

R0006

*con ringraziamenti a*

*Giuseppe Albenga*

GIUSEPPE ALBENGA

IL PROBLEMA  
DELLA FLESSIONE DELLA TRAVE  
ELASTICA  
ED IL SUO EVOLVERSI

I.

TORINO

TIPOGRAFIA VINCENZO BONA

1956

## Il problema della flessione della trave elastica ed il suo evolversi.

Nota del Socio nazionale residente GIUSEPPE ALBENGA  
presentata nell'adunanza del 20 Giugno 1956

---

**Riassunto.** — *Si riportano il testo e la traduzione, con brevissimi commenti, dei capitoli dei Μηχανικά Προβλήματα riguardanti la flessione e le reazioni di appoggio.*

LE ORIGINI. GLI AUTORI PREGALILEIANI.

### I.

#### I ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Nel 1920 E. H. Love così riassumeva lo stadio raggiunto cento anni avanti dalla teoria dell'elasticità, quando cioè si può ritenere concluso il primo periodo dello sviluppo di questa scienza, e affermava che *At the end of the year 1820 the fruit of all the ingenuity expended in elastic problems might be summed up as an inadequate theory of flexure, an erroneous theory of torsion, an unproved theory of the vibration of bars and plates and the definition of Young modulus* (1). A palliare alquanto l'asprezza di un così duro e severo giudizio Egli aggiungeva però subito *But such an estimate would give a very wrong impression of the value of the older research* ed elencava alcuni notevoli risultati ottenuti dagli antichi ricercatori.

---

(1) L'affermazione si trova a pag. 6 del classico suo trattato: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, University Press, 3<sup>a</sup> ed., 1920.

Il cenno storico introduttivo del Love prende le mosse dal problema della mensola di Galileo (2) e da questo problema partono anche i riassunti storici premessi a parecchi trattati sopra la scienza delle costruzioni (3) anche recenti. Lo stesso Timoshenko (4), che dedicò or sono pochi anni un volume alla storia della resistenza dei materiali, si mantiene molto vago per quel che ha riguardo ai tempi anteriori alla trattazione galileiana, e fra i cultori greci della Meccanica ne ricorda uno solo, Archimede (287-212 a. C.), per gli studi sull'equilibrio della leva e sul centro di gravità; sono nozioni indispensabili per lo sviluppo della teoria della resistenza dei materiali, ma solo preparazione a questa scienza, nella quale Galileo ebbe più di un precursore. Di questi, i tecnici moderni trascurarono tuttavia l'opera, o perchè non ne conobbero che piccola parte, giunta a noi disordinata, talora anzi nascosta, fino all'ottocento, o perchè non si volle dare il nome di scienza ad accenni slegati e ad osservazioni frammentarie su argomenti non trattati con il metodo o con la visione larga e comprensiva che Galileo ne ebbe. Alla scelta di una data abbastanza tarda per fissare l'origine della teoria non fu estraneo l'essersi quasi tutti gli accennati riassunti ispirati all'accuratissimo e profondo *Historique* inserito da Adhémar Barré de Saint-Venant, nella 3ª edizione delle *Leçons* di Louis Marie Navier che si inizia appunto con il problema della mensola discusso da Galileo (5). Da un esame della trat-

---

(2) Galileo GALILEI. Si veda il volume VIII dell'edizione nazionale delle opere di Galileo, nel quale sono ristampati i discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Leida, 1638.

(3) Un elenco delle principali introduzioni storiche a corsi di resistenza dei materiali si può trovare in WESTERGAARD, *Theory of Elasticity and Plasticity*, Cambridge (Mass.) 1952. Sarebbe facile prolungare la sua lista, ma se ne trarrebbe sempre la stessa conclusione sul periodo considerato dai vari autori.

(4) Stephen P. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*, London, 1953.

(5) L. NAVIER, *Resumé des leçons données à l'école des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions*

tazione galileiana di questo problema comincia anche la serie dei diligenti riassunti di memorie sulla teoria dell'elasticità e della resistenza dei materiali preparati da Isaac Todhunter e da Karl Pearson (6).

Più lontano risale Hans Straub nella sua recente *Geschichte der Bauingenieurkunst* (1949) (7): egli tratta con larghezza la storia della scienza delle costruzioni, pone in chiara luce il contributo vinciano, cita persino i *berühmten mechanischen Probleme* raccolti dagli scolari di Aristotele (384-322 a. C.) tra i quali si trova il primo cenno di resistenza dei materiali giunto a nostra notizia, ma non si sofferma su di essi neanche con una breve menzione. Eppure dei *MHXANIKΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ* (qualche volta indicati soltanto con il titolo di *MHXANIKΑ*), siano essi di Aristotele o, come oggi invece si crede più probabile, appartengano alla sua scuola, si parla a lungo nei trattati di storia della matematica e delle sue applicazioni (8), anzi a questi problemi si fa risalire l'origine della meccanica applicata. I pareri sul valore scientifico di questo « Opusculum » sui *Μηχανικά Προβλήματα* (9) sono discordi. Girolamo Cardano

---

*et des machines*, 3<sup>a</sup> ed., 1863. Appendice di A. BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Historique abrégé des recherches sur la resistance et l'élasticité des corps solides*.

(6) ISAAC TODHUNTER a. KARL PEARSON, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time*, Cambridge, 1893.

(7) H. STRAUB, *Die Geschichte der Bauingenieurkunst*, Basel, 1949. Del volume esiste una traduzione inglese.

(8) Si veggia fra l'altro l'*Histoire de la Mécanique* di René DUGAS, Parigi, 1950.

(9) Le ARISTOTELIS *Quaestiones mechanicae* sono pubblicate, tradotte in latino, nel volume di Tomaso Nicolao LEONICO, *Opuscula nuper aedita*, Venezia, Bernardo Vitale, 1525. La traduzione di Leonico o Leoniceno è molto pregiata: la riportarono parecchie edizioni latine di Aristotele e tra esse quella che segue la edizione greca fatta nel 1831 dall'Accademia delle Scienze prussiana e curata da Immanuel Bekker, edizione alla quale è oggi uso riferirsi. È contenuta anche in raccolte di operette matematiche, quale il *Compendium mathematicum aliaque tractatus eodem pertinente* Michaelis PSELLI, Lugduni Batavorum (Leida), 1647.

\*

nel libro *de Proportionibus* non si dimostra persuaso della attribuzione al grande filosofo greco e, nella proposizione CIX, afferma: *ut dubitem, ne non suus sit ille liber, qui eius pene nihil sapiat praeter obscuritatem* e aggiunge con parole ancor più aspre nella proposizione CXIV: *Auctor libri Mechanicarum aut Aristotilem illum credendum non est, aut illum stupidum dicere necesse est* <sup>(10)</sup>.

Moritz Rühlmann <sup>(11)</sup> accenna ancora a scrittori che dell'opera diedero giudizio molto sfavorevole, tra gli altri, al noto storico della matematica Jean Etienne Montucla (1725-99) <sup>(12)</sup> ed al filosofo e naturalista inglese William Whewell (1795-1866) <sup>(13)</sup>. Gli Autori a noi più vicini furono assai più equanimi e benigni nei loro apprezzamenti, basti citare il reputato ed imparziale Moritz Cantor che asserì <sup>(14)</sup> l'opera esser tale *welches keines classischen antiken Schriftstellers unwürdig sei.* <sup>(15)</sup>

La trattazione più ampia ed erudita di quella parte delle *Quaestiones* che ha attinenza con la flessione è contenuta negli studi su Leonardo da Vinci di Pierre Duhem <sup>(16)</sup>. Non si pos-

<sup>(10)</sup> Cito dagli *ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ* nell'edizione di Jo. Petrus VAN CAPPELLE, Amsterdam, 1812, con ottimo commento, p. 126. Il Cardano vi è detto *morosissimi ingenii virum et hinc stomachosius etiam scribere solitum.*

<sup>(11)</sup> Si veda la prefazione di Moritz Rühlmann alla seconda edizione di ARISTOTELES *Mechanische Probleme* (*Quaestiones Mechanicae*) di F. T. POSELGER, Hannover, 1881, la cui prima edizione era comparsa nelle « *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften* », 1829, p. 56.

<sup>(12)</sup> J. E. MONTUCLA, *Histoire des Mathematiques*. Il Rühlmann ne cita la seconda edizione, vol. I, p. 187.

<sup>(13)</sup> Lo stesso Rühlmann si riferisce alla traduzione tedesca del Littrow, parte I, p. 66.

<sup>(14)</sup> Se ne veda la citazione nella precitata prefazione del Rühlmann.

<sup>(15)</sup> M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Erster Band, Leipzig, 1880.

<sup>(16)</sup> P. DUHEM, *La Scientia de Ponderibus et Léonard de Vinci* e specialmente il n. V: *Les premiers essais sur la résistance des Matériaux*, pp. 289 e 301 nella ristampa dell'opera: *Études sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série*, Paris, 1955.

sono aggiungere nuove fonti a quelle da Lui raccolte nè è possibile allontanarsi dalla interpretazione da Lui data di un testo che d'altronde non presenta nè difficoltà di traduzione nè incertezze sostanziali di lezione. Potrebbe quindi apparire superfluo il ritorno su un argomento esaurito, almeno in quello che ha di essenziale nei riguardi della meccanica razionale; credo tuttavia non inutile esaminarlo una volta ancora con l'occhio dell'ingegnere e dare, nelle note seguenti, breve notizia di qualche più o meno diretto riflesso che le osservazioni aristoteliche ebbero sulla tecnica italiana.

Riporterò anzitutto il testo dei capitoli 14, 16 e 29 (17) che si riferiscono alla flessione ed alle reazioni dei vincoli, trascurando altri capitoli che col nostro problema hanno un legame molto indiretto.

Capitolo 14. *Διὰ τί τὸ αὐτὸ μέγεθος ξύλον ῥᾶον κατεάσσειται περὶ (si corregga παρὰ) τὸ γόνυ, ἐὰν ἴσον ἀποστήσας τις (agg. τῶν) ἄκρων ἐχόμενος καταγνῆ, ἢ παρὰ τὸ γόνυ ἐγγὺς ὄντος· καὶ ἐὰν πρὸς τὴν γῆν ἐρείσας, καὶ τῷ ποδὶ προσβάς, πόρρωθεν τῆ χειρὶ καταγνῆ, ἢ ἐγγύθεν; ἢ διότι ἐνθα μὲν τὸ γόνυ κέντρον, ἐνθα δὲ ὁ πούς; ὅσω δ' ἂν πορρωτέρου ἢ τοῦ κέντρον, ῥᾶον κινεῖται ἅπαν. κινήθηναὶ δὲ ἀνάγκη κατὰ (corr. τὸ) καταγνόμενον.*

Capitolo 16. *Διὰ τί ὅσω ἂν ἢ μακρότερα τὰ ξύλα, τοσοῦτω ἀσθενέστερα γίνεται, καὶ κάμπτιται αἰρόμενα μᾶλλον κἄν ἢ τὸ μὲν βραχὺ ὅσοι δίπηχυ, λεπτόν, τὸ δὲ ἑκατὸν πήχων, παχύ; ἢ διότι μοχλὸς γίνεται καὶ βάρος καὶ ὑπομόχλιον ἐν τῷ αἰρεσθαι τοῦ ξύλου τὸ μῆκος; τὸ μὲν γὰρ πρῶτον μέρος αὐτοῦ, ὃ ἢ χεῖρ αἰρει, οἷον ὑπομόχλιον γίνεται τὸ δὲ ἐπὶ τῷ ἄκρῳ βάρος. ὅτε ὅσω ἂν ἢ μακρότερον τὸ ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου, τοσοῦτω ἀνάγκη κάμπτεσθαι μᾶλλον. ὅσω γὰρ ἂν πλέον ἀπέχη τοῦ ὑπομοχλίου, τοσοῦτω ἀνάγκη κάμπ-*

(17) Seguo la numerazione della citata edizione 1831 dell'Accademia prussiana. Da questa edizione ricavo pure il testo, aggiungendo tra parentesi le pochissime aggiunte o varianti dell'edizione van Cappelle, di esse qualcuna risale alla traduzione del Leonico che, come si osservò, venne pubblicata dal Bekker accanto all'originale greco.

τεσθαι μείζον, ἀνάγκη οὖν αἰρεσθαι τὰ ἄκρα τοῦ μοχλοῦ. ἐὰν οὖν ἢ καμπτόμενος ὁ μοχλὸς, ἀνάγκη αὐτὸν κάμπτεσθαι μᾶλλον αἰρόμενον· ὅπερ συμβαίνει ἐπὶ τῶν ξύλων τῶν μακρῶν· ἐν δὲ τοῖς βραχέσις ἐγγὺς τὸ ἔσχατον τοῦ ὑπομοχλίου γίνεται τοῦ ἠρεμοῦντος.

I due capitoli sopra trascritti sono quelli più direttamente relativi alla flessione e che, tradotti con la massima fedeltà <sup>(18)</sup>, suonano nella nostra lingua:

*Capitolo 14* = Perchè uno stesso legno di egual grandezza (il Piccolomini interpreta *eiusdem longitudinis ac roboris lignum* e l'interpretazione mi pare esatta) si rompe più facilmente sul ginocchio se, egualmente (intendi simmetricamente) disgiunte le mani, alcuno lo prenda agli estremi che se invece non lo prenda più vicino al ginocchio? e se posatolo in terra è sovrappostovi il piede lo prenda con la mano distante dal piede piuttosto che vicino a questo? o forse perchè in un caso il ginocchio nell'altro caso il piede sono il centro? <sup>(19)</sup>. Quanto più qualcosa è lontano dal centro più facilmente vien mossa e per rompere qualche cosa è necessità questa sia mossa.

*Capitolo 16* = Perchè quanto più lunghi sono i legni tanto più deboli e più si piegano quando vengono sollevati, un legno corto ad esempio di due cubiti, sottile, (s'incurva) meno di un

<sup>(18)</sup> Le traduzioni a partire da quella del Leonico fino alle moderne si attengono strette al testo e quindi non presentano differenze degne di rilievo; alquanto liberamente traduce Monsignor Alessandro Piccolomini nel volume *Alexandri Piccolominei in Mechanicas Quaestioneis Aristotelis Paraphrasis paulo quidem plenior...*, Venezia, Traiano Curzio, 1565 (parafraasi, cioè, e non semplice traduzione, molto apprezzata ai suoi tempi e con interpretazioni intelligenti che meritano di esser considerate). Si veda inoltre Pierre Duhem nell'opera già citata.

<sup>(19)</sup> Questa è la versione degli antichi traduttori, che, per una sfumatura, differisce da quella meno dubitativa del Duhem, o. c., p. 289, che sposta alquanto il punto interrogativo: *N'est ce pas parce que le genou dans le premier cas et le pied dans le second jouent le rôle de centre et qu'une chose quelconque est d'autant plus facile à mouvoir qu'elle est plus éloignée du centre?*

grosso legno di 100 cubiti? O perchè la lunghezza del legno <sup>(20)</sup> che vien sollevato diviene insieme leva e carico e fulcro? La prima parte che la mano afferra diviene il fulcro e la parte all'(altra) estremità (è) il peso, così che quanto maggiore è la distanza dal fulcro tanto più (il legno) dovrà incurvarsi <sup>(21)</sup>. Infatti quanto più una cosa dista dal fulcro tanto più è necessario che si incurvi; e perciò le estremità della leva debbono sollevarsi. Se quindi la leva si è incurvata è necessario che, sollevandola, si incurvi di più: questo succede nei legni lunghi. Nei legni corti le estremità sono troppo vicine al fulcro che sta fermo.

Alle reazioni degli appoggi si riferisce invece il capitolo 29 che qui riportiamo:

*Διὰ τί, όταν φέρωσιν ἐπὶ ξύλον, ἢ τινας τοιούτου, δύο ἄνθρωποι ἴσον βάρος οὐχ ὁμοίως θλίβονται, ἐὰν μὴ ἐπὶ τῷ μέσῳ ἢ τὸ βάρος, ἀλλὰ μᾶλλον ὥσῳ ἂν ἐγγύτερον ἢ τῶν φερόντων; ἢ διότι μοχλὸς μὲν γίνεται, οὕτως ἐχόντων, τὸ ξύλον· τὸ δὲ βάρος, ὑπομόχλιον· ὁ δὲ ἐγγύτερος τοῦ βάρους, τῶν φερόντων τὸ βάρος, τὸ κινούμενον ἄτερος δὲ τῶν φερόντων τὸ βάρος· ὁ κινῶν ὥσῳ πλέον ἀπέχη τοῦ βάρους, τοσούτῳ ῥᾶον κινεῖ, καὶ θλίβει μᾶλλον τὸν ἕτερον εἰς τὸ κάτω, ὥσπερ ἀντερείδοντος τοῦ βάρους τοῦ ἐπικειμένου καὶ, γινόμενου ὑπομοχλίου. ἐν μέσῳ δὲ ὑποκειμένου τοῦ βάρους, οὐδὲν μᾶλλον ἄτερος θατέρῳ γίνεται βάρος, οὐδὲ κινεῖ, ἀλλ' ὁμοίως ἐκάτερος ἐκατέρῳ γίνεται βάρος.*

Possiamo tradurre questo capitolo così:

«Perchè se due uomini portanti sopra un legno o sopra altra cosa uno stesso peso non sono premuti allo stesso modo se il peso non è nel mezzo, ma lo è (più premuto) di più quello più vicino (al carico)? Forse perchè il legno che così portano diventa una leva e il carico diviene il fulcro e quello

<sup>(20)</sup> Il POSELGER, l. c., p. 83, interpreta: *das Holz seiner Länge nach*.

<sup>(21)</sup> A questo punto cessa la versione del DUHEM (l. c., p. 290) il quale evita così qualche ripetizione e qualche frase che non chiarisce il concetto già esposto.

dei portatori che è più vicino al carico si comporta come la cosa da muovere e l'altro come una potenza motrice? Quanto più (questi) è lontano dal carico più facilmente si muove e preme l'altro come quello che contrasta al peso sovrastante, che è diventato fulcro. Ma se il peso è applicato nel mezzo, il peso non diviene maggiore per l'uno che per l'altro, nè si muove, ma il peso è identico per l'uno e per l'altro ».

Riprodotta il testo delle questioni meccaniche ne farò un breve commento, guardandomi soprattutto dal non dare alle osservazioni dell'Autore greco un significato che, se oggi ci appare ovvio, esorbita invece dalle nozioni possedute all'epoca sua.

I problemi posti e sommariamente risolti nelle Questioni meccaniche sono distribuiti senz'ordine, ma tutti si riducono alla teoria della leva, non sempre ben applicata <sup>(22)</sup>.

Il capitolo 14 riguarda la resistenza di un legno poggiato una volta sul ginocchio e preso fra le mani, un'altra volta trattenuto a terra posandovi il piede. In questo secondo caso vien senza dubbio impostato il problema della mensola, caricata all'estremo. Nel primo caso pare che le forze siano applicate con le mani e che il ginocchio reagisca: si spiega così la funzione di fulcro attribuita al ginocchio: il legno sotto l'aspetto statico dovrebbe considerarsi l'insieme di due mensole coassiali incastrate l'una in un estremo dell'altra <sup>(23)</sup>. Ma se le parole del capitolo permettessero di considerare il ginocchio come spingente mentre le mani trattengono il legno, oppure se potessimo ritenere che già si conosceva la possibilità di scambiare fra loro azioni e reazioni senza variare in nulla il risultato una cosa che a noi pare ovvia, ma poteva non esserlo altrettanto per gli antichi, troveremmo in questo capitolo la soluzione

<sup>(22)</sup> Si confronti, riguardo al problema della leva nella concezione aristotelica, che è germe del principio dei lavori virtuali: G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, p. 15, Torino, 1953.

<sup>(23)</sup> Di un sistema labile quindi, e precisamente di una trave appoggiata semplicemente in un punto intermedio che sta in equilibrio solo per ben determinate posizioni dei carichi.

esatta del quesito che oggi esponiamo sotto questa forma: dato un carico concentrato ed una trave semplice trovare la posizione più sfavorevole del carico, che l'autore della *Προβλήματα* esattamente pone nella mezzeria. Si accenna pure alla necessità della deformazione avanti la rottura con le parole « per rompere qualche cosa è necessario questa sia mossa »; il pensiero dell'Autore si intravede se pure sarebbe desiderabile una formulazione più netta. Più esplicito è invece il richiamo alla proprietà della leva.

Nel capitolo 15 si tratta della mensola incastrata ad un estremo (nella mano) e soggetta al peso proprio. La esposizione non credo lasci alcun dubbio sull'idea che l'Autore si è fatta del comportamento del tronco considerato e che funziona come una leva avente il fulcro nella mano che lo solleva e il peso agente all'altro estremo (24). Si parla di deformazione e di rottura. Il considerare la leva rigida e il peso applicato ad un estremo sono inesattezze; certo il problema affrontato richiede ben altro che la conoscenza dei pochi principi della teoria della leva; l'impossibilità di risolvere il problema con le nozioni fisiche di allora era stata già avvertita dal Duhem. Il concetto di momento, indispensabile nelle ricerche sulla flessione, non è neppure adombrato: è un concetto che si chiarirà molto più tardi, ma ad esso ci avvia il riferimento alla leva ed alla bilancia.

Anche il problema della reazione di appoggio di una trave semplice trattato nel capitolo 29 è, nelle questioni, ridotto a quello della leva e con ragione: ma le proprietà di questa macchina semplice sono applicate in modo erroneo. Il fulcro della leva non va situato nel punto dove il carico agisce, ma sulla spalla di quello dei portatori, del quale non si cerca lo sforzo.

---

(24) Da tutti i commentatori il passo è inteso in questo modo: fa eccezione J. P. VAN CAPPELLE: questi nell'opera citata a p. 237 commentando quello che secondo la sua numerazione è il XVII, spiega invece che il peso agisce *versus extremum*, togliendo in parte l'errore del testo, ma con una interpretazione arbitraria e non letterale.

Dai capitoli 14, 16 e 29 non si può trarre alcuna indicazione atta a portare a valori numerici: vi si parla soltanto di maggiore, di minore o di uguale e questo non meraviglia chi ponga mente alle tendenze del pensiero greco ai tempi di Aristotele e della sua scuola e ricordi quanto deprecato fosse l'indirizzo tecnico « che corrompe e distrugge la bellezza della geometria distraendola dallo studio delle cose incorporee ed astratte per discendere alle cose sensibili e materiali » (25).

Ma il seme è gettato: nasceranno il gusto e la considerazione dei problemi tecnici. Dal piccolo seme si svilupperà una fioritura di studi e di ricerche ed anche le questioni riguardanti la flessione, corretti man mano i primitivi errori e qualche posteriore imperfezione, daranno origine ad un voluminoso corpo di eleganti dottrine.

In una serie di note successive vedremo chiarirsi il problema, per complicarsi poi, e nuovamente semplificarsi, ma non è privo di interesse il constatare che ancora nel 1730 Carlo Francesco Dotti si riferiva ad Aristotele (a lui noto per il commento di Monsignor Alessandro Piccolomini) per giustificare la posizione scelta per disporre « catene a braga » in strutture murarie (26); vecchie osservazioni qualitative gli bastarono per guidarlo nella soluzione di un problema pratico di costruzioni.

---

(25) Si veda ad esempio F. ENRIQUEZ e G. DE SANTILLANA, *Storia del pensiero scientifico*, Milano-Roma, 1932.

(26) Carlo Francesco DOTTI, *Esame sopra le forze delle catene a braga*, Bologna, 1730.