CAPITOLO I

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

1. Sistemi di riferimento.

Un sistema materiale qualsiasi potrà essere riguardato come continuo qualora si identifichino i suoi punti materiali con i punti di una porzione dello spazio continuo occupata dal sistema in un determinato istante. Più precisamente, intenderemo come continuo un insieme di punti materiali, dotato di una misura di insieme definita dalla massa m, supposta una funzione assolutamente continua alla quale resti così associata in ogni istante di tempo una massa specifica ϱ.

Il concetto di deformazione per un sistema continuo si fonda sul cambiamento di posizione relativa tra i suoi punti materiali nel passaggio da uno stato iniziale ad uno stato attuale. Se allora in un certo istante t_0, assunto come iniziale, riferiamo le posizioni dei punti del continuo, costituenti nel loro insieme una certa configurazione C_0, ad una terna cartesiana (x_1, x_2, x_3), la posizione del punto generico P_0 resta individuata dalle tre coordinate x_i $(i = 1, 2, 3)$, e naturalmente dal parametro t_0, mentre in un istante successivo t, nel quale i punti materiali del continuo occuperanno le posizioni di una nuova configurazione C, in generale distinta da C_0, la posizione P in cui verrà a trovarsi il punto P_0 resterà individuata in una seconda terna cartesiana (y_1, y_2, y_3) dalle tre coordinate y_k $(k = 1, 2, 3)$, e dal tempo t.

Il moto del continuo tra gli istanti t_0 e t è dunque rappresentabile con equazioni della forma:

$$y_k = y_k(x_1, x_2, x_3, t), \tag{1. 1}$$

nelle quali supponiamo le y_k funzioni continue, monodrome e derivabili sino all'ordine richiesto in tutti i punti dell'insieme C, eccettuato al più un sottoinsieme di punti, curve e superficie, dove le funzioni stesse possono anche presentare singolarità.

Le [1. 1] permettono così di descrivere il moto dei punti materiali del continuo in termini delle coordinate x_i relative alle loro posizioni iniziali, assunte come variabili indipendenti.

La possibilità di inversione delle [1. 1], cioè l'esistenza di equazioni del tipo:

$$x_i = x_i\,(y_1, y_2, y_3, t), \qquad [1.\ 2]$$

è subordinata, come noto, alla condizione:

$$\mathrm{Det}\, y_{k,i} \neq 0, \qquad [1.\ 3]$$

per il determinante funzionale o jacobiano della trasformazione [1. 1], avendo indicato semplicemente con l'indice i preceduto dalla virgola l'operazione di derivazione parziale rispetto alle variabili x_i.

Il moto del continuo può essere dunque descritto assumendo indifferentemente come variabili indipendenti sia le x_i sia le y_k: tuttavia, malgrado l'analogia formale tra le [1. 1] e le [1. 2], i due sistemi di rappresentazione contengono una differenza concettuale di un certo rilievo.

Le coordinate x_i costituiscono infatti un *sistema materiale* di riferimento in quanto valori assegnati di esse rimangono applicati ad ogni singolo punto materiale durante il suo moto, e quindi il sistema x_i, assunto ad esempio ortogonale nella configurazione C_0, diverrà un generico sistema di coordinate curvilinee nel corso della deformazione perchè, esso stesso parte integrante del continuo, si altera con il cambiamento di posizione dei punti materiali P_0.

Le coordinate y_k invece definiscono le posizioni successivamente occupate nello spazio dai punti materiali e costituiscono un *sistema spaziale* di riferimento, in quanto valori assegnati di esse sono applicati ad ogni singola posizione P nella quale verrà a trovarsi il punto materiale P_0 all'istante t. Il sistema y_k, assunto anch'esso ortogonale, non viene alterato con la deformazione ma si trasforma in un generico sistema di coordinate curvilinee quando da esso si risalga alla posizione iniziale all'istante t_0 del punto materiale P_0, localizzato in P all'istante t.

Allo stato presente non esistono argomentazioni decisive per dare la preferenza all'uno o all'altro sistema di riferimento nello studio del cambiamento di configurazione di un corpo continuo: entrambe le descrizioni, la materiale x_i e la spaziale y_k, presentano innegabili vantaggi particolari, tanto che non è insolita la loro esposizione parallela.

Nell'analisi della deformazione ci serviremo esclusivamente della rappresentazione materiale, sembrando più intuitivo riferire lo stato di un continuo alla sua configurazione iniziale C_0, assumendo cioè come termine di confronto uno stato che *è* invece di uno stato che *sarà*. Tale scelta, del resto, è in perfetto accordo con le operazioni fisiche necessarie alla misura della deformazione stessa.

I termini *materiale* e *spaziale* adottati per distinguere i due sistemi di riferimento x_i e y_k offrono una maggiore efficacia di espressione ed evitano una manifesta erroneità di attribuzione storica nei confronti delle denominazioni convenzionali che indicano invece il primo sistema come *lagrangiano*, benchè in realtà introdotto da EULER [1] ed il secondo sistema come *euleriano*, quantunque di fatto già impiegato da D'ALEMBERT [2].

2. Deformazione nell'intorno di un punto.

Indichiamo con dl_0 un elemento lineare uscente dal punto materiale P_0 nella configurazione indeformata C_0 ed avente componenti dx_i nel riferimento materiale x_i: adottando allora per brevità di scrittura la convenzione di ritenere eseguita la somma rispetto ad un indice *saturato*, cioè ripetuto e figurato in un solo membro, senza indicare in modo esplicito il simbolo di sommatoria, il quadrato dell'elemento lineare dl_0 sarà dato dalla:

$$dl_0^2 = dx_i\, dx_i \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad [2.\,1]$$

Questa espressione quadratica caratterizza la metrica pitagorica del continuo indeformato nello spazio euclideo in cui supponiamo immersa la configurazione C_0 e può anche essere posta nella forma:

$$dl_0^2 = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \qquad [2.\,2]$$

in quanto nella doppia somma [3] ora indicata per gli indici i, j sono identicamente nulli tutti i termini nei prodotti $dx_i\, dx_j$ per $i \neq j$ e vengono solo conservati i tre termini quadratici $dx_i\, dx_i$ già espressi nel secondo membro della [2. 2].

In seguito alla deformazione l'elemento dl_0 uscente da P_0 si trasforma in un elemento lineare dl uscente da P, di componenti dy_k rispetto alle coordinate spaziali y_k, per il quale varrà la relazione:

$$dl^2 = dy_k\, dy_k \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad [2.\,3]$$

formalmente analoga alla [2. 2] e caratteristica di una metrica ancora

---

[1] L. EULER, *Lettre de M. Euler à M. de la Grange*, Miscellanea Taurinensia, **2** (1760-61).
[2] J. L. D'ALEMBERT, *Essai d'une nouvelle théorie de la resistance des fluides*, Paris (1752).
[3] La cosiddetta funzione δ_{ij} di Kronecker è infatti definita: *zero* per $i \neq j$ e *uno* per $i = j$.

pitagorica nello spazio euclideo in cui supponiamo immersa la configurazione deformata C.

Con riguardo alle [1. 1] i differenziali dy_k possono essere espressi in funzione delle coordinate materiali x_i, in modo che:

$$dl^2 = y_{k,i}\, y_{k,j}\, dx_i\, dx_j \qquad (k, i, j = 1, 2, 3), \tag{2. 4}$$

dove il doppio indice i, j tiene conto della necessità di rappresentare i doppi prodotti nella trasformazione dalle y_k alle x_i.

La differenza tra la metrica [2. 4] della configurazione deformata e la metrica [2. 2] della configurazione indeformata:

$$dl^2 - dl_0^2 = (y_{k,i}\, y_{k,j} - \delta_{ij})\, dx_i\, dx_j, \tag{2. 5}$$

verrà definita *metrica della deformazione*, e sarà assunta a misura della deformazione nell'intorno del punto P_0, perchè la sua conoscenza permette di individuare le variazioni di lunghezza di ogni elemento lineare della stella di centro P_0, cioè, secondo una locuzione ormai chiara, lo *stato di deformazione nel punto* P_0.

3. Componenti della deformazione.

Alla metrica della deformazione [2. 5] può essere attribuita una forma più compatta mediante le posizioni:

$$y_{k,i}\, y_{k,j} - \delta_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{3. 1}$$

in modo da ottenere, per sostituzione nella [2. 5]:

$$dl^2 - dl_0^2 = 2\varepsilon_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{3. 2}$$

o anche, dividendone ambo i membri per dl_0 ed indicando inoltre con $n_i = dx_i/dl_0$ i coseni direttori dell'elemento indeformato:

$$\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 2\varepsilon_{ij}\, n_i\, n_j \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3. 3}$$

Le nove funzioni ε_{ij}, dette *componenti della deformazione* e riducibili a sei sole distinte in virtù della identità $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}$ nello scambio degli indici i, j, hanno in comune con le y_k gli stessi caratteri di continuità, monodromia e derivabilità propri della trasformazione funzionale [1. 1]. Esse assumono un particolare significato nella presente teoria e sono in grado di rappresentare completamente lo stato di deformazione nel punto P_0: infatti, note le componenti ε_{ij} per ogni direzione n_i degli elementi della stella di centro P_0, riesce perfettamente individuata dalla [3. 3] la lunghezza deformata dl dell'elemento di lunghezza iniziale dl_0.

Risulta pure chiaro che, se almeno una delle ε_{ij} è diversa da zero, allora dl riesce distinto da dl_0, mentre due configurazioni caratterizzate dalle stesse funzioni ε_{ij} differiscono al più per un moto rigido.

4. Congruenza della deformazione.

Assegnata una deformazione da C_0 a C per mezzo delle [1. 1], le definizioni [3. 1] individuano perfettamente le sei componenti ε_{ij} dalle quali tale deformazione riesce appunto caratterizzata.

Presenta un interesse notevole esaminare se, assegnate ad arbitrio sei funzioni ε_{ij} del punto P_0, esista effettivamente una configurazione deformata, individuata da certe funzioni $y_k(x_i)$, di cui le ε_{ij} ne rappresentino le componenti.

La determinazione delle tre funzioni $y_k(x_i)$ dal sistema differenziale non lineare [3. 1], assegnate le sei funzioni ε_{ij}, rappresenta un problema che, in generale, non ammette soluzione senza che le ε_{ij} stesse soddisfino a certe condizioni di integrabilità: tali condizioni non sono ancora conosciute ad eccezione del caso particolare che sarà trattato nel § 17.

È possibile però ottenere le condizioni necessarie perchè certe funzioni arbitrarie del punto ε_{ij} siano le componenti di una deformazione compatibile con la continuità del sistema materiale in modo cioè che ogni singola particella materiale possa adattarsi alle particelle adiacenti senza compenetrazione o distacchi di materia implicanti singolarità nelle funzioni $y_k(x_i)$. Le condizioni che assicurano l'esistenza di sei funzioni ε_{ij} tali da rappresentare una deformazione nel senso sopra specificato prendono il nome di *equazioni di compatibilità* o di *congruenza* e la deformazione stessa viene detta perciò *congruente*.

Siffatte condizioni sono evidentemente implicite nelle relazioni [3. 1] e si deducono da queste attraverso la eliminazione delle $y_k(x_i)$ con un procedimento oltremodo laborioso negli sviluppi formali [1], al quale non corrisponde un significato concettuale adeguato. Le equazioni di congruenza in forma esplicita nelle derivate seconde delle ε_{ij} equivalgono infatti in sostanza alle condizioni necessarie e sufficienti perchè lo spazio nel quale è immerso il continuo sia, come abbiamo supposto, localmente euclideo prima e dopo la deformazione, cioè che risulti nullo il tensore di Riemann che ne esprime la curvatura.

Per tale motivo ci riferiremo di regola alle [3. 1] come alle *equazioni di congruenza*, beninteso nel senso di ritenere il sistema differenziale [3. 1] effettivamente integrabile nelle $y_k(x_i)$.

---

[1] F. D. MURNAGHAN, *Finite Deformation of an Elastic Solid*, p. 38, New York (1951).

Dunque, se V indica il volume dello spazio occupato dai punti del continuo e A la superficie chiusa che lo racchiude e ne costituisce così la frontiera, una deformazione risulterà congruente quando rappresentata da sei funzioni ε_{ij} definite nel dominio chiuso $V + A$ secondo le [3. 1] in termini di tre funzioni $y_k(x_i)$, continue, monodrome e derivabili.

A loro volta le $y_k(x_i)$ potranno verificare ulteriori condizioni restrittive in dipendenza di eventuali *vincoli* imposti a punti, linee, superficie della frontiera A, cioè:

$$y_k(x_i) = \bar{y}_k \text{ su } A_u\,, \qquad [4.\ 1]$$

dove A_u è l'insieme dei punti di A nei quali le y_k devono assumere i valori $\bar{y}_k$ prescritti dalle *condizioni geometriche al contorno* [4. 1] che ne limitano il libero moto nello spazio.

Poichè le ε_{ij} dipendono dalle $y_k(x_i)$, anche le [4. 1] rappresentano un aspetto della congruenza, nel senso che le condizioni di compatibilità per le componenti di deformazione devono sussistere nel rispetto dei vincoli imposti al continuo attraverso le condizioni [4. 1] stesse.

5. Dilatazione lineare.

La deformazione nell'intorno di un punto P_0 altera dunque la lunghezza di un elemento lineare dal valore dl_0 al valore dl, come è

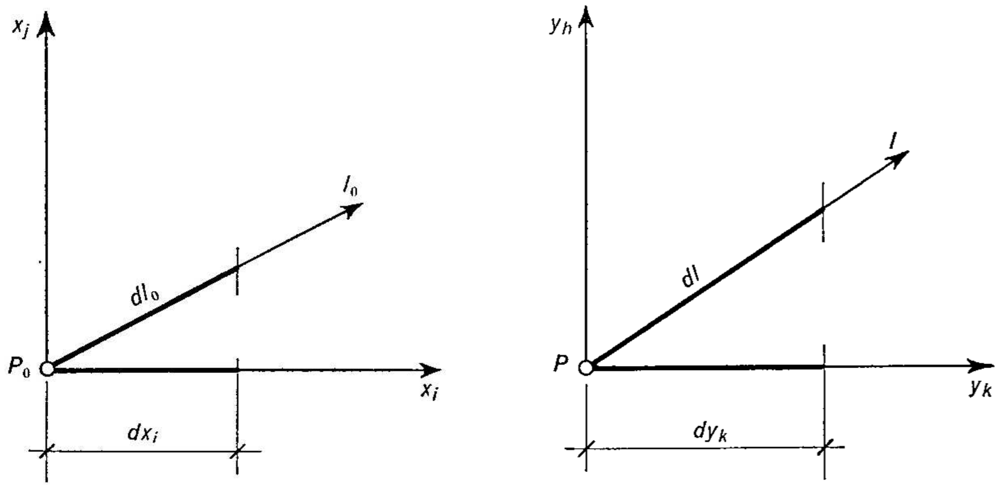

Fig. 1.

stato indicato in fig. 1 per il caso piano; riferendo la variazione di lunghezza dell'elemento alla sua lunghezza primitiva si ottiene il rapporto:

$$\Delta_l = \frac{dl - dl_0}{dl_0}, \qquad [5.\ 1]$$

definito *dilatazione lineare* nel punto P_0, dove il riferimento alla lunghezza iniziale dl_0 è coerente con la nostra scelta delle coordinate materiali x_i come variabili indipendenti nell'analisi della deformazione.

Se, in particolare, l'elemento dl_0 ha la direzione dell'asse x_i, cioè $dl_0 = dx_i$, indicando con dl_i l'elemento deformato corrispondente si ottengono dalla [5. 1] le definizioni:

$$\Delta_i = \frac{dl_i - dx_i}{dx_i}, \qquad [5.\ 2]$$

per le tre dilatazioni lineari relative ai tre elementi inizialmente ortogonali e paralleli agli assi coordinati materiali.

D'altra parte nel caso particolare in esame la metrica della deformazione [3. 3] assume la forma semplificata:

$$2\varepsilon_{ii} = \frac{dl_i^2 - dx_i^2}{dx_i^2}, \qquad [5.\ 3]$$

perchè risultano nulli i coseni direttori della direzione $l_0 = x_i$ rispetto agli assi ad eccezione di $n_i = 1$ e quindi risulta diverso da zero nella somma il solo termine ε_{ii}.

Il confronto delle [5. 3] con le [5. 2] comporta allora le tre relazioni:

$$1 + 2\varepsilon_{ii} = (1 + \Delta_i)^2, \qquad [5.\ 4]$$

per le componenti di deformazione con indici uguali ε_{ii} in funzione delle corrispondenti dilatazioni lineari Δ_i relative agli elementi dx_i inizialmente paralleli agli assi coordinati x_i.

6. Dilatazione angolare.

Prendiamo ora in esame l'influenza della deformazione sul cambiamento di direzione relativa tra gli elementi lineari nel passaggio dalla configurazione C_0 alla configurazione C.

Se dunque dl_0' e dl_0'' sono due generici elementi lineari e le loro direzioni positive l_0' e l_0'' formano un angolo α_0, i corrispondenti elementi deformati dl' e dl'' avranno direzioni l' e l'' con angolo compreso α, come indicato in fig. 2. La differenza:

$$\gamma = \alpha_0 - \alpha, \qquad [6.\ 1]$$

viene definita *dilatazione angolare* ed esprime il cambiamento di direzione relativa tra due elementi lineari qualsiasi in conseguenza della deformazione.

In particolare, se gli elementi indeformati hanno le direzioni di due assi del riferimento materiale, ad esempio, $dl_0' = dx_i$ e $dl_0'' = dx_j$, i corrispondenti elementi deformati, in generale non più ortogonali, saranno paralleli alle direzioni l_i e l_j assunte dagli assi x_i e x_j in seguito alla deformazione, cioè $dl' = dl_i$ e $dl'' = dl_j$.

In tal caso la dilatazione angolare assume i tre particolari valori:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \pi/2\,, \qquad [6.\ 2]$$

che esprimono, per ogni coppia di indici i, j, le variazioni angolari mutue tra le coppie di assi coordinati materiali.

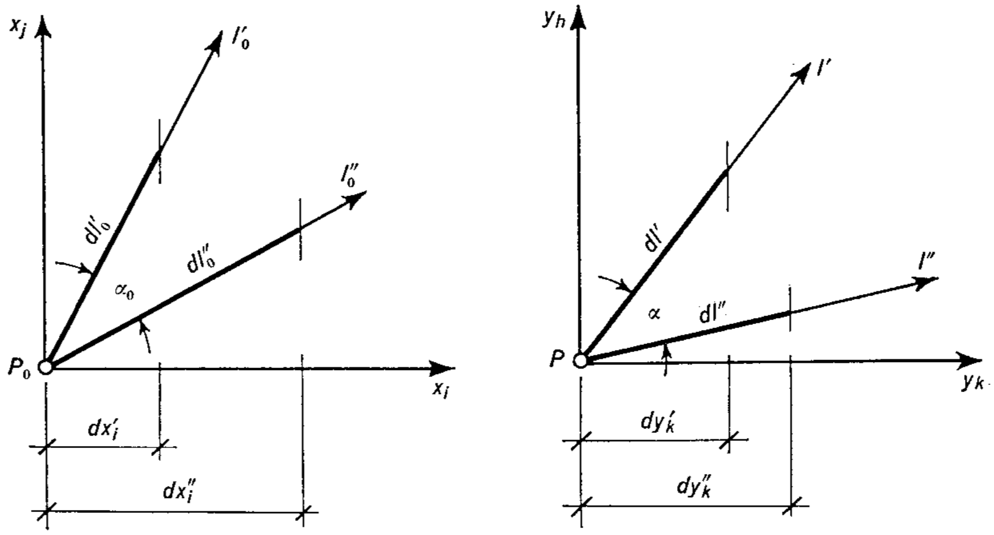

Fig. 2.

Se indichiamo allora con $dy_k^{(i)} = dy'_k$ e $dy_k^{(i)} = dy''_k$ le proiezioni degli elementi deformati dl_i e dl_j sugli assi y_k, sarà:

$$\cos\alpha_{ij} = \frac{dy_k^{(i)}}{dl_i}\frac{dy_k^{(j)}}{dl_j} = y_{k,i}\,y_{k,j}\frac{dx_i}{dl_i}\frac{dx_j}{dl_j}\,, \qquad [6.\ 3]$$

da cui, tenendo presente che: $\cos\alpha_{ij} = \cos(\pi/2 - \gamma_{ij}) = \sin\gamma_{ij}$ e ricordando la [5. 2]:

$$y_{k,i}\,y_{k,j} = (1 + \Delta_i)(1 + \Delta_j)\sin\gamma_{ij}\,. \qquad [6.\ 4]$$

In definitiva, le posizioni [3. 1] conducono per $i \neq j$, alle relazioni:

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + \Delta_i)(1 + \Delta_j)\sin\gamma_{ij}\,, \qquad [6.\ 5]$$

per ognuna delle tre componenti di deformazione con indici distinti, le quali vengono così espresse in funzione delle dilatazioni, lineari Δ_i, Δ_j ed angolare γ_{ij}, relative alle tre coppie di elementi orientati secondo le direzioni degli assi del riferimento materiale.

7. Dilatazione superficiale.

In seguito alla deformazione un elemento di area iniziale dA_0 e appartenente ad un piano della stella di centro P_0 si trasforma in un elemento di area dA giacente in un piano della stella di centro P. La variazione di area riferita all'area primitiva, cioè il rapporto:

$$\Delta_A = \frac{dA - dA_0}{dA_0}, \qquad [7.1]$$

viene definita *dilatazione superficiale* e rappresenta la misura del cambiamento di area dell'elemento superficiale generico.

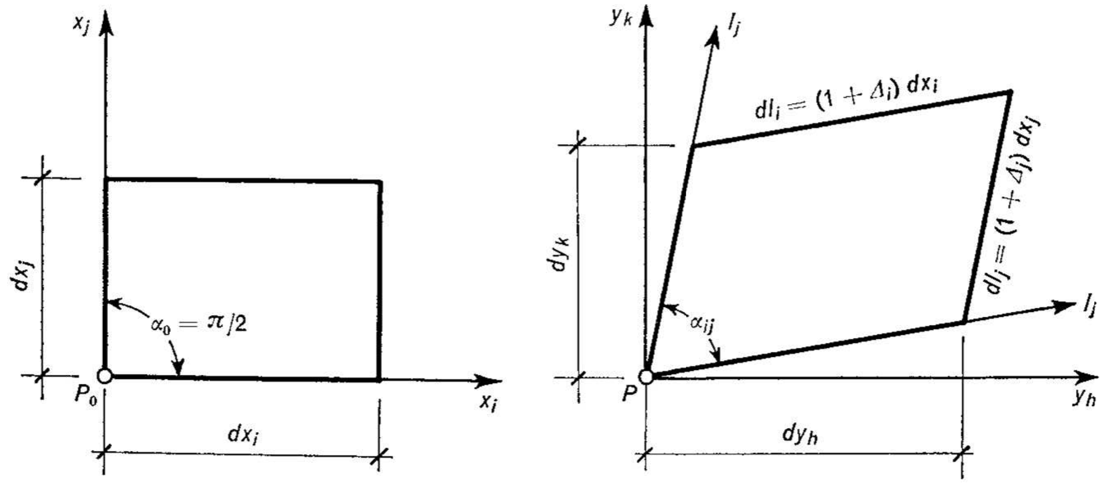

Fig. 3.

In particolare, si possono derivare dalla [7. 1] le definizioni per le dilatazioni superficiali subite dai tre elementi piani inizialmente paralleli ai tre piani coordinati $(x_i\, x_j)$ del riferimento materiale.

Con riguardo alla fig. 3, ad esempio, l'elemento rettangolare di area $dA_{ij}^0 = dx_i\, dx_j$ si trasforma nell'elemento superficiale deformato, in generale non più rettangolare, di area $dA_{ij} = dl_i\, dl_j \sin \alpha_{ij}$, per cui si ottengono le espressioni seguenti delle dilatazioni superficiali Δ_{ij} relative ai tre elementi piani considerati:

$$\Delta_{ij} = \frac{dA_{ij} - dA_{ij}^0}{dA_{ij}^0} = (1 + \Delta_i)(1+\Delta_j) \cos \gamma_{ij} - 1 . \qquad [7.2]$$

In virtù delle relazioni [5. 4] e [6. 5] le dilatazioni Δ_{ij} potranno essere espresse unicamente in funzione delle componenti della deformazione, e precisamente:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{ii})(1 + 2\varepsilon_{jj}) - 4\varepsilon_{ij}^2} - 1 , \qquad [7.3]$$

dopo aver trasformato nella [7. 2] $\cos \gamma_{ij}$ in termini di $\sin \gamma_{ij}$.

8. Dilatazione cubica.

Un elemento di volume dV_0 nell'intorno del punto materiale P_0 si trasforma in un elemento di volume dV nell'intorno della posizione P occupata da P_0 in seguito alla deformazione; il rapporto:

$$\Delta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}, \qquad [8.\ 1]$$

prende il nome di *dilatazione cubica* nel punto P_0 e rappresenta la misura della variazione di volume subita dall'elemento.

Indichiamo con $\varrho_0(x_i)$ e $\varrho(y_k)$ le masse specifiche rispettivamente nel punto P_0 del continuo indeformato e nel punto P del continuo deformato, intese come funzioni uniformi e positive delle coordinate corrispondenti x_i e y_k; allora il principio di conservazione della massa per l'elemento di volume afferma la validità della:

$$\varrho(y_k)\,dV = \varrho_0(x_i)\,dV_0\,, \qquad [8.\ 2]$$

in ogni punto del continuo materiale.

Mediante una superficie chiusa A'_0 delimitiamo ora nel continuo indeformato un volume V'_0 al quale per effetto della deformazione corrisponderà nel continuo deformato un volume V' delimitato da una superficie pure chiusa A'. Poichè la massa contenuta in V'_0 rimane invariata nel corso della deformazione, sarà pure valida la:

$$\int_{V'} \varrho(y_k)\,dV = \int_{V'_0} \varrho_0(x_i)\,dV_0\,, \qquad [8.\ 3]$$

per ogni porzione finita di volume del continuo.

Con un cambiamento di variabili dalle coordinate spaziali y_k alle coordinate materiali x_k si potrà pure scrivere:

$$\int_{V'_0} [\varrho(x_i)\,D - \varrho_0(x_i)]\,dV_0 = 0\,, \qquad [8.\ 4]$$

dove il determinante funzionale D coincide con lo jacobiano Det $y_{k,i}$ della trasformazione [1. 1].

Data la arbitrarietà di scelta della porzione di volume V' e la presupposta continuità uniforme della funzione integranda, la [8. 4] implica che in ogni punto del continuo sussista la relazione notevole:

$$\varrho D - \varrho_0 = 0\,, \qquad [8.\ 5]$$

detta *equazione di continuità.*

La sufficienza della condizione [8. 5] per la validità della [8. 4] è ovvia; per quanto riguarda la necessità osserviamo che se la [8. 5] fosse diversa da zero, ad esempio positiva, in un punto P_0, lo sarebbe in tutto un intorno finito $I(P_0)$ per l'ammessa regolarità della funzione [8. 5]. Scegliendo allora come volume arbitrario V' proprio siffatto intorno ne risulterebbe una palese contraddizione con la [8. 4].

Tenendo conto della [8. 2] possiamo eliminare le masse specifiche dalla equazione di continuità ed ottenere la formula notevole:

$$\Delta = D - 1 , \qquad [8.\ 6]$$

che lega la dilatazione cubica Δ al determinante funzionale D della trasformazione $y_k = y_k(x_i)$.

9. Tensore della deformazione.

L'adozione della metrica quadratica [2. 5] per la misura dello stato di deformazione nell'intorno di un punto materiale del continuo comporta la scelta delle ε_{ij} o di grandezze ad esse sostanzialmente analoghe come elementi rappresentativi della deformazione.

Vogliamo ora discutere il motivo di una tale preferenza giustificando l'opportunità di descrivere la deformazione in termini delle ε_{ij} invece di altre grandezze caratteristiche, come, ad esempio, le dilatazioni lineari Δ_i ed angolari γ_{ij}, aventi, senza dubbio, un significato geometrico più spontaneo ed immediato. La ragione fondamentale del nostro modo di procedere risiede essenzialmente nel comportamento particolare delle ε_{ij} rispetto ad una trasformazione degli assi materiali x_i.

Poichè le ε_{ij} non sono alterate da eventuali traslazioni sia delle coordinate y_k sia delle coordinate x_i, dipendendo esclusivamente dalle derivate parziali delle prime rispetto alle seconde in base alle loro definizioni [3. 1], possiamo limitarci a considerare soltanto l'effetto di una rotazione arbitraria, tale da trasportare gli assi materiali x_i, x_j, x_k in tre assi x_H, x_L, x_M di una nuova terna, come indicato in fig. 4, al solito per il caso piano.

Questa rotazione resta definita dalla trasformazione lineare non degenere:

$$x_i = x_H\, n_{iH} , \qquad [9.\ 1]$$

dove i coseni direttori n_{iH} degli assi primitivi rispetto ai nuovi assi devono verificare note proprietà compendiabili nelle sei relazioni distinte:

$$\delta_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL} = \delta_{HL} . \qquad [9.\ 2]$$

Le componenti di deformazione assumono allora, rispetto alla nuova terna, certi valori ε_{HL} forniti da definizioni formalmente analoghe alle [3. 1] pur di sostituire alle coordinate (x_i, x_j, x_k) le coordinate (x_H, x_L, x_M), cioè:

$$2\varepsilon_{HL} = y_{k,H}\, y_{k,L} - \delta_{HL}\,, \qquad [9.\ 3]$$

o anche, esprimendo le nuove variabili indipendenti in funzione delle variabili primitive:

$$2\varepsilon_{HL} = y_{k,i}\, y_{k,j}\, x_{i,H}\, x_{j,L} - \delta_{HL}\,. \qquad [9.\ 4]$$

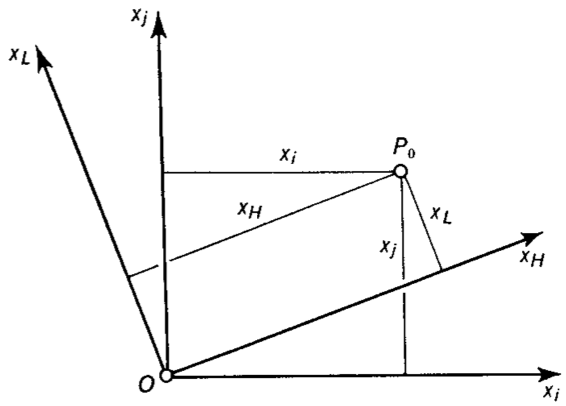

Fig. 4.

Questa ultima relazione, in virtù delle [9. 1] e [9. 2] diviene:

$$2\varepsilon_{HL} = (y_{k,i}\, y_{k,j} - \delta_{ij})\, n_{iH}\, n_{jL}\,, \qquad [9.\ 5]$$

ed infine, ricordando le definizioni [3. 1]:

$$\varepsilon_{HL} = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL}\,. \qquad [9.\ 6]$$

In una rotazione delle coordinate le componenti di deformazione ε_{ij} seguono pertanto la legge di trasformazione caratteristica dei *tensori doppi*: possiamo dunque concludere che le nove funzioni $\varepsilon_{ij}(x_l)$ sono componenti di un tensore doppio simmetrico $[\varepsilon_{ij}]$ detto *tensore della deformazione*.

Una legge di trasformazione altrettanto semplice non vale invece per le dilatazioni lineari Δ_i e angolari γ_{ij}, come si può facilmente verificare sulla base delle [5. 4] e [6. 5]: questo preciso motivo giustifica la scelta delle ε_{ij} come elementi caratteristici dello stato di deformazione.

In contrasto con la legge di trasformazione [9. 6] del tensore di deformazione in seguito ad una rotazione del sistema di riferimento materiale x_i, si può dimostrare che il tensore stesso riesce *invariante* rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento spaziale y_k.

Supposto infatti di ruotare tali assi in modo che il generico di essi y_k si trasporti su un nuovo asse y'_N, le componenti di deformazione ε_{ij} assumeranno certi valori ε'_{ij} espressi da relazioni formalmente analoghe alle [3. 1], cioè:

$$\varepsilon'_{ij} = y'_{N,i}\, y'_{N,i} - \delta_{ij}. \qquad [9.\ 7]$$

D'altra parte le y'_N sono legate alle y_k da relazioni lineari omogenee del tipo [9. 1], cioè $y'_N = y_k\, n'_{Nk}$, e quindi:

$$\varepsilon'_{ij} = y_{k,i}\, y_{l,j}\, n'_{Nk}\, n'_{Nl} - \delta_{ij}, \qquad [9.\ 8]$$

dove n'_{Nk}, n'_{Nl}, coseni direttori dell'asse y'_N della nuova terna rispetto agli assi primitivi y_k, y_l, devono verificare la nota proprietà:

$$n'_{Nk}\, n'_{Nl} = \delta_{kl}, \qquad [9.\ 9]$$

per cui in definitiva:

$$\varepsilon'_{ij} = \delta_{kl}\, y_{k,i}\, y_{l,j} - \delta_{ij} = \varepsilon_{ij}. \qquad [9.\ 10]$$

Possiamo dunque affermare che il tensore di deformazione riesce alterato secondo la legge [9. 6] se una data deformazione è *preceduta* da una rotazione rigida del continuo, mentre si mantiene inalterato se la data deformazione è *seguita* da una rotazione rigida dello spazio come mostra la [9. 10].

10. Direzioni e deformazioni principali.

Dal carattere tensoriale delle componenti di deformazione ε_{ij} derivano alcune interessanti proprietà comuni ai tensori doppi simmetrici, delle quali è opportuno richiamare i lineamenti essenziali.

Anzitutto deve esistere tra tutte le direzioni della stella di centro P_0 una terna di assi mutuamente ortogonali, individuati da tre terne di coseni direttori, in corrispondenza dei quali si annullano le componenti con indici distinti. Così, mentre in un riferimento generico (x_i, x_j, x_k) sono necessari *sei* parametri ε_{ij} per caratterizzare la deformazione nell'intorno di un punto, in questo riferimento (x_H, x_L, x_M), detto *principale*, saranno sufficienti *tre* soli parametri ε_H, oltre naturalmente i *tre* coseni direttori n_{iH} atti ad individuare il riferimento stesso.

La ricerca delle direzioni principali (x_H, x_L, x_M) si svolge nel modo più chiaro come conseguenza diretta della loro definizione, imponendo l'annullarsi delle ε_{HL} per $H \neq L$, cioè:

$$\varepsilon_{HL} = \delta_{HL}\, \varepsilon_{(H)}\,, \qquad [10.\ 1]$$

dove la parentesi racchiude l'indice H per evitarne la somma e la funzione di Kronecker conserva delle nove ε_{HL} solo le tre componenti ε_{HH} con indici uguali $(H = L)$.

Nella ipotesi espressa dalla [10. 1] la legge di trasformazione [9. 6] diviene:

$$\delta_{HL}\, \varepsilon_{(H)} = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL}\,, \tag{10. 2}$$

ed anche, proiettando sull'asse y_k i tre vettori corrispondenti alle tre determinazioni di H ($H = 1, 2, 3$):

$$\delta_{HL}\, \varepsilon_{(H)}\, n_{kL} = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL}\, n_{kL}\,. \tag{10. 3}$$

Sommando rispetto all'indice L e tenendo presente la ricordata proprietà dei coseni direttori di un asse: $n_{jL}\, n_{kL} = \delta_{jk}$, si ottiene:

$$\varepsilon_{(H)}\, n_{kH} = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\, \delta_{jk}\,, \tag{10. 4}$$

ed ancora, effettuando l'operazione indicata dal doppio indice δ_{jk}, posto cioè $k = j$:

$$\varepsilon_{(H)}\, n_{jH} = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\,, \tag{10. 5}$$

dalla quale infine, poichè $n_{jH} = \delta_{ij}\, n_{iH}$:

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\, \varepsilon_{(H)})\, n_{iH} = 0\,. \tag{10. 6}$$

Le relazioni trovate rappresentano, per ogni valore di H, un sistema di tre equazioni lineari omogenee nei coseni direttori n_{iH}: i tre sistemi [10. 6] potranno ammettere allora soluzioni diverse da quella identicamente nulla $n_{iH} = 0$ ed incompatibile per i coseni direttori di un asse, se e solo se risulti nullo il determinante comune ai sistemi stessi:

$$\mathrm{Det}\,(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\, \varepsilon_H) = 0. \tag{10. 7}$$

La condizione [10. 7] rappresenta una equazione di terzo grado nella incognita ε_H e costituisce l'*equazione caratteristica* del tensore di deformazione: introdotta da Lagrange in problemi di Meccanica celeste e chiamata anche *equazione secolare*, gode della proprietà di possedere sempre radici reali $\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$, *componenti principali* della deformazione.

Sostituendo i valori $\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$ nei sistemi [10. 6] si otterranno tre terne di coseni direttori n_{iH} che individuano tre *direzioni principali*, in corrispondenza delle quali si annullano le componenti ε_{HL} con indici distinti.

In base alla [6. 5] si annullano anche le dilatazioni angolari γ_{HL}, cioè, secondo le direzioni principali, si hanno solo dilatazioni lineari $\Delta_{\mathrm{I}}, \Delta_{\mathrm{II}}, \Delta_{\mathrm{III}}$: la terna principale n_{iH}, ortogonale prima della deformazione, pur ruotando nello spazio, rimane ortogonale anche dopo la deformazione e rappresenta l'unica terna privilegiata che possiede questa proprietà.

Infatti, partendo da un riferimento iniziale diverso (x_h, x_l, x_m), cioè definendo la deformazione in termini di componenti diverse ε_{hl}, si perviene ad una equazione secolare della forma:

$$\mathrm{Det}\,(\varepsilon_{hl} - \delta_{hl}\,\varepsilon_H) = 0\,. \qquad [10.\,8]$$

Ora, in virtù del loro carattere tensoriale, le ε_{hl} sono legate alle ε_{ij} attraverso una legge di trasformazione del tipo [9. 6], mentre a loro volta i coseni direttori n_{ih}, n_{jl} della nuova terna devono verificare condizioni del tipo [9. 2].

L'equazione secolare [10. 8] diviene così:

$$\mathrm{Det}\,[(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\varepsilon_H)\,n_{ih}\,n_{jl}] = 0\,, \qquad [10.\,9]$$

o anche, per il carattere ortogonale dei coseni direttori:

$$\mathrm{Det}\,(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\varepsilon_H) = 0\,, \qquad [10.\,10]$$

coincidente con la [10. 7], a dimostrazione della asserita unicità delle direzioni e deformazioni principali.

L'orientamento della terna principale non dipende dunque dalla particolare scelta del riferimento materiale ma da proprietà intrinseche del tensore di deformazione. Se allora sviluppiamo la [10. 7] in forma esplicita:

$$\varepsilon_H^3 - E_1\,\varepsilon_H^2 + E_2\,\varepsilon_H - E_3 = 0\,, \qquad [10.\,11]$$

i coefficienti E_1, E_2, E_3, dati per disteso in termini delle componenti di deformazione:

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ E_2 &= \varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\,\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\,\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 \\ E_3 &= \mathrm{Det}\,\varepsilon_{ij} \end{aligned} \qquad [10.\,12]$$

devono risultare indipendenti dal riferimento e comportarsi quindi come *invarianti* per lo stato di deformazione in un punto.

Questi invarianti, rispettivamente di primo, secondo e terzo ordine, assumono la forma più semplice quando espressi in termini delle deformazioni principali $\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}} \\ E_2 &= \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{II}}\,\varepsilon_{\mathrm{III}} + \varepsilon_{\mathrm{III}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}} \\ E_3 &= \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{II}}\,\varepsilon_{\mathrm{III}} \end{aligned} \qquad [10.\,13]$$

Nella discussione precedente è stato tacitamente supposto che, nella riduzione a forma principale o *canonica* del tensore di deformazione, le componenti principali $\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$ risultassero distinte: nel caso di una radice doppia, ad esempio, $\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_{\mathrm{II}} \neq \varepsilon_{\mathrm{III}}$, tutte le direzioni perpendicolari alla direzione di $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ possono essere considerate come direzioni principali perchè le direzioni associate con $\varepsilon_{\rm I}$ e $\varepsilon_{\rm II}$ riescono indeterminate, mentre nel caso di una radice tripla $\varepsilon_{\rm I} = \varepsilon_{\rm II} = \varepsilon_{\rm III}$ ogni direzione è principale e le dilatazioni corrispondenti $\Delta_{\rm I}$, $\Delta_{\rm II}$, $\Delta_{\rm III}$ hanno lo stesso valore in tutte le direzioni della stella di centro P_0.

11. Carattere di estremo delle deformazioni principali.

Tra tutte le componenti di deformazione ε_{ij} quelle principali ε_H godono di una caratteristica proprietà di estremo che vogliamo ora analizzare.

Si osservi a tale scopo che la ε_{HL} espressa dalla legge di trasformazione [9. 6] e considerata come funzione dei coseni direttori potrà risultare stazionaria per certe particolari direzioni di una terna ortogonale x_L, di coseni direttori n_{jL} rispetto alla terna di riferimento x_i e quindi tali da verificare le condizioni [9. 2].

Il problema di rendere stazionaria la funzione [9. 6] sotto la condizione [9. 2] può essere ricondotta ad un problema libero per la funzione:

$$f\,(n_{jL}, \lambda) = \varepsilon_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL} + \lambda\,(\delta_{HL} - \delta_{ij}\, n_{iH}\, n_{jL}), \qquad [11.\ 1]$$

avendo indicato con λ un opportuno moltiplicatore di Lagrange.

Sotto note condizioni di continuità per la $f(n_{jL}, \lambda)$ il classico teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un estremo dalle equazioni ottenute uguagliando a zero le derivate prime della $f(n_{jL}, \lambda)$ rispetto alle variabili n_{jL}, da considerarsi ora indipendenti, cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial n_{jL}} = (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\lambda)\, n_{iH} = 0, \qquad [11.\ 2]$$

mentre la derivata rispetto al parametro λ fornisce la condizione [9. 2].

Si osserva immediatamente l'identità delle equazioni [11. 2] con il sistema [10. 6] per cui i tre valori $\lambda_{\rm I}$, $\lambda_{\rm II}$, $\lambda_{\rm III}$ che rendono stazionaria la $f(n_{jL}, \lambda)$ coincidono con le tre deformazioni principali $\varepsilon_{\rm I}$, $\varepsilon_{\rm II}$, $\varepsilon_{\rm III}$; dunque di tali deformazioni una è *massima*, una *minima*, una *semplicemente stazionaria*; per fissare le idee converremo sempre di supporre:

$$\varepsilon_{\rm I} > \varepsilon_{\rm II} > \varepsilon_{\rm III}, \qquad [11.\ 3]$$

e pertanto $\varepsilon_{\rm I}$ e $\varepsilon_{\rm III}$ rappresenteranno i valori estremi.

Anche le dilatazioni principali $\Delta_{\rm I}$, $\Delta_{\rm II}$, $\Delta_{\rm III}$ legate alle deformazioni principali $\varepsilon_{\rm I}$, $\varepsilon_{\rm II}$, $\varepsilon_{\rm III}$ attraverso le:

$$\Delta_H = \sqrt{1 + 2\varepsilon_H} - 1, \qquad [11.\ 4]$$

risulteranno stazionarie rispetto alle corrispondenti direzioni principali n_{iH}, e tra queste Δ_{I} e Δ_{III} assumeranno i valori estremi di massimo e minimo rispettivamente.

12. Deviatore di deformazione.

Il tensore di deformazione di componenti ε_{ij} può essere decomposto, come ogni tensore del secondo ordine, in due parti essenziali:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\,\bar{\varepsilon} + e_{ij}, \qquad [12.\ 1]$$

dove il primo termine $\bar{\varepsilon}$, detto anche *isotropo*, denota la media delle componenti di deformazione con indici uguali:

$$\bar{\varepsilon} = \tfrac{1}{3}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \qquad [12.\ 2]$$

e coincide quindi per la prima delle [10. 12] con l'invariante lineare E_1 a meno del fattore $\frac{1}{3}$, mentre il secondo termine definisce un tensore simmetrico di componenti e_{ij} detto *deviatore di deformazione.*

Le componenti del deviatore con indici distinti coincidono evidentemente con le componenti miste del tensore di deformazione, e di conseguenza le direzioni principali del deviatore ($e_{ij} = 0$ per $i \neq j$) coincidono con le direzioni principali del tensore di deformazione ($\varepsilon_{ij} = 0$ per $i \neq j$).

I valori principali del deviatore:

$$e_{\mathrm{I}} = \varepsilon_{\mathrm{I}} - \bar{\varepsilon}, \quad e_{\mathrm{II}} = \varepsilon_{\mathrm{II}} - \bar{\varepsilon}, \quad e_{\mathrm{III}} = \varepsilon_{\mathrm{III}} - \bar{\varepsilon}, \qquad [12.\ 3]$$

possono ottenersi direttamente da una equazione di terzo grado analoga alla [10. 11]:

$$e_H^3 + D_2\, e_H - D_3 = 0, \qquad [12.\ 4]$$

i cui invarianti risultano:

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \\ D_2 &= -\tfrac{1}{2}\,(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2) \\ D_3 &= \operatorname{Det} e_{ij} \end{aligned} \qquad [12.\ 5]$$

o più semplicemente in termini delle componenti principali del deviatore:

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{III}} = 0 \\ D_2 &= -\tfrac{1}{2}\,(e_{\mathrm{I}}^2 + e_{\mathrm{II}}^2 + e_{\mathrm{III}}^2) \\ D_3 &= \tfrac{1}{3}\,(e_{\mathrm{I}}^3 + e_{\mathrm{II}}^3 + e_{\mathrm{III}}^3) \end{aligned} \qquad [12.\ 6]$$

Il deviatore di deformazione trova utile impiego nella descrizione di stati di deformazione che non dipendono dalla deformazione media $\bar{\varepsilon}$: ne vedremo l'importanza in particolari situazioni fisiche dei solidi, quando sia lecito ammettere l'incompressibilità e quindi l'annullarsi della dilatazione cubica, strettamente legata alla $\bar{\varepsilon}$.

13. Componenti di spostamento.

Abbiamo visto che passando dalla configurazione indeformata alla configurazione deformata la particella materiale collegata al punto P_0

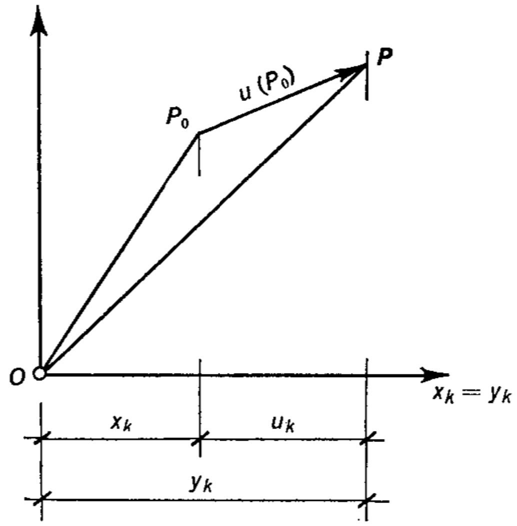

Fig. 5.

si trasporta nella posizione P: il punto P_0 ha subito in tal caso uno spostamento $\mathbf{u}$ definito dalle sue tre componenti u_k in un riferimento, ad esempio, ortogonale.

Se in particolare assumiamo la terna materiale x_i e la terna spaziale y_k coincidenti nella configurazione iniziale (fig. 5), le componenti di spostamento u_k risultano dalla:

$$y_k = x_k + u_k \,, \qquad [13.\ 1]$$

e sono funzioni della stessa classe delle y_k, cioè continue, monodrome e derivabili sino all'ordine richiesto, per cui differenziando e tenendo presente l'indipendenza delle variabili x_k:

$$y_{k,i} = \delta_{ki} + u_{k,i} \,. \qquad [13.\ 2]$$

Sostituendo queste espressioni nelle definizioni [3. 1] si hanno i valori delle componenti di deformazione ε_{ij} in termini delle derivate di spostamento, cioè:

$$2\varepsilon_{ij} = (\delta_{ki} + u_{k,i})\,(\delta_{kj} + u_{k,j}) - \delta_{ij} \,, \qquad [13.\ 3]$$

da cui sviluppando le operazioni indicate dagli indici di Kronecker:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,u_{k,j}). \qquad [13.\ 4]$$

Queste relazioni esprimono le condizioni perchè una deformazione sia caratterizzata da sei funzioni ε_{ij} legate a tre funzioni di spostamento continue, monodrome e derivabili, cioè, in altre parole, perchè la deformazione stessa sia congruente in tutti i punti del dominio chiuso $V + A$.

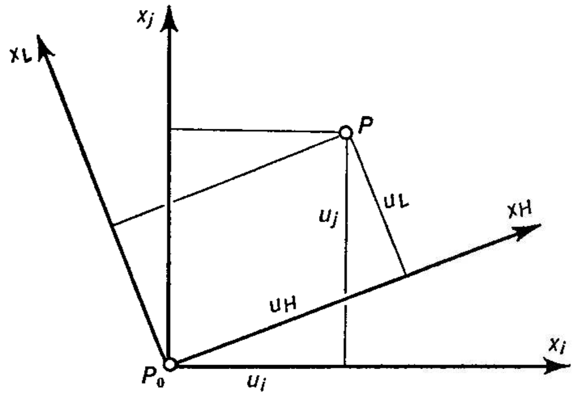

Fig. 6.

Come già alle $y_k(x_i)$, anche alle $u_k(x_i)$ potrà in particolare essere richiesto di verificare condizioni di vincolo analoghe alla [4. 1], imposte nei punti di una porzione A_u della frontiera A:

$$u_k(x_i) = \bar{u}_k \quad \text{su } A_u, \qquad [13.\ 5]$$

e si parlerà di *congruenza in senso generalizzato* quando siano verificati entrambi i gruppi di equazioni [13. 4] e [13. 5].

In una rotazione del riferimento (fig. 6) da una terna (x_i, x_j, x_k) ad una terna (x_H, x_L, x_M), definita attraverso le relazioni $x_j = x_L n_{jL}$, le componenti di spostamento si trasformano secondo la legge:

$$u_H = u_i\, n_{iH}, \qquad [13.\ 6]$$

essendo al solito n_{iH} i coseni direttori dell'asse x_i rispetto agli assi x_H.

Di conseguenza le derivate $u_{H,L}$, con un cambiamento di variabile da x_L a x_j, si trasformano secondo la legge:

$$u_{H,L} = u_{H,j}\, x_{j,L} = (u_i n_{iH})_{,j}\, x_{j,L} = u_{i,j}\, n_{iH}\, n_{jL}, \qquad [13.\ 7]$$

e sono quindi le componenti di un tensore, in generale non simmetrico $[u_{i,j}]$, denominato *tensore dei gradienti di spostamento*.

14. Rappresentazioni geometriche.

La struttura delle relazioni fondamentali ottenute per lo stato di deformazione nell'intorno di un punto permette di formulare in linguaggio puramente geometrico le proprietà già espresse per via analitica: anche se tali considerazioni non aggiungono niente di sostanzialmente nuovo, potranno però essere di un certo interesse per far risaltare gli aspetti sintetici più significativi impliciti nel concetto di deformazione.

In coordinate materiali x_i la [2. 1]:

$$dl_0^2 = dx_i\, dx_i, \qquad [14.\ 1]$$

rappresenta l'equazione di una sfera di raggio infinitesimo dl_0, mentre la [2. 4]:

$$dl^2 = y_{k,i}\, y_{k,j}\, dx_i\, dx_j, \qquad [14.\ 2]$$

rappresenta l'equazione, sempre in coordinate materiali x_i, di una quadrica non degenere ($D \neq 0$) e precisamente di un ellissoide infinitesimo.

Per effetto della deformazione una sfera di centro P_0 e raggio dl_0 si trasforma dunque in un ellissoide di centro P e raggio vettore dl.

L'intersezione della sfera [14. 1] con l'ellissoide [14. 2] si ottiene ponendo nella equazione di quest'ultimo $dl = dl_0$, e rappresenta una quartica. Proiettando i punti di intersezione da P_0 si ottiene un cono quadrico:

$$(y_{k,i\;k,j} - \delta_{ij})\, dx_i dx_j = 0\,, \qquad [14.\ 3]$$

che separa nella stella di elementi lineari di centro P_0 le direzioni a dilatazione lineare positiva da quelle a dilatazione negativa (fig. 7). Naturalmente se l'ellissoide è tutto esterno o tutto interno alla sfera, il cono separatore risulta privo di generatrici reali e gli elementi lineari dell'intorno di P_0 subiscono tutti dilatazioni dello stesso segno.

Le generatrici del cono rappresentano invece le direzioni degli elementi che, nella deformazione, non subiscono dilatazioni lineari ma solo dilatazioni angolari, mentre d'altra parte riesce evidente l'esistenza di tre elementi ortogonali che si mantengono ortogonali andandosi a disporre secondo gli assi dell'ellissoide: tali elementi non subiscono dilatazioni angolari e costituiscono gli elementi principali.

Determiniamo ora la variazione di volume dell'elemento sferico in seguito alla sua trasformazione in ellissoide operando direttamente sui volumi elementari prima e dopo la deformazione.

Si ha rispettivamente per la sfera di raggio dr_0:

$$dV_0 = \tfrac{4}{3}\pi\, dr_0^3\,, \qquad [14.\,4]$$

e per l'ellissoide riferito agli assi:

$$dV = \tfrac{4}{3}\pi(1+\varDelta_{\mathrm{I}})(1+\varDelta_{\mathrm{II}})(1+\varDelta_{\mathrm{III}})dr_0^3\,, \qquad [14.\,5]$$

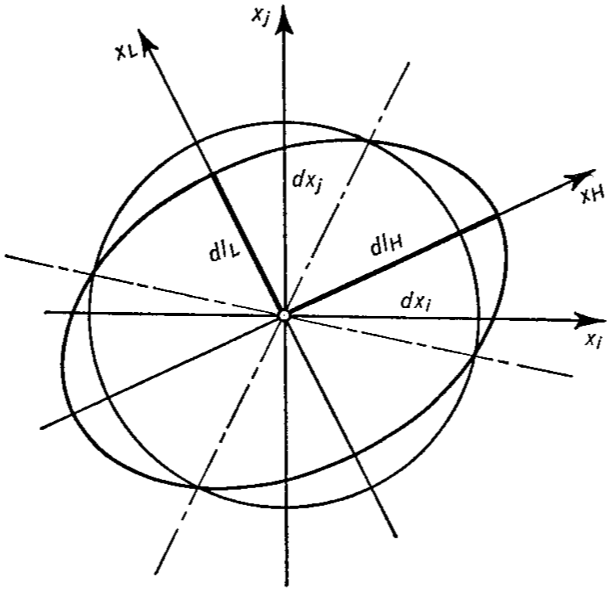

Fig. 7.

essendo $\varDelta_{\mathrm{I}}$, $\varDelta_{\mathrm{II}}$, $\varDelta_{\mathrm{III}}$ le dilatazioni principali, cioè le dilatazioni degli elementi lineari mutuamente ortogonali coincidenti con gli assi dell'ellissoide.

Ne deriva che la dilatazione cubica:

$$\varDelta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1+\varDelta_{\mathrm{I}})(1+\varDelta_{\mathrm{II}})(1+\varDelta_{\mathrm{III}}) - 1, \qquad [14.\,6]$$

può essere espressa in maniera molto semplice attraverso le dilatazioni lineari come, del resto, riesce intuitivo.

15. Deformazioni infinitesime.

Presenta un interesse fondamentale l'esame dello stato di deformazione quando le componenti di spostamento u_k e le loro derivate $u_{k,i}$ siano molto piccole rispetto alle dimensioni del continuo: tale è infatti la situazione che si verifica nei solidi reali.

Riesce quindi manifesta l'importanza di ottenere dalla teoria generale esposta nei paragrafi precedenti per deformazioni di valore arbitrario le espressioni limiti per spostamenti e gradienti di spostamento infinitesimi. In tal modo può essere istituita una teoria notevolmente semplificata applicabile con approssimazione sufficiente alla risoluzione della maggior parte dei problemi concreti.

Nella situazione limite le coordinate y_k della posizione P di un punto materiale P_0 dopo la deformazione, espresse dalle relazioni [13. 1], divengono:

$$y_k = x_k + u_k \simeq x_k\,, \tag{15. 1}$$

e quindi non avrà più senso la distinzione tra coordinate spaziali y_k e coordinate materiali x_k, perchè i due sistemi in effetti coincidono.

A spostamenti e rotazioni infinitesimi corrispondono evidentemente componenti di deformazione pure infinitesime, espresse dalle relazioni limiti delle [13. 4]:

$$\varepsilon_{ij} \simeq \tfrac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,, \tag{15. 2}$$

e dove non compaiono i prodotti $u_{k,i}\,u_{k,j}$ nei gradienti di spostamento perchè infinitesimi di ordine superiore rispetto ai termini lineari $u_{i,j}$.

Al contrario, a deformazioni infinitesime non corrispondono necessariamente spostamenti e gradienti di spostamento infinitesimi, perchè il carattere infinitesimo delle componenti di deformazione non esclude la possibilità di traslazioni e rotazioni rigide finite.

Nella situazione limite in esame si ottiene dalle [5. 4] e [6. 5] l'importante risultato:

$$\varepsilon_{ii} \simeq \Delta_i\,, \qquad \varepsilon_{ij} \simeq \tfrac{1}{2}\,\gamma_{ij}\,, \tag{15. 3}$$

per cui nel campo delle deformazioni infinitesime le componenti di deformazione con indici uguali ε_{ii} coincidono con le corrispondenti dilatazioni lineari Δ_i, mentre le componenti di deformazione con indici distinti ε_{ij} coincidono con le corrispondenti dilatazioni angolari γ_{ij}, a meno del fattore $\frac{1}{2}$.

La dilatazione superficiale Δ_A di un elemento giacente nel piano $(x_i x_j)$ viene espresso dalla relazione limite, ottenuta dalla [7. 2] per dilatazioni infinitesime, cioè per $\Delta_i = \varepsilon_{ii}$, $\Delta_j = \varepsilon_{jj}$, $\cos\gamma_{ij} = 1$:

$$\Delta_{ij} = \Delta_i + \Delta_j = \varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}. \tag{15. 4}$$

Analogamente la dilatazione cubica $\Delta = D - 1$, risulta dal limite della [14. 6]:

$$\Delta = \Delta_{\mathrm{I}} + \Delta_{\mathrm{II}} + \Delta_{\mathrm{III}} = \varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}}\,, \tag{15. 5}$$

e coincide così con l'invariante lineare E_1 del tensore di deformazione.

16. Decomposizione dei gradienti di spostamento.

Consideriamo la identità formale:

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \qquad [16.1]$$

secondo la quale il tensore dei gradienti di spostamento viene decomposto in un *tensore simmetrico* ed in un *tensore emisimmetrico*. Sempre limitatamente al caso di spostamenti infinitesimi, il primo coincide per la [15. 2] con il *tensore di deformazione* $[\varepsilon_{ij}]$ di componenti:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad [16.2]$$

simmetrico nello scambio degli indici ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), mentre il secondo rappresenta il *tensore di rotazione* $[\omega_{ij}]$, di componenti:

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \qquad [16.3]$$

emisimmetrico nello scambio degli indici ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$).

Il significato geometrico del tensore $[\omega_{ij}]$ risulta dal concetto di *rotazione nell'intorno di un punto,* intesa come media delle rotazioni subite per effetto della de-

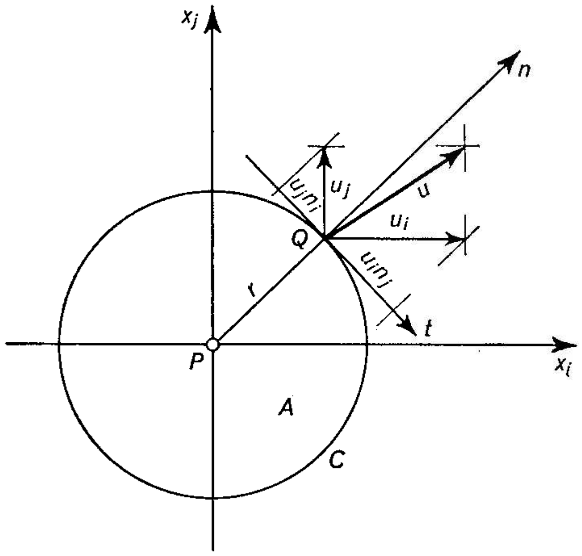

Fig. 8.

formazione dalle direzioni della stella di centro P e definita dalle sue tre componenti $\omega_{ij}(P)$ rispetto agli assi coordinati.

A tale scopo consideriamo in un piano passante per P e parallelo ad un piano coordinato $(x_i\, x_j)$ un cerchio di area A, circonferenza C, raggio r, ed indichiamo con u_i, u_j le componenti di spostamento in un generico punto Q di C (fig. 8).

Utilizzando le note relazioni tra i coseni direttori della tangente ν e della normale n, cioè $\nu_i = n_j\ \nu_j = -n_i$, la proiezione u_t dello spostamento $u(Q)$ secondo la tangente può essere scritta nelle due diverse forme:

$$u_t \equiv u_i \nu_i + u_j \nu_j = u_i n_j - u_j n_i. \qquad [16.4]$$

Indichiamo con $\omega_{ij}(Q)$ le componenti della rotazione media di tutti i punti Q della circonferenza C, cioè:

$$\omega_{ij}(Q) = \frac{1}{2\pi r}\,\frac{1}{r}\int_C (u_i n_j - u_j n_i)\,dC\,, \qquad [16.\ 5]$$

da cui trasformando l'integrale curvilineo al secondo membro in un integrale doppio esteso al cerchio di area $A = \pi r^2$ mediante la formula di Gauss, avremo:

$$\omega_{ij}(Q) = \frac{1}{2A}\int_A (u_{i,j} - u_{j,i})\,dA\,. \qquad [16.\ 6]$$

Applicando il teorema del valore medio e passando al limite per $r \to 0$:

$$\omega_{ij}(P) = \lim_{r\to 0}\omega_{ij}(Q) = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,j} - u_{j,i})\,, \qquad [16.\ 7]$$

dalla quale si deduce che il tensore emisimmetrico di componenti ω_{ij} esprime la rotazione dell'elemento generico in sè, la quale tende a sovrapporre il semiasse positivo x_j sul semiasse positivo x_i.

17. Equazioni esplicite di congruenza.

Nel caso di deformazioni infinitesime le condizioni perchè le funzioni ε_{ij} caratterizzino una deformazione non implicante singolarità per le funzioni di spostamento $u_k(x_i)$ nel senso specifico del § 4, acquistano un significato di notevole rilievo in quanto equivalgono alle condizioni di integrabilità del sistema differenziale lineare:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}\,, \qquad [17.\ 1]$$

ed assumono un aspetto particolarmente semplice ed espressivo.

Operata allora la decomposizione [16. 1] rispettivamente per due indici h e k:

$$u_{i,h} = \varepsilon_{ih} + \omega_{ih}, \quad u_{i,k} = \varepsilon_{ik} + \omega_{ik}\,, \qquad [17.\ 2]$$

le condizioni di integrabilità del sistema differenziale nei gradienti di spostamento vengono espresse attraverso le note relazioni imposte dal teorema di Schwartz:

$$u_{i,hk} = u_{i,kh}\,, \qquad [17.\ 3]$$

o anche, ricordando le espressioni [17. 2]:

$$\varepsilon_{ih,k} + \omega_{ih,k} = \varepsilon_{ik,h} + \omega_{ik,h}. \qquad [17.\ 4]$$

D'altra parte tenendo presenti le definizioni [16. 3] e le condizioni [17. 3] otteniamo le:

$$\omega_{ik,h} = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,k} - u_{k,i})_{,h} = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,kh} - u_{k,ih}) = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,hk} - u_{k,hi}), \qquad [17.\ 5]$$

che, per somma e sottrazione della derivata seconda $u_{h,ik}$ possono anche essere scritte nella forma:

$$\omega_{ik,h} = \tfrac{1}{2}(u_{i,h} + u_{h,i})_{,k} - \tfrac{1}{2}(u_{k,h} + u_{h,k})_{,i} = \varepsilon_{ih,k} - \varepsilon_{hk,i}\,. \qquad [17.\,6]$$

Si può dunque eliminare l'ultimo termine al secondo membro della [17. 4] per cui:

$$\omega_{ih,k} = \varepsilon_{ik,h} - \varepsilon_{hk,i}\,, \qquad [17.\,7]$$

e, operando rispetto ad un altro indice j in luogo di k, ottenere in modo analogo:

$$\omega_{ih,j} = \varepsilon_{ij,h} - \varepsilon_{hj,i}\,. \qquad [17.\,8]$$

Le condizioni di integrabilità del nuovo sistema differenziale costituito dalle [17. 7] e [17. 8] si traducono ancora attraverso le relazioni di Schwartz nelle:

$$\omega_{ih,kj} = \omega_{ih,jk}\,, \qquad [17.\,9]$$

e quindi in definitiva, tenendo presenti le [17. 7] e [17. 8], nelle:

$$\varepsilon_{ij,hk} + \varepsilon_{hk,ij} = \varepsilon_{ik,hj} + \varepsilon_{hj,ik}\,. \qquad [17.\,10]$$

Le equazioni [17. 10], formalmente in numero di $3^4 = 81$ $(i, j, h, k = 1, 2, 3)$, ma in realtà riducibili a sei sole effettivamente distinte, rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una deformazione infinitesima *congruente*. A dette equazioni, ottenute per la prima volta da Barré de Saint-Venant [1] e dimostrate in tutto rigore successivamente da Beltrami [2], daremo il nome di *equazioni esplicite di congruenza*.

Siamo ora in grado di determinare le componenti di spostamento $u_i(x_h)$ in tutti i punti P del dominio chiuso $V + A$ dalla conoscenza delle componenti ε_{ij} di una deformazione congruente.

Infatti la validità delle [17. 9] ci assicura che:

$$d\omega_{ih} = \omega_{ih,j}\, dx_j\,, \qquad [17.\,11]$$

è il differenziale totale di una funzione ω_{ih} le cui derivate parziali sono espresse proprio dalle [17. 8], e quindi:

$$\omega_{ih} = \omega_{ih}^{o} + \int_O^P (\varepsilon_{ij,h} - \varepsilon_{hj,i})\, dx_j\,, \qquad [17.\,12]$$

dove l'integrazione è estesa dal punto arbitrario O al punto generico P nel quale viene determinata la rotazione, mentre ω_{ih}^{o} indicano tre cotanti opportune.

[1] A. Barré de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données par Navier*, Paris (1864).
[2] E. Beltrami, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, **108**, 502 (1889).

Analogamente le condizioni [17. 3] permettono di affermare che:

$$du_i = u_{i,h}\, dx_h, \qquad [17.\ 13]$$

è il differenziale totale di una funzione le cui derivate parziali sono espresse dalla [17, 2], e quindi:

$$u_i = u_i^o + \int_O^P (\varepsilon_{ih} + \omega_{ih}) dx_h, \qquad [17.\ 14]$$

essendo al solito u_i^o tre costanti di integrazione e dove le ω_{ih} sono determinate dalle [17. 12].

Se tutte le componenti di deformazione ε_{ij} sono nulle, allora le [17. 12] si riducono alle:

$$\omega_{ih} = \omega_{ih}^o, \qquad [17.\ 15]$$

la cui sostituzione nelle [17. 14] trasforma queste ultime relazioni, sempre per $\varepsilon_{ij} = 0$, nelle:

$$u_i = u_i^o + \omega_{ih}^o (x_h - x_h^o), \qquad [17.\ 16]$$

che forniscono gli spostamenti infinitesimi di un moto rigido del continuo, essendo u_i^o le componenti della traslazione e ω_{ih}^o le componenti della rotazione.

In quanto precede è stato implicitamente supposto che il dominio V fosse semplicemente connesso. In caso di connessione multipla può venire a mancare la monodromia della funzione u_i. Introducendo opportuni tagli è possibile ridurre una regione a connessione multipla in una a connessione semplice: in questo caso le u_i saranno funzioni monodrome delle coordinate se valutate mediante un integrale curvilineo calcolato lungo una linea che non intersechi i tagli suddetti. Nel caso di intersezione la monodromia delle u_i rimane assicurata dalla ulteriore condizione che i limiti delle funzioni u_i siano gli stessi quando ci si avvicina al taglio da entrambi i lati.