al tempo di rilassamento t_R .

Per velocità di deformazione costante $\dot{e}_{ij} = c_{ij}$ e quindi $e_{ij}(t) = c_{ij}t + e_{ij}^0$, la [50. 6] diviene integrando:

$$s_{ij}(t) = s_{ij}^0 \exp(-t/t_R) + 2\eta c_{ij} [1 - \exp(-t/t_R)], \quad [50. 8]$$

o anche, nell'ipotesi di valori iniziali nulli, $s_{ij} = 0$, $e_{ij}^0 = 0$:

$$s_{ij} = 2\eta c_{ij} [1 - \exp(-t/t_R)]. \quad [50. 9]$$

Poichè in tal caso $t = e_{ij}/c_{ij}$, eliminando il tempo nella [50. 9] si ottiene la relazione seguente in coordinate (s_{ij}, e_{ij}) :

$$s_{ij} = 2c_{ij} [1 - \exp(-e_{ij}/c_{ij} t_R)], \quad [50. 10]$$

rappresentata graficamente nella fig. 32 per una serie di valori c_{ij} della velocità di deformazione.

La tangente nell'origine alla famiglia di curve $\dot{e}_{ij} = c_{ij}$ esprime il legame tensioni-deformazioni del solido elastico lineare, come si deduce derivando la [50.10] nell'origine, corrispondente ad una velocità di deformazione infinitamente grande. Le deviazioni dei diagrammi di deformazione, per c_{ij} diverse, dall'andamento lineare sono tanto più marcate quanto più piccola è la velocità di deformazione.

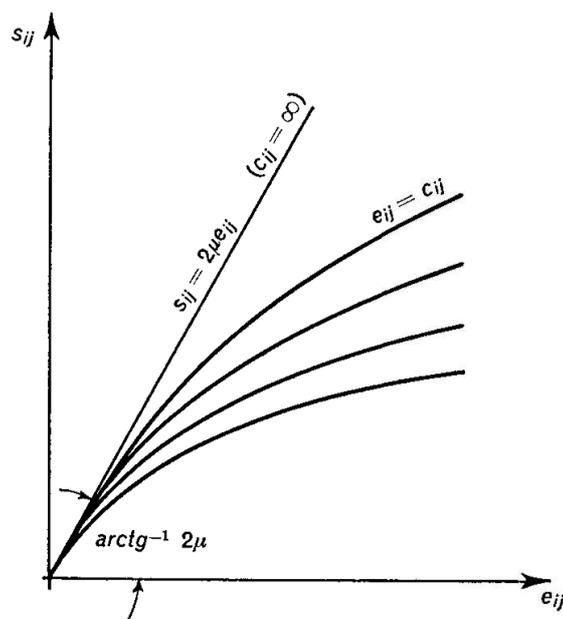


Fig. 32.

Il comportamento descritto è caratteristico di alcuni materiali impiegati nelle costruzioni come, ad esempio, i conglomerati cementizi: a sollecitazioni applicate per breve tempo essi rispondono in modo molto vicino al modello elastico ($c_{ij} = \infty$), ma, se osservati nel tempo, mettono in evidenza un apprezzabile scorrimento di tipo viscoso.

51. Relazioni visco-elastiche.

I due tipi fondamentali di risposta esaminati nei §§ 49-50 mostrano rispettivamente i due fenomeni della elasticità ritardata e dello scorrimento viscoso. Poichè questi due aspetti, di regola, sono presenti contemporaneamente nei materiali reali, come vedemmo nella discussione della esperienza monoassiale descritta nel § 47, il comportamento completo visco-elastico sarà ottenuto per sovrapposizione degli effetti.

Appare anche chiaro che la presenza di uno scorrimento viscoso può essere ottenuta sovrapponendo le deformazioni e non le tensioni. Indi-

cando allora con l'indice K le grandezze corrispondenti alle relazioni [49. 5] di Kelvin e con l'indice M le grandezze analoghe delle relazioni [50. 3] di Maxwell, le componenti del deviatore risultano:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^K + \dot{e}_{ij}^M. \quad [51. 1]$$

La velocità di deformazione \dot{e}_{ij}^K si ottiene dalla [49. 5], con riguardo alla [49. 6], nella forma:

$$\dot{e}_{ij}^K = \frac{1}{2\eta_K} \left[s_{ij} - 2\mu_K \exp(-\mu_K t/\eta_K) \left(e_{ij}^K(0) + \int_0^t s_{ij} \exp \mu_K t/\eta_K dt \right) \right], \quad [51. 2]$$

mentre la velocità di deformazione \dot{e}_{ij}^M è data semplicemente dalla [50. 3]:

$$\dot{e}_{ij}^M = \frac{1}{2\mu_M} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\eta_M} s_{ij}. \quad [51. 3]$$

Otteniamo così dalla [51. 1] l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij} = & \frac{\dot{s}_{ij}}{2\mu_M} + \frac{s_{ij}}{2\eta_M} + \frac{s_{ij}}{2\eta_K} - \frac{\mu_K}{\eta_K} \exp(-\mu_K t/\eta_K) \cdot \\ & \cdot \left[e_{ij}^K(0) + \frac{1}{2\eta_K} \int_0^t s_{ij} \exp \mu_K t/\eta_K \cdot dt \right], \end{aligned} \quad [51. 4]$$

dalla quale derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{ij} = & \frac{\ddot{s}_{ij}}{2\mu_M} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2\eta_M} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2\eta_K} + \frac{\mu_K^2}{\eta_K^2} \exp(-\mu_K t/\eta_K) \cdot \\ & \cdot \left[e_{ij}^K(0) + \frac{1}{2\eta_K} \int_0^t s_{ij} \exp \mu_K t/\eta_K \cdot dt \right] - \frac{\mu_K}{2\eta_K^2} s_{ij}. \end{aligned} \quad [51. 5]$$

Il confronto delle [51. 4] e [51. 5] permette di eliminare il termine della funzione esponenziale e conduce all'equazione differenziale:

$$2\eta_M \dot{e}_{ij} + \frac{2\eta_M \eta_K}{\mu_K} \ddot{e}_{ij} = s_{ij} + \frac{\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M}{\mu_K \mu_M} \dot{s}_{ij} + \frac{\eta_K \eta_M}{\mu_K \mu_M} \ddot{s}_{ij}. \quad [51. 6]$$

Il comportamento visco-elastico rappresentato dalla [51. 6], e studiato per la prima volta da BURGERS ¹, presenta elasticità sia istantanea sia ritardata e scorrimento viscoso irreversibile, come nel caso del materiale esaminato nel § 47 e descritto nel diagramma della fig. 24: possiede quindi un tempo di ritardo t_D ed un tempo di rilassamento t_R .

¹ J. M. BURGERS, *First Rep. on Viscosity and Plasticity*, 5, Amsterdam, 1935.

Supponiamo in primo luogo che ad un certo istante t_0 , che supporremo per semplicità di sviluppi come iniziale, cioè $t_0 = 0$, la deformazione abbia raggiunto un certo valore $e_{ij}(0)$ ed in tale istante venga rimossa la tensione applicata, in modo che $s_{ij} = \dot{s}_{ij} = 0$. La [51. 6] si semplifica nella:

$$\dot{e}_{ij} + \frac{\eta_K}{\mu_K} \ddot{e}_{ij} = 0, \quad [51. 7]$$

da cui integrando rispetto a t ed indicando con c_{ij} una costante:

$$e_{ij} + \frac{\eta_K}{\mu_K} \dot{e}_{ij} = c_{ij}. \quad [51. 8]$$

Ponendo $s_{ij} = \dot{s}_{ij} = 0$ nella [51. 4] otteniamo la equazione differenziale:

$$\dot{e}_{ij} = - \frac{\mu_K}{\eta_K} \exp(-\mu_K t / \eta_K) e_{ij}^K(0), \quad [51. 9]$$

dalla quale integrando rispetto a t ed indicando con e_{ij}^0 una costante:

$$e_{ij} = [\exp(-\mu_K t / \eta_K) - 1] e_{ij}^K(0) + e_{ij}(0). \quad [51. 10]$$

Confrontando la [51. 8] con la [51. 10]:

$$[51. 11]$$

$$[\exp(-\mu_K t / \eta_K) - 1] e_{ij}^K(0) - \exp(-\mu_K t / \eta_K) e_{ij}^K(0) + e_{ij} = c_{ij},$$

ricaviamo allora il significato della costante c_{ij} :

$$c_{ij} = e_{ij}(0) - e_{ij}^K(0), \quad [51. 12]$$

cioè la deformazione $e_{ij}(0)$ relativa all'istante iniziale $t = 0$ si riduce al valore c_{ij} all'istante $t = \infty$, con un tempo di ritardo dell'elasticità differita: $t_D = \eta_K / \mu_K$.

In secondo luogo supponiamo di mantenere costante la deformazione, in modo che $\dot{e}_{ij} = \ddot{e}_{ij} = 0$, e consideriamo l'equazione differenziale alla quale si riduce la [51. 6] in tale ipotesi:

$$\ddot{s}_{ij} + \frac{\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M}{\eta_K \eta_M} \dot{s}_{ij} + \frac{\mu_M \mu_K}{\eta_K \eta_M} s_{ij} = 0. \quad [51. 13]$$

L'integrale generale della [51. 13] conterrà i due tempi di rilassamento espressi dalla:

$$\left. \begin{array}{l} t'_R \\ t''_R \end{array} \right\} = \frac{2\eta_K \eta_M}{\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M \pm \sqrt{R}}, \quad [51. 14]$$

essendo:

$$R = (\eta_M \mu_K + \eta_M \mu_M + \eta_K \mu_M)^2 - 4\eta_K \eta_M \mu_K \mu_M, \quad [51. 15]$$

il discriminante dell'equazione algebrica caratteristica di secondo grado associata all'equazione differenziale del secondo ordine [51. 13].

52. Operatori visco-elastici.

Nei materiali reali la risposta della deformazione alla tensione applicata può dare origine a comportamenti più complessi di quelli discussi in precedenza ed esigere l'introduzione di costanti fisiche in numero maggiore di quello preso sinora in considerazione.

Tale circostanza conduce a relazioni tra le componenti dei deviatori di tensione e di deformazione della forma generale:

$$\mathbf{P} s_{ij} = 2\mu \mathbf{Q} e_{ij}, \quad [52. 1]$$

dove \mathbf{P} , \mathbf{Q} sono operatori differenziali lineari:

$$\mathbf{P} = a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m}, \quad [52. 2]$$

$$\mathbf{Q} = b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n}{dt^n}, \quad [52. 3]$$

con i coefficienti a_m , b_n combinazioni opportune delle costanti elastiche e viscose.

Le relazioni particolari esaminate rientrano nel tipo generale [52. 1]. Ad esempio la relazione [49. 3] dell'elasticità ritardata è un caso particolare della [52. 1] per:

$$\mathbf{P} = 1, \quad \mathbf{Q} = 1 + \frac{\eta}{\mu} \frac{d}{dt}, \quad [52. 4]$$

mentre la relazione [50. 3] dello scorrimento viscoso è un caso particolare della [52. 1] per:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mu}{\eta} + \frac{d}{dt}. \quad [52. 5]$$

Associando alla [52. 1] la relazione corrispondente alle parti isotrope dei tensori di tensione e di deformazione, cioè la $\bar{\sigma} = 3K\bar{\epsilon}$, otteniamo le relazioni generali dello stato visco-elastico lineare comprimibile:

$$\mathbf{P}\sigma_{ij} = 2\mu \mathbf{Q}\epsilon_{ij} + \delta_{ij} \left(K\mathbf{P} - \frac{2}{3}\mu\mathbf{Q} \right) \Delta, \quad [52. 6]$$

e le relazioni inverse:

$$\mathbf{Q}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}\sigma_{ij} + \delta_{ij} \left(\frac{1}{9K} \mathbf{Q} - \frac{1}{6\mu} \mathbf{P} \right) \theta. \quad [52. 7]$$

Introducendo un nuovo operatore definito dalla:

$$\mathbf{A} = K\mathbf{P} - \frac{2}{3}\mu \mathbf{Q}, \quad [52. 8]$$

le precedenti espressioni [52. 6] e [52. 7] assumono la forma più compatta:

$$\mathbf{P}\sigma_{ij} = 2\mu \mathbf{Q}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \mathbf{A}\theta, \quad [52. 9]$$

$$\mathbf{Q}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{P}\sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3K} \mathbf{A}\theta \right), \quad [52. 10]$$

formalmente analoghe alle equazioni [48. 1] e [48. 2] rispettivamente, pur di sostituire alle costanti elastiche gli operatori differenziali prima definiti.

L'integrazione delle [52. 9] e [52. 10] si ottiene nel modo più diretto utilizzando la trasformata di Laplace $f(p) = \mathcal{L}[F(t)]$, in modo da passare dalla generica funzione $F(t)$ ad una certa funzione $f(p)$ di una nuova variabile p attraverso la definizione:

$$f(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) F(t) dt. \quad [52. 11]$$

Con riferimento alle proprietà elementari della trasformata di Laplace¹, le trasformate degli operatori differenziali lineari \mathbf{P} , \mathbf{Q} hanno la forma:

$$\mathcal{L}[\mathbf{P}] = \sum_{k=0}^m a_k p^k, \quad \mathcal{L}[\mathbf{Q}] = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad [52. 12]$$

e quindi, introdotti i rapporti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[M] &= \frac{\mathcal{L}[\mathbf{Q}]}{\mathcal{L}[\mathbf{P}]}, & \mathcal{L}[N] &= \frac{\mathcal{L}[\mathbf{A}]}{\mathcal{L}[\mathbf{P}]}, \\ \mathcal{L}[M'] &= \frac{\mathcal{L}[\mathbf{P}]}{\mathcal{L}[\mathbf{Q}]}, & \mathcal{L}[N'] &= \frac{\mathcal{L}[\mathbf{A}]}{\mathcal{L}[\mathbf{Q}]}, \end{aligned} \quad [52. 13]$$

le trasformate delle equazioni differenziali [52. 9] e [52. 10] risultano rispettivamente:

$$\mathcal{L}[\sigma_{ij}] = 2\mu \mathcal{L}[M] \cdot \mathcal{L}[\varepsilon_{ij}] + \delta_{ij} \mathcal{L}[N] \cdot \mathcal{L}[\theta], \quad [52. 14]$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2\mu} \left(\mathcal{L}[M'] \cdot \mathcal{L}[\sigma_{ij}] - \frac{\delta_{ij}}{3K} \cdot \mathcal{L}[N'] \cdot \mathcal{L}[\theta] \right). \quad [52. 15]$$

¹ A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Bologna, 1943.

Una applicazione immediata del teorema di Borel-Horn sul prodotto di composizione di due funzioni $F(t)$, $G(t)$:

$$\mathcal{L}[F] \mathcal{L}[G] = \mathcal{L} \left[\int_0^t F(\theta) G(t - \theta) d\theta \right], \quad [52. 16]$$

conduce immediatamente, come trasformazioni inverse delle [52. 14] e [52. 15] alle soluzioni cercate, nella forma:

$$\sigma_{ij}(t) = 2\mu \int_0^t M(t - \theta) \varepsilon_{ij}(\theta) d\theta + \delta_{ij} \int_0^t N(t - \theta) \Delta(\theta) d\theta, \quad [52. 17]$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2\mu} \left[\int_0^t M'(t - \theta) \sigma_{ij}(\theta) d\theta - \frac{\delta_{ij}}{3K} \int_0^t N'(t - \theta) \Theta(\theta) d\theta \right]. \quad [52. 18]$$

Lo stato di tensione $\sigma_{ij}(t)$ e lo stato di deformazione $\varepsilon_{ij}(t)$ all'istante t vengono così espressi dagli integrali estesi a tutto l'intervallo di tempo tra l'istante iniziale e quello generico t e nei quali compaiono i valori istantanei applicati nell'intervallo di tempo $(\theta, \theta + d\theta)$.

Le funzioni $M(t - \theta)$, $N(t - \theta)$ rappresentano dunque la risposta ad un impulso unitario dello stato di deformazione in termini della velocità di tensione: esse esprimono propriamente delle *funzioni di memoria* dello stato di tensione, cioè delle *funzioni di rilassamento*.

Le funzioni $M'(t - \theta)$, $N'(t - \theta)$ rappresentano invece la risposta ad un impulso unitario dello stato di tensione in termini della velocità di deformazione: esse esprimono quindi delle *funzioni di memoria* dello stato di deformazione, cioè delle *funzioni di scorrimento*.

Le funzioni suddette possono essere introdotte direttamente come postulati nella definizione di materiali dotati di *memoria* o *ereditarietà*: tale aspetto può essere preso a fondamento di una teoria generale, o Meccanica ereditaria, come fu suggerito per la prima volta da BOLTZMANN¹ e da VOLTERRA².

In base alle [52. 13] le funzioni di memoria sono dunque ottenute come trasformate inverse di quozienti tra due polinomi; qualora in una coppia di quozienti che compaiono nelle [52. 14] e [52. 15] il grado del numeratore sia meno elevato di quello del denominatore, le due corrispondenti trasformate inverse potranno essere espresse sotto forma di serie di funzioni esponenziali negative, cioè:

$$\sum_k c(\alpha_k) \exp[-\alpha_k(t - \theta)], \quad [52. 19]$$

dove il numero dei termini eguaglia il grado del denominatore.

¹ L. BOLTZMANN, *Ann. Phys.*, **7**, 624 (1876).

² V. VOLTERRA, *Drei Vorlesungen*, p. 155, Leipzig u. Berlin, 1914.

In tale rappresentazione le funzioni di memoria appaiono come sovrapposizione di funzioni esponenziali di rilassamento ed esprimono l'equivalenza tra il concetto di funzione di memoria e quello di tempi multipli di rilassamento, come fu mostrato nel caso particolare del § 51.

53. Problema dell'equilibrio visco-elastico.

Il problema generale di determinare le tensioni $\sigma_{ij}(x_k, t)$ e le deformazioni $\varepsilon_{ij}(x_k, t)$ in uno stato visco-elastico può essere ricondotto al problema analogo di pura elasticità.

Sia V il volume del solido, nel quale agiscono le forze $p_j(x_k, t)$ e A la sua frontiera, sulle cui porzioni A_u e A_f gli spostamenti e le forze superficiali assumono rispettivamente i valori assegnati $\bar{u}_j(x_k, t)$ e $\bar{f}_j(x_k, t)$.

Poichè il problema dipende dal tempo si dovrebbero utilizzare le equazioni del moto, ma se ci limitiamo a problemi quasi-statici, sarà lecito trascurare le forze d'inerzia dovute alla deformazione e ridurre così ad un problema di semplice equilibrio caratterizzato dai seguenti gruppi di equazioni:

$$\sigma_{ij,i} + p_j = 0 \quad \text{in } V, \quad [53. 1]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V + A, \quad [53. 2]$$

$$u_j = \bar{u}_j(x_k, t) \quad \text{su } A_u, \quad [53. 3]$$

$$\sigma_{ij} n_i = \bar{f}_j(x_k, t) \quad \text{su } A_f, \quad [53. 4]$$

e naturalmente, dalla relazione di visco-elasticità tra le σ_{ij} e le ε_{ij} nella sua forma generale:

$$P\sigma_{ij} = 2\mu Q\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}A\Delta. \quad [53. 5]$$

Ora, mentre la soluzione dei problemi di elasticità dipende soltanto dalla configurazione istantanea e dai valori al contorno, quella dei problemi di visco-elasticità, è influenzata dall'intera storia del processo. Inoltre la presenza degli operatori temporali esige la specificazione di un numero sufficiente di condizioni iniziali, determinato dall'ordine degli operatori differenziali impiegati: per semplicità di sviluppi formali considereremo soltanto stati iniziali non perturbati e quindi condizioni iniziali identicamente nulle.

Il procedimento più spedito per rimuovere la dipendenza dalla variabile t è costituito dalla trasformata di Laplace [52. 11], in modo da ricondurre il problema visco-elastico ad un problema elastico nelle variabili trasformate. Le equazioni precedenti divengono così:

$$\mathcal{L}[\sigma_{ij,i}] + \mathcal{L}[p_j] = 0, \quad [53. 6]$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[u_{i,j} + u_{j,i}], \quad [53. 7]$$

$$\mathcal{L}[u_j] = \mathcal{L}[\bar{u}_j(x_k, p)], \quad [53. 8]$$

$$\mathcal{L}[\sigma_{ij}] n_i = \mathcal{L}[\bar{f}_j(x_k, p)], \quad [53. 9]$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{P}\sigma_{ij}] = 2\mu \mathcal{L}[\mathbf{Q}\varepsilon_{ij}] + \delta_{ij} \mathcal{L}[\mathbf{A}\mathbf{A}]. \quad [53. 10]$$

In questo nuovo problema, detto *elastico associato*, le costanti elastiche ed i valori al contorno sono funzioni del parametro p . Se il problema associato può essere risolto, $\mathcal{L}[\sigma_{ij}(x_k, p)]$ rappresenta la trasformata dello stato di tensione del problema visco-elastico primitivo, e la trasformata inversa fornisce allora lo stato di tensione $\sigma_{ij}(x_k, t)$ richiesto.

Il procedimento sopra delineato presuppone che la regione V non vari col tempo. Ora da un punto di vista del tutto generale sia il volume V sia la sua frontiera A dipendono dal tempo durante la deformazione. Non appare dunque possibile l'impiego della trasformata di Laplace per eliminare la dipendenza da t : infatti, ad esempio, in un punto di una superficie attraversato dal contorno di separazione tra A_u e A_f né u_j né f_j sono prescritte durante il processo di carico e non se ne può quindi ottenere la trasformata.

Si dovrebbe perciò, a stretto rigore, integrare le equazioni del problema visco-elastico separatamente rispetto al tempo ed alle variabili spaziali: il procedimento risulta estremamente involuto tanto che, di regola, per arrivare a risultati concreti, deve essere semplificato nel modo prima descritto, limitandosi cioè a sostituire le costanti elastiche con gli operatori differenziali visco-elastici.

54. Termoelasticità.

Un secondo esempio notevole di anelasticità è rappresentato dalla interazione di energia termica con il continuo elastico attraverso la sua dilatazione. Supponiamo dunque che la deformazione del solido dipenda dalla tensione e dalla temperatura.

Un primo gruppo di relazioni del problema termoelastico si ottiene osservando che in un solido elastico isotropo una variazione di temperatura T , a partire da una temperatura T_0 assunta come iniziale, dà luogo ad una variazione delle sole componenti di deformazione con indici uguali, cioè, per deformazioni infinitesime, dei soli coefficienti di dilatazione lineare:

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha T, \quad [54. 1]$$

avendo indicato con α il coefficiente di dilatazione termica e dove l'indice T esprime nelle ε_{ij} la dipendenza esclusiva dalla temperatura.

Tenendo inoltre presenti le relazioni di tipo elastico:

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda\Theta}{3\lambda + 2\mu} \right], \quad [54. 2]$$

lo stato di deformazione complessivo risulterà dalla sovrapposizione degli effetti:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda\Theta}{3\lambda + 2\mu} \right] + \delta_{ij} aT. \quad [54. 3]$$

Le componenti di tensione si avranno allora dalla inversione delle [54. 3] nella forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda\Delta - a_T T), \quad [54. 4]$$

avendo posto per semplicità di scrittura:

$$a_T = (3\lambda + 2\mu) a. \quad [54. 5]$$

Un secondo gruppo di relazioni si ottiene prendendo in esame il rilassamento delle fluttuazioni di temperatura attraverso il solido dovuto all'influenza della deformazione sulla temperatura stessa.

Indicando con $U(T, \varepsilon_{ij})$ l'energia interna e con $S(T, \varepsilon_{ij})$ l'entropia del solido, entrambe riferite all'unità di volume, i principi della Termodinamica consentono di scrivere, per $T' = T_0 + T$:

$$dU - T'dS = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}, \quad [54. 6]$$

perchè l'incremento del lavoro esterno vale, nel caso in esame, proprio $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$.

Sviluppando in termini delle derivate rispetto alle variabili T', ε_{ij} otteniamo così:

$$dS = \frac{1}{T'} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) dT + \frac{1}{T'} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) d\varepsilon_{ij}, \quad [54. 7]$$

essendo evidentemente $dT' = dT$.

Poichè il differenziale dell'entropia deve essere un differenziale totale, e quindi devono sussistere le note condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{T'} \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T'} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \right], \quad [54. 8]$$

otteniamo semplificando:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} = -T' \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}. \quad [54. 9]$$

Tenendo presenti le [54. 4], le derivate delle componenti di tensione rispetto alla temperatura sono evidentemente:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = - \delta_{ij} \alpha_T, \quad [54. 10]$$

e quindi in definitiva la [54. 7] assume la forma:

$$dS = \frac{1}{T'} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \delta_{ij} \alpha_T d\varepsilon_{ij}. \quad [54. 11]$$

Se la variazione T della temperatura è piccola rispetto alla temperatura iniziale T_0 , in modo che si possa assumere $T' \simeq T_0$, il calore specifico $(\partial U / \partial T)'$ può essere assunto coincidente con quello a volume costante del solido nella configurazione naturale indeformata:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_0, \quad [54. 12]$$

corrispondente alla temperatura T_0 , cioè:

$$dS = \frac{C_V}{T_0} dT + \alpha_T d\Delta. \quad [54. 13]$$

È ora necessario introdurre una ulteriore relazione indipendente per la variabile anelastica T , utilizzando a tale scopo la legge di FOURIER¹ per la conduzione del calore:

$$q_i = - k_T T_{,i}, \quad [54. 14]$$

dove q_i esprimono le componenti del vettore flusso di calore e k_T il coefficiente di conduttività termica.

In termini dell'entropia specifica S , poiché:

$$q_{i,i} = - T_0 \frac{dS}{dt}, \quad [54. 15]$$

la [54. 14] diviene:

$$T_0 dS = k_T \nabla T dt, \quad [54. 16]$$

e permette, posto $\kappa_T = \alpha_T T_0$, dal confronto con la [54. 13] di pervenire alla notevole relazione:

$$k_T \nabla T = C_V \dot{T} + \kappa_T \dot{\Delta}, \quad [54. 17]$$

ottenuta per la prima volta da DUHAMEL², e dove la derivazione temporale è stata indicata al solito con un punto.

¹ J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

² J. M. C. DUHAMEL, *Journal de l'École Polytechnique*, **15**, n. 25, 1-57 (1837); *Memoires par divers savants*, **5**, 440 (1838) (letta alla Academie des Sciences, il 23-11-1835).

Le [54. 3] e la [54. 17] danno la formulazione completa delle relazioni necessarie per l'analisi dei problemi di termoelasticità dovuti ad una interazione della temperatura, assunta come variabile anelastica, sullo stato di deformazione elastica.

Per una vasta classe di problemi è lecito trascurare nella [54. 17] l'ultimo termine: evidentemente il bilancio energetico ivi espresso riesce in tal caso incompleto ed i problemi elastico e termico risultano indipendenti, cioè la distribuzione della temperatura nel solido viene determinata semplicemente dalla legge di Fourier [54. 16] senza alcun riguardo alla influenza dello stato di deformazione sulla temperatura stessa.

Tale procedimento semplificato riesce sufficientemente approssimato quando la distribuzione non uniforme della temperatura nei punti del solido sia dovuta essenzialmente al calore fornito da sorgenti esterne, ma evidentemente è del tutto inaccettabile quando le variazioni di temperatura siano dovute alla deformazione del solido, come avviene ad esempio nei fenomeni di smorzamento anelastico.

55. Anelasticità fluido-porosa.

Un ulteriore importante fenomeno di anelasticità è dovuto agli effetti della pressione di un fluido viscoso agente nei pori di un mezzo elastico poroso: si ha in tal caso una interazione della deformazione elastica con la corrente fluida.

Sotto l'azione delle forze applicate il solido elastico poroso si deforma con conseguente efflusso del fluido dai pori, mentre a sua volta la viscosità del fluido produce un ritardo della deformazione elastica ed un rilassamento dello stato di tensione: tale fenomeno costituisce la base di un fondamentale problema di Meccanica dei terreni.

Assunta come variabile anelastica la sovrappressione idrostatica p nei pori ed indicato con f il coefficiente di porosità, cioè il rapporto tra il volume dei pori ed il volume complessivo del sistema a due fasi, abbiamo:

$$-fp = \beta_L \Delta_L + \beta \Delta, \quad [55. 1]$$

dove Δ_L e Δ indicano le dilatazioni cubiche del fluido e del solido rispettivamente, β_L e β due costanti materiali opportune.

Lo stato di tensione dovuto al fluido ha carattere idrostatico e dà luogo perciò soltanto a componenti normali:

$$\sigma_{ij}^L = \delta_{ij} \beta_L \Delta_L, \quad [55. 2]$$

o anche, con riguardo alla [55. 1]:

$$\sigma_{ij}^L = - \frac{\beta}{\beta_L} \delta_{ij} (\beta \Delta + fp). \quad [55. 3]$$

Tenendo presenti le relazioni di tipo elastico:

$$\sigma_{ij}^E = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\Delta, \quad [55. 4]$$

lo stato di tensione complessivo risulterà per sovrapposizione degli effetti [55. 3] e [55. 4], cioè:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^E = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_L\Delta - \alpha_L p), \quad [55. 5]$$

avendo introdotto per brevità le notazioni:

$$\lambda_L = \lambda - \frac{\beta^2}{\beta_L}, \quad \alpha_L = \frac{\beta f}{\beta_L}. \quad [55. 6]$$

La relazione di anelasticità viene fornita nel caso presente dalla legge di DARCY¹:

$$-fp_{,k} = b(v_k - \dot{u}_k), \quad [55. 7]$$

che collega il gradiente di pressione nella fase fluida con il moto relativo in tale fase, espresso appunto dalla differenza tra la velocità v_k del fluido nei pori e la velocità \dot{u}_k dello spostamento elastico del solido.

Derivando la [55. 1] rispetto al tempo:

$$-f\dot{p} = \beta_L \dot{\Delta}_L + \beta \dot{\Delta} = \beta_L v_{k,k} + \beta \dot{u}_{k,k}, \quad [55. 8]$$

e le [55. 7] rispetto alla coordinata generica x_k :

$$-fp_{,kk} = b(v_{k,k} - \dot{u}_{k,k}), \quad [55. 9]$$

l'eliminazione del gradiente di velocità nel fluido $v_{k,k}$ fornisce allora:

$$k_L \nabla p = c_L \dot{p} + \kappa_L \dot{\Delta}, \quad [55. 10]$$

dove sono state introdotte le ulteriori notazioni:

$$k_L = \frac{f^2}{b}, \quad c_L = \frac{f^2}{\beta}, \quad \kappa_L = f \left(l + \frac{\beta_L}{\beta} \right). \quad [55. 11]$$

Le equazioni [55. 5] e [55. 10] rappresentano la formulazione completa del problema.

Qualora si trascuri l'influenza della variazione di volume della fase solida e si ometta di conseguenza il termine $\dot{\Delta}$ nella [55. 10], questa assume la forma ben nota²:

$$c \nabla p = \dot{p}, \quad [55. 12]$$

¹ H. DARCY, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dijon, 1856.

² K. TERZAGHI, *Theoretical Soil Mechanics*, p. 290, New York, 1947.

dove $c = k_L/c_L$ assume il significato di *coefficiente di consolidamento*.

È necessario osservare che l'ipotesi di un coefficiente c costante nel fenomeno in esame è valida a stretto rigore solo quando il moto sia monodimensionale. Nei problemi concreti a c deve essere sostituita una funzione $c(x_i)$ la cui struttura appare estremamente complicata e può essere determinata caso per caso solo ricorrendo a prove sperimentali. Al presente il problema appare ancora aperto e costituisce uno dei più interessanti e non semplici aspetti del consolidamento dei terreni in presenza di acqua sotto l'azione di carichi applicati.

56. Relazioni anelastiche generalizzate.

Le relazioni ottenute in precedenza nel § 54 per i fenomeni termoelastici e nel § 55 per i fenomeni dovuti a pressione fluida nei pori di un solido elastico presentano una singolare analogia formale: indicando allora genericamente con X l'azione causa di anelasticità, la variazione di temperatura nel primo caso e la variazione di pressione idrostatica nel secondo, possiamo riferirci ad equazioni del tipo:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda\Delta - aX), \quad [56.1]$$

$$k\nabla X = c\dot{X} + \kappa\dot{A}, \quad [56.2]$$

valide anche in altri interessanti fenomeni anelastici di diffusione sui quali non insistiamo.

In ogni caso il problema consiste nel determinare *simultaneamente* lo stato di tensione $\sigma_{ij}(x_k, t)$ e la distribuzione della azione anelastica $X(x_k, t)$ in tutti i punti del continuo ad ogni istante di tempo.

Poiché il problema dipende dal tempo si dovranno utilizzare le *equazioni del moto elastico*, che discendono nel modo più semplice introducendo, alla d'Alembert, le forze d'inerzia $-\rho\ddot{u}_j$ nelle equazioni di equilibrio di Cauchy [21. 4].

Insieme a tali equazioni si dovrà tener conto della congruenza della deformazione, unitamente alle condizioni prescritte sulla frontiera del solido, sia per le forze superficiali f_j e gli spostamenti u_j sia per l'azione anelastica X , e si dovranno rispettare opportune condizioni iniziali per gli spostamenti u_j , le loro velocità \dot{u}_j e l'azione anelastica X .

Cioè, in definitiva, oltre alle relazioni di anelasticità [56. 1] e [56. 2] dovremo prenderne in considerazione i seguenti gruppi di equazioni, indefinite del moto e di congruenza:

$$\sigma_{ij,i} = \rho\ddot{u}_j \quad \text{in } V, \quad [56.3]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V + A, \quad [56.4]$$

associate con le condizioni prescritte al contorno:

$$\sigma_{ij} n_i = \bar{f}_j(x_k, t) \quad \text{su } A_f, \quad [56. 5]$$

$$u_j = \bar{u}_j(x_k, t) \quad \text{su } A_u, \quad [56. 6]$$

$$X = \bar{X}(x_k, t) \quad \text{su } A, \quad [56. 7]$$

e con le condizioni iniziali:

$$u_j = u_j^0(x_k, t) \quad \text{per } t = 0, \quad [56. 8]$$

$$\dot{u}_j = \dot{u}_j^0(x_k, t) \quad \text{per } t = 0, \quad [56. 9]$$

$$X_j = X_j^0(x_k, t) \quad \text{per } t = 0. \quad [56. 10]$$

Non è difficile dimostrare che il problema così formulato determina univocamente¹ un insieme di funzioni che rappresentano la soluzione del problema stesso.

Infatti, se esistessero due soluzioni distinte corrispondenti alle stesse condizioni iniziali ed ai limiti, le loro differenze:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}, & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}, \\ u_i &= u'_i - u''_i, & X &= X' - X'', \end{aligned} \quad [56. 11]$$

dovrebbero verificare le equazioni del problema rese omogenee, dato il carattere lineare delle equazioni.

Consideriamo allora l'integrale:

$$2 \dot{U} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V [2\mu \varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + (\lambda \Delta - aX) \dot{\Delta}] dV, \quad [56. 12]$$

avente l'ovvio significato meccanico di rappresentare il doppio del lavoro di deformazione nell'unità di tempo e, tenendo presenti le [56. 4], trasformiamolo con la formula di Gauss:

$$2 \dot{U} = \int_A \sigma_{ij} n_i \dot{u}_j dA - \int_V \sigma_{ij,i} \dot{u}_j dV, \quad [56. 13]$$

Ma l'integrale esteso alla frontiera A è nullo perché le $\sigma_{ij} n_i$ sono equilibrate su A_f da forze di superficie $f_j = 0$, mentre le velocità \dot{u}_j sono nulle sulla porzione rimanente A_u . L'integrale esteso al volume V può essere facilmente trasformato sostituendo ai gradienti di tensione $\sigma_{ij,i}$ le forze d'inerzia corrispondenti $\rho \ddot{u}_j$ in base alla [56. 3]. Risulta:

$$2 \dot{U} = - \int_V \rho \ddot{u}_j \dot{u}_j dV = - \frac{1}{2} \int_V (\rho \dot{u}_j \dot{u}_j) \dot{} dV. \quad [56. 14]$$

¹ R. F. BALDACCII, *Costr. C. A. Studi e Rend.*, **1**, 27, Bergamo, 1964.

Con riguardo alla [56. 2] si ha inoltre la seguente identità:

$$\int_V k X \nabla X dV = \int_V X (c \dot{X} + k \dot{\Delta}) dV, \quad [56. 15]$$

nella quale l'integrale al primo tempo può essere anche scritto come:

$$\int_V k X \nabla X dV = \int_A k X X_{,i} n_i dA - \int_V k X_{,i} X_{,i} dV, \quad [56. 16]$$

dove, al solito, l'integrale esteso alla frontiera A è nullo dato il carattere omogeneo della [56. 7] valida per la soluzione differenza X . Potremo quindi scrivere:

$$\int_V \varkappa \dot{\Delta} X dV = -\frac{1}{2} \int_V (c x^2) \dot{\cdot} dV - \int_V k X_{,i} X_{,i} dV. \quad [56. 17]$$

Infine, con riguardo alle [56. 14] e [56. 17] l'equazione [56. 12] diviene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V (\varrho \dot{u}_j \dot{u}_j) \dot{\cdot} dV &= \int_V (\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta^2) \dot{\cdot} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\alpha c}{\varkappa} X^2 \right) \dot{\cdot} dV + \int_V a \frac{k}{\varkappa} X_{,i} X_{,i} dV, \end{aligned} \quad [56. 18]$$

o anche riordinando in modo opportuno:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{1}{2} \varrho \dot{u}_j \dot{u}_j + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha c}{\varkappa} X^2 \right) \dot{\cdot} dV &= \quad [56. 19] \\ &= - \int_V \frac{\alpha k}{\varkappa} X_{,i} X_{,i} dV. \end{aligned}$$

Il primo membro è una quantità essenzialmente non negativa come somma di quadrati, mentre il secondo membro preceduto dal segno negativo è, per la stessa ragione, una quantità certamente non positiva. L'uguaglianza espressa dalla [56. 19] può allora sussistere unicamente quando tutti i termini in essa contenuti risultino identicamente nulli, cioè se, e solo se:

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}, \quad u'_{ij} = u''_{ij} \quad X' = X'', \quad [56. 20]$$

ed è quindi assicurata l'unicità della soluzione per il problema anelastico generalizzato.

57. Riduzione delle relazioni anelastiche.

Una notevole trasformazione delle relazioni generalizzate [56. 1] e [56. 2] tipiche dei fenomeni anelastici si ottiene mediante un sistema completo di opportune funzioni ortogonali $\psi_m(x_k)$, dipendenti unicamente dalla posizione e definite come soluzioni caratteristiche delle equazioni:

$$k \nabla \psi_m + \beta \psi_m = 0. \quad [57. 1]$$

La eliminazione della dipendenza dalle coordinate spaziali x_k avviene allora con un procedimento di separazione delle variabili attraverso gli sviluppi in serie:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(X_k, t) &= \sum_m \sigma_{ijm}(t) \psi_m(x_k), \\ \varepsilon_{ij}(X_k, t) &= \sum_m \varepsilon_{ijm}(t) \psi_m(x_k), \\ X(x_k, t) &= \sum_m X_m(t) \psi_m(x_k), \end{aligned} \quad [57. 2]$$

dove i coefficienti degli sviluppi sono unicamente funzioni del tempo e vengono detti *potenziali termodinamici ortogonali*.

Ogni fenomeno anelastico implica così il rilassamento simultaneo di tutti i potenziali termodinamici ad esso associati.

Si moltiplichino ora le [56. 1] e [56. 2] per la generica funzione $\psi_n(x_k)$ e si integrino i prodotti così ottenuti nel volume V del solido, tenendo presenti le equazioni [57. 1] e gli sviluppi [57. 2]:

$$\begin{aligned} \sum_m [\sigma_{ijm}(t) \int_V \psi_m \psi_n dV] &= \\ = \sum_m \left\{ 2\mu \varepsilon_{ijm}(t) \int_V \psi_m \psi_n dV + \delta_{ij} [\lambda \Delta_m(t) - \alpha X_m(t)] \int_V \psi_m \psi_n dV \right\}, \end{aligned} \quad [57. 3]$$

$$\sum_m \beta X_m(t) \int_V \psi_m \psi_n dV = \sum_m \left\{ [c \dot{X}_m(t) + \kappa \dot{\Delta}_m(t)] \int_V \psi_m \psi_n dV \right\}. \quad [57. 4]$$

Per la supposta ortogonalità del sistema $\psi_m(x_k)$ risulteranno diversi da zero solo i termini della serie corrispondenti all'indice $m = n$, cioè in definitiva si avranno per ogni $m = 1, 2, 3, \dots$, le seguenti equazioni in numero infinito nella variabile t :

$$\sigma_{ij}(t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(t) + \delta_{ij} [\lambda \Delta(t) - \alpha X(t)], \quad [57. 5]$$

$$c \dot{X}(t) = -\beta X(t) - \kappa \dot{\Delta}(t), \quad [57. 6]$$

avendo tralasciato di scrivere l'indice m , senza che ormai possa nascere ambiguità. Si derivi la generica [57. 5] rispetto al tempo:

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}(t) + \delta_{ij} [\lambda \dot{\Delta}(t) - \alpha \dot{X}(t)], \quad [57. 7]$$

e si elimini l'azione anelastica X e la sua derivata temporale \dot{X} utilizzando le tre relazioni [57. 5], [57. 6], [57. 7], ottenendo in definitiva:

$$c\dot{\sigma}_{ij} + \beta\sigma_{ij} = 2c\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + 2\beta\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[(c\lambda + \kappa\alpha)\dot{\Delta} + \beta\lambda\Delta]. \quad [57. 8]$$

L'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie [57. 8] si effettua formalmente in modo immediato utilizzando la trasformata di Laplace, come fu già indicato nel § 53, oppure impiegando il noto procedimento elementare. Abbiamo in questo caso:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \exp\left(-\frac{\beta t}{c}\right) \int_0^t \left\{ 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\beta}{c}\varepsilon_{ij}\right) + \right. \\ \left. + \delta_{ij}\left[\left(\lambda + \frac{\alpha\kappa}{c}\right)\dot{\Delta} + \frac{\beta\lambda}{c}\Delta\right] \right\} \exp\frac{\beta\theta}{c} d\theta, \end{aligned} \quad [57. 9]$$

avendo supposto nulli per semplicità i valori iniziali dello stato di tensione e di deformazione.

Mediante una integrazione per parti ed osservando che la funzione $\exp(-\beta t/c)$ non dipende dall'argomento θ , otteniamo le cercate relazioni esplicite nella forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\left(\lambda + \frac{\alpha k}{c}\right)\Delta - \delta_{ij}\frac{\alpha k\beta}{c^2} \int_0^t \Delta(\theta) \exp\frac{\beta}{c}(t-\theta) d\theta. \quad [57. 10]$$

Esse risolvono completamente il problema generalizzato della risposta anelastica nel senso che forniscono in ogni istante t le relazioni tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione.

58. Relazioni anelastiche non-lineari.

Nel caso in cui il tensore di tensione $[\sigma_{ij}]$ sia collegato isotropicamente al tensore di deformazione $[\varepsilon_{ij}]$ ed al tensore delle velocità di deformazione $[\dot{\varepsilon}_{ij}]$, e nella ipotesi che gli assi principali dei tre tensori coincidano, è facile dimostrare¹ con un ragionamento analogo a quello seguito nel § 35 che il tensore di tensione può essere espresso da una relazione chiusa di nove termini limitata ai prodotti nei quadrati delle deformazioni e delle loro velocità.

Trascurando nello sviluppo tutti i termini di ordine superiore al secondo, otteniamo l'espressione semplificata, in termini di matrici:

$$[\sigma_{ij}] = C_0[1] + C_1[\varepsilon_{ij}] + C_3[\dot{\varepsilon}_{ij}], \quad [58. 1]$$

¹ R. S. RIVLIN, *Journ. Rational Mech. Analysis*, 4, 681 (1955).

o anche la sua inversa:

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}] = A_0 [1] + A_1 [\sigma_{ij}] + A_2 [\dot{\sigma}_{ij}]. \quad [58. 2]$$

Naturalmente i coefficienti C_0, C_1, C_3 , o A_0, A_1, A_3 sono funzioni polinomiali degli invarianti dei tensori $[\varepsilon_{ij}], [\dot{\varepsilon}_{ij}]$ o dei tensori $[\sigma_{ij}], [\dot{\sigma}_{ij}]$ rispettivamente, anche se i coefficienti originari risultavano delle costanti.

Nella ipotesi di incompressibilità ($\varepsilon_{ii} = 0, \dot{\varepsilon}_{ii} = 0$), il coefficiente C_0 si riduce alla pressione idrostatica $\bar{\sigma}$ e A_0 può essere espresso in funzione di A_1 , e A_3 , cioè: $A_0 = -A_1 \bar{\sigma} - A_3 \dot{\bar{\sigma}}$. La forma più semplice delle [58. 1] e [58. 2] diviene allora in termini delle componenti dei deviatori di tensione s_{ij} , di deformazione e_{ij} e di velocità di deformazione \dot{e}_{ij} :

$$s_{ij} = C_1 e_{ij} + C_3 \dot{e}_{ij}, \quad [58. 3]$$

$$\dot{e}_{ij} = A_1 s_{ij} + A_3 \dot{s}_{ij}, \quad [58. 4]$$

dove C_1, C_3 sono funzioni dell'invariante di secondo ordine D_2 del deviatore di deformazione $[e_{ij}]$ e A_1, A_3 sono funzioni dell'invariante di secondo ordine J_2 del deviatore di tensione $[s_{ij}]$.

Il legame costitutivo di un generico continuo dotato di rilassamento è dunque:

$$\dot{e}_{ij} = A_1 (J_2) s_{ij} + A_3 (J_2) \dot{s}_{ij}, \quad [58. 5]$$

nel quale possono così comparire potenze superiori alla prima del deviatore di tensione, in modo da ottenere una migliore corrispondenza con i risultati sperimentali.

Ad esempio appare di un certo interesse lo studio della forma particolare della [58. 5]:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\dot{s}_{ij} + \frac{an}{t_R} J_2^{(n-1)} s_{ij} \right], \quad [58. 6]$$

dove $t_R = \eta/\mu$ indica il tempo di rilassamento, a una costante avente le dimensioni $[F^{-1}L^2]^{2(n-1)}$, n un numero intero maggiore dell'unità.