

CAPITOLO IV

STATI ELASTICI

34. Energia potenziale elastica.

Nei capitoli precedenti sono state analizzate le proprietà dello stato di deformazione e dello stato di tensione ed i principi generali di carattere geometrico-statico: le conclusioni alle quali siamo giunti sono fondate essenzialmente sulla ipotesi della continuità del corpo e sulle conseguenze logiche implicite in questo concetto. Nessuna ipotesi è stata avanzata sinora sulle qualità fisiche del corpo, cioè sulle correlazioni esistenti tra le particelle materiali e su tutte le circostanze fisiche che possono influenzare tali correlazioni.

D'altra parte fu già messa in evidenza la necessità di un legame tra le componenti di deformazione e le componenti di tensione: per una formulazione completa del problema devono essere introdotte sei ulteriori relazioni, capaci di descrivere la legge fisica secondo la quale l'elemento materiale si deforma per effetto delle tensioni applicate o, in altre parole, come ad esse *risponde*.

Prendiamo ora in esame un importante tipo particolare di risposta, caratteristica di uno stato ideale rappresentato dal cosiddetto *solido elastico*, al quale possono ricondursi, in determinate circostanze e con un grado di approssimazione più o meno spinto, gran parte dei materiali reali.

L'ipotesi di elasticità prevede per un dato corpo l'esistenza di uno *stato naturale* prefissato, in assenza di forze applicate e generalmente anche di deformazione, a partire dal quale il solido possa comunque deformarsi sotto l'azione delle forze ma ritorni a tale stato quando venga liberato dalle forze, indipendentemente dalle modalità seguite nell'applicare e successivamente rimuovere le forze stesse.

L'energia spesa nella deformazione viene così integralmente restituita poichè il comportamento descritto è tipico dei sistemi a trasfor-

mazioni completamente reversibili. Ammettiamo dunque l'esistenza di una funzione di stato dipendente solo dagli estremi della trasformazione e non dal percorso seguito, in modo che le proprietà meccaniche di uno stato definito elastico nel senso discusso possano essere caratterizzate da un singolo scalare Φ , *energia potenziale elastica per unità di volume*, funzione soltanto delle grandezze determinanti la configurazione prescelta come stato naturale e delle grandezze determinanti la deformazione.

È preferibile parlare di *stato elastico* di un solido anzichè di *solido elastico* perchè, come fu già avvertito nella Introduzione, tale specifico comportamento è una pura astrazione e non si riferisce, almeno in modo fisicamente rigoroso, ad alcun materiale reale.

La struttura della funzione Φ potrà essere suggerita da ulteriori ipotesi sul tipo delle grandezze necessarie per individuare le proprietà dello stato naturale rispetto ad un sistema di coordinate prefissato. Tali grandezze dovranno risultare funzioni definite della configurazione iniziale e potranno variare, in generale, da particella a particella ma, per una data particella materiale, saranno indipendenti dal tempo: una ipotesi analiticamente suggestiva consiste nell'assumere per queste grandezze certi insiemi di funzioni che sotto appropriate trasformazioni ortogonali si comportano come le componenti di tensori.

Non esiste alcuna preclusione logica a mettere in conto per tali funzioni tutte le loro derivate successive rispetto alle coordinate, benchè la nozione intuitiva che la risposta di una particella materiale sia limitata solo alla deformazione nel suo intorno immediato permette di ridurci alle sole derivate del primo ordine.

Abbiamo dimostrato che al lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne applicate per un generico spostamento virtuale corrisponde un lavoro virtuale interno espresso dal secondo membro della [33. 5]. Cioè nell'intorno di un punto generico di un continuo soggetto ad una deformazione virtuale espressa dalle componenti $\delta\varepsilon_{ij}$ le componenti di tensione t_{ij} compiono il lavoro elementare $t_{ij} \delta\varepsilon_{ij}$.

Se assumiamo allora come componenti virtuali della deformazione proprio le variazioni infinitesime $d\varepsilon_{ij}$ dello stato di deformazione effettivo, l'incremento di lavoro per unità di volume sarà espresso dalla somma doppia $t_{ij} d\varepsilon_{ij}$, dove l'operatore differenziale in luogo dell'operatore variazionale mette in evidenza trattarsi non già di una arbitraria deformazione regolare infinitesima ma proprio di quella particolare variazione $d\varepsilon_{ij}$ attribuita alle componenti ε_{ij} della deformazione effettiva associata con lo stato di tensione di componenti t_{ij} .

L'ammessa esistenza di una funzione potenziale per l'energia di deformazione elastica permette di affermare che l'incremento del lavoro compiuto deve rappresentare precisamente il *differenziale totale* della funzione $\Phi[\varepsilon_{ij}]$, cioè:

$$d\Phi = t_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad [34. 1]$$

dalla quale, per la indipendenza dei differenziali parziali $d\varepsilon_{ij}$, si ottengono le cercate relazioni tra le componenti di deformazione e di tensione:

$$t_{ij} = \frac{\delta\Phi}{\delta\varepsilon_{ij}}, \quad [34. 2]$$

dove nella derivazione Φ deve essere considerata funzione di nove variabili ε_{ij} effettivamente indipendenti, prescindendo cioè dalle tre relazioni di reciprocità $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

L'inversione delle [34. 2] si ottiene considerando lo sviluppo seguente:

$$d(t_{ij} \varepsilon_{ij}) = t_{ij} d\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} dt_{ij}, \quad [34. 3]$$

per cui anche il termine $\varepsilon_{ij} dt_{ij}$, come differenza tra due differenziali, deve risultare il differenziale totale di una certa funzione $\Phi_c[t_{ij}]$, detta *energia potenziale elastica complementare*.

Si ottengono perciò dalla:

$$d\Phi_c = \varepsilon_{ij} dt_{ij}, \quad [34. 4]$$

le cercate relazioni inverse:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\delta\Phi_c}{\delta t_{ij}}. \quad [34. 5]$$

Sia l'energia potenziale elastica Φ , introdotta da GREEN¹, sia l'energia complementare Φ_c , suggerita per la prima volta da CASTIGLIANO², restano definite, rispettivamente dalla [34. 1] e dalla [34. 4], a meno di una costante arbitraria. Possiamo cioè calcolare, ad esempio, soltanto la differenza $\Phi - \Phi_0$ quando le componenti di deformazione passano dai valori dello stato iniziale a quelli dello stato attuale.

La costante Φ_0 , detta *energia vincolata* o *latente*, rappresenta il valore dell'energia potenziale elastica nello stato naturale, cioè in assenza di forze applicate: se assumiamo allora lo stato naturale di riferimento coincidente con lo stato indeformato, come di regola ac-

¹ G. GREEN, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **7**, 1 (1839).

² A. CASTIGLIANO, *Atti Acc. Scienze Torino*, **11**, 127 (1875-76).

cade, si potrà porre $\Phi_0 = 0$ e la $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ resta in tal caso perfettamente individuata dalla conoscenza delle componenti di deformazione.

Esistono però situazioni particolari in cui l'ipotesi di uno stato naturale coincidente con lo stato indeformato non è verificata; cioè all'assenza di forze applicate non corrisponde l'assenza della deformazione.

Non è difficile pensare a casi di tale natura, come, ad esempio, a quello caratteristico di un anello nel quale venga praticato un taglio con asportazione di materiale; applicati allora alle facce del taglio due sistemi di forze capaci di riportare a contatto le facce stesse, l'anello risulta evidentemente deformato. Se allora tale configurazione viene mantenuta mediante una saldatura saremo in presenza di uno stato naturale, perchè i due sistemi di forze sono ormai sostituiti dal collegamento, ma in questo stato sono presenti deformazioni e tensioni ad esse associate.

Risulta anche chiara l'impossibilità di rimuovere le deformazioni presenti in uno stato naturale mediante l'applicazione di un sistema di forze opportuno: solo scompaginando, cioè distruggendo, la configurazione del solido nel suo stato naturale è possibile ricondurla ad uno stato indeformato. Nell'esempio dell'anello solo un taglio riesce ad annullare lo stato di deformazione indotto nel modo prima descritto.

Considerazioni analoghe valgono per l'energia potenziale elastica complementare $\Phi_c[t_{ij}]$.

In contrasto con il metodo qui seguito di introdurre la funzione di stato come conseguenza della definizione stessa di elasticità, fu tentato di dimostrare invece, almeno in certe particolari circostanze fisiche, l'esistenza di un potenziale elastico sulla base di considerazioni termodinamiche. Tale indirizzo corrispondeva alla tendenza, un tempo diffusa, di riguardare ogni fenomeno macroscopico come essenzialmente termodinamico e di costruire un sistema di Energetica in cui la Meccanica fosse inclusa come un caso particolare.

Un esame critico di questi procedimenti ne rivela però la estrema debolezza concettuale, in quanto essi assumono, di fatto, altre funzioni di stato diverse dalla Φ , sia l'entropia sia l'energia libera, delle quali in realtà non è accertata fisicamente l'esistenza per i corpi continui in generale, e spostano così semplicemente il problema esistenziale dal campo meccanico a quello termodinamico.

Allo stato attuale di sviluppo della nostra conoscenza teorica e sperimentale possiamo affermare soltanto che la costruzione della Meccanica dei solidi elastici sopra delineata non è in contrasto con i principi fondamentali della Termodinamica classica.

35. Isotropia elastica.

Fu dimostrato nel § 9 che il tensore di deformazione è sensibile ad una rotazione del riferimento del sistema di coordinate materiali: ciò non significa naturalmente che la deformazione in sè viene alte-

rata da una rotazione degli assi, ma solo che essa rimane individuata in generale da parametri diversi rispetto a sistemi diversi di coordinate materiali.

L'energia potenziale elastica per unità di volume è una grandezza scalare insensibile ad una rotazione del riferimento e quindi, come funzione delle ε_{ij} che invece ne dipendono, deve possedere una struttura tale da potersi alterare con il riferimento stesso senza cambiare di valore, cioè il legame funzionale $\Phi_k[\varepsilon_{ij}]$ valido in un certo sistema di riferimento x_k dovrà essere espresso da una legge diversa $\Phi_M[\varepsilon_{HL}]$ in un nuovo riferimento x_M , in modo che:

$$\Phi_k[\varepsilon_{ij}] = \Phi_M[\varepsilon_{HL}]. \quad [35. 1]$$

Nel caso particolare in cui la forma della funzione $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ sia insensibile ad una rotazione degli assi del sistema di riferimento materiale x_k , diremo che lo stato elastico è insensibile a quella rotazione, e, reciprocamente, definiremo uno stato come elasticamente insensibile ad una data rotazione del riferimento se, e solo se, risulti valida l'uguaglianza:

$$\Phi[\varepsilon_{ij}] = \Phi[\varepsilon_{HL}], \quad [35. 2]$$

identicamente verificata unicamente rispetto al tensore di deformazione di componenti ε_{ij} .

Uno stato elastico insensibile ad ogni rotazione del sistema di riferimento materiale x_k sarà detto *isotropo nel suo stato naturale* o semplicemente *isotropo*, dove la locuzione abbreviata non deve indurre in errore poichè uno stato elastico può comportarsi come isotropo per una scelta dello stato naturale e non per un'altra.

Nel caso di isotropia la [35. 2] risulta una identità sia rispetto al tensore di deformazione di componenti ε_{ij} sia rispetto alla rotazione della terna di riferimento x_k . Tale invarianza si traduce in una struttura particolare della $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ e precisamente in un legame funzionale espresso attraverso i soli *invarianti* della deformazione, cioè di grandezze insensibili per definizione ad ogni rotazione degli assi:

$$\Phi[\varepsilon_{ij}] = \Phi[E_1, E_2, E_3], \quad [35. 3]$$

per cui le componenti di tensione t_{ij} , espresse in generale dalle [36. 2] vengono fornite dalle relazioni particolari:

$$t_{ij} = \frac{\delta\Phi}{\delta E_1} \frac{\delta E_1}{\delta \varepsilon_{ij}} + \frac{\delta\Phi}{\delta E_2} \frac{\delta E_2}{\delta \varepsilon_{ij}} + \frac{\delta\Phi}{\delta E_3} \frac{\delta E_3}{\delta \varepsilon_{ij}}. \quad [35. 4]$$

Tenendo presenti le definizioni [10. 12] degli invarianti del tensore di deformazione otteniamo i seguenti valori delle loro derivate rispetto alle componenti ε_{ij} con indici distinti:

$$\frac{\delta E_1}{\delta \varepsilon_{ij}} = 0, \quad \frac{\delta E_2}{\delta \varepsilon_{ij}} = -\varepsilon_{ji}, \quad \frac{\delta E_3}{\delta \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{hi} \varepsilon_{jh} - \varepsilon_{hh} \varepsilon_{ji}, \quad [35. 5]$$

valide per $i \neq j \neq h$.

Allora, se tutte le componenti di deformazione ε_{ij} con $i \neq j$ sono uguali a zero si devono annullare le derivate [35. 5] degli invarianti del tensore di deformazione e quindi, per le [35. 4], anche le componenti di tensione t_{ij} con $i \neq j$. Ne risulta la notevole proprietà che: *negli stati elastici isotropi le direzioni principali del tensore di tensione ($t_{ij} = 0$ per $i \neq j$) coincidono con le corrispondenti direzioni principali del tensore di deformazione ($\varepsilon_{ij} = 0$ per $i \neq j$).*

Dalla ipotesi di isotropia elastica e dalle conseguenti limitazioni imposte alla forma delle relazioni di elasticità tra tensioni e deformazioni per motivi di invarianza tensoriale discende una elegante analisi formale, messa in evidenza da REINER¹.

Supponiamo dunque che il tensore di tensione sia legato isotropicamente al tensore di deformazione e che la matrice delle componenti t_{ij} possa essere espressa come un polinomio nelle potenze della matrice delle componenti ε_{ij} :

$$[t_{ij}] = C_0 [1] + C_1 [\varepsilon_{ij}] + C_2 [\varepsilon_{ij}]^2 + C_3 [\varepsilon_{ij}]^3 + \dots, \quad [35. 6]$$

dove [1] indica la matrice identica ed i coefficienti polinomiali C_m dipendono dagli invarianti della deformazione, definiti come coefficienti della nota equazione:

$$\varepsilon^3 - E_1 \varepsilon^2 + E_2 \varepsilon - E_3 = 0. \quad [35. 7]$$

Poichè ogni matrice simmetrica come la $[\varepsilon_{ij}]$ verifica la sua equazione caratteristica per il teorema di Cayley-Hamilton, cioè:

$$[\varepsilon_{ij}]^3 - E_1 [\varepsilon_{ij}]^2 + E_2 [\varepsilon_{ij}] - E_3 = 0, \quad [35. 8]$$

tutti i termini dello sviluppo [35. 6] possono essere espressi, a partire da $[\varepsilon_{ij}]^3$, in funzione di $[\varepsilon_{ij}]$ e $[\varepsilon_{ij}]^2$ ricavati dalla [35. 8], da cui la relazione chiusa in forma di matrici:

$$[t_{ij}] = K_0 [1] + K_1 [\varepsilon_{ij}] + K_2 [\varepsilon_{ij}]^2. \quad [35. 9]$$

Naturalmente i coefficienti K_0, K_1, K_2 risultano polinomi nei tre invarianti E_1, E_2, E_3 anche nel caso in cui i coefficienti C_m non ne dipendono. Qualora i coefficienti K_0, K_1, K_2 risultino costanti rispetto agli invarianti, la relazione [35. 9] rappresenta esclusivamente un tipo di *non-linearità tensoriale*; nel caso contrario ad essa si associa la *non-linearità fisica* espressa dalla dipendenza dei coefficienti stessi dallo stato di deformazione attraverso i suoi invarianti.

È interessante osservare che la relazione [35. 9] non può essere ulteriormente generalizzata con l'aggiunta di termini aventi potenza superiore alla seconda, come già il tensore di deformazione veniva espresso compiutamente da un polinomio di

¹ M. REINER, *Amer. Journal Math.*, **67**, 350 (1945).

secondo grado nelle derivate di spostamento secondo la relazione [13. 4] trovata a suo tempo. Tale analogia potrà anche apparire non casuale, ma in effetti non esiste alcuna spiegazione plausibile al riguardo.

36. Principi variazionali.

L'esistenza di una funzione potenziale $\Phi[\varepsilon_{ij}]$, ammessa come definizione stessa di uno stato elastico, permette di definire l'energia potenziale elastica per l'intero solido:

$$U = \int_{V_0} \Phi[\varepsilon_{ij}] dV, \quad [36. 1]$$

denominata anche *lavoro di deformazione* in quanto esprime il lavoro complessivo dovuto alle componenti di tensione t_{ij} in conseguenza della deformazione caratterizzata dalle componenti ε_{ij} .

Tale lavoro si produce in definitiva a spese del *lavoro esterno* compiuto dalle forze di massa g_k e di superficie f_k applicate al solido:

$$L = \int_{V_0} \varrho_0 g_k u_k dV + \int_{A_0} f_k^0 u_k dA. \quad [36. 2]$$

Se le forze esterne vengono supposte *conservative*, come accade di regola, cioè derivabili da funzioni potenziali g e f , avremo:

$$g_k = - \frac{\delta g}{\delta u_k}, \quad f_k = - \frac{\delta f}{\delta u_k}. \quad [36. 3]$$

Indicando allora con Π il potenziale dell'intero sistema di forze, possiamo introdurre un *potenziale totale* ε , inteso come differenza tra il lavoro immagazzinato nel solido sotto forma di energia di deformazione elastica U ed il lavoro esterno $L = -\Pi$ speso nella deformazione stessa, cioè $\varepsilon = U + \Pi$, o per disteso:

$$\varepsilon = \int_{V_0} \Phi[\varepsilon_{ij}] dV - \int_{V_0} \varrho_0 g_k u_k dV - \int_{A_0} f_k^0 u_k dA. \quad [36. 4]$$

Assegnate le forze g_k , f_k il potenziale totale ε dipende così dalle componenti di deformazione ε_{ij} e di spostamento u_k , a loro volta funzioni delle coordinate materiali x_l , e rappresenta quindi, per usare una locuzione appropriata, un *funzionale* $\varepsilon[\varepsilon_{ij}, u_k]$ definito nella classe di tutte le funzioni continue e derivabili $\varepsilon_{ij}(x_l)$, $u_k(x_l)$.

Avrà quindi senso il problema di esaminare il comportamento di siffatto funzionale in corrispondenza di ogni funzione della classe. Naturalmente, in tal caso, la relazione [36. 4] perde ogni significato

fisico in quanto \mathcal{E} può essere inteso come potenziale totale del solido elastico solo quando le funzioni ε_{ij} , u_k siano quelle dovute al sistema di forze effettivamente applicate e corrispondano quindi alla situazione reale del solido deformato.

Delimitiamo ora la classe nella quale si vuole esaminare il comportamento di \mathcal{E} , in modo da comprendervi solo quelle particolari funzioni ε_{ij}^* , u_k^* che verificano le equazioni di congruenza e rispettano le condizioni di vincolo imposte al solido nei punti della porzione A_u^0 della sua frontiera A_0 , dove gli spostamenti si intendono prescritti, cioè relazioni analoghe alle [28. 1] e [28. 2]:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^* + u_{k,i}^* u_{k,j}^*) \quad \text{in } V_0 + A_0 \quad [36. 5]$$

$$u_k^* = \bar{u}_k \quad \text{su } A_u^0 \quad [36. 6]$$

La classe così delimitata per le funzioni ε_{ij}^* , u_k^* costituisce il dominio di definizione per il funzionale $\mathcal{E}[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*]$ e rappresenta l'insieme di tutte le funzioni continue e derivabili *geometricamente ammissibili* o, in breve, *congruenti*. In questo dominio poniamo il problema di ricercare le condizioni sotto le quali il funzionale $\mathcal{E}[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*]$ risulti *stazionario*, cioè riesca nulla la sua *variazione prima* $\delta\mathcal{E}$ in dipendenza di certe particolari *variazioni geometricamente ammissibili* δu_k^* , $\delta\varepsilon_{ij}^*$ dello stato di spostamento-deformazione, tali quindi da verificare le equazioni:

$$\delta\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j}^* + \delta u_{j,i}^* + u_{k,j}^* \delta u_{k,i}^* + u_{k,i}^* \delta u_{k,j}^*) \quad \text{in } V_0 + A_0 \quad [36. 7]$$

$$\delta u_k^* = 0 \quad \text{su } A_u^0 \quad [36. 8]$$

Poichè le variazioni δu_k^* devono necessariamente risultare nulle su A_u^0 , dove gli spostamenti non possono variare essendo prescritti dalle condizioni di vincolo [36. 6], senza alterare il problema variazionale potremo riferirci ad un nuovo funzionale:

$$J[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*] = \int_{V_0} \Phi[\varepsilon_{ij}^*] dV - \int_{V_0} \varrho_0 g_k u_k^* dV - \int_{A^0_f} f_k^0 u_k^* dA, \quad [36. 9]$$

ottenuto da $\mathcal{E}[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*]$ per sottrazione della parte di lavoro esterno L_u compiuto dalle forze di superficie f_k^0 sulla porzione A_u^0 , e che differisce quindi da \mathcal{E} per una costante.

Tenendo presente la [34. 1] otteniamo allora per la variazione prima δJ del funzionale $J[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*]$ l'equazione:

$$\delta J \equiv \int_{V_0} t_{ij}^* \delta\varepsilon_{ij}^* dV - \int_{V_0} \varrho_0 g_k \delta u_k^* dV - \int_{A^0_f} f_k^0 \delta u_k^* dA = 0, \quad [36. 10]$$

nella quale t_{ij}^* indicano le componenti di tensione collegate alle ε_{ij}^* , da relazioni formalmente analoghe alle [34. 2].

D'altra parte le definizioni date a suo tempo nelle [29. 4] e [29. 9] per gli spostamenti δu_k^* e le deformazioni $\delta \varepsilon_{ij}^*$ virtuali mostrano come le variazioni geometricamente ammissibili δu_k^* e $\delta \varepsilon_{ij}^*$ ne rappresentino un evidente caso particolare e possano quindi essere riguardate come *virtuali*.

Allora l'equazione variazionale [36. 10] esprime una forma speciale del teorema degli spostamenti virtuali [33. 5] purchè le componenti di tensione t_{ij} verifichino le equazioni di equilibrio ed ai limiti [33. 12] e [33. 13], alle quali è subordinata la validità delle [33. 5] e quindi della [36. 10].

Possiamo dunque affermare che: *nella classe delle funzioni congruenti il funzionale $J[\varepsilon_{ij}^*, u_k^*]$ risulta stazionario in corrispondenza di una soluzione equilibrata.*

Con procedimento perfettamente analogo, in base alla esistenza della funzione $\Phi_c[t_{ij}]$, espressa dalla [34. 4], possiamo definire un *potenziale totale complementare*:

$$\varepsilon_c = - \int_{V_0} (\Phi_c[t_{ij}^0] + \frac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}) dV + \int_{V_0} \varrho_0 g_k^0 u_k dV + \int_{A_0} f_k^0 u_k dA, \quad [36.11]$$

inteso come un funzionale nella classe delle funzioni continue e derivabili t_{ij}^0, g_k^0, f_k^0 che verificano le equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti [33. 12] e [33. 13] rispettivamente:

$$(t_{ij}^0 y_{k,j})_{,i} + \varrho_0 g_k^0 = 0, \quad \text{con } g_k^0 = \bar{g}_k \quad \text{in } V_0 \quad [36.12]$$

$$t_{ij}^0 y_{k,j} n_i^0 = f_k^0, \quad \text{con } f_k^0 = \bar{f}_k \quad \text{su } A_f^0 \quad [36.13]$$

A tali funzioni daremo il nome di *staticamente ammissibili* o, in breve, *equilibrate*, e poichè interessano come prima le condizioni di stazionarietà è indifferente considerare in luogo di ε_c il funzionale:

$$K[t_{ij}^0, f_k^0] = - \int_{V_0} (\Phi_c[t_{ij}^0] + \frac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}) dV + \int_{A_u^0} f_k^0 u_k dA, \quad [36.14]$$

che differisce da ε_c per una costante, la somma dei lavori esterni relativi al volume V_0 , dove le forze di massa \bar{g}_k sono assegnate, ed alla porzione A_f^0 della frontiera A_0 , dove sono prescritte le forze di superficie \bar{f}_k .

Allora, in corrispondenza di certe *variazioni staticamente ammissibili* δf_k^0 e δt_{ij}^0 dello stato di forze-tensioni, cioè tali da verificare le equazioni:

$$(y_{k,j} \delta t_{ij}^0)_{,i} = 0 \quad \text{in } V_0 \quad [36.15]$$

$$\delta f_k^0 = 0 \quad \text{su } A_f^0 \quad [36.16]$$

con riguardo alla [34. 4] otteniamo per la stazionarietà del funzionale $K [t_{ij}^0, f_k^0]$, o del funzionale \mathcal{E}_c , l'equazione variazionale:

$$\delta K \equiv - \int_{V_0} (\varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}) dV + \int_{A_u^0} u_k \delta f_k^0 dA = 0, \quad [36. 17]$$

dove ε_{ij}^0 indicano le componenti di deformazione collegate alle t_{ij}^0 , da relazioni formalmente analoghe alle [34. 5].

Interpretando le variazioni $\delta f_k^0, \delta t_{ij}^0$ come particolari forze e tensioni virtuali, la condizione di stazionarietà [36. 17] equivale al teorema delle forze virtuali nella forma [33. 8], la cui validità resta subordinata alla congruenza delle componenti di deformazione ε_{ij}^0 nei punti del dominio chiuso $V_0 + A_0$ ed al rispetto delle condizioni di vincolo imposte agli spostamenti \bar{u}_k sulla porzione A_u^0 della frontiera A .

Possiamo dunque affermare che: *nella classe delle funzioni equilibrate il funzionale $K [t_{ij}^0, f_k^0]$ risulta stazionario in corrispondenza di una soluzione congruente.*

Nel caso in cui gli spostamenti u_k e le loro derivate $u_{k,i}$ risultino così piccoli da poter essere riguardati come infinitesimi, i prodotti $u_{h,i} u_{h,j}$ sono infinitesimi di ordine superiore e le componenti di tensione t_{ij} coincidono con le σ_{hk} , perchè non vi è più alcuna distinzione, almeno per quanto riguarda lo stato di tensione, tra coordinate materiali x_i e coordinate spaziali y_k .

Perciò il principio di stazionarietà per il funzionale J assume la forma semplificata rispetto alla [36. 10]:

$$\delta J \equiv \int_V \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V p_k \delta u_k^* dV - \int_{A_f} f_k \delta u_k^* dA = 0, \quad [36. 18]$$

avendo indicato direttamente con $p_k = \rho g_k$ le forze di volume, poichè per $V = V_0, A = A_0, \rho = \rho_0$, è evidentemente inutile mettere in risalto la massa specifica.

In modo analogo il principio di stazionarietà per il funzionale reciproco K diviene:

$$\delta K \equiv \int_V \varepsilon_{ij}^0 \delta \sigma_{ij}^0 dV - \int_{A_u} u_k \delta f_k^0 dA, \quad [36. 19]$$

avendo ommesso il termine $\frac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}$ della corrispondente [36. 17].

Le dimostrate condizioni di stazionarietà per i due funzionali J e K , sia nel caso generale di spostamenti finiti sia nel caso particolare di spostamenti infinitesimi, non comportano necessariamente effettive situazioni di estremo. Una risposta in merito esige ulteriori considerazioni sulla struttura delle funzioni potenziali $\Phi [\varepsilon_{ij}^*]$ e $\Phi_c [t_{ij}^0]$, per

cui, finchè tale struttura non sia stata specificata, l'importante questione sulla esistenza di un minimo e di un massimo rimane un problema aperto.

37. Relazioni elastiche lineari.

Per la maggior parte dei materiali impiegati negli elementi resistenti delle costruzioni ed entro certi limiti di applicazione concreta le componenti di spostamento e le loro derivate risultano così piccole da poter essere riguardate come infinitesime rispetto allo stato naturale. Le relazioni tra le componenti di deformazione e le derivate di spostamento assumono la forma lineare classica [15. 2].

In tal caso le equazioni di equilibrio si riducono alla forma [27. 3] e [27. 4] che non conserva più alcuna traccia dell'influenza della deformazione sullo stato di tensione, e le componenti di questa possiedono identica definizione sia nella configurazione iniziale in termini di coordinate materiali x_i sia nella configurazione deformata in termini di coordinate spaziali y_k , poichè $t_{ij} = \sigma_{ij}$.

Alla linearità del legame geometrico tra componenti di deformazione e derivate di spostamento possiamo associare la linearità del legame fisico tra componenti di tensione e componenti di deformazione.

Quando l'esperienza dimostri accettabile tale ipotesi attribuiremo alla funzione potenziale elastica una struttura limitata ai soli termini della:

$$\Phi [\varepsilon_{ij}] = \Phi_0 + c_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}, \quad [37. 1]$$

dove i coefficienti o *moduli elastici* c_{ij} e c_{ijhk} possono anche variare da particella a particella materiale in caso di non omogeneità del solido elastico, ma per una stessa particella devono essere indipendenti dallo stato di deformazione.

Le componenti di tensione sono allora espresse per la [34. 2] dalle seguenti relazioni lineari nelle componenti di deformazione:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ij} + c_{ijhk} \varepsilon_{hk}, \quad [37. 2]$$

dove i moduli elastici devono verificare alcune notevoli relazioni di simmetria.

La simmetria del tensore di tensione, cioè $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, e del tensore di deformazione, cioè $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, dà luogo alle:

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ijhk} = c_{jihk} = c_{ijkh}, \quad [37. 3]$$

mentre l'esistenza della funzione potenziale comporta la validità delle:

$$c_{ijhk} = c_{hkij}, \quad [37.4]$$

per cui i c_{ij} definiscono un tensore simmetrico del secondo ordine ed i c_{ijhk} definiscono un tensore simmetrico del quarto ordine.

Risulta immediatamente come i coefficienti c_{ij} rappresentino i valori delle componenti di tensione in assenza di deformazione, cioè le *autotensioni* $\sigma_{ij}^0 = c_{ij}$, dove la denominazione mette in evidenza la speciale circostanza che tali tensioni non sono dovute ad uno stato di deformazione.

Nelle ipotesi, che supporremo di regola verificate, di assenza di autotensioni ($\sigma_{ij}^0 = 0$) e di coincidenza tra lo stato naturale e lo stato indeformato ($\Phi_0 = 0$), l'energia potenziale elastica $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ risulta una *funzione quadratica omogenea definita sempre positiva* per valori reali dei suoi argomenti, e non può annullarsi senza che siano identicamente nulle tutte le ε_{ij} .

Essa rimane individuata da 21 coefficienti o *moduli elastici* c_{ijhk} :

$$\Phi = \frac{1}{2} c_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk}, \quad [37.5]$$

mentre le relazioni [41.2] si semplificano nelle:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} \varepsilon_{hk}. \quad [37.6]$$

Otteniamo allora l'importante espressione:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad [37.7]$$

che rappresenta il fondamento energetico della elasticità lineare e viene correntemente attribuita a Clapeyron.

Assegnate le componenti c_{ijhk} del *tensore elastico*, le [37.6] consentono la determinazione dello stato di tensione dalla conoscenza dello stato di deformazione.

Viceversa, se $\text{Det } c_{ijhk} \neq 0$, le stesse [37.6], intese come un sistema di equazioni lineari nelle incognite ε_{hk} , permettono la determinazione dello stato di deformazione dalla conoscenza dello stato di tensione attraverso le relazioni inverse:

$$\varepsilon_{hk} = a_{hkij} \sigma_{ij}, \quad [37.8]$$

i cui coefficienti si ricavano in modo noto da quelli c_{ijhk} del sistema [37.6] e possiedono analoghe proprietà di simmetria.

Le relazioni [37.8] potevano essere dedotte direttamente dall'ipotesi di esistenza per la funzione potenziale elastica complementare

$\Phi_c[\sigma_{ij}]$ definita dalla [34. 4], risultando nel caso presente di elasticità lineare:

$$\Phi_c[\sigma_{ij}] = \frac{1}{2} a_{hki j} \sigma_{hk} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}, \quad [37. 9]$$

dotata cioè di una struttura quadratica nelle componenti speciali di tensione.

38. I teoremi classici della elasticità lineare.

La linearizzazione delle equazioni relative sia alla congruenza della deformazione:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V + A \quad [38. 1]$$

$$u_j = \bar{u}_j \quad \text{su } A_u \quad [38. 2]$$

sia all'equilibrio dello stato di tensione:

$$\sigma_{ij,i} + p_j = 0 \quad \text{in } V \quad [38. 3]$$

$$\sigma_{ij} n_i = f_j \quad \text{su } A_f \quad [38. 4]$$

unitamente alla ipotesi fisica di un legame lineare tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} \varepsilon_{hk}, \quad [38. 5]$$

permette di formulare alcuni classici teoremi di notevole interesse anche applicativo.

a) *Esistenza della soluzione.*

Contrariamente a quanto talvolta viene erroneamente affermato, le dimostrazioni di esistenza costituiscono una base importante di ogni teoria, sia perchè permettono in caso affermativo di accertare che i fondamenti della teoria stessa non sono contraddittori, sia perchè sovente aprono la strada a procedimenti di calcolo per la costruzione effettiva della soluzione.

Deve inoltre esser compreso con tutta chiarezza come l'esistenza della soluzione di un certo problema fisico non autorizzi affatto ad affermare l'esistenza della soluzione del problema matematico al quale il primo è stato ricondotto. Infatti, una volta che gli aspetti fisici di un problema sono stati *tradotti* in termini puramente analitici, e sempre con inevitabili schematizzazioni e approssimazioni, l'esistenza della soluzione dovrà essere dimostrata rimanendo nell'ambito di un discorso

puramente matematico, senza possibilità alcuna di invocare argomenti di altra natura, estranei ormai alla nuova formulazione del problema.

Nel caso della elasticità classica l'esistenza della soluzione per il problema costituito dalle equazioni di congruenza [38. 1] e [38. 2], di equilibrio [38. 3] e [38. 4], e di legame [38. 5], è stata ampiamente dimostrata in condizioni di notevole generalità per quanto riguarda la forma del dominio.

Le dimostrazioni sono molteplici: ai metodi classici fondati sulla esistenza della soluzione di equazioni integrali di FREDHOLM¹ o sulla costruzione di funzioni ausiliarie di BETTI², fanno riscontro i procedimenti moderni di analisi funzionale³ derivanti dalle proprietà topologiche di opportuni spazi astratti⁴.

Stante la notevole difficoltà insita nelle dimostrazioni esistenziali ed il loro aspetto spiccatamente matematico, qui dobbiamo limitarci al brevissimo ed incompleto cenno sopra esposto.

b) *Teorema del lavoro di deformazione.*

Quando gli spostamenti effettivi u_j del sistema sono, come abbiamo supposto, infinitesimi, data la loro regolarità possono essere riguardati come certi particolari spostamenti virtuali in quanto ne possiedono le proprietà essenziali.

Allora il teorema degli spostamenti virtuali [30. 16] deve conservare la sua validità quando come sistema equilibrato di forze-tensioni venga scelto quello effettivamente agente sul solido elastico, cioè p_j , f_j , σ_{ij} , e come sistema di spostamenti-deformazioni congruente ancora quello effettivo u_j , ε_{ij} , supposto regolare ed infinitesimo e quindi virtuale per definizione.

Dunque, per $\delta u_j = u_j$ e $\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}$, il teorema degli spostamenti virtuali assume la forma:

$$\int_V p_j u_j dV + \int_A f_j u_j dA = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad [38. 6]$$

dove il secondo membro esprime, per la [37. 7], il doppio del lavoro di deformazione U .

Possiamo così enunciare il seguente teorema attribuito a Clapeyron da LAMÉ nelle sue famose lezioni⁵: *il lavoro esterno che le forze agenti*

¹ I. FREDHOLM, « Arkiv Mat. Astr. Fysik », **2**, 3 (1906).

² E. BETTI, « Nuovo Cimento », (2), **6-10** (1872 e seg.).

³ K. O. FRIEDRICHS, « Amer. Journ. Math. », **67**, 581 (1946); « Ann. Math. », (3), **48**, 441 (1947).

⁴ S. CAMPANATO, « Ann. Scuola Normale Super. », Pisa, (3), **23** (1959).

⁵ G. LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris (1852).

sul solido elastico compirebbero se agissero con tutta la loro intensità finale equivale al doppio del lavoro di deformazione indotto nel solido dalle stesse forze che raggiungessero gradualmente la loro intensità finale.

È appena necessario osservare che l'esistenza di una funzione potenziale per l'energia di deformazione elastica rende indipendente il lavoro di deformazione dalla legge secondo la quale le forze raggiungono la loro intensità finale, cioè risulta del tutto indifferente il modo con il quale venga realizzato l'effettivo programma di carico sul solido elastico.

c) *Unicità della soluzione.*

L'importante questione relativa alla unicità della soluzione del problema di determinare lo stato di tensione-deformazione in un solido elastico soggetto ad una distribuzione assegnata di forze esterne e di condizioni di vincolo, fu risolta positivamente nel caso di elasticità lineare dal seguente teorema di KIRCHHOFF¹.

Supponiamo che allo stesso sistema di forze p_j e f_j , assegnate rispettivamente in V e su A_f , ed al medesimo sistema di spostamenti \bar{u}_j , assegnati su A_u , corrispondano due soluzioni distinte: $u'_j, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}$, e $u''_j, \varepsilon''_{ij}, \sigma''_{ij}$ dello stato di spostamento-deformazione-tensione.

Allora le funzioni ottenute come differenza tra le due soluzioni predette, cioè le:

$$u_j = u'_j - u''_j, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}, \quad [38. 7]$$

devono verificare rispettivamente le equazioni di congruenza [38. 1], le equazioni di vincolo [38. 2] con $\bar{u}_j = 0$, le equazioni indefinite di equilibrio [38. 3] con $p_j = 0$, le equazioni di equilibrio ai limiti [38. 4] con $f_j = 0$.

Il teorema di Clapeyron [38. 6] applicato alla *soluzione differenza* [38. 7] si riduce semplicemente alla:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0, \quad [38. 8]$$

essendo identicamente nulli gli integrali di volume e di superficie relativi al lavoro esterno che compaiono al primo membro della [38. 6].

Poichè l'energia potenziale elastica $\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ è una funzione quadratica definita positiva può annullarsi se, e solo se:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} = 0 \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij} = 0, \quad [38. 9]$$

cioè quando le due soluzioni, supposte distinte, in effetti coincidono.

Per quanto riguarda l'unicità degli spostamenti si deve osservare che essi rimangono individuati a meno di eventuali moti rigidi del

¹ G. KIRCHHOFF, *Journal reine angew. Math.*, **56**, 285 (1859).

solido e risultano quindi unici solo se prescritti su una porzione almeno della frontiera A , cioè, in altri termini, se il solido possiede effettive condizioni di vincolo sufficienti ad impedire traslazioni e rotazioni di insieme.

d) *Teorema di reciprocità.*

Consideriamo ora due distinti stati congruenti di deformazione $\varepsilon_{ij}[u_k]$ e $\varepsilon_{ij}[v_k]$ del solido elastico, il primo associato a spostamenti u_j , il secondo a spostamenti v_j , entrambi regolari e infinitesimi.

Indichiamo con $p_j[u_k]$, $f_j[u_k]$, $\sigma_{ij}[u_k]$ il sistema di forze-tensioni equilibrato corrispondente allo stato di spostamenti-deformazioni u_j , $\varepsilon_{ij}[u_k]$, e con $p_j[v_k]$, $f_j[v_k]$, $\sigma_{ij}[v_k]$ il sistema di forze-tensioni equilibrato corrispondente allo stato di spostamenti-deformazioni v_j , $\varepsilon_{ij}[v_k]$.

Sotto tale ipotesi nel teorema degli spostamenti virtuali [30.16] possiamo associare alle forze-tensioni equilibrate del primo sistema gli spostamenti-deformazioni congruenti del secondo sistema, cioè:

$$\int_V p_j[u_k] v_j dV + \int_A f_j[u_k] v_j dA = \int_V \sigma_{ij}[u_k] \varepsilon_{ij}[v_k] dV, \quad [38.10]$$

e viceversa, alle forze-tensioni equilibrate del secondo sistema gli spostamenti-deformazioni congruenti del primo sistema, cioè:

$$\int_V p_j[v_k] u_j dV + \int_A f_j[v_k] u_j dA = \int_V \sigma_{ij}[v_k] \varepsilon_{ij}[u_k] dV. \quad [38.11]$$

L'ipotesi [38.5] di elasticità lineare permette di affermare l'uguaglianza dei secondi membri delle [38.10] e [38.11], perchè:

$$\sigma_{ij}[u_k] \varepsilon_{ij}[v_k] = \sigma_{ij}[v_k] \varepsilon_{ij}[u_k], \quad [38.12]$$

e quindi di dimostrare il teorema di reciprocità dovuto a BETTI¹:

$$\begin{aligned} \int_V p_j[u_k] v_j dV + \int_A f_j[u_k] v_j dA &= \\ &= \int_V p_j[v_k] u_j dV + \int_A f_j[v_k] u_j dA. \end{aligned} \quad [38.13]$$

Possiamo dunque affermare che: *il lavoro che un sistema equilibrato di forze compirebbe, se ai punti del solido elastico fossero attribuiti gli spostamenti dovuti ad un secondo sistema di forze pure equilibrato, è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compirebbero qualora agli stessi punti fossero attribuiti gli spostamenti dovuti al primo sistema di forze.*

¹ E. BETTI, *Nuovo Cimento* (2), **6-10** (1872 e seg.).

39. Principi di estremo.

Abbiamo già avvertito nella conclusione del § 34 che la stazionarietà dei funzionali J e K non corrisponde necessariamente ad effettive condizioni di minimo o di massimo per i funzionali stessi, in quanto una ulteriore analisi esige la conoscenza della funzione potenziale elastica $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ o della sua complementare $\Phi_c[\sigma_{ij}]$.

Nel caso particolare in cui il legame tensioni-deformazioni sia derivabile da una funzione potenziale elastica del tipo [37. 5] riesce possibile ottenere una condizione sufficiente per l'esistenza di un estremo effettivo, attraverso la quale l'aspetto semplicemente stazionario dei funzionali assume un significato preciso di notevole rilievo.

Attribuendo alla funzione $\Phi[\varepsilon_{ij}]$ la struttura [37. 7] il funzionale J assume la forma particolare:

$$J[\varepsilon_{ij}^*, u_j^*] = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V p_j u_j^* dV - \int_{A_f} \bar{f}_j u_j^* dA, \quad [39. 1]$$

in termini delle funzioni *geometricamente ammissibili*, o brevemente, *congruenti* $\varepsilon_{ij}^*, u_j^*$ nel senso delle [38. 1] e [38. 2], e dove ora le componenti di tensione σ_{ij}^* sono legate linearmente alle ε_{ij}^* attraverso le relazioni [37. 6].

Analogamente, quando la struttura della funzione complementare $\Phi_c[\sigma_{ij}]$ sia espressa dalla [37. 9], il funzionale K assume la forma particolare:

$$K[\sigma_{ij}^0, f_j^0] = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV + \int_{A_u} f_j^0 \bar{u}_j dA, \quad [39. 2]$$

in termini delle funzioni *staticamente ammissibili*, o brevemente, *equilibrate* σ_{ij}^0, f_j^0 , e dove le componenti di deformazione ε_{ij}^0 sono legate linearmente alle σ_{ij}^0 attraverso le relazioni [37. 8].

Consideriamo la differenza tra i due funzionali:

$$\begin{aligned} J - K &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV - \\ &- \int_V p_j u_j^* dV - \int_{A_f} \bar{f}_j u_j^* dA - \int_{A_u} f_j^0 \bar{u}_j dA, \end{aligned} \quad [39. 3]$$

e teniamo presente che le σ_{ij}^0, f_j^0 sono equilibrate nel senso espresso dalle [38. 3] e [38. 4]. Il lavoro esterno L , espresso dalla somma dei tre ultimi integrali a secondo membro della [39. 3], diviene:

$$L = \int_V \sigma_{ij,i}^0 u_j^* dV - \int_{A_f} \sigma_{ij}^0 n_i u_j^* dA - \int_{A_u} \sigma_{ij}^0 n_i \bar{u}_j dA, \quad [39. 4]$$

o anche, dalla formula di trasformazione di Gauss:

$$L = \int_V [\sigma_{ij,i}^0 u_j^* - (\sigma_{ij}^0 u_j^*)_{,i}] dV, \quad [39. 5]$$

ed infine semplificando e tenendo presente che le ε_{ij}^* sono congruenti nel senso delle [38. 1]:

$$L = - \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* dV. \quad [39. 6]$$

La differenza [39. 3] tra i due funzionali assume dunque la forma:

$$J - K = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 - 2 \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV, \quad [39. 7]$$

ed in virtù delle relazioni di reciprocità [38. 12], per cui: $\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^0$, diviene infine:

$$J - K = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}^0) dV. \quad [39. 8]$$

Ma la funzione integranda della precedente espressione è certamente non negativa per il carattere definito positivo della forma quadratica [37. 7] e quindi:

$$J [\varepsilon_{ij}^*, u_j^*] - K [\sigma_{ij}^0, f_{ij}^0] \geq 0, \quad [39. 9]$$

cioè la differenza tra i due funzionali è una quantità positiva, eccettuato il caso in cui $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0$, $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^0$, che si verifica in corrispondenza dell'unica soluzione simultaneamente congruente ed equilibrata o, in altri termini, della soluzione effettiva. Questa rappresenta dunque l'elemento di separazione tra la classe delle soluzioni semplicemente congruenti e la classe delle soluzioni semplicemente equilibrate, e precisamente è:

$$\min J [\varepsilon_{ij}^*, u_j^*] = \max K [\sigma_{ij}^0, f_{ij}^0]. \quad [39. 10]$$

La relazione dimostrata afferma così l'esistenza di un minimo per il funzionale J e di un massimo per il funzionale K e comporta la validità dei due seguenti principi di estremo:

a) *nella classe delle funzioni congruenti il funzionale $J [\varepsilon_{ij}^*, u_j^*]$ assume un minimo effettivo in corrispondenza di una soluzione equilibrata, cioè dell'unica soluzione ad un tempo congruente ed equilibrata che rappresenta proprio la soluzione effettiva;*

b) *nella classe delle funzioni equilibrate il funzionale $K [\sigma_{ij}^0, f_{ij}^0]$ assume un massimo effettivo in corrispondenza di una soluzione congruente, cioè dell'unica soluzione ad un tempo equilibrata e congruente che rappresenta proprio la soluzione effettiva.*

I due principi di estremo contenuti nella relazione [39. 10] si differenziano profondamente dagli ordinari problemi di massimo e minimo, ed implicano delicate questioni dipendenti dalla scelta delle classi di funzioni ammissibili. D'altra parte l'impostazione di un dato problema sotto forma variazionale apre la strada all'impiego dei cosiddetti *metodi variazionali diretti*, che offrono uno strumento di indagine estremamente efficace nella costruzione effettiva della soluzione del problema stesso.

Rinviando alla trattazione specifica di qualche caso particolare per quanto riguarda la tecnica del procedimento, accenniamo brevemente al concetto informatore del metodo variazionale di calcolo nei suoi lineamenti essenziali.

Accertata dunque l'esistenza di un estremo effettivo e non di una semplice situazione di stazionarietà per un certo funzionale $F[f(x_i)]$, come è stato dimostrato per i due funzionali J e K , almeno nel caso di una relazione di elasticità del tipo [37. 6], il problema variazionale viene trasformato in un problema corrispondente di estremo ordinario. Ciò si ottiene esprimendo la classe delle funzioni ammissibili $f(x_i)$ mediante una serie di successioni parziali:

$$f_n(x_i) = \sum_{m=1}^n c_m \psi_m(x_i), \quad [39. 11]$$

dove le funzioni argomento $\psi_m(x_i)$ devono verificare le condizioni di ammissibilità, imposte alle funzioni della classe nella quale cerchiamo l'estremo del funzionale, mentre i coefficienti c_m sono indeterminati.

Così, ad esempio, nel caso del funzionale J le funzioni della classe di definizione dovranno risultare geometricamente ammissibili, nel senso delle equazioni [38. 1] e [38. 2], mentre nel caso del funzionale K le funzioni dovranno essere scelte nella classe di quelle staticamente ammissibili, nel senso specificato dalle equazioni [38. 3] e [38. 4].

Con la posizione [39. 11] al problema variazionale originario per il funzionale $F[f(x_i)]$ viene sostituito un problema di estremo ordinario per una funzione $F_n(c_m)$, nelle n variabili c_m , poichè le funzioni argomento risultano specificate.

Le n condizioni tipiche dei problemi di massimo-minimo ordinari:

$$\frac{\partial F_n}{\partial c_m} = 0, \quad [39. 12]$$

permettono di individuare i coefficienti c_m e quindi la successione parziale $f_n(x_i)$.

A tal punto si presenta l'importante questione sulla convergenza delle successioni parziali $f_n(x_i)$ alla soluzione effettiva, problema non semplice, intimamente collegato alla richiesta di *completezza* della classe delle funzioni approssimatrici $f_n(x_i)$, e sul quale non è il caso di insistere.

40. Relazioni elastiche isotrope lineari.

Quando sussistano le circostanze fisiche per poter accettare un legame lineare tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione, l'ipotesi di isotropia comporta per l'energia potenziale elastica una espressione negli invarianti E_1, E_2 del tipo:

$$\Phi[\varepsilon_{ij}] = \frac{c_1}{2} E_1^2 + c_2 E_2, \quad [40.1]$$

limitata cioè ai termini non superiori alle seconde potenze delle ε_{ij} .

Le componenti di tensione σ_{ij} risultano allora dalla particolarizzazione delle [37.4] al caso in esame:

$$\sigma_{ij} = c_1 E_1 \frac{\partial E_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + c_2 \frac{\partial E_2}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad [40.2]$$

e anche, tenendo presenti le espressioni delle derivate [35.5] degli invarianti:

$$\sigma_{ij} = (c_1 + c_2) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - c_2 \varepsilon_{ij}. \quad [40.3]$$

Introdotte allora le cosiddette *costanti di Lamé*, definite dalle posizioni:

$$\lambda = c_1 + c_2, \quad \mu = -\frac{c_2}{2}, \quad [40.4]$$

otteniamo le relazioni di elasticità per i solidi isotropi nella forma classica:

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \Delta, \quad [40.5]$$

dove all'invariante lineare $E_1 = \varepsilon_{kk}$ del tensore di deformazione è stata sostituita, per la [15.4], la dilatazione cubica Δ .

L'inversione delle [40.5] può essere ottenuta agevolmente scrivendo le tre relazioni corrispondenti alle tre componenti di tensione con indici uguali, cioè:

$$\sigma_{ii} = 2 \mu \varepsilon_{ii} + \delta_{ii} \lambda \Delta, \quad [40.6]$$

dove il doppio indice di Kronecker vale 1, e sommando membro a membro:

$$\Theta = (3 \lambda + 2 \mu) \Delta, \quad [40.7]$$

avendo indicato con Θ l'invariante lineare $I_1 = \sigma_{ii}$ del tensore di tensione.

Abbiamo così le cercate relazioni inverse sostituendo nelle [40. 5], in luogo di Δ , la sua espressione ricavata dalla [40. 7]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij} \lambda \Theta}{3\lambda + 2\mu} \right). \quad [40. 8]$$

Le relazioni [40. 5] e [40. 8] costituiscono il legame fondamentale tra componenti di tensione e componenti di deformazione nella ipotesi di isotropia elastica lineare, ed assumono notevole rilievo nella maggior parte delle applicazioni. Esse presentano alcune caratteristiche essenziali che ne giustificano l'importanza rispetto ad altre particolarizzazioni delle relazioni di elasticità, sia perchè le più semplici e spontanee, sia perchè conformi ai risultati sperimentali per gran parte dei materiali impiegati nelle costruzioni, in un campo sufficientemente esteso dello stato di tensione.

Il legame espresso dalle [40. 5] rappresenta la naturale generalizzazione ad uno stato di tensione-deformazione completo della celebre legge di proporzionalità enunciata da HOOKE¹ « *ut (ex)tensio sic vis* » per il semplice caso monoassiale di un filo esteso da una forza di trazione applicata ai suoi estremi.

Presenta un certo interesse esaminare il significato delle costanti λ, μ in alcuni tipici esempi fondamentali ed il loro collegamento con altre costanti di elasticità di evidenza più immediata nello studio di situazioni fisiche particolari.

a) Modulo di elasticità normale.

Quando un lungo cilindro, il cui asse sia parallelo ad un asse coordinato, ad esempio x_1 , viene sottoposto ad una tensione uniforme σ_{11} sulle basi, come indicato in fig. 21, la dilatazione nel senso longitudinale ε_{11} risulta dalle [40. 8] ponendo uguali a zero tutte le componenti di tensione ad eccezione di σ_{11} , cioè:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}. \quad [40. 9]$$

Definito allora il cosiddetto *modulo di elasticità normale*, introdotto da YOUNG²:

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad [40. 10]$$

¹ R. HOOKE, *Lectures de potentia restitutiva*, London (1678).

² TH. YOUNG, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, London (1807).

otteniamo la relazione elementare di proporzionalità:

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E, \quad [40. 11]$$

che esprime proprio, secondo la legge di Hooke, la misura della dilatazione per gli elementi lineari longitudinali del cilindro.

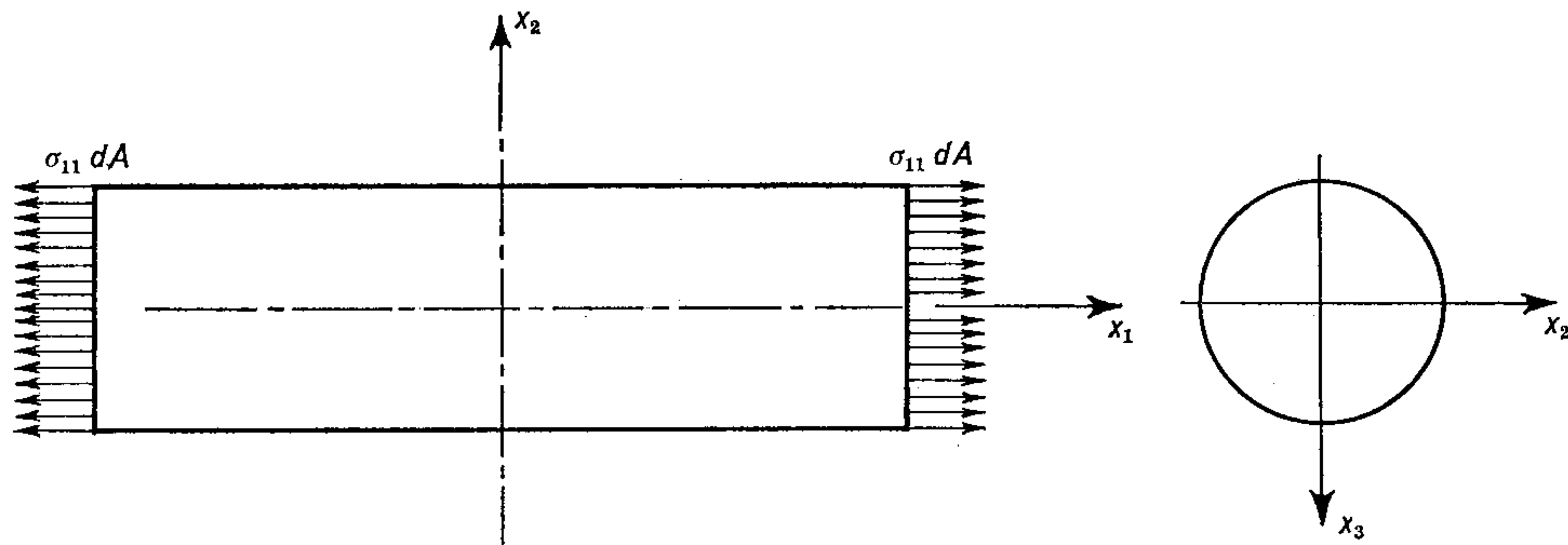


Fig. 21.

b) *Rapporto di contrazione trasversale.*

Nell'esempio precedente le dilatazioni ε_{22} , ε_{33} degli elementi lineari giacenti nel piano della sezione trasversale del cilindro e paralleli agli assi x_2 , x_3 , risultano negative, e precisamente per le [40. 8]:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}. \quad [40. 12]$$

Allora il rapporto, detto di POISSON¹, tra la dilatazione trasversale e la dilatazione longitudinale:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad [40. 13]$$

esprime la misura della contrazione subita dagli elementi lineari della sezione trasversale nei confronti della dilatazione longitudinale.

Segue altresì dalla definizione [40. 13] che il carattere evidentemente positivo delle costanti di Lamé λ , μ impone al rapporto di Poisson la limitazione superiore $\nu < \frac{1}{2}$, e ciò corrisponde ai risultati dell'esperienza che fissano per i diversi materiali un valore di ν compreso tra 0,25 e 0,50.

c) *Modulo di dilatazione cubica.*

Quando una pressione idrostatica uniforme $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ agisce sopra un solido elastico, il volume V di questo subisce una di-

¹ S. D. POISSON, *Mém. Acad. Sciences, Paris*, **8**, 357 (1829).

minuzione ΔV , alla quale corrisponde, secondo la [15.4], una dilatazione cubica $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Poichè in tal caso sono nulle le componenti tangenziali di tensione possiamo scrivere per la [40.7]:

$$3\bar{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)\Delta, \quad [40.14]$$

e definito il *modulo di dilatazione cubica* K :

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu), \quad [40.15]$$

anche:

$$\bar{\sigma} = K\Delta = 3K\bar{\varepsilon}, \quad [40.16]$$

da cui emerge il significato di K come misura della pressione idrostatica necessaria per ottenere una determinata variazione di volume.

d) *Modulo di elasticità tangenziale.*

Quando un lungo prisma di sezione quadrata viene deformato sotto l'azione di tensioni tangenziali $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, fig. 22, o come si dice per *semplice taglio*, la dilatazione angolare $\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$ si ottiene

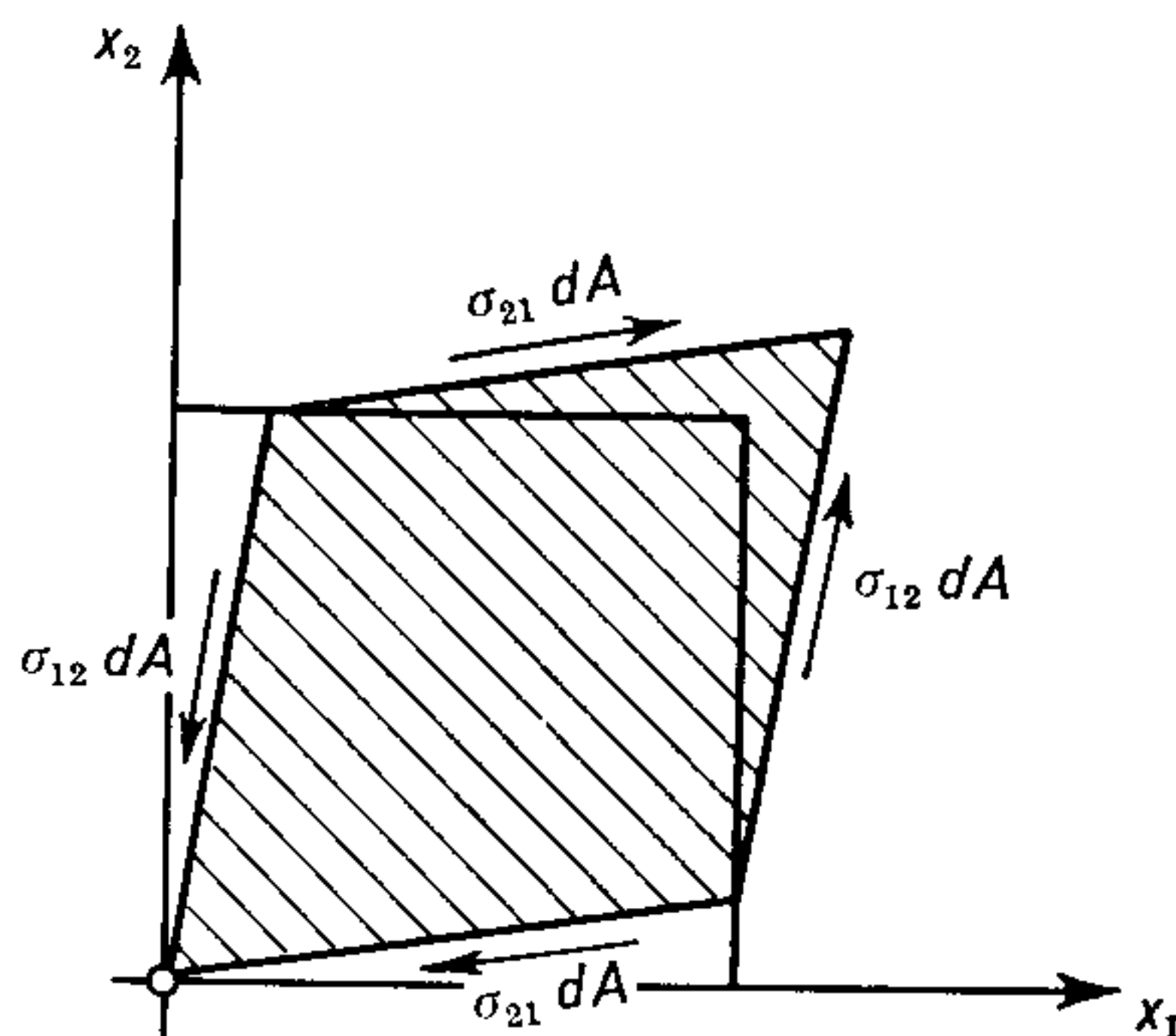


Fig. 22.

ponendo nelle [40.8] tutte le componenti di tensione nulle ad eccezione di $\sigma_{12} = \sigma_{21}$:

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}. \quad [40.17]$$

Ne consegue che la costante di Lamé μ , spesso indicata con G nelle applicazioni, esprime la misura della tensione tangenziale necessaria per produrre una determinata dilatazione angolare, e prende il nome di *modulo di elasticità tangenziale*.

Appare opportuno raccogliere nel quadro seguente le relazioni tra le varie costanti elastiche, in quanto nella trattazione dei diversi problemi particolari conviene evidentemente fare uso delle costanti che conducono a relazioni formali più semplici.

Costanti	λ, μ	K, G	μ, ν	E, ν	E, G
λ	λ	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu = G$	μ	G	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
K	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	K	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{9KG}{3K + G}$	$2(1+\nu)\mu$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	ν	ν	$\frac{E}{2G - 1}$

41. Problema dell'equilibrio elastico isotropo.

Possiamo ora formulare in modo completo il problema dell'equilibrio per un solido elastico omogeneo isotropo, di determinare cioè lo stato di tensione-deformazione assegnate le forze di volume p_j nei punti interni, le forze di superficie f_j nei punti di una porzione A_f della frontiera A e gli spostamenti u_j nei punti della porzione rimanente A_u .

Il problema è fondato sulle equazioni di congruenza e di vincolo [38. 1] e [38. 2], sulle equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti [38. 3] e [38. 4] e sulle relazioni di elasticità isotropa [40. 5].

Poichè tutte le relazioni citate hanno carattere lineare, siamo in presenza di un *problema lineare al contorno di tipo misto*, in quanto le forze di superficie e gli spostamenti sono prescritti su porzioni complementari, A_f e A_u rispettivamente, della frontiera A delimitante il volume V occupato dal solido elastico.

In casi particolari può accadere che siano assegnati sull'intera frontiera o soltanto gli spostamenti u_j o soltanto le forze f_j : ci riduciamo allora a due problemi speciali ottenuti evidentemente dal problema generale ponendo rispettivamente $A_u = A$ oppure $A_f = A$.

In considerazione di tali possibilità appare opportuno poter esprimere tutte le equazioni sopra indicate unicamente in termini delle componenti di spostamento nel primo caso oppure delle componenti di tensione nel secondo.

a) *Equazioni del problema in termini di spostamenti.*

Sostituendo le equazioni di congruenza [38. 1] nelle relazioni di elasticità [40. 5] otteniamo le componenti di tensione in funzione dei gradienti di spostamento:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij} \lambda u_{k,k}, \quad [41. 1]$$

e quindi le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\mu(u_{i,ji} + u_{j,ii}) + \delta_{ij} \lambda u_{k,ki} + p_j = 0. \quad [41. 2]$$

Eseguita l'operazione indicata dalla funzione di Kronecker e introdotto l'operatore di Laplace $\nabla u_j = u_{j,ii}$, le equazioni indefinite nelle derivate seconde delle componenti di spostamento assumono la forma:

$$\mu \nabla u_j + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + p_j = 0. \quad [41. 3]$$

In modo analogo per le equazioni di equilibrio ai limiti [38. 4] otteniamo:

$$[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij} \lambda u_{k,k}] n_i = f_j, \quad [41. 4]$$

e sviluppando le operazioni indicate, anche:

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_i + \lambda u_{k,k} n_j = f_j. \quad [41. 5]$$

Le equazioni differenziali [41. 3] e le corrispondenti condizioni ai limiti [41. 5] rappresentano la formulazione completa, dovuta a NAVIER¹, del problema dell'equilibrio elastico isotropo in termini di componenti di spostamento.

Deriviamo ora ciascuna delle tre equazioni [41. 3] rispetto alla variabile corrispondente x_j :

$$\mu \nabla u_{j,j} + (\lambda + \mu) u_{i,ijj} + p_{j,j} = 0, \quad [41. 6]$$

e sommiamo le tre equazioni così ottenute rispetto all'indice j :

$$(\lambda + 2\mu) \nabla u_{i,i} + p_{j,j} = 0. \quad [41. 7]$$

Se le forze di volume sono costanti, cioè $p_{j,j} = 0$, discende dalla [41. 7] l'interessante proprietà che $u_{i,i}$ risulta una *funzione armonica* perchè verifica l'equazione di Laplace:

$$\nabla u_{i,i} = 0, \quad [41. 8]$$

¹ C. L. NAVIER, *Mém. Acad. Sciences, Paris* (2), **7**, 375 (1827).

nei punti interni di V ed è continua insieme con le sue derivate prime e seconde in $V + A$.

Tale proprietà vale evidentemente anche per l'invariante lineare E_1 del tensore di deformazione, definito nella [10. 12], e per il coefficiente di dilatazione cubica Δ , definito nella [15. 4], perchè entrambi coincidenti con $u_{i,i}$.

Tenendo presente la relazione [40. 7] secondo la quale l'invariante lineare $I_1 = \Theta$ del tensore di tensione risulta proporzionale all'invariante lineare $E_1 = \Delta$ del tensore di deformazione, si ha pure dalla [41. 7]:

$$\nabla \Theta + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} p_{i,j} = 0, \quad [41. 9]$$

e quindi per forze di volume costanti anche Θ deve essere una funzione armonica.

b) *Equazioni del problema in termini di tensioni.*

In questo secondo caso le equazioni di equilibrio, indefinite [38. 3] ed ai limiti [38. 4] rimangono evidentemente inalterate perchè già espresse in funzione delle componenti di tensione, mentre le equazioni di congruenza [38. 1] dovranno essere opportunamente trasformate in modo da eliminare le derivate di spostamento e di deformazione.

Ciò si ottiene immediatamente sostituendo le relazioni inverse [40. 8] valide per i solidi isotropi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij} \lambda \Theta}{3\lambda + 2\mu} \right), \quad [41. 10]$$

nelle equazioni esplicite di congruenza [17. 10]:

$$\varepsilon_{ij,hk} + \varepsilon_{hk,ij} - \varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jh,ik} = 0, \quad [41. 11]$$

pervenendo alle seguenti espressioni nelle derivate seconde delle componenti di tensione:

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij,hk} + \sigma_{hk,ij} - \sigma_{ik,jh} - \sigma_{jh,ik} = \\ & = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\delta_{ij} \Theta_{,hk} + \delta_{hk} \Theta_{,ij} - \delta_{ik} \Theta_{,jh} - \delta_{jh} \Theta_{,ik}). \end{aligned} \quad [41. 12]$$

Come già osservammo per le [17. 10], delle $3^4 = 81$ equazioni [41. 12] solo 6 risultano effettivamente distinte nello scambio degli indici $i, j, h, k = 1, 2, 3$.

Prendiamo allora in esame le $3^3 = 27$ equazioni delle [41. 12] nelle quali $h = k$, cioè le:

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} = \\ & = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\delta_{ij} \Theta_{,kk} + \delta_{kk} \Theta_{,ij} - \delta_{ik} \Theta_{,jk} - \delta_{jk} \Theta_{,ik}), \end{aligned} \quad [41. 13]$$

e sommiamole membro a membro rispetto all'indice comune $k = 1, 2, 3$, effettuando le operazioni indicate dal doppio indice ed introducendo l'operatore ∇ di Laplace:

$$\nabla \sigma_{ij} + \Theta_{,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\delta_{ij} \nabla \Theta + \Theta_{,ij}). \quad [41. 14]$$

Otteniamo così $3^2 = 9$ equazioni, di cui solo 6 distinte in virtù della simmetria delle componenti di tensione, e quindi nello stesso numero delle equazioni originarie di congruenza [17. 10].

Le [41. 14] possono essere ulteriormente trasformate tenendo presenti le equazioni indefinite di equilibrio [38. 3] scritte rispettivamente per le coppie di indici i, k e j, k e derivate rispetto a j e i :

$$\sigma_{ik,kj} = -p_{i,j}, \quad \sigma_{jk,ki} = -p_{j,i}, \quad [41. 15]$$

mentre d'altra parte la [41. 9] scritta per l'indice k è:

$$\nabla \Theta = -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} p_{k,k}. \quad [41. 16]$$

Riordinando allora le [41. 14] ed effettuando in esse le sostituzioni indicate dalle [41. 15] e [41. 16], abbiamo le sei equazioni di congruenza in termini di tensioni nella forma di MICHELL¹:

$$\nabla \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{,ij} = -\left(p_{i,j} + p_{j,i} + \frac{\delta_{ij} \lambda}{3\lambda + 2\mu} p_{k,k} \right), \quad [41. 17]$$

o anche, per forze di volume costanti, nella forma già trovata in precedenza da BELTRAMI²:

$$(1 + \nu) \nabla \sigma_{ij} + \Theta_{,ij} = 0, \quad [41. 18]$$

avendo introdotto per semplicità di notazione il rapporto di contrazione trasversale ν definito dalla [40. 13] in termini delle costanti di Lamé.

¹ J. H. MICHELL, *Proc. London Math. Soc.*, **31**, 100 (1900).

² E. BELTRAMI, *Rend. Accad. Lincei Roma* (5), **1**, 141 (1892).

42. Metodi di risoluzione.

Numerosi tentativi sono stati compiuti per costruire soluzioni delle equazioni di Navier utilizzando opportune scelte di funzioni, determinate in parte dalle equazioni indefinite di equilibrio [41. 3] ed in parte dalla forma particolare del dominio mediante le equazioni ai limiti [41. 5].

Il punto di partenza per alcuni efficaci metodi risolutivi è costituito dal teorema di reciprocità di Betti [38. 13]: esso è strettamente connesso con i procedimenti classici della teoria del potenziale attraverso l'adattamento del metodo delle singolarità al problema dell'equilibrio elastico, realizzato ad opera dello stesso BETTI¹, e di cui cerchiamo di delineare gli aspetti essenziali.

A tale scopo ricordiamo che per due funzioni $\varphi(x_i)$ e $\psi(x_i)$, continue insieme con le loro derivate seconde in un dominio V limitato da una superficie chiusa A , sussiste la evidente identità relativa al loro prodotto scalare:

$$\int_V \varphi_{,i} \psi_{,i} dV \equiv \int_V [(\varphi_{,i} \psi)_{,i} - \psi \nabla \varphi] dV = \int_V [(\psi_{,i} \varphi)_{,i} - \varphi \nabla \psi] dV, \quad [42. 1]$$

da cui, trasformando con la formula di Gauss, otteniamo la notevole *formula di reciprocità di Green*:

$$\int_V (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) dV = \int_A \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dA. \quad [42. 2]$$

Se le funzioni φ e ψ sono armoniche nel dominio V , cioè se entrambe verificano l'equazione di Laplace $\nabla \varphi = 0$ e $\nabla \psi = 0$, la [42. 2] si riduce al suo secondo membro:

$$\int_A \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dA = 0. \quad [42. 3]$$

Indicata con r la distanza del punto generico Q dall'origine O delle coordinate si ponga $\psi = r^{-1}$: evidentemente tale funzione è armonica ma cessa di essere continua in O dove presenta una singolarità per $r = 0$. Circondiamo allora l'origine con una piccola sfera V_s di centro O e raggio R , e consideriamo la porzione di volume esterno a questa sfera.

Abbiamo così dalla [42. 3], separando l'integrale nei due integrali estesi rispettivamente alla superficie esterna A ed alla superficie S della sfera:

$$\int_A \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dr^{-1}}{dn} \right) dA + \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dr^{-1}}{dn} \right) dS = 0. \quad [42. 4]$$

¹ E. BETTI, *Nuovo Cimento* (2), **6-10** (1872 e seg.).

Sulla superficie S della sfera r è costante ed uguale al raggio R , per cui il primo termine del secondo integrale diviene, a meno del fattore R^{-1} :

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn} dS = \int_S \varphi_{,i} n_i dS = \int_{V_s} \varphi_{,ii} dV = 0, \quad [42. 5]$$

essendo φ armonica per definizione e quindi $\nabla\varphi = \varphi_{,ii} = 0$.

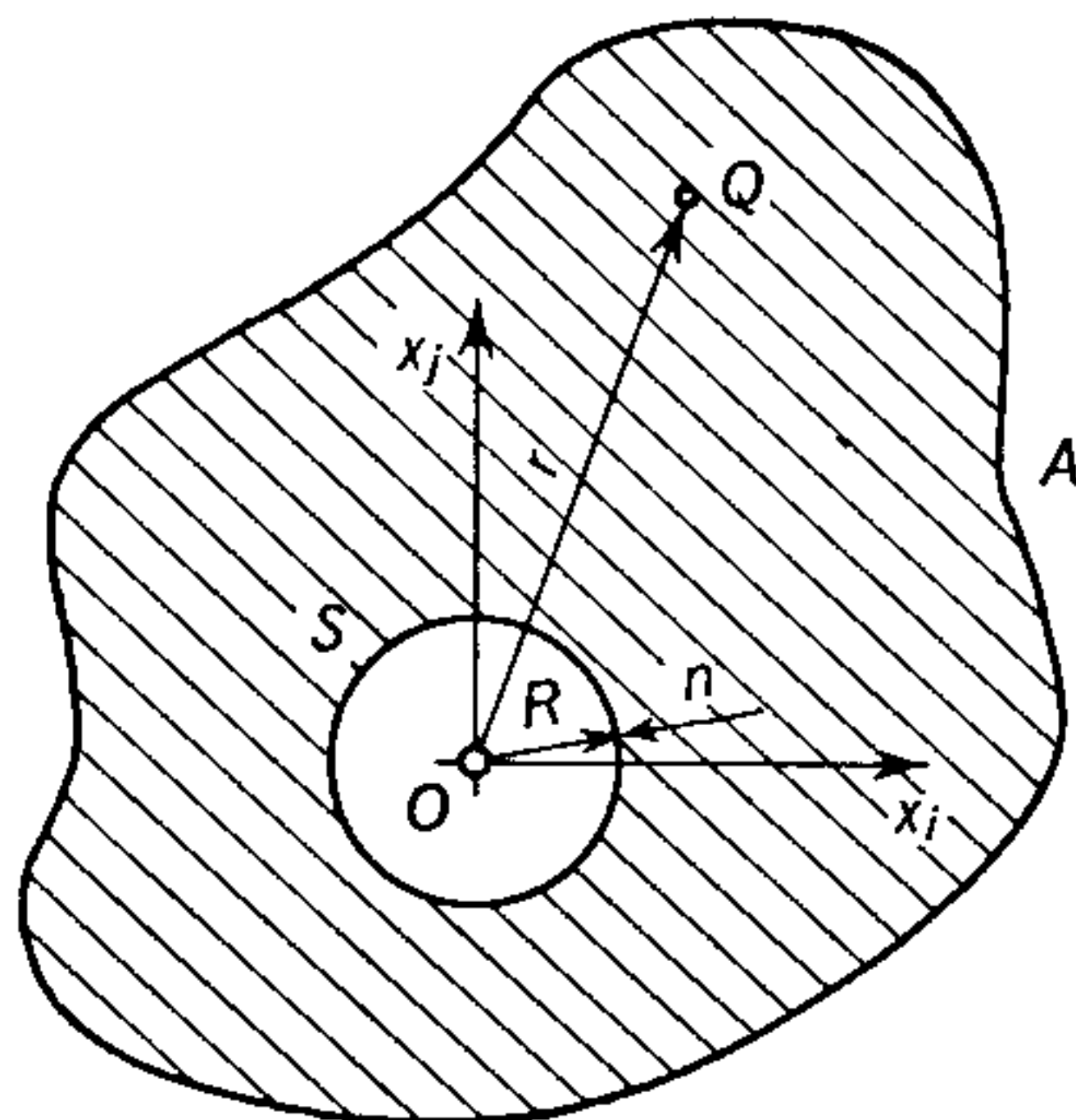


Fig. 23.

Il secondo termine, poichè $r = -n$, diviene:

$$\int_S \varphi \frac{dr^{-1}}{dn} dS = - \int_S \varphi \frac{dr^{-1}}{dr} dS = \frac{1}{R^2} \int_S \varphi dS, \quad [42. 6]$$

e quindi passando al limite, per $R \rightarrow 0$:

$$\int_S \varphi \frac{dr^{-1}}{dn} dS = 4 \pi \varphi(O), \quad [42. 7]$$

poichè evidentemente $S = 4 \pi R^2$.

Otteniamo così la notevole espressione:

$$4 \pi \varphi(O) = \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dr^{-1}}{dn} \right) dA, \quad [42. 8]$$

la quale fornisce il valore della funzione armonica $\varphi(x_i)$ in un punto interno del dominio V mediante la conoscenza dei valori assunti da φ e dalla sua derivata normale $d\varphi/dn$ sul contorno A di V .

Poichè in generale non è possibile assegnare ad arbitrio contemporaneamente φ e $d\varphi/dn$ su A , appare importante trovare il modo di eliminare dalla [42. 8] o la funzione φ o la sua derivata normale $d\varphi/dn$.

Ciò si ottiene con un elegante procedimento formale attraverso l'introduzione di certe funzioni speciali, dette *funzioni di Green*. Ad esempio, definiamo una funzione $G(x_i)$, armonica in tutti i punti di V ad eccezione dell'origine O e tale da assumere su A gli stessi valori

della funzione $\varphi = r^{-1}$. Allora la [42. 3], scritta per le funzioni $\varphi(x_i)$ e $G(x_i)$ permette di eliminare la derivata normale $d\varphi/dn$ e scrivere così la [42. 8] nella forma:

$$4\pi\varphi(O) = \int_A \varphi \left(\frac{dG}{dn} - \frac{dr^{-1}}{dn} \right) dA, \quad [42. 9]$$

dalla quale è possibile determinare $\varphi(O)$ noti i valori che la funzione stessa assume su A .

In modo analogo, attraverso l'introduzione della *seconda funzione di Green* $\Gamma(x_i)$ è possibile eliminare dall'integrale [42. 8] la funzione φ e determinare quindi $\varphi(O)$ noti i valori che la sua derivata normale $d\varphi/dn$ assume su A .

Ora, il teorema di Betti [38. 13], scritto nella forma:

$$-\int_V (u_j p_j[v_k] - v_j p_j[u_k]) dV = \int_A (u_j f_j[v_k] - v_j f_j[u_k]) dA, \quad [42. 10]$$

mette in chiaro risalto una interessante analogia con la formula di reciprocità di Green [42. 2] quando all'operatore di Laplace ∇ ed all'operatore di derivata rispetto alla normale d/dn si sostituiscano rispettivamente gli operatori dedotti dalle equazioni di Navier indefinite [41. 3] ed ai limiti [41. 5], cioè:

$$-p_i[u_k] = \mu \nabla u_j + (\lambda + \mu) u_{i,j}, \quad [42. 11]$$

$$f_j[u_k] = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_i + \lambda u_{k,k} n_j. \quad [42. 12]$$

Rimandando ai successivi § 43 e § 44 l'esposizione di due importanti applicazioni fondate sulla estensione del metodo delle singolarità sopra delineato al problema dell'equilibrio elastico isotropo, diamo ora gli aspetti essenziali di un metodo generale per la costruzione effettiva delle soluzioni di tale problema.

Tale metodo trae lo spunto dal teorema di reciprocità di Betti e, sostanzialmente dovuto a PICONE¹, è fondato su procedimenti moderni di analisi funzionale lineare.

Indichiamo a tal fine con u_{jn}^0 un sistema di n spostamenti corrispondenti alle soluzioni delle equazioni di Navier [41. 3] in assenza di forze di volume, cioè per $p_j[u_{in}^0] = 0$, e denominati *componenti dello spostamento elastico fondamentale*. Il teorema di Betti [42. 10], per $v_j(x_i) = u_{jn}^0(x_i)$, conduce successivamente al sistema di n equazioni integrali:

$$\int_V u_{jn}^0 p_j[u_i] dV = \int_A u_j f_j[u_{in}^0] dA - \int_A u_{jn}^0 f_j[u_i] dA \quad [42. 13]$$

per le funzioni $u_j(x_i)$, $p_j[u_i]$, $f_j[u_i]$.

¹ M. PICONE, *Proc. Intern. Congress Appl. Mech.*, London (1948).

Supponiamo ora, in armonia con la formulazione del problema dell'equilibrio elastico enunciato nel § 41, che le forze di volume p_j siano assegnate in tutti i punti interni di V , le forze superficiali f_j su una porzione A_f della frontiera A , e gli spostamenti u_j sulla porzione rimanente A_u , in modo da poter trasformare le [42. 13] nelle:

$$\int_V u_{jn}^0 p_j dV = \int_{A_u} \bar{u}_j f_j [u_{in}^0] dA + \int_{A_f} u_j f_j [u_{in}^0] dA - \int_{A_u} u_{jn}^0 f_j [u_i] dA - \int_{A_f} u_{jn}^0 \bar{f}_j dA. \quad [42. 14]$$

Posta allora la parte nota delle [42. 14]:

$$\int_V u_{jn}^0 p_j dV - \int_{A_u} \bar{u}_j f_j [u_{in}^0] dA + \int_{A_f} u_{jn}^0 \bar{f}_j dA = c_{jn}, \quad [42. 15]$$

otteniamo il sistema di equazioni integrali:

$$\int_{A_f} u_j f_j [u_{in}^0] dA - \int_{A_u} u_{jn}^0 f_j [u_i] dA = c_{jn}. \quad [42. 16]$$

Finalmente se, prima di fissare il numero intero q , poniamo:

$$u_{jq} = \sum_{m=1}^q \beta_{jm} f_j [u_{im}^0] \quad \text{su } A_f, \quad [42. 17]$$

$$f_{jq} = \sum_{m=1}^q \beta_{im} u_{jm}^0 \quad \text{su } A_u, \quad [42. 18]$$

con β_{jm} costanti incognite, deduciamo dalle [42. 16] il seguente sistema di equazioni lineari algebriche:

$$\sum_{m=1}^q \beta_{jm} \left\{ \int_{A_f} f_j [u_{im}^0] f_j [u_{in}^0] dA + \int_{A_u} u_{jm}^0 u_{in}^0 dA \right\} = c_{jn}. \quad [42. 19]$$

La risoluzione del sistema [42. 19] nelle q incognite β_{jm} permette quindi di costruire la soluzione u_{iq}, f_{jq} espressa dalle [42. 17] e [42. 18]. Le delicate questioni di esistenza e di convergenza della soluzione approssimata u_{jq} alla soluzione effettiva sono intimamente collegate alla completezza del sistema fondamentale u_{jn}^0 ; una discussione approfondita in proposito esula però dai confini della trattazione attuale.

43. Determinazione della dilatazione cubica.

In assenza di forze di volume indichiamo con $f_j [u_k], f_j [v_k]$ due distinti sistemi di forze superficiali corrispondenti a due diverse distribuzioni di spostamenti u_j, v_j . Il teorema di reciprocità [42. 10] si semplifica in tal caso, per $p_j = 0$, nella relazione:

$$\int_A v_j f_j [u_k] dA = \int_A u_j f_j [v_k] dA, \quad [43. 1]$$

dove supponiamo le funzioni $u_j(x_k)$, $v_j(x_k)$ continue e le funzioni $f_j[u_k]$, $f_j[v_k]$ generalmente continue.

Se $r = (x_i x_i)^{1/2}$ esprime la distanza del punto generico $Q(x_i)$ di V dall'origine delle coordinate, una soluzione delle equazioni di Navier [41. 3], rese omogenee dall'assenza delle forze di volume, risulta:

$$u_j^0 = r_{,j}^{-1}, \quad [43. 2]$$

e presenta evidentemente una singolarità nell'origine O dove $r = 0$.

Indichiamo con f_j^0 le forze superficiali corrispondenti alla soluzione u_j^0 , fornite dalle [41. 5] per $u_j = u_j^0$, e con f_j le forze superficiali corrispondenti alla soluzione effettiva u_j , che verifica cioè oltre le equazioni indefinite anche le equazioni ai limiti. Allora la relazione di reciprocità [43. 1] applicata ad una regione limitata esternamente dalla frontiera A ed internamente da una sfera di area S , raggio R e centro nell'origine delle coordinate, cioè come fu già discusso nel § 42 ed indicato nella fig. 23, diviene per $v_j = u_j^0$:

$$\int_A u_j^0 f_j dA + \int_S u_j^0 f_j dS = \int_A u_j f_j^0 dA + \int_S u_j f_j^0 dS. \quad [43. 3]$$

Le equazioni ai limiti [41. 5] sul contorno interno S e le relazioni lineari di isotropia elastica [40. 5] permettono di dare al secondo integrale della [43. 3] la forma:

$$\int_S u_j^0 f_j dS = \int_S (2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \Delta) n_i u_j^0 dS, \quad [43. 4]$$

e, tenendo presente che sulla sfera S si ha: $n_i = -x_i/R$, $R^2 = \delta_{ij} x_i x_j$, $u_j^0 = -x_j/R^3$, anche:

$$\int_S u_j^0 f_j dS = \int_S \left(\frac{2\mu}{R^4} x_i x_j \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda \Delta}{R^2} \right) dS. \quad [43. 5]$$

Poichè le funzioni $\varepsilon_{ij}(x_k)$, $\Delta(x_k)$ sono continue nell'origine ed inoltre, come si osserva facilmente:

$$\int_S dS = 4\pi R^2, \quad \int_S x_i x_j dS = \frac{4}{3} \pi R^4 \delta_{ij}, \quad [43. 6]$$

ne risulta la seguente espressione, al limite per $R \rightarrow 0$, in termini della dilatazione cubica Δ valutata nell'origine:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_S u_j^0 f_j dS = 4\pi (\lambda + \frac{2}{3} \mu) \Delta(O). \quad [43. 7]$$

L'ultimo integrale della [43. 3] viene calcolato esprimendo le f_j^0 dalle equazioni ai limiti [41. 5] scritte per $u_j = u_j^0$, cioè:

$$\int_S u_j f_j^0 dS = \int_S u_j [(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0) n_i + u_{i,i}^0 n_j] dS, \quad [43. 8]$$

o anche, essendo al solito $n_i = -x_i/R$ sulla sfera e calcolando i gradienti di spostamento $u_{i,j}^0$ dalla [43. 2]:

$$\int_S u_j f_j^0 dS = -4\mu \int_S \frac{u_j x_j}{R^4} dS. \quad [43. 9]$$

Sviluppando in serie le funzioni $u_j(x_k)$ nell'intorno dell'origine delle coordinate:

$$u_j(x_k) = u_j(O) + x_k u_{j,k}(O) + \dots, \quad [43. 10]$$

e conservando solo le prime potenze di x_k , poichè:

$$\int_S x_j dS = 0, \quad \int_S x_j x_k dS = \frac{4}{3} \pi R^4 \delta_{jk}, \quad [43. 11]$$

otteniamo in definitiva con un passaggio al limite:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_S u_j f_j^0 dS = -\frac{16}{3} \pi \mu \Delta(O). \quad [43. 12]$$

Ne risulta così la seguente espressione notevole, dovuta a Betti:

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\Delta(O) = \int_A (f_j^0 u_j - f_j u_j^0) dA, \quad [43. 13]$$

che permette di calcolare il coefficiente di dilatazione cubica in ogni punto di V , assunto come origine delle coordinate, quando siano noti sulla frontiera A di V gli spostamenti u_j e le forze superficiali f_j .

In modo analogo si possono calcolare le componenti $\omega_{ij}(O)$ del tensore di rotazione mediante formule anche esse dovute a Betti.

44. Determinazione delle componenti di deformazione.

Sempre sulla base del teorema di reciprocità [42. 10] altre notevoli espressioni sono state ottenute da SOMIGLIANA¹ per le componenti di spostamento $u_k(O)$ e da LAURICELLA² per le componenti di deformazione $\varepsilon_{ij}(O)$. Dato il particolare interesse di quest'ultimo problema ricordiamo brevemente la determinazione delle $\varepsilon_{ij}(O)$ in un punto generico del solido elastico, assunto come origine delle coordinate, note certe particolari soluzioni singolari.

Con riferimento alla [43. 1], supposte cioè nulle per semplicità di sviluppi le forze di volume p_j , scegliamo come sistema $f_j[v_k]$ un sistema composto da due forze concentrate $f_i(O), f_j(O)$ di intensità R^{-1} , ap-

¹ C. SOMIGLIANA, *Nuovo Cimento* (3), **17-20** (1885-86).

² G. LAURICELLA, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, **7** (1895).

plicate nell'origine $O \equiv (0, 0, 0)$ secondo le direzioni degli assi corrispondenti x_i, x_j , nel verso negativo di questi, e da due forze concentrate $f_i(P_j), f_j(P_i)$, sempre di intensità R^{-1} , applicate rispettivamente nei punti $P_j \equiv (0, R, 0)$ e $P_i \equiv (R, 0, 0)$ nel verso positivo di x_i, x_j , come indicato in fig. 24.

Indichiamo con $v_{ki}(O), v_{kj}(O)$ le componenti secondo la direzione x_k dello spostamento in un punto generico dovute ad una forza concen-

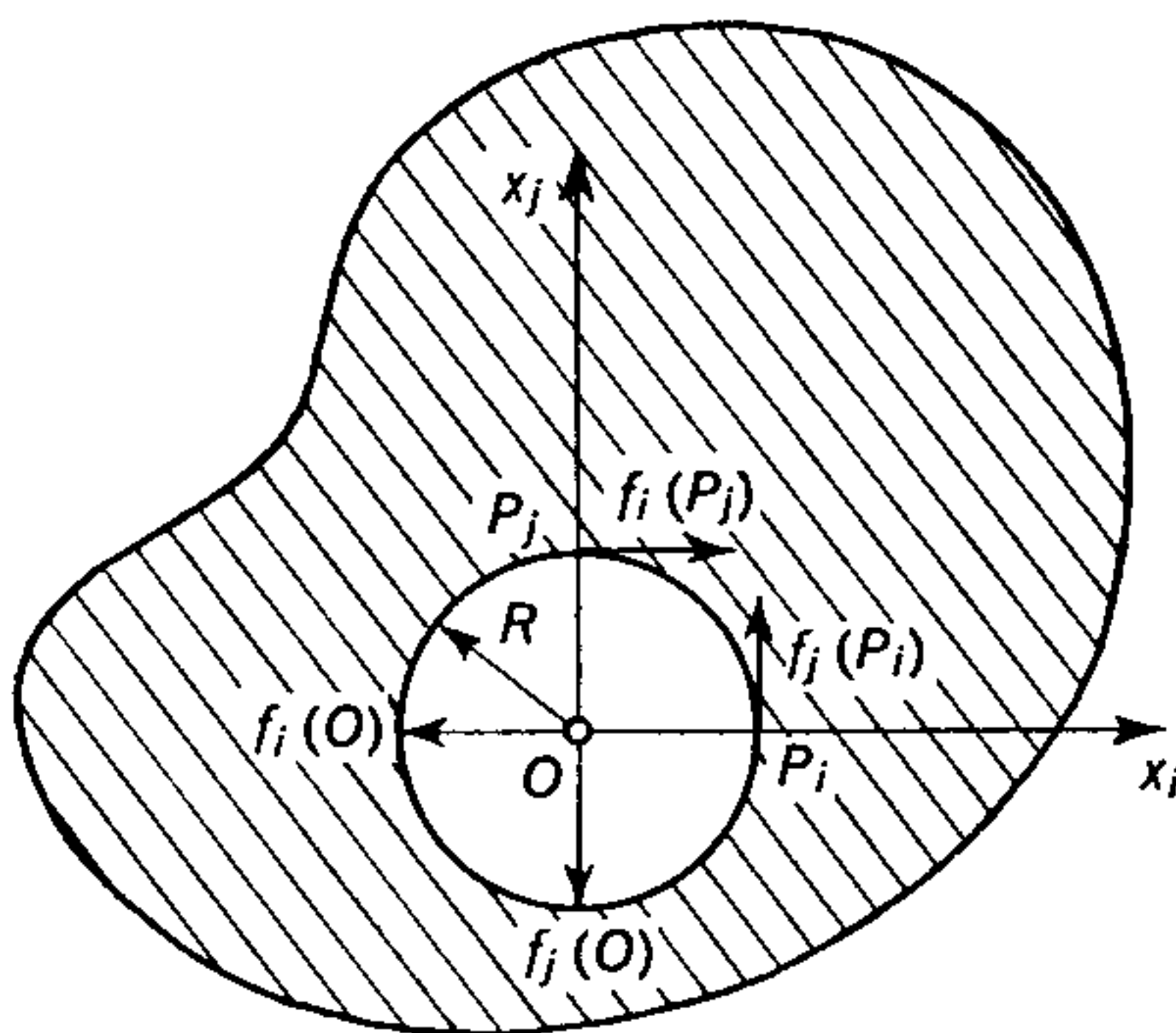


Fig. 24.

trata unitaria applicata nell'origine secondo le direzioni x_i, x_j . Tali componenti possono essere date dalle:

$$v_{ki} = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(r_{,ki} - \delta_{ij} \frac{2}{r} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right), \quad [44. 1]$$

cioè da funzioni che verificano le equazioni indefinite di Navier [41. 3] e presentano una singolarità nell'origine essendo, al solito, $r = (x_i x_i)^{1/2}$ la distanza del punto generico da questa.

Le forze $f_i(O), f_j(O)$ producono certi spostamenti di componenti $-R^{-1} v_{ki}(O), -R^{-1} v_{kj}(O)$, mentre le forze $f_i(P_j), f_j(P_i)$ producono spostamenti di componenti $R^{-1} v_{ki}(P_j), R^{-1} v_{kj}(P_i)$. Sviluppando in serie di potenze abbiamo:

$$\begin{aligned} v_{ki}(P_j) &= v_{ki}(O) + Rv_{ki,j}(O) + \dots \\ v_{kj}(P_i) &= v_{kj}(O) + Rv_{kj,i}(O) + \dots \end{aligned} \quad [44. 2]$$

per cui l'insieme delle quattro forze produce uno spostamento le cui componenti, per $P_i \rightarrow O, P_j \rightarrow O$, divengono:

$$\lim_{R \rightarrow 0} [v_{ki}(P_j) + v_{kj}(P_i) - v_{ki}(O) - v_{kj}(O)] = v_{ki,j}(O) + v_{kj,i}(O). \quad [44. 3]$$

Siano inoltre f_{ki}, f_{kj} le forze superficiali su A in equilibrio con le forze concentrate $f_i(O), f_j(O), f_i(P_j), f_j(P_i)$. Se allora scegliamo come

sistema $f_j [u_k]$ della [43. 1] il sistema di forze superficiali effettivo, corrispondente agli spostamenti effettivi di componenti u_k , il lavoro compiuto dalle forze concentrate per tali spostamenti, con un procedimento analogo a quello seguito, diviene al limite:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \{R^{-1}[u_i(P_j) + u_j(P_i) - u_i(O) - u_j(O)]\} = u_{i,j}(O) + u_{j,i}(O). \quad [44. 4]$$

La formula di reciprocità [43. 1] ci permette quindi di scrivere:

$$u_{i,j}(O) + u_{j,i}(O) + \int_A (f_{ki} + f_{kj}) u_k dA = \int_A f_k (v_{ki,j} + v_{kj,i}) dA, \quad [44. 5]$$

o anche, ricordando le definizioni [15. 2] delle componenti di deformazione ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}(O) = \frac{1}{2} \int_A [f_k (v_{ki,j} + v_{kj,i}) - (f_{ki} + f_{kj}) u_k] dA. \quad [44. 6]$$

Per $i = j$ l'espressione precedente [44. 6] fornisce le componenti di deformazione con indici uguali ε_{ii} .

Qualora le forze superficiali siano prescritte su tutta la frontiera A di V , possiamo eliminare dalla [44. 6] gli spostamenti u_k , risolvendo un problema ausiliario consistente nel determinare una soluzione u_{ki} , u_{kj} delle equazioni di Navier [41. 3] corrispondente a forze di superficie f_{ki} , f_{kj} tali da risultare identiche alle forze effettive f_k . In tal caso la [44.6] si semplifica nella:

$$\varepsilon_{ij}(O) = \frac{1}{2} \int_A [f_k (v_{ki,j} + v_{kj,i} - u_{ki} - u_{kj})] dA. \quad [44. 7]$$

La difficoltà per l'applicazione del metodo di Betti a problemi specifici risiede proprio nella costruzione di queste soluzioni ausiliarie, cioè nel caso in esame, nella determinazione degli spostamenti u_{ki} , u_{kj} .

45. Principio di equivalenza elastica.

Nello studio dei solidi elastici isotropi di forma cilindrica BARRÉ DE SAINT-VENANT¹ affermò che è consentito prescindere dalla legge di distribuzione delle forze esterne, se queste agiscono su porzioni limitate del solido, e sostituire ad esse la loro risultante nell'analisi dello stato di tensione-deformazione in punti sufficientemente distanti dalle regioni dove le forze stesse sono applicate.

Tale principio è di importanza decisiva in quanto nella maggior parte dei problemi concreti di regola è conosciuta non tanto la di-

¹ A. BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Mém. Savants étrangers*, **14**, 223 (1855).

istribuzione effettiva delle forze applicate al solido quanto la loro risultante.

La portata del principio va oltre il caso del solido di forma cilindrica, come già osservò BOUSSINESQ¹, secondo il quale: un sistema equilibrato di forze esterne applicate ad un solido elastico, i cui punti di applicazione stanno entro una sfera assegnata, produce deformazioni di grandezza trascurabile nei punti a distanze dalla sfera sufficientemente grandi rispetto al suo raggio.

Poichè le forze applicate ad un solido elastico *devono essere equilibrate* in ogni caso, come fece notare VON MISES², appare necessario chiarire il precedente enunciato generale del principio attraverso una sua formulazione alquanto diversa e del resto implicita nelle applicazioni usuali.

A tale scopo indichiamo con A_m ($m = 1, 2, \dots, n$) n porzioni chiuse non intersecanti di una regione regolare V dello spazio occupata dal solido elastico, nell'intorno di n punti distinti P_m di A , tali che ogni A_m e P_m siano contenuti in una sfera di raggio θ_0 (fig. 25).

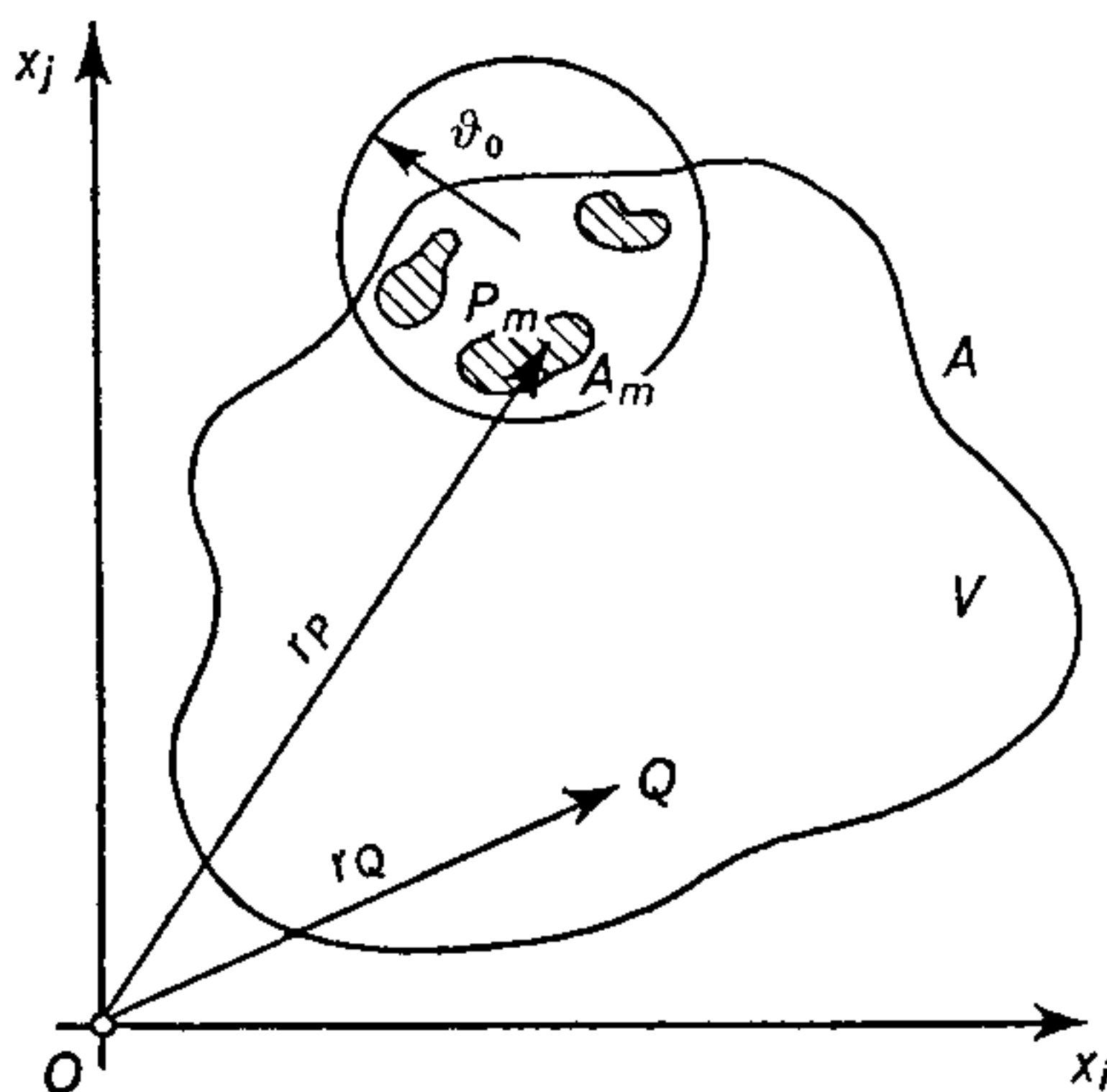


Fig. 25.

Se $u_j, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ rappresentano le soluzioni del problema elastico in assenza di forze di volume e f_j esprimono le forze superficiali agenti esclusivamente sulla porzione A_m , le componenti di deformazione in ogni punto Q interno a V sono date dalla formula di Lauricella [44. 7] scritta per $Q \equiv O$:

$$\varepsilon_{ij}(Q) = \sum_{m=1}^n \int_{A_m} f_k u_{kij} dA. \quad [45. 1]$$

In essa è stata introdotta per semplicità di scrittura la funzione:

$$u_{kij} = \frac{1}{2} (v_{ki,j} + v_{kj,i} - u_{ki} - u_{kj}), \quad [45. 2]$$

¹ M. J. BOUSSINESQ, *Applications des potentiels*, Paris (1885).

² R. VON MISES, « *Bull. Amer. Math. Soc.* », **51**, 555 (1945).

caratterizzata dalla proprietà di verificare le equazioni di Navier [41. 3] ad eccezione del punto Q , dove possiede una singolarità, e di corrispondere a forze superficiali nulle su A_m .

Ogni contributo $\varepsilon_{ijm}(Q)$ alla generica componente di deformazione $\varepsilon_{ij}(Q)$, espresso da ciascun termine della somma, ha significato fisico a sè stante solo se le forze applicate a ciascuna porzione A_m sono autoequilibrate: in caso contrario devono esistere almeno due porzioni A_m per le quali non sussista detta condizione.

Supponiamo ora che le regioni A_m ammettano una rappresentazione parametrica del tipo:

$$x_h = x_h(\alpha, \beta) \quad (h = 1, 2, 3), \quad [45. 3]$$

mediante un'insieme di coordinate curvilinee α, β su A_m , in generale diverse per ogni regione.

Il carattere di regolarità posseduto dalle funzioni di spostamento permette di sviluppare in serie $u_{kij}(\alpha, \beta)$ nel punto $(0, 0)$ e di ottenere quindi per ogni contributo $\varepsilon_{ijm}(Q)$ l'espressione:

$$\varepsilon_m(Q) = u_k^0 \int_{\Omega_m} f_k d\Omega_m + u_{h,\alpha}^0 \int_{\Omega_m} f_k \alpha d\Omega_m + u_{k,\beta}^0 \int_{\Omega_m} f_k \beta d\Omega_m, \quad [45. 4]$$

essendo Ω_m il corrispondente di A_m nel piano (α, β) , e dove per semplicità abbiamo tralasciato gli indici i, j nelle espressioni della generica componente di deformazione ε_{ijm} e dello spostamento corrispondente u_{kji} , senza che possa ormai sorgere ambiguità alcuna.

Se la regione A_m viene contratta in un punto prefissato, ad esempio P_m , secondo la legge di una certa variabile θ , di cui $A_m(\theta)$ è una funzione monotona, e tale che $0 < \theta < \theta_0$, allora per la famiglia di funzioni $u_k(\theta)$, $\varepsilon_{ij}(\theta)$, $\sigma_{ij}(\theta)$, dipendenti dal parametro θ , avremo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(\theta) = & u_k^0 \int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) d\Omega_m + \\ & + u_{k,\alpha}^0 \int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) \alpha d\Omega_m + u_{k,\beta}^0 \int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) \beta d\Omega_m, \end{aligned} \quad [45. 5]$$

sotto le condizioni:

$$u_k(\theta) = u_k, \quad \sigma_{ij}(\theta) n_k = f_k(\theta). \quad [45. 6]$$

Osservando che $A_m(\theta)$ ha ordine di grandezza ¹ θ^2 , cioè in altri termini $A_m(\theta) = O(\theta^2)$, ne risultano le seguenti conseguenze:

a) se è nulla la forza risultante \mathbf{R} delle azioni applicate sulla generica porzione A_m , cioè se:

$$R_k(\theta) = \int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) d\Omega_m = 0, \quad [45.7]$$

allora la generica componente di deformazione ha ordine di grandezza uguale o minore di θ^3 , cioè $\varepsilon_m(\theta) = O(\theta^3)$;

b) se inoltre sono nulli anche gli integrali:

$$\int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) \alpha d\Omega_m = 0, \quad \int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) \beta d\Omega_m = 0, \quad [45.8]$$

allora la generica componente di deformazione ha ordine di grandezza uguale o minore di θ^4 , cioè $\varepsilon_m(\theta) = O(\theta^4)$.

Le condizioni [45.8] sono equivalenti, a meno di infinitesimi di ordine superiore, alle nove equazioni scalari:

$$\int_{\Omega_m(\theta)} f_k(\theta) x_h d\Omega_m = 0, \quad [45.9]$$

che implicano necessariamente l'annullarsi del momento risultante \mathbf{M} in P_m , di componenti M_l ($l = 1, 2, 3$), cioè:

$$M_l = \int_{\Omega_m(\theta)} \delta_{lkh} f_k(\theta) x_h d\Omega_m = 0. \quad [45.10]$$

Non è però vero il reciproco, cioè l'annullarsi della risultante \mathbf{R} [45.7] e del momento risultante \mathbf{M} [45.10] comporta un ordine di grandezza per la generica componente di deformazione $\varepsilon_m(\theta) = O(\theta^3)$, in contrasto con l'interpretazione tradizionale del principio di Saint-Venant, secondo la quale l'ordine di grandezza di $\varepsilon_m(\theta)$, nel caso di autoequilibrio delle forze applicate espresso proprio dalle [45.7] e [45.10], dovrebbe essere sempre minore che nel caso contrario.

Le [45.9] rappresentano le condizioni di *equilibrio astatico*, cioè di equilibrio per un sistema di forze che, pur rimanendo inalterate in intensità, possono subire una rotazione arbitraria delle loro direzioni, uguale per tutte le forze del sistema. Possiamo così concludere che le componenti di deformazione $\varepsilon_{ij}(\theta)$ hanno ordine di grandezza θ^4 o più piccolo quando il sistema è equilibrato astaticamente.

¹ Ricordiamo che una funzione $f(x)$ ha lo stesso ordine di grandezza di x^n , cioè $f(x) = O(x^n)$, se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < N,$$

per N indipendente da x e diverso da zero.

La dimostrazione precedente è sostanzialmente fondata su un procedimento dovuto a STERNBERG¹, il quale discute l'ordine di grandezza della dilatazione cubica Δ . Le conseguenze ottenute possiedono una portata assai ampia in quanto possono essere estese ad ogni fenomeno fisico la cui formulazione analitica sia esprimibile attraverso equazioni differenziali di tipo ellittico, come avviene in problemi di conduzione del calore, di elettro- e magneto-statica, di moto fluido non viscoso.

Tuttavia tale enunciato, poichè in sostanza confronta gli effetti di azioni applicate sopra un'area infinitamente piccola $A_m(\theta)$, non costituisce la formulazione praticamente più utile del principio di equivalenza perchè le applicazioni si occupano di casi in cui le forze agiscono su aree, piccole bensì, ma finite.

Una forma *forte* del principio di Saint-Venant dovrebbe fornire una limitazione superiore della soluzione piuttosto che un ordine di grandezza, in modo da poter decidere caso per caso se tale limite può essere o no accettabile nel particolare problema in esame.

Purtroppo la istituzione di siffatte limitazioni per le equazioni dei solidi elastici è estremamente difficile, almeno da un punto di vista così generale, prescindendo cioè dalla forma del dominio: per classi speciali di solidi elastici possono essere ottenute formule particolari per mezzo delle quali si deducono utili limitazioni superiori, come ha dimostrato ZANABONI² per un lungo cilindro di sezione circolare caricato in corrispondenza delle basi.

¹ E. STERNBERG, *Quart. Appl. Math.*, **11**, 393 (1953).

² O. ZANABONI, *Atti Accad. Lincei*, **25**, 117, 595 (1937).