Capitolo III

RELAZIONI GENERALI

28. Congruenza ed equilibrio.

L'analisi dello stato di deformazione e dello stato di tensione in un corpo continuo ci ha condotti ai due aspetti fondamentali, rispettivamente della *congruenza* e dell'*equilibrio*, attraverso i quali viene formulato il problema di determinare la configurazione deformata a partire da una configurazione iniziale, in modo da rispettare certe condizioni precise di continuità, una volta assegnato il sistema equilibrato di forze agenti.

Il primo aspetto del problema riguarda lo studio della deformazione a sè stante ed esige che gli elementi caratteristici dello stato di deformazione, cioè le componenti $\varepsilon_{ij}(x_i)$, non siano scelti ad arbitrio ma derivino da funzioni di spostamento $u_k(x_i)$ continue, monodrome e differenziabili, le quali a loro volta rispettino eventuali condizioni di vincolo imposte a punti, linee, superficie della frontiera A del volume V occupato dal corpo.

Come abbiamo visto, questa duplice esigenza, per le ε_{ij} e per le u_k, si traduce analiticamente nei due gruppi di equazioni:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,u_{k,j}) \quad \text{in } V + A \qquad [28.\,1]$$

$$u_k = \overline{u}_k \quad \text{su } A_u \qquad [28.\,2]$$

valide rispettivamente nei punti del *dominio chiuso* $V + A$, e nei punti di una porzione A_u della *frontiera* A del corpo sulla quale si intendono assegnate le condizioni di vincolo.

Il secondo aspetto del problema riguarda invece le condizioni perchè sia verificato l'equilibrio in ogni punto del corpo soggetto ad un sistema di forze, equilibrato nel suo complesso nel senso della statica classica, ed è espresso mediante gli elementi caratteristici dello stato di tensione, cioè le componenti $\sigma_{hk}(y_h)$, dai due gruppi di equazioni:

$$\sigma_{hk,h} + \varrho g_k = 0 \quad \text{in } V \qquad [28.\ 3]$$

$$\sigma_{hk}\, n_h = \bar{f}_k \quad \text{su } A_f. \qquad [28.\ 4]$$

Esse sono valide rispettivamente nei punti del *dominio aperto* V, dove si intendono assegnate le forze di massa $g_k(y_h)$, e nei punti della porzione rimanente A_f della *frontiera* A, sulla quale si intendono prescritte le forze di superficie $\bar{f}_k(y_h)$.

Le equazioni di congruenza e le equazioni di equilibrio sono collegate tra loro perchè sia le equazioni indefinite [28. 3] sia le corrispondenti condizioni ai limiti [28. 4], entrambe riferite alle coordinate y_k della configurazione deformata, non sono evidentemente risolubili senza la conoscenza preventiva dello stato di deformazione, espresso proprio dal legame funzionale $y_k(x_i)$ in termini delle coordinate materiali x_i.

Tuttavia le equazioni ottenute non sono sufficienti a determinare completamente il problema enunciato all'inizio, in quanto una sua formulazione completa richiede la ulteriore precisazione delle correlazioni effettive tra le componenti di tensione σ_{hk} e le componenti di deformazione ε_{ij}. L'esistenza e la struttura di tali legami rappresenta un nuovo problema, di importanza decisiva dal punto di vista fisico, e richiede un esame approfondito sulla natura del corpo continuo, implicante necessariamente l'introduzione di ipotesi specifiche sul comportamento reale del corpo.

Tale indagine formerà l'oggetto dei capitoli successivi e permetterà di raggiungere la cercata formulazione generale del problema proposto, di determinare cioè lo stato di tensione-deformazione nei punti di un corpo continuo soggetto a distribuzioni assegnate di forze esterne e di condizioni di vincolo.

Riesce però possibile, basandoci esclusivamente sulle equazioni sinora ottenute, pervenire a relazioni formali di notevole interesse e di assoluta generalità, perchè valide per ogni corpo continuo deformabile indipendentemente dalle sue proprietà fisiche. La istituzione di siffatte relazioni richiede semplicemente che siano verificate le condizioni di congruenza [28. 1] e [28. 2] per lo stato di spostamento-deformazione e le condizioni di equilibrio [28. 3] e [28. 4] per lo stato di forza-tensione.

Naturalmente le relazioni annunciate non potranno avere un contenuto concettuale più esteso di quello già implicito nelle equazioni ricordate, ma soltanto offrire uno strumento analitico estremamente efficace nell'affrontare i problemi più disparati.

29. Spostamento virtuale.

Consideriamo un punto generico P_0 del continuo nella configurazione indeformata C_0 ed il punto corrispondente P nella configurazione deformata C.

Le coordinate y_k di P, e quindi le componenti u_k dello spostamento di P_0, sono funzioni delle coordinate x_i di P_0 e, in generale, di un parametro t che può essere il tempo o altra grandezza con esso collegata, cioè:

$$u_k = u_k(x_i, t) . \qquad [29.\ 1]$$

Supponiamo ora che durante lo stesso intervallo di tempo t e sotto l'azione dello stesso sistema di forze relative alla configurazione C, i punti P_0, anzichè in P, si portino nei punti P^* di una nuova configurazione deformata C^*, in generale distinta da C ed individuata da certe coordinate $y_k^*(x_i)$.

Le componenti u_k^* dello spostamento $\mathbf{u}$ che trasporta P_0 in P^* siano della forma:

$$u_k^*(x_i, t) = u_k(x_i, t) + \theta v_k(x_i, t), \qquad [29.\ 2]$$

dove v_k sono le componenti di un vettore spostamento $\mathbf{v}$ arbitrario e θ un numero reale di cui sia lecito trascurare le potenze superiori alla prima.

Le differenze:

$$u_k^*(x_i, t) - u_k(x_i, t) = \theta v_k(x_i, t), \qquad [29.\ 3]$$

rappresentano le componenti di un qualsiasi *spostamento regolare infinitesimo*, magari tale da non rispettare gli eventuali vincoli imposti al continuo, detto *spostamento virtuale*, dove l'aggettivo caratterizza la circostanza che lo spostamento così definito può non corrispondere ad alcun spostamento effettivo.

La definizione [29. 3] equivale alla ordinaria definizione di *variazione*, impiegata col simbolo lagrangiano δu_k nel calcolo delle variazioni, cioè:

$$\delta u_k = u_k^*(x_i, t) - u_k(x_i, t) = \theta v_k(x_i, t), \qquad [29.\ 4]$$

e comporta quindi la validità delle regole ivi assegnate, in particolare il lemma fondamentale sulla possibilità di invertire la successione dell'operatore variazionale δ con quello differenziale d rispetto alle variabili indipendenti:

$$\delta(u_{k,i}) = u_{k,i}^* - u_{k,i} = \theta v_{k,i} = (\theta v_k)_{,i} = \delta u_{k,i} . \qquad [29.\ 5]$$

È importante chiarire il significato dell'operatore variazionale definito dalla [29. 4] nei confronti dell'operatore differenziale. Osserviamo a tale scopo il diagramma della fig. 18, dove le ascisse indicano la configurazione indeformata $C_0 \equiv \{P_0\}$, i cui punti P_0 subiscono uno spostamento $\mathbf{u}(P_0)$ portandosi così nelle posizioni P della con-

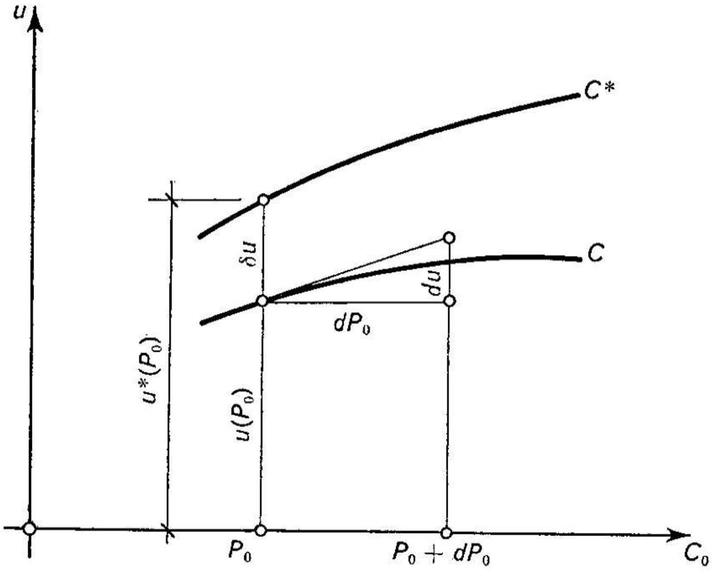

Fig. 18.

figurazione deformata $C \equiv \{P\}$, mentre ogni punto dell'intorno $I(P_0)$ subisce uno spostamento:

$$\mathbf{u}(P_0 + dP_0) = \mathbf{u}(P_0) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P_0} dP_0 . \qquad [29.\ 6]$$

Al contrario una variazione $\delta\mathbf{u}(P_0)$ dello stato di spostamento trasporta i punti P nelle posizioni P^* di una nuova configurazione $C^* \equiv \{P^*\}$, definita da un nuovo vettore spostamento:

$$\mathbf{u}^*(P_0) = \mathbf{u}(P_0) + \theta\mathbf{v}(P_0) . \qquad [29.\ 7]$$

Appare così l'estrema generalità dell'operatore variazionale $\delta\mathbf{u} = \theta\mathbf{v}$, e come questo si riduca a $d\mathbf{u} = (\partial\mathbf{u}/\partial P_0)\, dP_0$, pur di assumere $\theta = dP_0$ e $\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial P_0$, cioè il numero reale θ coincidente con il differenziale parziale dx_k della variabile indipendente x_k e le componenti v_k del vettore arbitrario $\mathbf{v}$ coincidenti con le componenti $u_{k,i}$ del tensore dei gradienti di spostamento, definito nel § 13.

Allo spostamento virtuale così introdotto corrisponde una *deformazione virtuale* le cui componenti $\delta\varepsilon_{ij}$ possono essere derivate dalla [3. 1] per variazione delle variabili dipendenti $y_k(x_i)$, cioè:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,[y_{k,i}\,\delta y_{k,j} + y_{k,j}\,\delta y_{k,i}] , \qquad [29.\ 8]$$

o anche dalle [13. 4] in termini degli spostamenti virtuali δu_k, tenendo presente che $y_k = u_k + x_k$:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2} [\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + u_{k,i}\, \delta u_{k,j} + u_{k,j}\, \delta u_{k,i}] , \qquad [29.\ 9]$$

quando, beninteso, i due sistemi di coordinate, spaziali y_k e materiali x_i, vengano supposti coincidenti nella configurazione iniziale.

30. Teorema degli spostamenti virtuali.

Attribuendo ai punti del continuo deformato gli spostamenti virtuali di componenti δu_k, le forze applicate, di massa g_k e di superficie f_k, compiranno un *lavoro virtuale* espresso dalla:

$$\delta_u L = \int_V \varrho g_k\, \delta u_k\, dv + \int_A f_k\, \delta u_k\, dA , \qquad [30.\ 1]$$

dove l'indice u, apposto all'operatore variazionale δ, serve a ricordare la particolare origine di $\delta_u L$, ottenuto cioè per *variazione dello stato di spostamento*.

Se il continuo è in equilibrio dovranno essere verificate le [28. 3] nei punti interni di V e le [28. 4] nei punti della frontiera A, prescindendo dal fatto che le f_k o le u_k siano o no prescritte. Sostituendo allora in luogo delle forze di volume ϱg_k e delle forze di superficie f_k le loro espressioni tratte dalle equazioni di equilibrio, rispettivamente indefinite ed ai limiti, il precedente lavoro virtuale diviene:

$$\delta_u L = -\int_V \sigma_{hk,h}\, \delta u_k\, dV + \int_A \sigma_{hk}\, n_h\, \delta u_k\, dA , \qquad [30.\ 2]$$

o anche, attraverso la trasformazione del secondo integrale mediante la formula di Gauss:

$$\delta_u L = \int_V \sigma_{hk}\, (\delta u_k)_{,h}\, dV, \qquad [30.\ 3]$$

nella quale non è possibile l'inversione dell'operatore variazionale con quello di derivata in quanto quest'ultimo è effettuato rispetto alle variabili dipendenti y_h.

Il significato meccanico della funzione sotto segno di integrale si ricava dall'esame del lavoro virtuale compiuto dalle forze interne $\sigma_{hk} dA_h$ in corrispondenza degli spostamenti virtuali δu_k. Con riferimento alla nuova configurazione C^*, assunta da un parallelepipedo elementare di spigoli dy_h, rispetto alla configurazione deformata C, in conseguenza della variazione dello stato di spostamento, come indicato in fig. 19 nel caso piano, l'incremento di lavoro compiuto è per la generica componente σ_{hk}:

$$\sigma_{hk}\, dA_h\, d_h\, (\delta u_k) = \sigma_{hk}\, (\delta u_k)_{,h}\, dV . \qquad [30.\ 4]$$

Abbiamo così l'espressione del lavoro virtuale compiuto per l'intero continuo V dalle componenti di tensione proprio come secondo membro della [30. 3], il quale rappresenta dunque il *lavoro virtuale interno* corrispondente al *lavoro virtuale esterno* [30. 1].

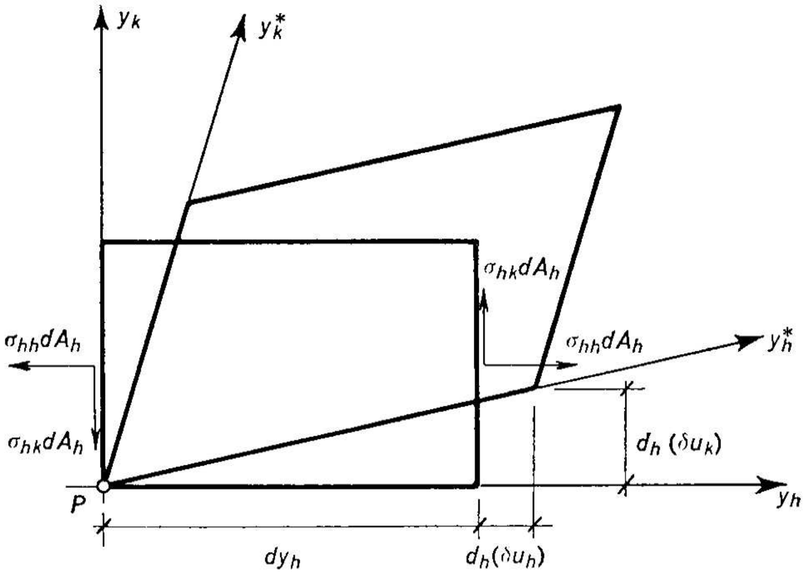

Fig. 19.

La [30. 4] può essere simmetrizzata, in quanto le σ_{hk} sono componenti di un tensore simmetrico ($\sigma_{hk} = \sigma_{kh}$), scrivendo:

$$\sigma_{hk}(\delta u_k)_{,h} = \tfrac{1}{2}\,\sigma_{hk}[(\delta u_h)_{,k} + (\delta u_k)_{,h}]\,, \qquad [30.\ 5]$$

mentre, d'altro canto, le derivate delle componenti virtuali dello spostamento $(\delta u_k)_{,h}$ rispetto alle variabili dipendenti y_h sono esprimibili in termini delle componenti $\delta\varepsilon_{ij}$ della deformazione virtuale.

Infatti, operando nella [29. 8] un cambiamento di variabile dalle coordinate materiali x_i alle coordinate spaziali y_h, otteniamo le deformazioni virtuali nella forma:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,[y_{k,i}(\delta y_k)_{,h}\,y_{h,j} + y_{k,j}(\delta y_k)_{,h}\,y_{h,i}]\,, \qquad [30.\ 6]$$

da cui, invertendo gli indici h, k nel primo termine del secondo membro:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,[(\delta y_h)_{,k}\,y_{h,i}\,y_{k,j} + (dy_k)_{,h}\,y_{h,i}\,y_{k,j}]\,. \qquad [30.\ 7]$$

Introdotto allora il *tensore virtuale di deformazione* $[\delta\eta_{hk}]$ di componenti:

$$\delta\eta_{hk} = \tfrac{1}{2}\,[(\delta y_h)_{,k} + (\delta y_k)_{,h}]\,, \qquad [30.\ 8]$$

e tenendo presente il fatto che $\delta u_k = \delta y_k$, il lavoro virtuale interno indicato nella [30. 5] diviene:

$$\sigma_{hk}(\delta u_k)_{,h} = \sigma_{hk}\,\delta\eta_{hk}\,, \qquad [30.\ 9]$$

e permette così di scrivere la [30.3] nella forma:

$$\delta_u L = \int_V \sigma_{hk} \, \delta\eta_{hk} \, dV \, , \qquad [30.\ 10]$$

che esprime sinteticamente il teorema degli spostamenti virtuali in coordinate spaziali y_h.

Per ottenerlo in forma esplicita nelle componenti di deformazione virtuale $\delta\varepsilon_{ij}$, osserviamo che il confronto della [30. 7] con la [30. 8] porge immediatamente la relazione notevole:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\eta_{hk} \, y_{h,i} \, y_{k,j} \, . \qquad [30.\ 11]$$

Il *tensore virtuale di deformazione* $[\delta\eta_{hk}]$ si trasforma dunque nel *tensore di deformazione virtuale* $[\delta\varepsilon_{ij}]$ attraverso la tipica legge tensoriale, per una trasformazione ortogonale:

$$y_h = x_i \, n_{hi} \quad (\text{con } n_{hi} = y_{h,i}) \, , \qquad [30.\ 12]$$

dagli assi y_h, ai quali sono riferite le componenti $\delta\eta_{hk}$, agli assi x_i, ai quali sono invece riferite le componenti $\delta\varepsilon_{ij}$.

La trasformazione inversa della [30. 11] fornisce le componenti virtuali della deformazione:

$$\delta\eta_{hk} = \delta\varepsilon_{ij} \, x_{i,h} \, x_{j,k} \, , \qquad [30.\ 13]$$

e quindi, per sostituzione nella [30. 5], conduce alla equazione:

$$\int_V \varrho g_k \, \delta u_k \, dV + \int_A f_k \, \delta u_k \, dA = \int_V \sigma_{hk} \, \delta\varepsilon_{ij} \, x_{i,h} \, x_{j,k} \, dV \, . \qquad [30.\ 14]$$

La relazione così ottenuta è dovuta sostanzialmente a PIOLA [1], il quale però, anzichè al tensore di componenti σ_{hk} si riferì ad un tensore t_{ij} riferito alle coordinate materiali x_i, come sarà definito nella [33. 4]. Essa esprime il *teorema degli spostamenti virtuali* in forma esplicita nelle componenti di deformazione virtuale e la sua validità dipende esclusivamente dalla condizione che: *lo stato di tensione* σ_{hk} *sia equilibrato con le forze* ϱg_k, f_k, *e lo stato di deformazione virtuale* $\delta\varepsilon_{ij}$ *sia congruente con gli spostamenti virtuali* δu_k.

Quando gli spostamenti u_k ed i loro gradienti $u_{k,i}$ risultano infinitesimi la precedente relazione [30. 14] può essere semplificata perchè gli assi coordinati del riferimento spaziale y_k coincidono con gli assi coordinati del riferimento materiale x_i, mentre potremo indicare direttamente con $p_j = \varrho_0 \, g_j$ le forze di volume, essendo inutile in tal caso porre in evidenza la massa specifica ϱ dell'elemento di volume

---

[1] G. PIOLA, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni*, Milano, **1**, 201 (1833); *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital.*, Modena, **24**, 1 (1848).

deformato perchè coincidente con quella ϱ_0 dell'elemento indeformato, almeno nei riguardi dell'analisi dello stato di tensione.

Avremo allora l'interessante risultato:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \delta \eta_{ij} , \qquad [30.15]$$

cioè, per spostamenti e rotazioni infinitesimi il *tensore di deformazione virtuale* coincide con il *tensore virtuale di deformazione.* Otteniamo così dalla [30. 10] la relazione:

$$\int_V p_j \delta u_j \, dV + \int_A f_j \delta u_j \, dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV \qquad [30.16]$$

che esprime il teorema degli spostamenti virtuali nel caso limite di spostamenti infinitesimi.

31. Forza virtuale.

In modo perfettamente analogo a quello seguito per definire lo spostamento virtuale possiamo introdurre il concetto di *forza virtuale,* supponendo di attribuire alle forze di massa g_k ed alle forze di superficie f_k agenti sul continuo nella configurazione deformata certe variazioni δg_k e δf_k.

Precisamente diremo *forza virtuale* qualsiasi *forza regolare infinitesima,* magari tale da non rispettare le condizioni imposte alle forze effettivamente applicate.

Pensando allora che sotto l'azione di queste variazioni arbitrarie delle forze la configurazione deformata C si conservi inalterata, avremo unicamente certe corrispondenti variazioni, localmente equilibrate, dello stato di tensione espresse da componenti di tensione virtuale $\delta \sigma_{hk}$, tali da verificare le equazioni di equilibrio nella forma:

$$(\delta \sigma_{hk})_{,h} + \varrho \delta g_k = 0 \quad \text{in } V \qquad [31.1]$$

$$\delta \sigma_{hk} \, n_h = \delta f_k \quad \text{su } A \qquad [31.2]$$

e valide rispettivamente nei punti del dominio aperto V e sulla sua frontiera A.

Poichè le componenti variate $\sigma_{hk} + \delta \sigma_{hk}$ corrispondono ad uno stato di deformazione identico a quello della configurazione C, riesce chiaro il carattere di *virtualità* della definizione precedente. Infatti una variazione effettiva dello stato di tensione deve comportare necessariamente una variazione dello stato di deformazione ad esso associato e rispettare le condizioni prescritte per le forze applicate.

32. Teorema delle forze virtuali.

Applicando nei punti del continuo certe forze virtuali, rispettivamente di volume $\varrho\,\delta g_k$ nei punti interni di V e di superficie δf_k nei punti della frontiera A di V, ed imponendo che gli spostamenti di tali punti siano gli stessi che si verificavano in presenza delle forze ϱg_k e f_k, potremo definire un secondo tipo di lavoro virtuale, detto complementare:

$$\delta_f L = \int_V u_k \varrho \delta g_k \, dV + \int_A u_k \, \delta f_k \, dA \,, \qquad [32.\,1]$$

dove l'indice f apposto all'operatore variazionale δ ricorda che la variazione $\delta_f L$ deve intendersi, questa volta, ottenuta per *variazione delle forze.*

Se le forze virtuali sono equilibrate nel senso da verificare le [31. 1] e [31. 2], potremo sostituire agli integrali della [32. 1] le espressioni delle forze virtuali di volume e di superficie in termini delle componenti di tensione virtuale, cioè:

$$\delta_f L = -\int_V u_k \,(\delta\sigma_{hk})_{,h}\, dV + \int_A u_k \, n_h \, \delta\sigma_{hk} \, dA \,, \qquad [32.\,2]$$

o anche, dalla formula di trasformazione di Gauss:

$$\delta_f L = \int_V u_{k,h} \, \delta\sigma_{hk} \, dV \,. \qquad [32.\,3]$$

Considerando, al solito, un parallelepipedo elementare immerso nella configurazione deformata C, di spigoli dy_h, il lavoro compiuto dalle forze virtuali interne $\delta\sigma_{hk}\, dA_h$ in corrispondenza degli spostamenti u_k che il parallelepipedo ha subito nel passaggio dalla configurazione indeformata a quella deformata, con riferimento alla fig. 20 per il caso piano, vale:

$$\delta\sigma_{hk} \, dA_h \, d_h u_k = \delta\sigma_{hk} \, u_{k,h} \, dV, \qquad [32.\,4]$$

da cui il significato meccanico del secondo membro della [32. 3].

Trasformiamo ora i gradienti $u_{k,h}$ dello spostamento calcolati rispetto alle variabili y_h, passando da queste alle variabili x_i, cioè:

$$u_{k,h} = u_{k,i} \, x_{i,h} \,, \qquad [32.\,5]$$

o anche, per l'identità $x_{j,k}\, y_{k,j} = 1$:

$$u_{k,h} = u_{k.i} \, y_{k,j} \, x_{i,h} \, x_{j,k} \,. \qquad [32.\,6]$$

Esprimendo le coordinate spaziali y_k in funzione delle componenti di spostamento u_k secondo le [13. 1] e quindi: $y_{kj} = u_{k,j} + \delta_{kj}$, possiamo anche scrivere:

$$u_{k,h} = u_{k,i}(u_{k,j} + \delta_{kj})\, x_{i,h}\, x_{j,k} = (u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j})\, x_{i,h}\, x_{j,k}\,, \qquad [32.\ 7]$$

e simmetrizzando la [32. 3] in quanto le componenti di tensione virtuale definiscono ancora un tensore simmetrico ($\delta\sigma_{hk} = \delta\sigma_{kh}$):

$$u_{k,h}\,\delta\sigma_{hk} = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j} + u_{h,i}\, u_{h,j})\, x_{i,h}\, x_{j,k}\,\delta\sigma_{hk}\,. \qquad [32.\ 8]$$

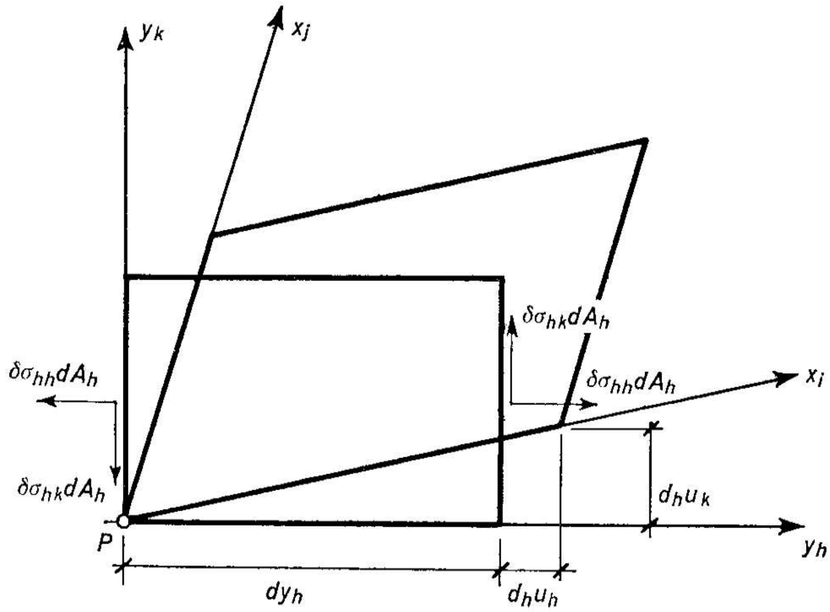

Fig. 20.

Infine se ε_{ij} esprimono le componenti di una deformazione congruente secondo la [28. 1], possiamo enunciare il *teorema delle forze virtuali* nella forma generale:

$$\int_V u_k\,\varrho\,\delta\, g_k\, dV + \int_A u_k\,\delta f_k\, dA = \int_V (\varepsilon_{ij} + \tfrac{1}{2}\, u_{h,i}\, u_{h,j})\, x_{i,h} x_{j,k}\,\delta\sigma_{hk}\, dV, \qquad [32.\ 9]$$

valido purchè *lo stato di deformazione* ε_{ij} *sia congruente con gli spostamenti* u_k *e lo stato di tensione virtuale* $\delta\sigma_{hk}$ *sia equilibrato con le forze virtuali* δg_k, δf_k.

La [32. 9] costituisce l'aspetto duale della [30. 14] e fu ottenuta dall'Autore [1] con un procedimento variazionale reciproco.

Quando gli spostamenti u_k ed i loro gradienti $u_{k,i}$ risultano infinitesimi, nelle stesse condizioni che ci hanno condotti alla [30. 16], tenendo presente il carattere infinitesimo di ordine superiore assunto

---

[1] R. F. Baldacci, *Rend. Accad. Lincei* 8), **23**, 250 (1957).

dalla somma di prodotti $u_{h,i} u_{h,j}$ nei gradienti di spostamento, otteniamo dalla [32. 9] la relazione semplificata:

$$\int_V u_j \delta \varrho_j \, dV + \int_A u_j \delta f_j \, dA = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \, dV , \qquad [32.\ 10]$$

che esprime il teorema delle forze virtuali nel caso limite in discorso.

33. Stato di tensione nel riferimento materiale.

Abbiamo già discusso nel § 27 la necessità di esprimere le equazioni di equilibrio, riferite alla configurazione deformata, in modo da farvi comparire in modo esplicito gli elementi caratteristici della deformazione.

Tale esigenza comporta la riduzione dello stato di tensione alla configurazione indeformata e si ottiene nella maniera più spedita utilizzando il teorema degli spostamenti virtuali [30. 14]. A tal fine operiamo in tale relazione un cambiamento di variabile dalle coordinate spaziali y_k alle coordinate materiali x_i, osservando che l'elemento di volume deformato dV risulta:

$$dV = D \, dV_0 , \qquad [33.\ 1]$$

dove D indica lo jacobiano Det $y_{h,i}$ della trasformazione di coordinate.

Le forze elementari applicate agli elementi di volume dV e di superficie dA si trasformano secondo le:

$$\varrho g_k \, dV = \varrho_0 g_k \, dV_0 , \qquad f_k \, dA = f_k^0 \, dA_0 , \qquad [33.\ 2]$$

con riguardo all'equazione di continuità [8. 5], cioè $\varrho = D\varrho_0$, e dove f_k^0 indica la componente generica della forza superficiale per unità di area dA_0 della superficie indeformata.

Le precedenti trasformazioni [33. 1] e [33. 2] permettono di attribuire all'equazione degli spostamenti virtuali [30. 14] la forma:

$$\int_{V_0} \varrho_0 g_k u_k \, dV_0 + \int_{A_0} f_k^0 \delta u_k \, dA_0 = \int_{V_0} \sigma_{hk} D x_{i,h} x_{j,k} \delta \varepsilon_{ij} \, dV_0 . \qquad [33.\ 3]$$

L'integrando a secondo membro di questa relazione suggerisce di introdurre certe componenti di tensione t_{ij} definite nel riferimento materiale dalle posizioni:

$$t_{ij} = D x_{i,h} x_{j,k} \sigma_{hk} , \qquad [33.\ 4]$$

e quindi componenti di un nuovo tensore doppio, ancora simmetrico, come risulta dalla tipica legge di trasformazione tensoriale [33. 4].

Il tensore $[t_{ij}]$, generalmente attribuito a KIRCHHOFF [1], era stato in realtà già introdotto da PIOLA [2].

In termini delle componenti di tensione t_{ij} il *teorema degli spostamenti virtuali* assume la forma compatta in coordinate materiali x_i:

$$\int_{V_0} \varrho_0 g_k \delta u_k \, dV_0 + \int_{A_0} f_k^0 \delta u_k \, dA_0 = \int_{V_0} t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV_0 . \qquad [33.\ 5]$$

In modo analogo possiamo operare nella [32. 9] lo stesso cambiamento di variabili, dal riferimento spaziale y_k al riferimento materiale x_i, che ci permise di trasformare la [30. 14] nella [33. 3], ottenendo ora:

$$\begin{aligned} &\int_{V_0} u_k \varrho_0 \delta g_k \, dV_0 + \int_{A_0} u_k \delta f_k^0 \, dA_0 = \\ &= \int_{V_0} (\varepsilon_{ij} + \tfrac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}) \, D x_{i,h} x_{j,k} \delta \sigma_{hk} \, dV_0 . \end{aligned} \qquad [33.\ 6]$$

Ma alle variazioni virtuali $\delta\sigma_{hk}$ dello stato di tensione, definite nel senso del § 32, ferma restando cioè la configurazione deformata C, corrispondono per le [33. 4] certe variazioni virtuali δt_{ij} delle componenti di tensione t_{ij}:

$$\delta t_{ij} = D x_{i,h} x_{j,k} \delta \sigma_{h,k} . \qquad [33.\ 7]$$

Sostituendo allora le [33. 7] nell'integrale a secondo membro della [33. 6] abbiamo il *teorema delle forze virtuali* in termini delle variazioni δt_{ij}, cioè in coordinate materiali x_i:

$$\int_{V_0} u_k \varrho_0 \delta g_k \, dV_0 + \int_{A_0} u_k \delta f_k^0 \, dA_0 = \int_{V_0} (\varepsilon_{ij} + \tfrac{1}{2} u_{h,i} u_{h,j}) \, \delta t_{ij} \, dV_0 . \qquad [33.\ 8]$$

La cercata deduzione delle equazioni di equilibrio contenenti in modo esplicito gli elementi caratteristici dello stato di deformazione può essere ottenuta facilmente utilizzando la [33. 5], con un procedimento variazionale diretto.

Poichè, come sappiamo, la validità della [33. 5] è subordinata alla congruenza delle deformazioni virtuali $\delta\varepsilon_{ij}$, abbiamo dalle [29. 8] che l'integrale a secondo membro della [33. 5] diviene:

$$\int_{V_0} t_{ij} \, y_{k,j} \, \delta y_{k,i} \, dV_0 , \qquad [33.\ 9]$$

---

[1] G. KIRCHHOFF, *Sitzsber. Akad. Wiss.*, Wien, **9**, 762 (1852).

[2] G. PIOLA, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni*, Milano, **1** (1833).

avendo tenuto conto della simmetria $t_{ij} = t_{ji}$. Trasformando allora con la formula di Gauss possiamo anche scrivere la [33. 9] nella forma:

$$\int_{A_0} t_{ij}\, y_{k,j}\, \delta y_k\, n_i^0\, dA_0 - \int_{V_0} (t_{ij}\, y_{k,j})_{,i}\, \delta y_k\, dV_0\,, \qquad [33.\ 10]$$

dove n_i^0 esprimono i coseni direttori della normale esterna n_0 alla superficie A_0.

Poichè $\delta y_k = \delta u_k$, otteniamo infine dalla [33. 5] e con riguardo alla [33. 10], riordinando in modo opportuno:

$$\int_{V_0} [(t_{ij}\, y_{k,j})_{,i} + \varrho_0\, g_k]\, \delta u_k\, dV_0 - \int_{A_0} [t_{ij}\, y_{k,j}\, n_i^0 - f_k^0]\, \delta u_k\, dA_0 = 0, \qquad [33.\ 11]$$

da cui, per l'arbitrarietà delle variazioni δu_k, le cercate equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti:

$$(t_{ij}\, y_{k,j})_{,i} + \varrho_0\, g_k = 0 \quad \text{in } V_0 \qquad [33.\ 12]$$

$$t_{ij}\, y_{k,j}\, n_i^0 = f_k^0 \qquad \text{su } A_f^0\,. \qquad [33.\ 13]$$

Le equazioni ottenute sono espresse in coordinate materiali x_i e tengono conto esplicitamente della influenza dello stato di tensione attraverso i termini $y_{k,j}$.

Nel caso di deformazioni infinitesime, quando sia lecito cioè trascurare detta influenza tali termini divengono:

$$y_{k,j} = u_{k,j} + \delta_{kj} \simeq \delta_{kj}\,, \qquad [33.\ 14]$$

e le equazioni stesse si identificano con le [27. 3] e [27. 4] poichè evidentemente il tensore $[t_{ij}]$ coincide al limite con il tensore $[\sigma_{hk}]$.