CAPITOLO II

ANALISI DELLA TENSIONE

18. Equilibrio di un continuo.

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato la deformazione di un corpo continuo da un punto di vista puramente geometrico, astraendo cioè dalle cause che possono averne provocato il cambiamento di configurazione. Volendo ora specificare tali cause ci limiteremo a considerare esclusivamente le azioni dovute alle forze applicate al corpo e restringeremo quindi la nostra indagine ad un piano puramente meccanico, prescindendo da eventuali fenomeni di natura termodinamica, chimica, molecolare, elettrostatica o magnetica.

In tal senso distingueremo le azioni presenti nel continuo in forze applicate agli elementi materiali contenuti nel volume V ed in forze applicate agli elementi superficiali della frontiera A delimitante la porzione V dello spazio occupata dal continuo.

Le prime, dette *forze di massa*, sono definite per unità di massa ed hanno componenti g_k rispetto alla terna ortogonale y_k fissa nello spazio; le seconde, dette *forze di superficie*, sono riferite all'unità di area ed hanno componenti f_k rispetto alla stessa terna.

Sotto l'azione di queste forze il continuo subirà una certa deformazione passando dalla configurazione iniziale C_0 alla configurazione deformata C, nella quale il complesso delle forze di massa e delle forze di superficie deve costituire un sistema equilibrato nel senso stabilito dalle sei equazioni cardinali della Statica.

Se allora $\varrho(y_k)$ indica al solito la massa specifica dell'elemento di volume del corpo deformato e ϱg_k rappresenta quindi la generica componente nella direzione y_k della forza per unità di volume, le condizioni di equilibrio alla traslazione secondo i tre assi y_k si traducono nelle tre equazioni scalari:

$$\int_V \varrho g_k \, dV + \int_A f_k dA = 0 \,, \qquad [18.1]$$

nelle quali gli integrali sono estesi al volume V del solido deformato, dove sono assegnate le forze di massa, ed alla sua frontiera A dove si pensano applicate le forze di superficie.

Le equazioni di equilibrio alla rotazione rispetto ai tre assi y_k vengono espresse in forma tensoriale compatta ricorrendo all'*operatore di Ricci* [1], cioè:

$$\delta_{rkl}\left(\int_V \varrho g_k\, y_l\, dV + \int_A f_k\, y_l\, dA\right) = 0. \qquad [18.\,2]$$

Le [18. 1] e le [18. 2] costituiscono la naturale estensione ai sistemi continui delle analoghe equazioni valide per i sistemi discreti ed esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio globale del continuo deformato.

19. Tensione in un punto.

Consideriamo un corpo continuo soggetto ad un sistema di forze di massa e di superficie, equilibrato nel suo complesso nel senso specificato dalle condizioni [18. 1] e [18. 2], e, con riferimento alla configurazione deformata, pensiamo di separare il corpo in due porzioni V_1 e V_2 mediante un piano generico Π_n condotto per un punto P interno e individuato dalla normale n, come indicato in fig. 9.

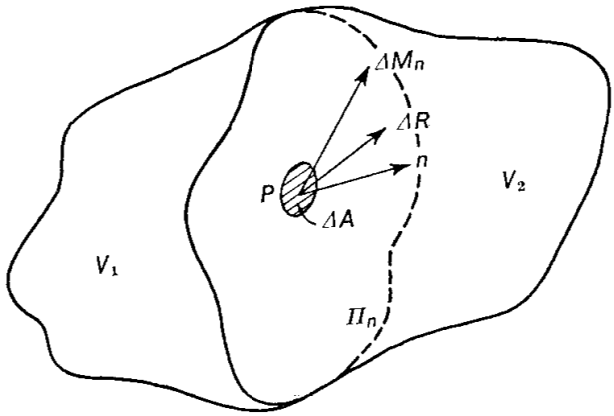

Fig. 9.

Poichè in generale ciascuna porzione non sarà più in equilibrio, se considerata a sè stante, appare manifesto che attraverso il piano Π_n venivano trasmesse necessariamente prima della sconnessione certe azioni mutue tra V_1 e V_2, capaci di ripristinare l'equilibrio delle due parti separate e soggette alle forze esplicite di massa e di superficie applicate su ognuna di esse.

---

[1] L'operatore δ_{rkl} è definito zero quando due indici qualsiasi sono uguali e $+1$ o -1 quando la permutazione r, k, l, è di ordine *pari* o *dispari* rispetto alla permutazione fondamentale 1, 2, 3.

Supponiamo che tali azioni per l'area generica ΔA_n contenente il punto P possano compendiarsi in una forza $\Delta \mathbf{R}_n$, secondo una direzione definita, ed in una coppia $\Delta \mathbf{M}_n$ di asse momento definito.

Hanno perciò significato i rapporti:

$$\frac{\Delta \mathbf{R}_n}{\Delta A_n} \qquad \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta A_n} \tag{19. 1}$$

le cui dimensioni sono rispettivamente di una forza e di un momento per unità di area $[FL^{-2}]$ e $[FL^{-1}]$.

Ammettiamo che, al tendere a zero dell'area ΔA_n, anche $\Delta \mathbf{R}_n$ e $\Delta \mathbf{M}_n$ tendano a zero ed esistano determinati e finiti i limiti dei due rapporti incrementali [19. 1], precisamente:

$$\lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_n}{\Delta A_n} = \mathbf{S}_n \qquad \lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta A_n} = 0 \,. \tag{19. 2}$$

Il vettore $\mathbf{S}_n$ ha le dimensioni di una forza per unità di area $[FL^{-2}]$ e prende il nome di *tensione sul piano Π_n nell'intorno del punto P*, mentre l'insieme $\{S\}$ delle tensioni $\mathbf{S}_n$ agenti su tutti i piani della stella di centro P viene definito brevemente *tensione nel punto P* e rappresenta un concetto fondamentale in tutta la Meccanica dei continui, dove fu introdotto da EULER [1] nel caso particolare in cui il vettore tensione è normale alla superficie e da CAUCHY [2] nel caso generale sopra discusso.

Discende immediatamente dalla definizione [19. 2] che la tensione $\{S\}$ rimane individuata dalla giacitura del piano Π_n e dalla forza $\Delta \mathbf{R}_n$, cioè, in termini di componenti, dai tre coseni direttori n_h di n e dalle tre proiezioni $\Delta R_k^{(n)}$ di $\Delta \mathbf{R}_n$ secondo gli assi y_k.

Siamo dunque in presenza di una grandezza dipendente da nove parametri per i quali adottiamo la notazione σ_{hk}, dove il primo indice ($h = 1, 2, 3$) indica la giacitura dell'area ed il secondo ($k = 1, 2, 3$) si riferisce alla direzione della componente generica della forza.

Nella definizione della tensione l'esistenza dei limiti [19. 2] è stata affermata in modo assiomatico: non esiste infatti alcuna possibilità di dimostrazione a meno di introdurre ipotesi aggiuntive sulla natura di $\Delta \mathbf{R}_n$ e $\Delta \mathbf{M}_n$ nonchè sulla legge con la quale tendono a zero con ΔA_n, ma tali precisazioni equivalgono di fatto alla definizione stessa.

Appare anche problematico sostenere l'asserto con argomentazioni di natura fisica, almeno da un punto di vista operativo, perchè è ov-

---

[1] L. EULER, *Histoire Acad.*, Berlin, **1755**, 217 (1757).
[2] A. L. CAUCHY, *Bull. Sciences Soc. Philomath.*, 9 (1823).

viamente impossibile pensare a misure atte alla determinazione sperimentale di $\{S\}$ nei punti interni del continuo in condizioni limiti.

In conclusione possiamo affermare soltanto che la definizione di $\{S\}$ rappresenta una ipotesi ragionevole sulla natura del continuo e che la giustificazione di tale asserto è da ricercarsi nel valore metodologico del concetto di tensione: riesce ormai chiaro come questo esprima puramente un *costrutto* o *modello mentale* la cui invenzione è confortata dai proficui risultati ai quali si perviene col metodo su esso fondato.

20. Componenti speciali di tensione.

L'analisi del concetto di tensione, introdotto con riferimento alla configurazione deformata, comporta dunque l'esame dei nove parametri σ_{kh} definiti rispetto alla terna y_k di coordinate spaziali.

Si consideri allora nel punto P un tetraedro elementare di volume dV le cui tre facce ortogonali dA_h siano rispettivamente parallele ai tre piani coordinati e contrassegnate dall'indice relativo all'asse y_k ad esse normale mentre la faccia obliqua dA_n abbia giacitura nel piano Π_n di normale n rispetto al quale è stata definita la tensione $\mathbf{S}_n$.

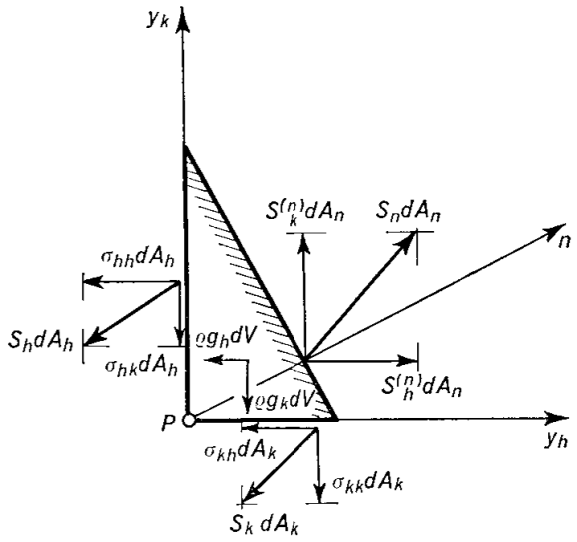

Fig. 10.

Su ognuna delle tre facce ortogonali dA_h del tetraedro agisce una forza $\mathbf{S}_h dA_h$, di componenti $\sigma_{hk}dA_h$, assunte con i versi della fig. 10 quando rappresentino le azioni esercitate su tale faccia dalla porzione di continuo situata dalla parte negativa degli assi corrispondenti.

Sulla faccia obliqua dA_n del tetraedro agisce la forza $\mathbf{S}_n dA_n$ di componenti $S_k^{(n)}dA_n$, mentre infine all'elemento dV è applicata la forza di volume $\varrho\mathbf{g}$, di componenti ϱg_k.

Con riferimento alla fig. 10 per il caso piano, le condizioni di equilibrio alla traslazione del tetraedro secondo le tre direzioni y_k permettono di collegare i parametri σ_{hk} alle componenti S_h:

$$S_k^{(n)}\, dA_n = \sigma_{hk}\, dA_h + \varrho g_k\, dV\,, \qquad [20.\,1]$$

o anche, dividendo per dA_n:

$$S_k^{(n)} = \sigma_{hk} \frac{dA_h}{dA_n} + \varrho g_k \frac{dV}{dA_n}\,. \qquad [20.\,2]$$

Introducendo i coseni direttori n_h della normale n alla faccia obliqua ed osservando che il rapporto tra l'elemento di volume e l'elemento

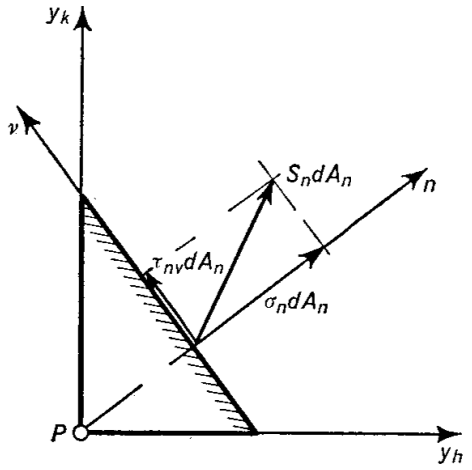

Fig. 11.

di area ha le dimensioni di un elemento lineare e quindi infinitesimo, cioè per:

$$\frac{dA_h}{dA_n} = n_h\,, \qquad \frac{dV}{dA_n} = 0\,, \qquad [20.\,3]$$

si ottengono le tre relazioni cercate:

$$S_k^{(n)} = \sigma_{hk} n_h\,, \qquad [20.\,4]$$

ottenute per la prima volta da CAUCHY [1].

Spesso, anzichè alle componenti S_k rispetto agli assi y_k, conviene riferire il vettore tensione $\mathbf{S}_n$ ad una terna intrinseca costituita dalla normale n alla faccia dA_n e da due assi ortogonali v_1 e v_2 contenuti nel piano della faccia stessa. In tale riferimento (fig. 11) le componenti della tensione $\mathbf{S}_n$ risultano una *tensione normale* σ_n e due *tensioni tangenziali* τ_{nv} $(v = v_1, v_2)$ e vengono ottenute proiettando le S_k sulla terna (n, v_1, v_2), cioè:

$$\sigma_n = \sigma_{hk}\, n_h\, n_k\,, \qquad \tau_{nv} = \sigma_{hk}\, n_h\, v_k\,, \qquad [20.\,5]$$

dove v_k indica i coseni direttori dell'asse v rispetto agli assi y_k.

[1] A. L. CAUCHY, *Exercices de Mathematique*, **2** (1827).

Mediante le [20. 4] o le [20. 5] siamo così in grado di determinare la tensione $\mathbf{S}_n$ agente sopra un qualsiasi piano della stella di centro P, e quindi la tensione $\{S\}$ nel punto P, note le nove componenti σ_{hk} agenti sulle facce ortogonali dA_h del tetraedro e dirette secondo gli assi y_k, per cui è pienamente giustificato il nome di *componenti di tensione* attribuito alle σ_{hk}.

Osserviamo inoltre che delle nove componenti le tre con indici uguali σ_{hh} hanno direzione coincidente con quella dell'asse y_h normale alla faccia dA_h sulla quale agiscono, e sono pertanto *tensioni normali*, mentre le rimanenti sei con indici distinti σ_{hk} hanno giacitura contenuta nel piano tangente alla faccia stessa dA_h e sono quindi *tensioni tangenziali*.

21. Equilibrio in un punto.

Mediante una superficie chiusa A' pensiamo di isolare nel continuo deformato V una regione arbitraria di volume V' (fig. 12): tale porzione sarà ancora in equilibrio pur di applicare ad essa le azioni trasmesse attraverso A' dalla parte rimanente $V - V'$ prima della sconnessione, cioè le tensioni $\{S\}$.

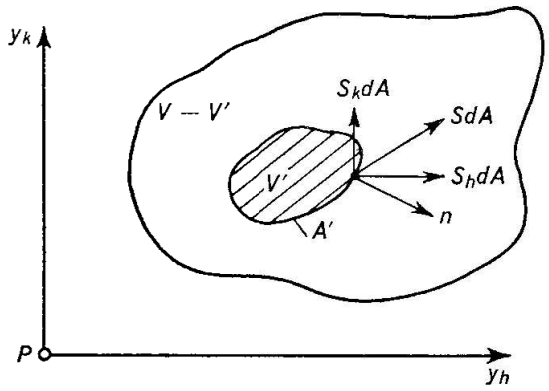

Fig. 12.

Per la porzione V' così isolata dal contesto dovranno quindi sussistere, nelle tre direzioni y_k, tre equazioni di equilibrio alla traslazione formalmente analoghe alle [18. 1] pur di sostituire alle forze $f_k dA$ applicate nei punti della superficie esterna A del continuo le forze $S_k dA$ applicate nei punti della superficie interna A':

$$\int_{V'} \varrho g_k \, dV + \int_{A'} S_k \, dA = 0 \,, \qquad [21.\ 1]$$

o anche, esprimendo le S_k in funzione delle σ_{hk} mediante le [20. 4]:

$$\int_{V'} \varrho g_k \, dV + \int_{A'} \sigma_{hk} \, n_h \, dA = 0 \,. \qquad [21.\ 2]$$

Ammesso che le funzioni integrande ed il loro dominio di definizione possiedano le necessarie condizioni di regolarità perchè si possa applicare all'integrale di superficie la trasformazione di Gauss, ogni equazione verrà espressa da un unico integrale:

$$\int_{V'} (\sigma_{hk,h} + \varrho g_k) dV = 0 . \qquad [21.\ 3]$$

Un ragionamento analogo a quello esposto alla fine del § 8 nella deduzione della [8. 5] mostra l'equivalenza delle [21. 3] alle tre condizioni differenziali di equilibrio alla traslazione:

$$\sigma_{hk,h} + \varrho g_k = 0 , \qquad [21.\ 4]$$

valide in ogni punto interno P del continuo deformato e generalmente note col nome di *equazioni indefinite di equilibrio* o *equazioni di Cauchy* [1].

Le equazioni indefinite valgono in tutti i punti interni, cioè nei punti del dominio aperto V occupato dal continuo deformato. Nei punti della superficie chiusa A delimitante il continuo, cioè sulla frontiera del dominio, risultano invece tre relazioni finite del tipo [20. 4] dove alle componenti S_k si sostituiscono le forze di superficie f_k applicate proprio nei punti di A:

$$\sigma_{hk} n_h = f_k , \qquad [21.\ 5]$$

dette *equazioni ai limiti* o *condizioni statiche al contorno.*

Consideriamo ora le tre condizioni di equilibrio alla rotazione intorno agli assi y_l scrivendo così per la porzione V' tre equazioni formalmente analoghe alle [18. 2]:

$$\delta_{rkl} \left[\int_{V'} \varrho g_k \, y_l \, dV + \int_{A'} S_k \, y_l \, dA \right] = 0 , \qquad [21.\ 6]$$

dalle quali, esprimendo le S_k in termini delle componenti σ_{hk} e trasformando l'integrale di superficie in un integrale di volume mediante la formula di Gauss:

$$\delta_{rkl} \int_{V'} [(\sigma_{hk} \, y_l)_{,h} + \varrho g_k \, y_l] \, dV = 0 . \qquad [21.\ 7]$$

Lo sviluppo delle derivazioni indicate sotto segno di integrale conduce alla:

$$\delta_{rkl} \int_{V'} [(\sigma_{hk,h} + \varrho g_k) \, y_l + \sigma_{hk} \, y_{l,h}] \, dV = 0 , \qquad [21.\ 8]$$

---

[1] A. L. Cauchy, *Exercices de Mathematique*, **2** (1827).

che, per le equazioni di equilibrio alla traslazione [21. 4] e considerazioni analoghe a quanto prima discusso, equivalgono alle seguenti equazioni valide in ogni punto P di V:

$$\delta_{rkl}\sigma_{hk}y_{l,h} = 0 \, . \qquad [21.\ 9]$$

Ora, poichè le y_h sono variabili indipendenti, risulta $y_{l,h} = \delta_{lh}$ e quindi: $\delta_{rkl}\delta_{lh} = \delta_{rkh}$, da cui, per ogni determinazione dell'indice $r = 1, 2, 3$, la somma [21. 9] si riduce ai due soli termini:

$$\delta_{rkh}\sigma_{hk} + \delta_{rhk}\sigma_{kh} = 0 \, , \qquad [21.\ 10]$$

o anche, dalla definizione dell'operatore di Ricci, cioè $\delta_{rkh} = +1$, e $\delta_{rhk} = -1$:

$$\sigma_{hk} = \sigma_{kh} \, . \qquad [21.\ 11]$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione implicano dunque in ogni punto P l'uguaglianza di ogni coppia di componenti tangenziali di tensione con indici scambiati: tale simmetria riduce le componenti σ_{hk} effettivamente distinte da nove a sei.

22. Tensore della tensione.

Analogamente a quanto fu esposto per le componenti della deformazione esaminiamo il comportamento delle σ_{hk} rispetto ad una trasformazione ortogonale degli assi nella rotazione dalla terna y_k ad una nuova terna y_L.

Le componenti σ_{hk} individuano la tensione $\mathbf{S}_n$ agente su un generico elemento piano di normale n nella stella di piani con centro in un punto P del continuo deformato mediante le relazioni [20. 4], ed in particolare la tensione $\mathbf{S}_L$ agente sul piano normale all'asse y_L del nuovo riferimento ortogonale e di componenti:

$$S_k = \sigma_{hk}n_{hL} \, , \qquad [22.\ 1]$$

avendo posto nella [20. 4] $n_k = n_{hL}$ per la coincidenza tra la normale n e l'asse y_L.

D'altra parte, con riferimento alla fig. 13 per il caso piano, l'elemento superficiale di normale n appartiene ad un piano coordinato della nuova terna y_L sul quale potremo quindi definire tre componenti di tensione σ_{LM} ($L, M = 1, 2, 3$):

$$\sigma_{LM} = S_k n_{kM} \, , \qquad [22.\ 2]$$

indicando con n_{kM} i coseni direttori dell'asse y_k, secondo il quale è valutata la componente S_k di $\mathbf{S}_L$, rispetto all'asse y_M, secondo il quale è eseguita ora la proiezione di $\mathbf{S}_L$.

Il confronto della [22. 1] con la [22. 2] conduce alle relazioni:

$$\sigma_{LM} = \sigma_{hk} n_{hL} n_{kM} , \qquad [22.\ 3]$$

cioè, in una rotazione della terna ortogonale di riferimento le componenti di tensione σ_{hk} si trasformano secondo la caratteristica legge tensoriale: esse sono così le componenti di un tensore doppio e, in virtù delle [21. 11], simmetrico, detto *tensore di tensione.*

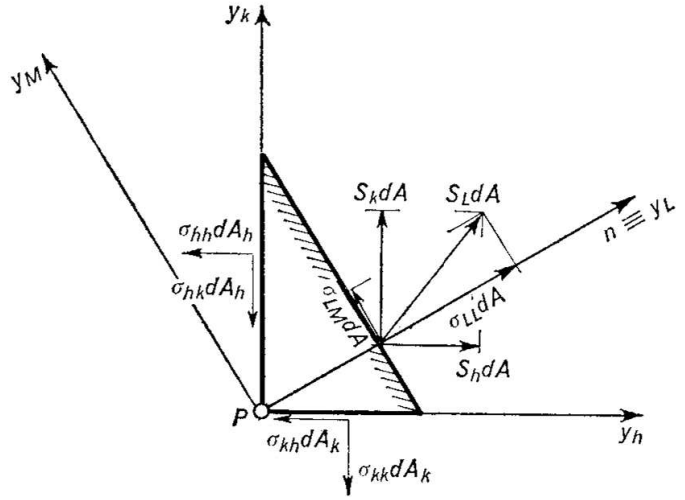

Fig. 13.

È di un certo interesse ricordare che il nome di tensore deriva proprio dall'analisi dello stato di tensione, al quale furono riconosciute per la prima volta le proprietà sopra ricordate.

23. Direzioni e tensioni principali.

Il carattere tensoriale delle σ_{hk} comporta l'esistenza di un riferimento privilegiato (y_L, y_M, y_N) rispetto al quale si annullano le componenti di tensione σ_{LM} con indici distinti, cioè le tensioni tangenziali.

La determinazione di questo particolare riferimento, detto *principale,* potrebbe essere ottenuta formalmente con lo stesso procedimento impiegato nella riduzione agli assi principali del tensore di deformazione: appare opportuno però seguire una via di significato meccanico più evidente.

Sia allora y_L una direzione principale, in modo che la tensione $\mathbf{S}_n$ agente sull'elemento superficiale piano perpendicolare a y_L si riduca, per definizione, alla sola componente normale $\sigma_{(L)}$: la proiezione S_k della $S_n = \sigma_{(L)}$ nella direzione y_k è con riferimento alla fig. 14:

$$S_k = \sigma_{(L)} n_{kL} = \delta_{hk} \sigma_{(L)} n_{hL} . \qquad [23.\ 1]$$

D'altra parte le componenti S_k possono essere espresse in termini delle componenti σ_{hk} relative al riferimento y_k, attraverso le relazioni di Cauchy [20. 4], che, per $n \equiv y_L$ e quindi $n_h \equiv n_{hL}$, divengono:

$$S_k = \sigma_{hk} n_{hL} , \qquad [23. 2]$$

da cui confrontando con le [23. 1]:

$$(\sigma_{hk} - \delta_{hk}\sigma_{(L)})\, n_{hL} = 0. \qquad [23. 3]$$

Dovendosi necessariamente escludere la soluzione identicamente nulla per le incognite n_{hL} del sistema [23. 3] ne discende la condizione:

$$\mathrm{Det}\,(\sigma_{hk} - \delta_{hk}\,\sigma_L) = 0 , \qquad [23. 4]$$

cioè l'equazione secolare caratteristica del tensore di componenti σ_{hk}.

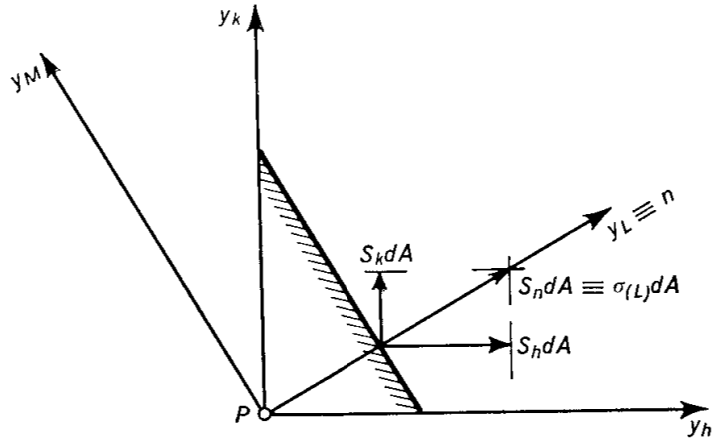

Fig. 14.

Sostituendo ordinatamente nel sistema [23. 3] le *tensioni principali* σ_{I}, σ_{II}, σ_{III}, ottenute come radici reali dell'equazione caratteristica, vengono determinate tre terne di coseni direttori n_{hL} che individuano le *direzioni principali* y_L.

Anche per il tensore di tensione si possono definire tre *invarianti* I_1, I_2, I_3 come coefficienti dell'equazione di terzo grado:

$$\sigma_L^3 - I_1\sigma_L^2 + I_2\,\sigma_L - I_3 = 0 , \qquad [23. 5]$$

e precisamente le grandezze:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ I_3 &= \mathrm{Det}\,\sigma_{hk} \end{aligned} \qquad [23. 6]$$

o anche, in termini delle componenti principali:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}} \\ I_2 &= \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} \\ I_3 &= \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} . \end{aligned} \qquad [23. 7]$$

In ogni punto del continuo deformato esistono dunque tre piani mutuamente ortogonali sui quali agisce esclusivamente una tensione normale, rispettivamente $\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}}$. Tali tensioni hanno variazione prima nulla rispetto alle direzioni individuate dai coseni n_{hL}, come mostrerebbe una ricerca sostanzialmente analoga a quella svolta nel § 11 per le componenti di deformazione, ed in particolare una di esse è *massima*, una è *minima*, una è *semplicemente stazionaria*, secondo la disuguaglianza convenzionale:

$$\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}} . \qquad [23.\ 8]$$

Quando l'equazione secolare ha radici multiple si presentano per le direzioni principali gli stessi casi di indeterminazione discussi nel § 10 per il tensore di deformazione.

Se $I_3 = \mathrm{Det}\, \sigma_{hk}$ è diverso da zero, tutte e tre le tensioni principali risultano diverse da zero e caratterizzano uno stato di tensione denominato *triassiale*.

Quando invece $I_3 = 0$, almeno una tensione principale risulta nulla: lo stato di tensione corrispondente viene detto *biassiale*, se caratterizzato da due tensioni principali diverse da zero ($I_2 \neq 0$), *monoassiale*, se da una sola tensione principale diversa da zero ($I_2 = 0$).

Le normali ai piani principali costituiscono in ogni punto del continuo una terna di direzioni principali, che hanno in generale giacitura diversa da punto a punto ed inviluppano tre congruenze curvilinee mutuamente ortogonali dette *linee isostatiche*. Secondo le tangenti alle isostatiche si hanno quindi per definizione solo tensioni normali: la conoscenza delle isostatiche permetterebbe di concentrare la materia costituente il continuo in modo da realizzare esclusivamente sollecitazioni di trazione e compressione, escludendo ogni azione delle tensioni tangenziali, che di regola comportano condizioni più sfavorevoli nel cimento del materiale.

In natura esistono esempi suggestivi di strutture organiche nelle quali le fibre resistenti hanno l'andamento delle linee isostatiche: classica è l'analisi sulla disposizione delle trabecole ossee del femore umano.

Come aspetto duale del problema sopra discusso possiamo domandarci se esistono degli elementi superficiali piani sui quali, viceversa, è nulla la componente normale σ_n della tensione e che sopportano quindi esclusivamente tensioni tangenziali.

Posta uguale a zero l'espressione della tensione normale σ_n agente sull'elemento superficiale generico data dalla prima delle [20. 5], otteniamo:

$$\sigma_{hk} n_h n_k = 0 , \qquad [23.\ 9]$$

cioè, assumendo i coseni direttori come coordinate, l'equazione di un cono quadrico non degenere con vertice in P le cui generatrici sono perpendicolari ai piani sui quali è nulla la tensione normale.

In termini delle componenti principali di tensione l'equazione del cono si semplifica nella:

$$\sigma_{(L)} n_L n_L = 0 \,, \qquad [23.\,10]$$

da cui si deduce che gli assi del cono coincidono con gli assi y_L del riferimento principale.

Poichè le generatrici del cono possono o no risultare reali riesce chiaro che l'esistenza di piani a tensione normale nulla non è assicurata in ogni caso, al contrario di ciò che avviene per i tre piani principali.

24. Deviatore di tensione.

Anche il tensore di tensione di componenti σ_{hk}, come già vedemmo per il tensore di deformazione, può essere decomposto in due parti:

$$\sigma_{hk} = \delta_{hk} \bar{\sigma} + s_{hk} \,, \qquad [24.\,1]$$

e precisamente nella sua componente *isotropa*, costituita dalla tensione normale media:

$$\bar{\sigma} = \tfrac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \,, \qquad [24.\,2]$$

e nel *deviatore di tensione* di componenti s_{hk}.

Le componenti del deviatore con indici distinti coincidono con le componenti miste del tensore, cioè con le tensioni tangenziali; le direzioni principali del deviatore ($s_{hk} = 0$ per $h \neq k$) coincidono perciò con le direzioni principali del tensore di tensione ($\sigma_{hk} = 0$ per $h \neq k$), mentre i valori delle tensioni principali del deviatore sono dati dalle:

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \bar{\sigma}, \qquad s_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{II}} - \bar{\sigma}, \qquad s_{\mathrm{III}} = \sigma_{\mathrm{III}} - \bar{\sigma}. \qquad [24.\,3]$$

Dalla definizione [24. 1] segue immediatamente l'annullarsi dell'invariante lineare J_1 del deviatore ed in definitiva:

$$\begin{aligned} J_1 &= s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \\ J_2 &= -\tfrac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2 s_{12}^2 + 2 s_{23}^2 + 2 s_{31}^2) \\ J_3 &= \mathrm{Det}\, s_{hk} \end{aligned} \qquad [24.\,4]$$

o, in termini delle componenti principali:

$$\begin{aligned} J_1 &= s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}} = 0 \\ J_2 &= -\tfrac{1}{2} (s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2) \\ J_3 &= \tfrac{1}{3} (s_{\mathrm{I}}^3 + s_{\mathrm{II}}^3 + s_{\mathrm{III}}^3) \,. \end{aligned} \qquad [24.\,5]$$

Il deviatore di tensione acquista un particolare significato quando lo stato di tensione non è influenzato da una pressione puramente idrostatica, espressa proprio dalla tensione normale media $\bar{\sigma}$.

25. Rappresentazione dello stato di tensione.

Anche per il tensore di tensione le proprietà dedotte analiticamente possono essere formulate in linguaggio puramente geometrico in quanto sono tipiche di ogni tensore simmetrico del secondo ordine al quale può essere formalmente associata una quadrica.

Tra queste rappresentazioni geometriche presenta un particolare interesse anche applicativo una originale corrispondenza introdotta da OTTO MOHR [1] tra gli elementi superficiali di una stella di piani ed i punti rappresentativi dello stato di tensione su questi elementi.

Nel riferimento principale $y_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{II}}, y_{\mathrm{III}}$ consideriamo la sfera di raggio infinitesimo:

$$dy_L dy_L = dr^2, \qquad [25.\ 1]$$

avente il centro in un punto P del continuo deformato: i piani tangenti alla sfera costituiscono la totalità dei piani della stella di centro P.

Sia dA_n l'elemento superficiale appartenente al piano generico tangente alla sfera nel punto Q ed individuato dalla normale n di coseni direttori $n_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{III}}$ rispetto agli assi principali e quindi tali da verificare le relazioni:

$$n_L dr = dy_L\,, \qquad [25.\ 2]$$

in modo che, sostituendo le coordinate y_L con i corrispondenti coseni direttori, ci si possa riferire alla sfera di raggio unitario:

$$n_L n_L = 1\,. \qquad [25.\ 3]$$

La tensione $\mathbf{S}_n$ agente sull'elemento dA_n resta individuata dalle sue componenti S_L espresse per il riferimento principale da relazioni analoghe alle [20, 4]:

$$|\mathbf{S}_n|^2 = S_L S_L = \sigma_{\mathrm{I}}^2 n_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 n_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 n_{\mathrm{III}}^2\,, \qquad [25.\ 4]$$

o anche, in alternativa per le [20. 5], dalle componenti normale σ_n e tangenziale τ_n nel piano definito dalle direzioni dei vettori $\mathbf{S}_n$ e $\mathbf{n}$:

$$|\mathbf{S}_n|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2\,. \qquad [25.\ 5]$$

A sua volta la σ_n risulta da una immediata particolarizzazione della prima [20. 5] in termini delle componenti principali, e precisamente per $h = k = L$:

$$\sigma_n = \sigma_{(L)} n_L n_L\,. \qquad [25.\ 6]$$

[1] O. MOHR, *Zivilingenieur*, 113 (1882).

Si hanno in definitiva le tre relazioni seguenti ottenute dalle [25. 3], [25. 4], [25. 5], [25. 6] scritte per disteso:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}} n_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}} n_{\mathrm{III}}^2 \\ \tau_n^2 &= \sigma_{\mathrm{I}}^2 n_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 n_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 n_{\mathrm{III}}^2 - (\sigma_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}} n_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}} n_{\mathrm{III}}^2) \\ 1 &= n_{\mathrm{I}}^2 + n_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}}^2 \end{aligned} \qquad [25.\ 7]$$

mediante le quali riesce possibile determinare le componenti σ_n e τ_n della tensione agente sull'elemento piano generico definito dalla normale n alla sua giacitura. Le [25. 7] istituiscono così una corrispondenza tra i punti $Q \equiv (n_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{III}})$ della sfera unitaria di centro P ed i punti $S \equiv (\sigma_n, \tau_n)$ del piano delle tensioni in modo tale che le coordinate di S individuano lo stato di tensione sull'elemento piano per Q.

Risolviamo le [25. 7] rispetto ai coseni direttori:

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{I}}^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{III}}) + \tau_n^2}{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})} \\ n_{\mathrm{II}}^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{I}}) + \tau_n^2}{(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}})} \\ n_{\mathrm{III}}^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_n - \sigma_{\mathrm{II}}) + \tau_n^2}{(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}})} \end{aligned} \qquad [25.\ 8]$$

ed osserviamo che ai tre cerchi principali della sfera corrispondono sul piano delle tensioni i tre cerchi ottenuti dalle [25. 8] per $n_{\mathrm{I}} = 0$, $n_{\mathrm{II}} = 0$, $n_{\mathrm{III}} = 0$, ed aventi le equazioni:

$$\begin{aligned} [\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}})]^2 + \tau_n^2 &= \tfrac{1}{4}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 \\ [\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{I}})]^2 + \tau_n^2 &= \tfrac{1}{4}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 \\ [\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}})]^2 + \tau_n^2 &= \tfrac{1}{4}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 . \end{aligned} \qquad [25.\ 9]$$

Detti cerchi individuano così gli stati di tensione sugli elementi superficiali appartenenti rispettivamente ad uno dei tre fasci di piani il cui sostegno è un asse principale; risultano a due a due tangenti tra loro nei punti M_{I}, M_{II}, M_{III}, immagini nel piano (σ, τ) dei punti $Q_{\mathrm{I}}, Q_{\mathrm{II}}, Q_{\mathrm{III}}$ della sfera, ed hanno raggi:

$$R_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}), \quad R_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}), \quad R_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}), \qquad [25.\ 10]$$

e centri C_{I}, C_{II}, C_{III} sull'asse delle σ alle distanze dall'origine:

$$d_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}), \quad d_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{I}}), \quad d_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}}). \qquad [25.\ 11]$$

Supposta valida la convenzione $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, l'esame dei denominatori delle [25. 8] mostra che:

$$\begin{aligned}(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) &> 0\\ (\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I) &< 0\\ (\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) &> 0\,,\end{aligned} \qquad [25.\ 12]$$

e quindi il carattere definito positivo dei primi membri impone ai numeratori:

$$\begin{aligned}(\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) + \tau_n^2 &\geqslant 0\\ (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I) + \tau_n^2 &\leqslant 0\\ (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) + \tau_n^2 &\geqslant 0\,.\end{aligned} \qquad [25.\ 13]$$

Il punto rappresentativo dello stato di tensione deve risultare perciò interno al cerchio C_{II} ed esterno ai cerchi C_I e C_{III}, come appare nella fig. 15.

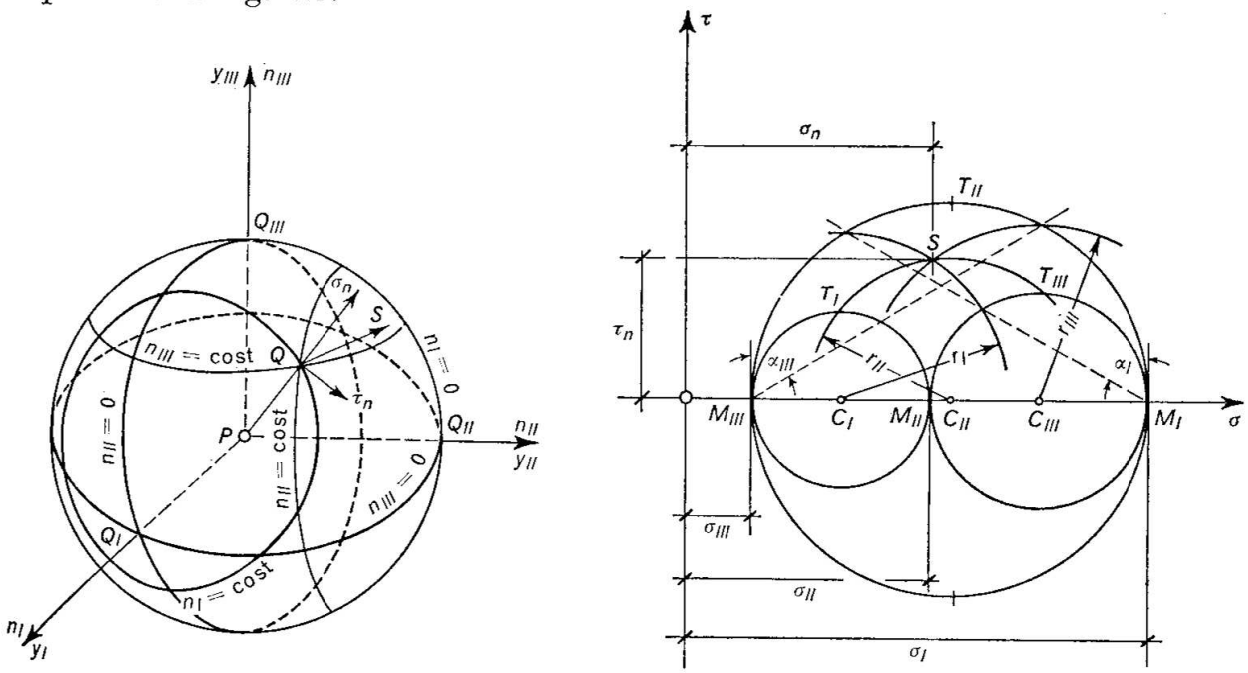

Fig. 15.

Consideriamo ora i tre cerchi della sfera giacenti nei tre piani della stella di centro Q paralleli ai piani principali coordinati e individuati dalle equazioni:

$$n_I = \text{cost}\,, \qquad n_{II} = \text{cost}\,, \qquad n_{III} = \text{cost}\,. \qquad [25.\ 14]$$

Assumendo nelle [25. 7] i coseni direttori come parametri, i punti rappresentativi dello stato di tensione sugli elementi tangenti ai pa-

ralleli [25. 14] appartengono dunque a tre cerchi del piano $(\sigma\,\tau)$ aventi gli stessi centri $C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}$ dei cerchi principali e raggi $r_{\mathrm{I}}, r_{\mathrm{II}}, r_{\mathrm{III}}$, e la cui intersezione S di coordinate σ_n, τ_n è proprio il punto rappresentativo dello stato di tensione sull'elemento superficiale del piano tangente alla sfera nel punto Q, intersezione dei cerchi paralleli [25. 14].

Assegnato allora il punto Q mediante i tre coseni $n_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{III}}$ dei tre angoli $\alpha_{\mathrm{I}}, \alpha_{\mathrm{II}}, \alpha_{\mathrm{III}}$ che la direzione $\overline{PQ}$ forma con le direzioni positive degli assi coordinati, il punto tensione S resta individuato mediante la costruzione geometrica indicata in fig. 15.

La tensione tangenziale relativa all'elemento piano generico per Q è rappresentata dall'ordinata del punto tensione S nel piano $(\sigma\,\tau)$. Per ogni elemento superficiale dei piani del fascio avente per sostegno un asse principale, il valore massimo della tensione tangenziale si ottiene quando il punto rappresentativo occupa le posizioni $T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}$ sul corrispondente cerchio $C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}$.

I raggi dei tre cerchi principali di Mohr forniscono così i valori estremi della tensione tangenziale per i tre stati di tensione $(\sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}})$, $(\sigma_{\mathrm{III}}, \sigma_{\mathrm{I}})$, $(\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}})$, cioè:

$$\tau_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}), \quad \tau_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}), \quad \tau_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}), \qquad [25.\,15]$$

e tali quindi da verificare la condizione:

$$\tau_{\mathrm{I}} + \tau_{\mathrm{II}} + \tau_{\mathrm{III}} = 0. \qquad [25.\,16]$$

Sui tre elementi piani che sopportano i valori [25. 15], ai quali diamo il nome di *tensioni tangenziali principali*, si esercitano anche tensioni normali espresse dalle ascisse dei punti $T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}$ rispettivamente:

$$\sigma_n^{(\mathrm{I})} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}), \quad \sigma_n^{(\mathrm{II})} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{I}}), \quad \sigma_n^{(\mathrm{III})} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}}). \qquad [25.\,17]$$

Le tensioni tangenziali principali possono essere facilmente collegate alle componenti principali $s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}, s_{\mathrm{III}}$ del deviatore di tensione. Sviluppando le [24. 3] abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{I}} &= \sigma_{\mathrm{I}} - \bar{\sigma} = \tfrac{1}{3}(2\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}) = \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}) + \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}),\\
s_{\mathrm{II}} &= \sigma_{\mathrm{II}} - \bar{\sigma} = \tfrac{1}{3}(2\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}) = \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}) + \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}}), \qquad [25.\,18]\\
s_{\mathrm{III}} &= \sigma_{\mathrm{III}} - \bar{\sigma} = \tfrac{1}{3}(2\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}) = \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}) + \tfrac{1}{3}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}})
\end{aligned}$$

e quindi confrontando con le [25. 15] anche:

$$s_{\mathrm{I}} = \tfrac{2}{3}(\tau_{\mathrm{III}} - \tau_{\mathrm{II}}), \quad s_{\mathrm{II}} = \tfrac{2}{3}(\tau_{\mathrm{I}} - \tau_{\mathrm{III}}), \quad s_{\mathrm{III}} = \tfrac{2}{3}(\tau_{\mathrm{II}} - \tau_{\mathrm{I}}), \qquad [25.\,19]$$

cioè, le componenti principali del deviatore di tensione vengono espresse in termini delle tensioni tangenziali principali.

26. Rappresentazioni particolari dello stato di tensione.

La costruzione indicata nel precedente § 25 si semplifica notevolmente qualora ci si limiti a considerare lo stato di tensione sugli elementi superficiali di un fascio di piani avente per sostegno un asse principale, ad esempio, y_{III}.

In tale caso il vettore $\mathbf{S}_n$ della tensione su un generico piano di normale n e appartenente al fascio (y_{III}) deve essere contenuto nel piano principale $(y_I\, y_{II})$ normale a y_{III}. Infatti una componente di $\mathbf{S}_n$

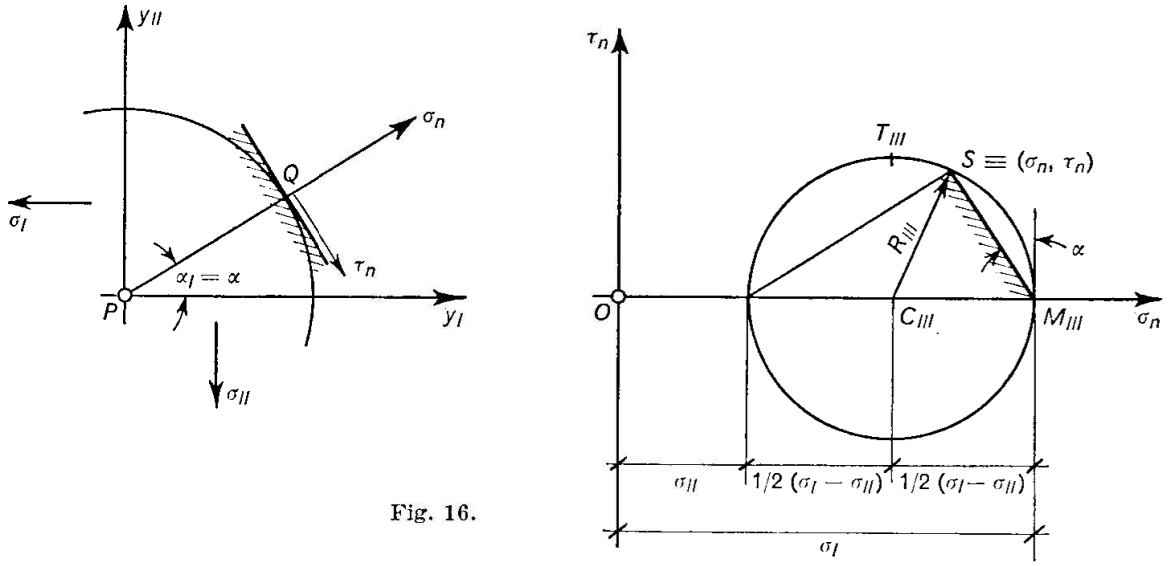

Fig. 16.

nella direzione y_{III} risulterebbe una tensione tangenziale $\tau_{n\,III}$ e, per l'equilibrio alla rotazione espresso dalla condizione [21. 11], dovrebbe comportare l'esistenza della componente coniugata $\tau_{III\,n}$, agente sul piano $(y_I\, y_{II})$ che è per ipotesi piano principale e non può quindi essere soggetto a tensioni tangenziali.

Il vettore $\overline{PQ}$ giace ora nel piano $(y_I\, y_{II})$ e rappresenta la normale al piano generico del fascio (y_{III}). Mentre l'elemento superficiale in Q descrive il cerchio massimo $n_{III} = 0$ della sfera il punto immagine descrive sul piano delle tensioni la circonferenza C_{III}, alla quale si riduce così la rappresentazione generale di Mohr, come è indicato in fig. 16.

Si hanno allora le espressioni delle componenti di tensione σ_n e τ_n:

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) + \tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})\cos 2\alpha_I\,, \qquad \tau_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})\sin 2\alpha_I \qquad [26.\,1]$$

e, per quadratura e somma, l'equazione del cerchio rappresentativo dello stato di tensione:

$$[\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})]^2 + \tau_n^2 = \tfrac{1}{4}(\sigma_I - \sigma_{II})^2\,. \qquad [26.\,2]$$

La tensione tangenziale oscilla tra il valore zero, corrispondente ai piani principali, ed il valore $\frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})$ che raggiunge per $\alpha = \pm \pi/4$.

Se assumiamo come riferimento nel piano $(y_{\mathrm{I}}\, y_{\mathrm{II}})$, invece degli assi principali $y_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{II}}$, una coppia qualsiasi di assi ortogonali y_1, y_2, la rappresentazione precedente si modifica permettendo di definire lo stato di tensione $\mathbf{S}_n$ sull'elemento piano generico del fascio (y_{III}) in termini delle componenti speciali di tensione relative a due piani del fascio rispettivamente perpendicolari a y_1 e y_2, senza essere più necessaria la determinazione preventiva degli assi principali.

Riprendendo in esame le espressioni generali [20. 5], la trasformazione diviene in tal caso:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11}\, n_1^2 + \sigma_{22}\, n_2^2 + 2\sigma_{12}\, n_1\, n_2 \\ \tau_n &= \sigma_{11}\, n_1\, \nu_1 + \sigma_{22}\, n_2\, \nu_2 + \sigma_{12}\,(n_1\, \nu_2 + n_2\, \nu_1), \end{aligned} \qquad [26.\ 3]$$

dove:

$$n_1 = \nu_2 = \cos\alpha, \qquad n_2 = -\nu_1 = \sin\alpha, \qquad n_2^2 = 1 - n_1^2\,, \qquad [26.\ 4]$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\alpha + \sigma_{12}\sin 2\alpha \\ \tau_n &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha\,. \end{aligned} \qquad [26.\ 5]$$

Trasportando il termine $\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ al primo membro della [26. 5], per quadratura e somma si ottiene l'equazione di un cerchio:

$$[\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})]^2 + \tau_n^2 = \tfrac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2, \qquad [26.\ 6]$$

avente il centro C sull'asse delle σ a distanza d dall'origine e raggio r, espressi dalle:

$$d = \tfrac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \qquad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\,. \qquad [26.\ 7]$$

Il punto M del cerchio delle tensioni, di coordinate $(\sigma_{11}, -\sigma_{12})$, prende il nome di *polo della rappresentazione piana di Mohr*: conducendo per esso la parallela alla giacitura dell'elemento generico si avrà come intersezione sul cerchio *il punto rappresentativo S dello stato di tensione*, perchè le coordinate (σ, τ) di S esprimono proprio le componenti di tensione sull'elemento considerato.

Infatti moltiplicando la prima delle [26. 3] per $\cos\alpha$ e la seconda per $\sin\alpha$, queste divengono:

$$\begin{aligned} \sigma_n \cos\alpha &= \sigma_{11}\cos^3\alpha + \sigma_{22}\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos^2\alpha \\ \tau_n \sin\alpha &= (-\sigma_{11} + \sigma_{22})\sin^2\alpha\cos\alpha + \sigma_{12}\sin\alpha\cos^2\alpha - \sigma_{12}\sin^3\alpha \end{aligned} \qquad [26.\ 8]$$

dalle quali, sottraendo membro a membro e dividendo per $\cos\alpha$, otteniamo la relazione:

$$\sigma_n = \tau_n \operatorname{tg}\alpha = \sigma_{11} + \sigma_{12}\operatorname{tg}\alpha\,, \qquad [26.\,9]$$

che dimostra l'asserto, come appare dalla fig. 17.

Le intersezioni S_{I} e S_{II} del cerchio con l'asse σ individuano i due punti rappresentativi dello stato di tensione sugli elementi piani principali: le loro ascisse $\overline{OS}_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{I}}$, $\overline{OS}_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{II}}$ esprimono i valori delle

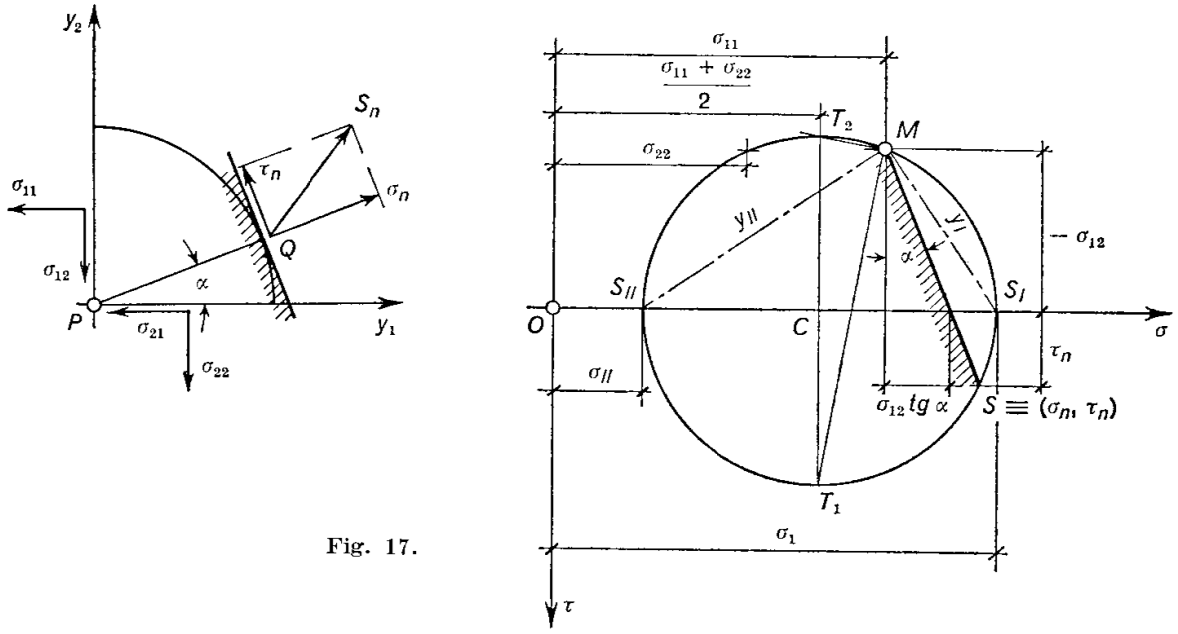

Fig. 17.

tensioni principali, le cui direzioni $\overline{MS}_{\mathrm{I}}$, $\overline{MS}_{\mathrm{II}}$ sono caratterizzate dal valore α_0 dell'angolo:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\,. \qquad [26.\,10]$$

I punti rappresentativi T_1 e T_2 individuano invece i valori estremi della tensione tangenziale:

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\mathrm{I}}\\ \tau_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = \pm\frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - {}_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\,, \qquad [26.\,11]$$

e le direzioni $\overline{MT}_1$, $\overline{MT}_2$ degli elementi tra loro ortogonali che sopportano tali tensioni sono caratterizzate dal valore α_T dell'angolo:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_T = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\,, \qquad [26.\,12]$$

e formano angoli di $\pi/4$ con gli elementi principali.

27. Stato di tensione per spostamenti infinitesimi.

L'analisi dello stato di tensione è stata sviluppata con riguardo alla configurazione deformata del corpo, assumendo quindi come sistema di riferimento la terna di coordinate spaziali y_k che individuano appunto la posizione della particella materiale a deformazione avvenuta.

Le equazioni di equilibrio indefinite e ai limiti:

$$\sigma_{hk,h} + \varrho g_k = 0 \quad \text{in } V \qquad [27.1]$$

$$\sigma_{hk}\, n_h = f_k \quad \text{su } A \qquad [27.2]$$

valide rispettivamente nei punti interni del volume V e nei punti della sua superficie A, presentano un aspetto semplice solo in apparenza, perchè, in sostanza, esigono la conoscenza della configurazione deformata alla quale sono riferite.

La risoluzione delle [27. 1] e [27. 2] comporta così la necessità di esprimere in modo esplicito gli elementi incogniti caratteristici del corpo deformato in termini degli elementi corrispondenti noti del corpo indeformato.

La riduzione delle [27. 1] e [27. 2] alla configurazione indeformata esige la conoscenza della legge di trasformazione $y_k(x_i)$, che permette di ottenere le espressioni delle coordinate y_k dell'elemento deformato in funzione delle coordinate x_i dell'elemento indeformato, e di conseguenza quelle dei parametri contenuti nelle [27. 1], [27. 2]: elemento superficiale dA, massa specifica ϱ, coseni direttori n_h, in funzione dei corrispondenti parametri dA_0, ϱ_0, n_i.

Per evitare la notevole laboriosità della trasformazione diretta delle equazioni di equilibrio dalla forma spaziale alla forma materiale, affronteremo tale problema con un procedimento indiretto, utilizzando uno strumento di notevole efficacia euristica, il teorema dei lavori virtuali, come sarà esposto nel § 33. Ora, invece, vogliamo discutere una semplificazione essenziale delle [27. 1] e [27. 2] nel caso particolarmente interessante di spostamenti e rotazioni infinitesimi.

Come fu già detto nel § 15, quando le componenti di spostamento u_k e le loro derivate $u_{k,i}$ sono molto piccole rispetto alle dimensioni del corpo il sistema di coordinate spaziali y_k può essere assunto coincidente con il sistema di coordinate materiali x_i. In tal caso la deformazione viene riguardata come infinitesima e le equazioni precedenti mantengono inalterata la loro struttura anche quando riferite agli elementi della configurazione indeformata, cioè:

$$\sigma_{ij,i} + \varrho_0 g_j = 0 \quad \text{in } V_0 = V \qquad [27.3]$$

$$\sigma_{ij}\, n_i = f_j \quad \text{su } A_0 \equiv A\,. \qquad [27.4]$$

È importante notare la differenza profonda tra le [27. 1], [27. 2] e le [27. 3], [27. 4]: queste ultime non contengono traccia alcuna della deformazione ed equivalgono dunque a trascurare l'influenza dello stato di deformazione sullo stato di tensione nell'analisi dell'equilibrio.

Naturalmente una siffatta semplificazione, ammissibile in tutto rigore per deformazioni infinitesime, riesce soltanto approssimata quando la deformazione è, piccola bensì, ma finita.

L'adozione delle [27. 3] e [27. 4] in luogo delle [27. 1] e [27. 2] appare tuttavia sufficiente nello studio di una vasta classe di problemi nei quali l'influenza della deformazione sullo stato di tensione ha valore esclusivamente *quantitativo*, e conduce a risultati in accordo con l'esperienza.

Quando però tale influenza abbia carattere *qualitativo*, e quindi il problema tragga proprio da questa il suo significato, l'ipotesi che ci ha permesso di sostituire le [27. 3] e [27. 4] alle [27. 1] e [27. 2] è evidentemente contraddittoria, in quanto non potrebbe avere senso la pretesa di esaminare gli effetti della influenza dello stato di deformazione sullo stato di tensione per mezzo di equazioni dove detta influenza è negata *a priori*.

Una tale situazione si presenta, in particolare, nei problemi collegati alla stabilità dell'equilibrio, nei quali si vuole cioè giudicare la *qualità* dell'equilibrio di una certa configurazione deformata mediante il confronto con una configurazione variata.